RÉDACTION N° 154BIS

TITRE : LIVRE V. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES
CHAPITRES I ET II (ÉTAT 4)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 186

NOMBRE DE FEUILLES : 175

Hyers Nachbin La Salle Dixmier Mackey Banach

Topologie "forte" associée

Mackey V+W non fermé? Voir ds Banach ce qu'il faut pour voir la continuité des opérateurs à noyaux

154 bis

LIVRE V

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

~~et les EVT~~

CHAPITRE I (Etat 4)

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES SUR UN CORPS VALUÉ.

NBR 056

~~Et les topologies sur~~

Sommaire.

§ 1 : Espaces vectoriels topologiques. 1. Définition d'un espace vectoriel topologique. 2. Voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique. 3. Complétion d'un espace vectoriel topologique. 4. Sous-espaces vectoriels et espaces quotients d'un espace vectoriel topologique. 5. Produits d'espaces vectoriels topologiques. 6. Somme directe topologique de sous-espaces. 7. Ensembles bornés.

§ 2 : Variétés linéaires dans un espace vectoriel topologique. 1. Adhérence d'une variété linéaire. 2. Droites et hyperplans fermés. 3. Sous-espaces vectoriels de dimension finie. 4. Espaces vectoriels topologiques localement précompacts.

§ 3 : Espaces d'applications linéaires continues. 1. Espaces d'applications dans un groupe abélien. 2. Parties équicontinues de $\mathcal{H}(E,G)$. 3. Espaces d'applications continues dans un espace vectoriel topologique. 4. Applications linéaires continues d'un espace quotient. 5. Applications linéaires continues d'un produit. 6. Fonctions bilinéaires séparément continues.

§ 4 : Dual d'un espace vectoriel topologique. 1. Définition du dual d'un espace vectoriel topologique. 2. Ensembles polaires et sous-espaces orthogonaux. 3. Ensembles équicontinus dans le dual d'un espace vectoriel topologique. 4. Dual d'un espace quotient. Dual d'une somme directe topologique. 5. Sous-espaces vectoriels d'un dual. 6. Transposée d'une application linéaire continue.

§ 5 : Espaces vectoriels topologiques métrisables. 1. Propriétés des espaces vectoriels topologiques métrisables. 2. Fonctions linéaires définies dans un espace vectoriel métrisable. 3. Espaces de fonctions linéaires continues définies dans un espace vectoriel métrisable. 4. Continuité des applications bilinéaires. 5. Espaces vectoriels métrisables de type dénombrable.

Appendice : Dualité faible. 1. Espaces vectoriels en dualité. 2. Transposée d'une application linéaire faiblement continue. 3. Application aux espaces à dual séparant.

LIVRE V

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE I (Etat 4)

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES SUR UN CORPS VALUÉ

§ 1. Espaces vectoriels topologiques.

1. *Définition d'un espace vectoriel topologique*.

DEFINITION 1.- *On appelle espace vectoriel* (*à gauche*) *topologique sur un corps topologique* K (Top.gén.,chap.III, § 5,n°5), *un ensemble* E *muni d'une structure d'espace vectoriel à gauche par rapport à* K , *et d'une topologie compatible avec la structure de groupe additif de* E (*Top.gén*.,chap.III, § 1,n°1), *et satisfaisant en outre à l'axiome suivant* :

(L) *L'application* $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ *de* $K \times E$ *dans* E *est continue*.

Une structure d'espace vectoriel à gauche par rapport à K et une topologie étant données sur un ensemble E , on dira qu'elles sont *compatibles* si la topologie et la structure de groupe additif de E sont compatibles, et si en outre l'axiome (L) est vérifié. Il revient au même de dire que les deux applications $(x,y) \rightarrow x+y$ et $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $E \times E$ et de $K \times E$ respectivement dans E sont continues, car cela entraîne la continuité de l'application $x \rightarrow -x = (-1)x$, donc le fait que la topologie de E est compatible avec sa structure de groupe additif.

Exemples.- 1) Soit E un espace vectoriel quelconque sur un corps topologique K . La topologie *la moins fine* (*Top.gén*., chap.I, § 2) sur E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ; il en est de même de la topologie *discrète* sur E lorsque K est un corps topologique *discret*.

2) Soit K un corps topologique quelconque, I un ensemble quelconque. Sur l'espace vectoriel produit K_s^I (*Alg*.,chap.II, § 1,n°4) la topologie produit est compatible avec la structure d'espace vectoriel,

car elle est compatible avec la structure de groupe (additif) produit (Top.gén., chap.III, §2, n°9), et pour tout $x=(\xi_\iota)_{\iota\in I}$ dans K_s^I et et tout $\lambda \in K$, on a $\lambda x = (\lambda \xi_\iota)_{\iota\in I}$, ce qui montre aussitôt (Top.gén., chap.I, § 8, cor.2 du th.1) que l'application $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ est continue.

Bizarre

3) Soit A un anneau topologique (Top.gén., chap.III, § 5, n°1) K un sous-corps de A tel que la topologie induite par celle de A sur K soit compatible avec la structure de corps de K ; alors la topologie de A est compatible avec sa structure d'espace vectoriel à gauche sur K

4) Etant donné un espace topologique séparé G, sur l'ensemble $\mathcal{C}(F, \mathbb{R})=E$ des fonctions numériques continues dans G, la topologie de la convergence compacte (Top.gén., chap.X, § 1, n°3) est compatible

a-t-elle été précisée ?

avec la structure d'espace vectoriel de E par rapport à $\mathbb{R}$. En effet, soit u_0 un point de E, A une partie compacte de G, ε un nombre >0 arbitraire. La fonction numérique u_0 est bornée dans A ; soit $a=\sup_{t\in A} |u_0(t)|$; si u est un point quelconque de E, on peut écrire, pour tout $t \in A$

$$|\lambda u(t)-\lambda_0 u_0(t)| \leqslant |\lambda| . |u(t)-u_0(t)| + a\,|\lambda-\lambda_0|$$

Par suite, si $|\lambda-\lambda_0| \leqslant \varepsilon$ et si $|u(t)-u_0(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t\in A$ on aura $|\lambda u(t)-\lambda_0 u_0(t)| \leqslant (a+|\lambda_0|+\varepsilon)\varepsilon$, ce qui montre que l'axiome (L) est vérifié.

5. Espaces normés sur un corps valué. Rappelons (Top.gén., chap.IX, §3, n°2) qu'une valeur absolue sur un corps K est une application $\xi \rightarrow |\xi|$ de K dans $\mathbb{R}_+$, telle que $|\xi|=0$ soit équivalent à $\xi=0$ et qu'on ait $|\xi\eta| = |\xi| . |\eta|$ et $|\xi+\eta| \leqslant |\xi|+|\eta|$; une valeur absolue définit sur K une distance $|\xi-\eta|$, et par suite une topologie séparée, compatible avec la structure de corps de K. Si $|\xi|=1$ pour tout $\xi\neq0$, la valeur absolue est dite impropre, et la topologie qu'elle définit sur K est

la topologie discrète ; si au contraire il existe $\alpha \neq 0$ dans K tel que $|\alpha| \neq 1$, il existe $\beta \neq 0$ dans K tel que $|\beta| < 1$ (il suffit de prendre $\beta = \alpha$ ou $\beta = \alpha^{-1}$), et la suite (β^n) converge vers 0, donc la topologie de K n'est pas discrète.

Cela étant, rappelons (Top.gén.,chap.IX, § 3,n°3) que si E est un espace vectoriel sur un corps valué non discret K , une norme sur E est une application $x \to \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$, telle que la relation $\|x\| = 0$ soit équivalente à $x = 0$, et qu'on ait $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$ pour tout scalaire $\lambda \in K$, et $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Une norme définit sur E une distance $\|x-y\|$, et par suite une topologie, qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E (loc.cit.); ~~lorsqu'on parle d'un espace normé sur K , on le considère toujours comme muni de la structure d'espace vectoriel topologique définie par sa norme.~~

On sait (Top.gén.,chap.IX, § 3) que deux normes distinctes sur E peuvent définir la même structure d'espace vectoriel topologique sur E ; il faut et il suffit pour cela que les deux normes soient équivalentes (loc.cit., prop.7).

Exemples d'espaces normés.- Soit I un ensemble quelconque ; on sait (Top.gén., chap.X, § 1,n°6) que sur l'ensemble $\mathcal{B}_K(I)$ des applications bornées $x = (\xi_\iota)$ de I dans K , on définit une norme $\|x\| = \sup_{\iota \in I} |\xi_\iota|$, et que $\mathcal{B}_K(I)$, muni de cette norme, est un espace normé complet sur K si K est complet. Lorsque I est un espace topologique, l'ensemble $\mathcal{C}_K(I)$ des applications bornées et continues de I da s K est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}_K(I)$ (Top.gén., chap.X, § 2,n°1). Un autre sous-espace de $\mathcal{B}_K(I)$ est l'ensemble $L^1_K(I)$ des familles $x = (\xi_\iota)$ absolument sommables (Top.gén.,chap.IX, § 3,n°6) ; on peut définir sur ce sous-espace une autre norme, $\|x\|_1 = \sum_{\iota \in I} |\xi_\iota|$, qui en général n'est pas équivalente à la norme $\|x\|$;

 6

Référence à l'intégration quand K=R

quand nous considérerons l'espace $L^1_K(I)$ comme un espace normé, c'est toujours de cette seconde norme qu'il sera question, sauf mention expresse du contraire. L'espace normé $L^1_K(I)$ est <u>complet</u> si K est <u>complet</u> ; en effet, soit (x_n) une suite de Cauchy dans cet espace ; si $x_n=(\xi_{n\iota})$, on a, pour tout $\iota \in I$, $|\xi_{m\iota} - \xi_{n\iota}| \leqslant \|x_m - x_n\|_1$, donc la suite $(\xi_{n\iota})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans K vers une limite ξ_ι. En outre, pour toute partie finie J de I, on a $\sum_{\iota\in J} |\xi_{m\iota} - \xi_{n\iota}| \leqslant \|x_m - x_n\|_1$; on en tire d'abord qu'il existe une constante $a>0$, indépendante de J, m et n et telle que $\sum_{\iota\in J} |\xi_{m\iota} - \xi_{n\iota}| \leqslant a$; en faisant tendre m vers $+\infty$, on en tire $\sum_{\iota\in J} |\xi_\iota - \xi_{n\iota}| \leqslant a$, d'où $\sum_{\iota\in J} |\xi_\iota| \leqslant a + \|x_n\|_1$, ce qui prouve que $z=(\xi_\iota)$ appartient à $L^1_K(I)$; en outre, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $\sum_{\iota\in J} |\xi_\iota - \xi_{n\iota}| \leqslant \varepsilon$ pour <u>toute</u> partie finie J de I, et par suite, en passant à la limite, $\|z - x_n\|_1 \leqslant \varepsilon$ ce qui achève la démonstration.

Espaces en dualité D_I et D_{II} comme conditions de séparation

De la même manière que dans la déf. 1, on définit un espace vectoriel <u>à droite</u> topologique sur un corps topologique K ; ~~si on remarque~~ mais que tout espace vectoriel à droite sur K peut être considéré comme espace vectoriel à gauche sur le corps opposé K^0 de K (<u>Alg</u>, chap. II, § 1, n° 1) et que la topologie de K est compatible avec la structure de corps de K^0, on voit qu'on peut se borner pour exposer les propriétés des espaces vectoriels topologiques, à ne considérer que des espaces vectoriels à gauche, ou que des espaces vectoriels à droite. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons toujours qu'il s'agit d'espaces vectoriels à gauche.

Si K' est un sous-corps de K, et E un espace vectoriel topologique sur K, il est clair que la topologie de E est encore compatible avec la structure d'espace vectoriel de E par rapport à K', obtenue par restriction à K' du corps des scalaires.

La topologie d'un espace vectoriel topologique E, étant compatible avec sa structure de groupe additif, définit sur E une *structure uniforme* (*Top.gén.*, chap. III, § 3); lorsque nous parlerons de la structure uniforme d'un espace vectoriel topologique E, c'est toujours de cette structure qu'il sera question, sauf mention expresse du contraire.

PROPOSITION 1.- *Pour tout* $x_0 \in E$, *l'application* $\lambda \to \lambda x_0$ *de* K *dans* E *est uniformément continue*.

En effet, il résulte de l'axiome (L) que $\lambda \to \lambda x_0$ est une représentation continue du groupe additif K dans le groupe additif E.

PROPOSITION 2.- *Pour tout* $\lambda_0 \in K$, *l'homothétie* $x \to \lambda_0 x$ *est uniformément continue dans* E.

En effet, il résulte de (L) que $x \to \lambda_0 x$ est une représentation continue du groupe additif E dans lui-même.

On notera par contre qu'en général, l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ *n'est pas uniformément continue* dans $K \times E$, comme le montre l'exemple où $K = E = \mathbf{R}$.

COROLLAIRE 1.- *Pour tout* $\alpha \in K$ *et tout point* $b \in E$, *la similitude* $x \to \alpha x + b$ *de* E *dans lui-même est continue. En outre, si* $\alpha \neq 0$, *cette application est un homéomorphisme de* E *sur lui-même*.

La seconde partie du corollaire résulte de ce que $x \to \alpha^{-1}x - \alpha^{-1}b$ est l'application réciproque de $x \to \alpha x + b$ lorsque $\alpha \neq 0$.

COROLLAIRE 2.- *Si* A *est un ensemble ouvert* (resp. *fermé*) *dans* E, λA *est ouvert* (resp. *fermé*) *dans* E *pour tout* $\lambda \neq 0$ *dans* K.

Conformément aux définitions générales, si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques sur un corps topologique K, une application biunivoque f de E sur F est un *isomorphisme* de l'espace vectoriel topologique E sur l'espace vectoriel topologique F si f est *linéaire* et *bicontinue*. Il résulte en particulier du cor. 1 de la prop. 2 que si $\gamma \neq 0$

Applications linéaires continues : prop. 5 de l'App

appartient au centre de K , l'homothétie $x \to \gamma x$ est un automorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique de E .

Remarque.- Lorsque les topologies de E et F sont définies par des normes, un isomorphisme f de la structure d'espace vectoriel topologique de E sur celle de F n'est pas nécessairement un isomorphisme de la structure d'espace normé de E sur celle de F ; en d'autres termes, on n'a pas nécessairement $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

2. Voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique.

Dans tout le reste de ce chapitre (l'Appendice excepté), on ne considèrera plus que des espaces vectoriels topologiques sur un corps valué (n°1, exemple 5) (cf. exerc.9).

à mettre au n° 1

Considérons sur un espace vectoriel E par rapport à un corps valué K , une topologie compatible avec sa structure de groupe additif. En vertu de l'identité

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

l'axiome (L) est équivalent au système des trois axiomes suivants :

(L'_I) Quel que soit $x_0 \in E$, $\lambda \to \lambda x_0$ est continue au point $\lambda = 0$.

(L'_{II}) Quel que soit $\lambda_0 \in K$, $x \to \lambda_0 x$ est continue au point $x = 0$.

(L'_{III}) L'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ est continue au point $(0,0)$.

Nous allons obtenir des conditions équivalentes pour le filtre des voisinages de 0 dans E :

PROPOSITION 3.- Dans un espace vectoriel topologique E sur un corps valué non discret K , il existe un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages de 0 , satisfaisant aux conditions suivantes :

(L''_I) Pour tout $V \in \mathfrak{S}$, la relation $|\lambda| \leq 1$ entraîne $\lambda V \subset V$.

(L''_{II}) Quels que soient $V \in \mathfrak{S}$ et $x_0 \in E$, il existe un nombre $a > 0$ tel que la relation $|\lambda| \leq a$ entraîne $\lambda x_0 \in V$.

On énoncera une prop relative au cas d'un corps qcq

(L''_{III}) Quels que soient $V \in \mathfrak{G}$ et $\lambda \neq 0$ dans K, on a $\lambda V \in \mathfrak{G}$ (invariance de $\mathfrak{G}$ par homothétie).

(L''_{IV}) Pour tout $V \in \mathfrak{G}$, il existe $W \in \mathfrak{G}$ tel que $W+W \subset V$.

Inversement, soit E un espace vectoriel sur K, et soit $\mathfrak{G}$ une base de filtre sur E satisfaisant aux conditions précédentes. Il existe alors une topologie (et une seule) sur E, compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, et pour laquelle $\mathfrak{G}$ est un système fondamental de voisinages de 0.

1° Soit E un espace vectoriel topologique sur K, et soit $\mathfrak{V}$ le filtre des voisinages de 0 dans E. Comme toute homothétie de rapport $\neq 0$ est un homéomorphisme de E sur lui-même (condition (L'_{II})) $\mathfrak{V}$ est invariant par toute homothétie de rapport $\neq 0$. La condition (L'_{I}) montre que $\mathfrak{V}$ satisfait à (L''_{II}) ; enfin, en exprimant la condition (L'_{III}), on voit que, pour tout voisinage $V \in \mathfrak{V}$, il existe un nombre $\alpha > 0$ et un voisinage $W \in \mathfrak{V}$ tels que la relation $|\lambda| \leqslant \alpha$ entraîne $\lambda W \subset V$. Posons alors $U = \bigcup_{|\lambda| \leqslant \alpha} \lambda W$; comme K n'est pas discret, il existe $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \leqslant \alpha$ et $\lambda \neq 0$; par suite U est un voisinage de 0 dans E, et pour tout λ tel que $|\lambda| \leqslant 1$, on a évidemment $\lambda U \subset U$. Soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des voisinages V de 0 dans E tels que $\lambda V \subset V$ pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$; ce qui précède montre que $\mathfrak{G}$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans E, et satisfait aux axiomes (L''_{I}), (L''_{II}) et (L''_{III}) ; il satisfait enfin à (L''_{IV}) en vertu de l'axiome (GV'_{I}) des systèmes fondamentaux de voisinages de l'élément neutre dans un groupe topologique (Top.gén., chap. III, § 1, n°2).

2° Soit maintenant E un espace vectoriel sur K et $\mathfrak{G}$ une base de filtre sur E satisfaisant à (L''_{I}), (L''_{II}), (L''_{III}) et (L''_{IV}). L'axiome (L''_{I}) montre d'abord que pour tout $V \in \mathfrak{G}$, on a $-V=V$ et $0 \in V$; ces relations et (L''_{IV}) prouvent que $\mathfrak{G}$ est un système fondamental de voisinages de 0 et de L''_{III} pour la commodité (ceci à cause de L''_{II} ; en réalité, L''_{I}, L''_{II}, L''_{IV} peuvent suffire)

pour une topolggie sur E compatible avec la structure de <u>groupe additif</u> de E (<u>Top.gén.</u>,chap.III, §1,n°2). Comme d'autre part, les axiomes (L'_{I}), (L'_{II}) et (L'_{III}) sont des conséquences immédiates de (L''_{I}) et (L''_{II}), la topologie ainsi définie satisfait à l'axiome (L), ce qui achève la démonstration.

<u>Remarques</u>.- 1) Si K est un corps <u>discret</u>, les conditions (L'_{I}) et (L'_{III}) sont vérifiées pour une topologie <u>quelconque</u> sur E . On en conclut aisément, en raisonnant comme ci-dessus, que si E est un espace vectoriel topologique sur K , le filtre des voisinages $\mathfrak{V}$ de 0 dans E satisfait à (L''_{III}) et (L''_{IV}) ; et réciproquement, si une base de filtre $\mathfrak{S}$ sur un espace vectoriel E par rapport à K satisfait aux deux seules conditions (L''_{III}) et (L''_{IV}), c'est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E .

2) La condition (L''_{II}) peut s'exprimer de façon plus imagée en disant que tout point $x_0 \in E$ <u>peut être amené par une homothétie de rapport assez petit</u> (et $\neq 0$) <u>dans un voisinage arbitrairement donné de</u> 0 (cf.n°7). On en conclut en particulier qu'un espace vectoriel topologique sur un corps valué <u>non discret</u> est un espace <u>non discret</u>. On voit aussi que si K est non discret, tout voisinage de 0, dans E <u>engendre</u> l'espace E tout entier.

3) Dans un espace <u>normé</u> sur un corps valué (non discret), l'ensemble des <u>boules ouvertes</u> (resp. <u>fermées</u>) de centre 0 est un ensemble de voisinages de 0 qui satisfait aux conditions (L''_{I}), (L''_{II}), (L''_{III}) et (L''_{IV}).

La condition pour qu'un groupe topologique soit <u>séparé</u> s'applique en particulier à un espace vectoriel topologique ; en d'autres termes (<u>Top.gén.</u>,chap.III, §1,cor. de la prop.2) :

au n°1

PROPOSITION 4.- Pour qu'un espace vectoriel topologique E sur un corps valué K soit séparé, il faut et il suffit que pour tout point $x \neq 0$ de E, il existe un voisinage de 0 ne contenant pas x.

au §2 n°2 prop 2

PROPOSITION 5.- Tout espace vectoriel topologique séparé E de dimension 1 sur un corps valué non discret K est isomorphe à K_s (corps K considéré comme espace vectoriel topologique à gauche sur lui-même).

complété avec le cas de la dualité

Soit $a \neq 0$ un point quelconque de E ; montrons que l'application linéaire $\lambda \rightarrow \lambda a$ de K_s sur $E = K.a$ est un isomorphisme. Comme cette application est biunivoque et continue (prop.1), il suffit de prouver qu'elle est bicontinue, c'est-à-dire que l'image par cette application d'un voisinage quelconque de 0 dans K est un voisinage de 0 dans E. Pour tout $\alpha > 0$, il existe par hypothèse un élément $\xi_0 \in K$ tel que $0 < |\xi_0| < \alpha$; d'autre part, E étant séparé, il existe dans E un voisinage V de 0 ne contenant pas $\xi_0 a$, et on peut supposer que la relation $|\mu| \leq 1$ entraîne $\mu V \subset V$ (prop.3) ; si $\xi a \in V$, on a ~~donc~~ $|\xi| < |\xi_0| < \alpha$; ~~sans quoi~~ sinon on aurait $(\xi_0 \xi^{-1})(\xi a) = \xi_0 a \in V$ contrairement à l'hypothèse ; l'image par l'application $\lambda \rightarrow \lambda a$ du voisinage $|\xi| < \alpha$ de 0 dans K contient donc V, d'où la proposition.

Remarque.- Il est clair que la proposition n'est plus exacte si on ne suppose pas E séparé. Elle est inexacte également lorsque K est un corps valué discret. En effet, soit K' un corps valué non discret, et K le corps discret obtenu en munissant K' de la valeur absolue impropre ; K' est un espace vectoriel topologique de dimension 1 sur K, mais n'est pas isomorphe à K_s. Enfin, nous verrons au § 2 que la prop.5 ne s'étend aux espaces de dimension finie > 1 que moyennant une hypothèse supplémentaire sur K.

NBR 056 – 13

3. Complétion d'un espace vectoriel topologique.

Soit E un espace vectoriel topologique séparé sur un corps valué K, et soit $\hat{E}$ le groupe additif complété du groupe topologique E (Top.gén., chap.III, § 3, th.2) ; soit $\hat{K}$ le corps valué complété du corps K (Top.gén., chap.IX, § 3, prop.6). L'application bilinéaire $(\lambda, x) \to \lambda x$ du produit $K \times E$ dans E se prolonge par continuité en une application bilinéaire de $\hat{K} \times \hat{E}$ dans $\hat{E}$ (Top.gén., chap.III, § 5, th.1) que nous désignerons encore par $(\lambda, x) \to \lambda x$; en vertu du principe de prolongement des identités on a encore $1.x=x$ et $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ pour $\lambda \in \hat{K}$, $\mu \in \hat{K}$ et $x \in \hat{E}$; donc la loi externe $(\lambda, x) \to \lambda x$ définit sur $\hat{E}$ une structure d'espace vectoriel par rapport à $\hat{K}$, compatible avec la topologie de $\hat{E}$. Nous dirons que l'espace vectoriel topologique $\hat{E}$ ainsi défini est le complété de l'espace vectoriel topologique E.

à voir

4. Sous-espaces vectoriels et espaces quotients d'un espace vectoriel topologique.

Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique E ; il est clair que la topologie induite sur M par celle de E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de M ; quand on considère M comme espace vectoriel topologique, il s'agit toujours, sauf mention expresse du contraire, de l'espace obtenu en munissant M de la topologie induite par celle de E. La structure uniforme déduite de la topologie de M est alors identique à la structure uniforme induite par celle de E (Top.gén., chap.III, § 3, n°2).

pas de corps valué dans ceci

Sur l'espace vectoriel quotient E/M, on sait que la topologie quotient de celle de E par M est compatible avec la structure de groupe additif (Top.gén., chap.III, § 2, n°4) ; montrons qu'elle est aussi compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire que l'application $(\lambda, \dot{x}) \to \lambda\dot{x}$ de $K \times (E/M)$ dans E/M est continue

Cas des espaces en dualité

(en désignant par $x \longrightarrow \dot{x}$ l'application canonique de E sur E/M). Or (Top.gén.,chap.I, § 9,th.1) il suffit pour cela de montrer que l'application $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda\dot{x}$ de $K \times E$ dans E/M est continue, puisqu'on peut identifier les groupes additifs $K \times (E/M)$ et $(K\times E)/(\{0\} \times M)$ (<u>Top.gén</u>.,chap.III, § 2,prop.17). Or, cette application est composée de l'application canonique de E sur E/M et de l'application $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda x$ de $K\times E$ dans E, qui sont toutes deux continues.

Quand nous considèrerons E/M comme espace vectoriel topologique, il sera toujours sous-entendu, sauf mention expresse du contraire qu'il est muni de la topologie quotient de celle de E par M. On sait que, pour que E/M soit <u>séparé</u>, il faut et il suffit que M soit <u>fermé</u> dans E (<u>Top.gén</u>.,chap.III, § 2,th.2).

Soit E un espace vectoriel topologique <u>non séparé</u>, et soit N l'adhérence de l'origine dans E (intersection des voisinages de 0). On sait que N est un sous-groupe du groupe additif E (<u>Top.gén</u>.,chap.III, § 2,n°1) ; d'autre part, N est invariant par toute homothétie de rapport $\neq 0$ (Cor.1 de la prop.2), donc N est un <u>sous-espace vectoriel</u> (fermé) de E. L'espace vectoriel quotient E/N, qui est séparé, est appelé l'espace vectoriel séparé <u>associé</u> à l'espace non séparé E.

<u>Exemple</u>.- Soit $I=[a,b]$ un intervalle compact dans $\mathbb{R}$, et soit E l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des fonctions <u>réglées</u> dans I (<u>Fonc.var. réelle</u>, chap.II, § 1,n°3), numériques ~~à valeurs dans $\mathbb{R}$~~. Pour tout $\alpha > 0$, soit V_α l'ensemble des fonctions $x \in E$ telles que $\int_a^b |x(t)|dt \leqslant \alpha$. On vérifie aussitôt que l'ensemble des V_α satisfait aux conditions (L''_{I}),(L''_{II}),(L''_{III}) et (L''_{IV}) de la prop.3, donc définit une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E. Mais cette topologie <u>n'est pas séparée</u>, car toute fonction x nulle dans le complémentaire d'une partie <u>finie</u> de I, est réglée et appartient à V_α pour

pour tout $\alpha > 0$. L'espace séparé associé à E est donc l'espace des <u>classes</u> de fonctions règlées, relatives à la relation d'équivalence $\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt = 0$.

5. <u>Produit d'espaces vectoriels topologiques</u>.

Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque d'espaces vectoriels topologiques sur un corps ~~valué~~ K , et soit E l'espace vectoriel produit des E_ι .

pas de valuation

On sait (<u>Top.gén</u>.,chap.III, § 2,n°9) que la topologie produit de celles des E_ι est compatible avec la structure de groupe additif produit de celles des E_ι . Montrons en outre que cette topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ; il suffit pour cela de voir que l'application $(\lambda,(x_\iota)) \rightarrow (\lambda x_\iota)$ de $K \times E$ dans E est continue, ou encore (<u>Top.gén</u>., chap.I, § 8,th.1) que, pour chaque indice $\varkappa$, $(\lambda,(x_\iota)) \rightarrow \lambda x_\varkappa$ est une application continue de $K \times E$ dans E ; or, cette application est composée de $(\lambda, x_\varkappa) \rightarrow \lambda x_\varkappa$ et de $(\lambda, x) \rightarrow (\lambda, \mathrm{pr}_\varkappa x)$, qui sont toutes deux continues.

Quand nous considèrerons $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ comme un espace vectoriel topologique, il sera toujours sous-entendu, sauf mention expresse du contraire, qu'il est muni de la topologie produit de celles des E_ι .

PROPOSITION 6.- <u>Dans l'espace vectoriel produit</u> $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$, <u>le sous-espace</u> F , <u>somme directe</u> (<u>Alg</u>.,chap.II, § 1,n°7) <u>des</u> E_ι <u>est partout dense</u>.

En effet, F est l'ensemble des points $x=(x_\iota)_{\iota \in I}$ tels que les x_ι soient nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux. Soit $y=(y_\iota)$ un point quelconque de E , et V un voisinage quelconque de y ; V contient un ensemble élémentaire (<u>Top.gén</u>., chap.I, § 8) $\prod_{\iota \in I} V_\iota$, où $V_\iota = E_\iota$ pour les indices ι du complémentaire d'une partie finie H de I , et où V_ι est un voisinage du point y_ι pour les indices $\iota \in H$. Si $x=(x_\iota)$ est le point de F tel que $x_\iota = y_\iota$ pour $\iota \in H$, $x_\iota = 0$ pour $\iota \notin H$, x appartient à V , d'où la proposition.

n'est-ce pas énoncé pour les sommes directes de groupes abéliens ?

6. Somme directe topologique de sous-espaces.

Lorsqu'un espace vectoriel topologique séparé E est somme directe d'une famille finie $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de sous-espaces vectoriels, l'application canonique $(x_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i$ de l'espace produit $\prod_{i=1}^{n} M_i$ sur E est continue, mais n'est pas en général un homéomorphisme. Une condition nécessaire pour que cette application soit un homéomorphisme est que les M_i soient fermés dans E, car les sous-espaces composants du produit $\prod_{i=1}^{n} M_i$ sont fermés dans ce produit (comme produits d'ensembles fermés, les M_i étant séparés par hypothèse). Mais cette condition n'est pas suffisante.

pas de valuation

DÉFINITION 2.- Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps ~~valué~~ K, et soit $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E, telle que E soit somme directe des M_i. On dit que E est somme directe topologique des M_i si l'application canonique $(x_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i$ de l'espace produit $\prod_{i=1}^{n} M_i$ sur E est un homéomorphisme (et par suite un isomorphisme pour les structures d'espace vectoriel topologique).

Il revient au même de dire que l'application réciproque de $(x_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i$ est continue, ou encore que, pour chaque indice i, l'application $x \rightarrow k_i(x)$ qui, à tout $x \in E$, fait correspondre son composant dans M_i, est continue.

Si E est somme directe topologique d'une famille finie $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de sous-espaces, et si chaque M_i est somme directe topologique d'une famille finie $(N_{ij})_{j \in H_i}$ de sous-espaces, E est somme directe topologique de la famille (N_{ij}), où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $j \in H_i$ pour chaque i.

Lorsque E est somme directe topologique de deux sous-espaces M, N, on dit encore que N est un supplémentaire topologique de M ; l'application canonique de E/M sur N (Alg., chap. II, § 1, n°4) est alors un isomorphisme (pour les structures d'espace vectoriel topologique).

2. Espace vectoriel topologique somme directe.

Lorsqu'un espace vectoriel topol. sur K est somme directe d'une famille finie $(M_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels, l'application canonique $(x_i) \to \sum_{i \in I} x_i$ de l'espace produit $\prod M_i$ sur E est continue, mais n'est pas en général un homéomorphisme. Une condition nécessaire pour que cette application soit un homéomorphisme est que les M_i soient fermés dans E, car les sous-espaces composants du produit $\prod M_i$ sont fermés dans ce produit (comme produits d'ensembles fermés, les M_i étant séparés par hypothèse). Mais cette condition n'est pas suffisante.

Définition 2. — Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps valué K ; soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E, telle que E soit somme directe des M_i. On dit que E est somme directe topologique des M_i, si l'application canonique $(x_i) \to \sum_{i \in I} x_i$ de l'espace produit $\prod M_i$ sur E est un homéomorphisme (et par suite un isomorphisme pour les structures d'espace vectoriel topologique).

Il revient au même de dire que l'application réciproque de $(x_i) \to \sum_{i} x_i$ est continue, ou encore que, pour chaque indice i, l'application $x \to p_i(x)$ qui, à tout $x \in E$, fait correspondre son composant dans M_i, est continue.

Définition. — Ds un esp. vect. topol. E sur un corps topo K, on dit qu'un ens. B est borné si, pour tout voisinage V de 0 ds E ~~et tout~~ ~~voi~~ il existe un voisinage U de 0 ds K tel que $UB \subset V$.

Si K est discret, tout ensemble $B \subset E$ est borné. D'autre part

Lemme. — Si K est non discret, une partie B de E est bornée si et seulement si, pour tout voisinage V de 0 ds E, il existe $\lambda \in K$ non nul tel que $\lambda B \subset V$.

Dém. Evidemment nécessaire. Suffisance : Soit V un voisinage de 0 ds E. Soit W un autre voisinage de 0 ds E et U_1 un voisinage de 0 ds K tels que $U_1 W \subset V$. $\exists \lambda \in K, \neq 0$, tel que $\lambda B \subset W$. Soit $U \subset K$ tel que $\nu \in U \Rightarrow \nu\lambda^{-1} \in U_1$. Alors $UB = (U\lambda^{-1})(\lambda B) \subset U_1 W \subset V$.

DÉFINITION 3.- On dit qu'une application linéaire continue u de E dans lui-même est un projecteur (continu) si on a $u^2=u$.

PROPOSITION 7.- Soit E un espace vectoriel topologique. Pour qu'un sous-espace vectoriel M de E admette dans E un supplémentaire topologique, il faut et il suffit qu'il existe un projecteur continu de E sur M .

La condition est évidemment nécessaire, car l'application qui, à tout $x \in E$, fait correspondre son composant dans M (pour une décomposition de E en somme directe topologique de M et d'un sous-espace fermé N) est continue d'après ce qui précède et est évidemment un projecteur. Inversement, soit u un projecteur continu de E sur M , et soit $N=\overset{-1}{u}(0)$ son noyau.

pas de valuation

L'hypothèse $u(x)=x$ pour tout $x \in M = u(E)$ entraîne que $M \cap N = \{0\}$; d'autre part, pour tout $x \in E$, on a $u(x-u(x))=u(x)-u^2(x)=0$ donc $x-u(x) \in N$, ce qui prouve que E est somme directe de M et N . Enfin, comme $u(x)$ est le composant de x dans M et $x-u(x)$ son composant dans N , les deux applications $x \to u(x)$ et $x \to x-u(x)$ sont continues en vertu de l'hypothèse, d'où la proposition.

Etant donné un sous-espace vectoriel fermé M d'un espace vectoriel topologique séparé E , il n'existe pas nécessairement de sous-espace vectoriel fermé supplémentaire de M ; à plus forte raison il n'exist pas nécessairement de supplémentaire topologique de M dans N (§ 2, exer.2 et Appendice, exerc. 11 b)).

7. Ensembles bornés.

à discuter

DÉFINITION 4.- Dans un espace vectoriel topologique E sur un corps valué non discret K , on dit qu'un ensemble B est borné si, pour tout voisinage V de 0 dans E , il existe $\lambda \in K$ tel que $\lambda \neq 0$ et $\lambda B \subset V$ (ou, ce qui revient au même, $B \subset \overset{-1}{\lambda} V$) .

De façon plus imagée, on peut dire qu'un ensemble est <u>borné</u> quand on peut <u>l'amener par une homothétie de rapport assez petit</u> (<u>et</u> $\neq 0$) <u>dans un voisinage arbitrairement donné de</u> 0 .

<u>Remarques</u>.- 1) Si E est un espace <u>normé</u> sur un corps valué, les boules $\|x\| < a$ $(a > 0)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 invariant par homothétie. Pour qu'un ensemble B soit borné dans E , il faut et il suffit qu'il soit contenu dans une de ces boules, ou, ce qui revient au même, que $\sup_{x \in B} \|x\| < +\infty$; autrement dit, B doit être <u>borné</u> au sens de la théorie des espaces métriques (<u>Top</u>.<u>gén</u>.,chap.IX, § 2,n°2), ce qui justifie la terminologie induite. En particulier, toute boule est un ensemble borné.

2) On notera que, dans un espace vectoriel topologique, il peut se faire qu'<u>aucun voisinage de 0 ne soit borné</u> (exerc. 5 et 6).

<u>Remarque</u>.- Soit K_0 un sous-corps <u>non discret</u> quelconque de K , et soit E_0 l'espace vectoriel topologique obtenu en restreignant à K_0 le corps des scalaires de E . Alors les ensembles bornés <u>dans</u> E sont identiques aux ensembles bornés <u>dans</u> E_0. En effet, soit V un voisinage de 0 dans E tel que la relation $|\mu| \leqslant 1$ entraîne $\mu V \subset V$. Si B est borné dans E , il existe $\lambda \in K$ tel que $B \subset \lambda V$; d'autre part, il existe $\rho \in K_0$ tel que $|\rho| \geqslant |\lambda|$; on a donc $\rho^{-1}\lambda V \subset V$, et par suite $B \subset \rho V$, ce qui prouve que B est borné dans E_0 ; la réciproque est évidente.

nécessite apparemment une valuation

Tout ensemble réduit à un point est borné, en vertu de la condition (L''_{II}) de la prop.3 . Toute partie d'un ensemble borné est bornée.

PROPOSITION 8.- <u>L'adhérence d'un ensemble borné</u> B <u>est un ensemble borné</u>.

En effet, soit V un voisinage quelconque de 0, W un voisinage ouvert symétrique de 0 tel que $W+W \subset V$; il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $B \subset \lambda W$; pour tout point $x \in \overline{B}$, il existe un point $y \in B$ contenu dans $x+\lambda W$, donc $\overline{B} \subset B+\lambda W \subset \lambda(W+W) \subset \lambda V$.

utiliser un V fermé

pas de valuation

Dixmier 154 bis

Remarque.- Soit E un espace vectoriel topologique non complet, $\hat{E}$ son complété. Si B est un ensemble borné dans E , son adhérence dans $\hat{E}$ est un ensemble borné dans $\hat{E}$, tout voisinage de 0 dans E étant la trace d'un voisinage de 0 dans $\hat{E}$; mais il ne faudrait pas croire que tout ensemble borné dans $\hat{E}$ soit nécessairement contenu dans l'adhérence d'un ensemble borné dans E (Appendice, exerc. 3d)).

non parce que la trace d'un voisinage de E est un voisinage de $\hat{E}$

PROPOSITION 9.- Soient E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et F des espaces vectoriels topologiques sur K , et f une application multilinéaire continue de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F . Soit B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ une partie bornée de E_i , et soit $B = \prod_{i=1}^{n} B_i$; l'image f(B) est bornée dans F .

En effet, soit W un voisinage quelconque de 0 dans F . Par hypothèse, il existe pour chaque indice i un voisinage V_i de 0 dans E_i tel que $f(\prod_{i=1}^{n} V_i) \subset W$, et un $\lambda_i \neq 0$ dans K tel que $\lambda_i B_i \subset V_i$. On en déduit aussitôt que, pour $x_i \in B_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ on a $f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$, autrement dit $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n f(B) \subset W$, d'où la proposition.

pas de valuation

En particulier, si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels topologiques ayant même structure d'espace vectoriel (non topologique), et des topologies $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ telles que $\mathcal{T}_1$ soit plus fine que $\mathcal{T}_2$, l'application identique de E_1 sur E_2 est continue, donc tout ensemble borné pour $\mathcal{T}_1$ est borné pour $\mathcal{T}_2$. D'une façon imagée, on peut dire que plus une topologie (compatible avec une structure d'espace vectoriel) est fine, moins il y a d'ensembles bornés.

PROPOSITION 10.- Soit $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ le produit d'une famille (E_ι) d'espaces vectoriels topologiques sur K . Pour qu'un ensemble $B \subset E$ soit borné, il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, $pr_\iota B$ soit borné dans E .

La condition est nécessaire d'après la prop. 9, pr_ι étant une application linéaire continue de E dans E_ι . Elle est suffisante ; en effet, soit V

Dém. de la prop. 10 sans valuation :

Soit V un voisinage de 0 dans E ; V contient un ensemble élémentaire $\prod_\iota V_\iota$, où $V_\iota = E_\iota$ sauf pour les indices d'une partie finie H de I, pour lesquels V_ι est un voisinage de 0 dans E_ι. Comme l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E$ dans E est continue, il existe, pour $\iota \in H$, un voisinage W_ι de 0 dans E_ι et un voisinage U de 0 dans K tel que $U W_\iota \subset V_\iota$ pour $\iota \in K$. Soit $\lambda_\iota \in K$, $\lambda_\iota \neq 0$, tel que $\lambda_\iota \, pr_\iota B \subset W_\iota$, pour $\iota \in H$. Pour $\lambda_0 \in K$, $\lambda_0 \neq 0$ bien choisi, on a $\lambda_0 \lambda_\iota^{-1} \in U$ pour $\iota \in H$. Alors $\lambda_0 \, pr_\iota B = (\lambda_0 \lambda_\iota^{-1}) \lambda_\iota \, pr_\iota B \subset U W_\iota \subset V_\iota$ pour $\iota \in H$, ~~évidem~~ d'où $\lambda_0 B \subset V$

un voisinage ~~quelconque~~ de 0 dans E ; V contient un ensemble élémentaire $\prod_\iota V_\iota$, où $V_\iota = E_\iota$ sauf pour les indices d'une partie finie H de I, pour lesquels V_ι est un voisinage ouvert de 0 dans E_ι, tel que $\mu V_\iota \subset V_\iota$ pour $|\mu| \leqslant 1$ (prop.3). Pour chaque $\iota \in H$, il existe $\lambda_\iota \neq 0$ dans K tel que $\lambda_\iota \,\mathrm{pr}_\iota B \subset V_\iota$. Soit λ_0 celui des λ_ι ($\iota \in H$) de plus petite valeur absolue ; on a donc $|\lambda_0 \lambda_\iota^{-1}| \leqslant 1$ pour tout $\iota \in H$, d'où $\lambda_0 \,\mathrm{pr}_\iota B = (\lambda_0 \lambda^{-1})(\lambda_\iota \,\mathrm{pr}_\iota B) \subset V_\iota$ pour tout $\iota \in H$; il en résulte que $\lambda_0 B \subset V$.

passe valuation

cf. ci-contre

COROLLAIRE 1.- Si B_1 et B_2 sont deux ensembles bornés dans un espace vectoriel topologique E, B_1+B_2 et $B_1 \cup B_2$ sont bornés.

il faut seulement p-e K non discret

En effet, $B_1 \times B_2$ est borné dans $E \times E$ (prop.10), et B_1+B_2 est l'image de $B_1 \times B_2$ par l'application linéaire continue $(x,y) \longrightarrow x+y$ de $E \times E$ dans E, donc (prop.9) B_1+B_2 est borné. D'autre part, il est clair que l'ensemble $B_1' = B_1 \cup \{0\}$ est borné, et on a $B_1 \cup B_2 \subset B_1' + B_2$, donc $B_1 \cup B_2$ est borné.

COROLLAIRE 2.- Tout ensemble fini est borné.

PROPOSITION 11.- Si B est un ensemble borné, la réunion des ensembles λB, où $|\lambda| \leqslant \alpha$ (α nombre réel > 0 quelconque) est un ensemble borné.

nécessite une valuation

En effet, soit V un voisinage de 0 dans E tel que la relation $|\mu| \leqslant 1$ entraîne $\mu V \subset V$; supposons que l'on ait $B \subset \gamma V$; on en tire $\lambda B \subset \lambda\gamma V$ pour tout λ tel que $|\lambda| \leqslant \alpha$. Or, il existe par hypothèse un élément $\rho \in K$ tel que $|\rho| \geqslant \alpha|\gamma|$; on a donc $\rho^{-1}\lambda\gamma V \subset V$ pour tout λ tel que $|\lambda| \leqslant \alpha$, et par suite $\lambda B \subset \rho V$ pour ces éléments λ.

plus bas

On dit qu'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E est un système fondamental d'ensembles bornés si toute partie bornée de E est contenue dans un ensemble de $\mathfrak{S}$.

Dans un espace normé, les boules de centre 0 et de rayon entier forment un système fondamental d'ensembles bornés.

Soit A précompact de E, V un voisinage de 0 dans E, W un voisinage de 0 tel que $W+W \subset V$, W' un voisinage de 0 dans E et U un voisinage de 0 dans K tels que $UW' \subset W$. Il existe un nombre fini de points $x_i \in A$ tels que les $x_i + W'$ recouvrent A. Si B est l'ensemble fini des x_i, on a donc $A \subset B + W'$. Mais B est borné, donc il existe $\lambda \in K$ tel que $\lambda \neq 0$, $\lambda B \subset W'$. Si $\lambda_1 \in K$, $\lambda_1 \neq 0$ est tel que $\lambda_1 \lambda^{-1} \in U$, $\lambda_1 \in U$, on a $\lambda_1 A \subset \lambda_1 B + \lambda_1 W' = (\lambda_1 \lambda^{-1})(\lambda B) + \lambda_1 W' \subset UW' + UW' \subset W + W \subset V$.

Soit V un voisinage de 0 dans E, W un voisinage de 0 dans E, U un voisinage de 0 dans K, tels que $UW \subset V$. Il existe $\alpha \in K$ non nul tel que $\alpha x_n \in W$ pour tout n ; il existe un entier n_0 tel que $\lambda_n \alpha^{-1} \in U$ pour $n \geq n_0$; pour $n \geq n_0$, on a donc $\lambda_n x_n = (\lambda_n \alpha^{-1})(\alpha x_n) \in UW \subset V$.

PROPOSITION 12.- <u>Dans un espace vectoriel topologique séparé</u> E , <u>tout ensemble précompact est borné</u>.

En effet, soit A un ensemble précompact dans E , V un voisinage arbitraire de 0 dans E , W un voisinage de 0 tel que $\mu W \subset W$ pour $|\mu| \leqslant 1$ (prop.3) et que $W+W \subset V$. Par hypothèse, il existe un nombre fini de points $x_i \in A$ tels que les voisinages x_i+W forment un recouvrement de A ; si B est l'ensemble fini des x_i , on a donc $A \subset B+W$. Mais B est borné (cor.2 de la prop.10), donc il existe $\lambda \in K$ tel que $\lambda \neq 0$, $|\lambda| \leqslant 1$ et $\lambda B \subset W$; par suite $\lambda A \subset \lambda B + \lambda W \subset W+W \subset V$, ce qui démontre la proposition.

pas de valuation cf. ci-contre

COROLLAIRE.- <u>Dans un espace vectoriel topologique séparé, toute suite de Cauchy est bornée</u>.

On sait en effet que l'ensemble des points d'une telle suite est précompact (<u>Top.gén.</u>, chap.II, 2è éd., § 4, n°2).

PROPOSITION 13.- <u>Soit</u> (x_n) <u>une suite bornée dans</u> E . <u>Pour toute suite</u> (λ_n) <u>d'éléments de</u> K <u>tendant vers</u> 0, <u>la suite</u> $(\lambda_n x_n)$ <u>tend vers</u> 0 <u>dans</u> E .

pas de valuation

En effet, soit V un voisinage de 0 dans E tel que la relation $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda V \subset V$. Par hypothèse il existe $\alpha \in K$ non nul et tel que $\alpha x_n \in V$ pour tout n ; d'autre part, il existe un entier n_0 tel que $|\lambda_n| \leqslant |\alpha|$ pour $n \geqslant n_0$; on a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $\lambda_n x_n = (\lambda_n \alpha^{-1})(\alpha x_n) \in V$ puisque $|\lambda_n \alpha^{-1}| \leqslant 1$.

référer à l'exerc 9

<u>Exercices</u>.- 1) Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps ~~xxx~~ valué non discret K . Pour que l'application $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ soit uniformément continue dans un voisinage de (0,0) dans l'espace $K \times E$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage V_0 de 0 dans E , tel que les ensembles λV_0 , où λ parcourt l'ensemble des éléments $\neq 0$ de K , forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E . Lorsque E est <u>séparé</u>, montrer que sa structure uniforme est alors métrisable.

NBR 056 25

2) Soit Φ un ensemble de topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel d'un espace vectoriel E sur un corps valué K . Montrer que la borne supérieure des topologies de Φ est encore compatible avec la structure d'espace vectoriel de E .

3) Soient E,F deux espaces vectoriels sur un corps valué K , f une application linéaire de E dans F . Si $\mathcal{C}$ est une topologie sur F compatible avec la structure d'espace vectoriel de F , montrer que l'image réciproque par f de la topologie $\mathcal{C}$ (Top.gén.,chap.I, § 3) est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E .

¶ 4) Dans un espace vectoriel E sur le corps $\mathbf{R}$, on dit qu'un ensemble S est étoilé et symétrique si les relations $x \in S$ et $|\lambda| \leqslant 1$ entraînent $\lambda x \in S$; on dit que S est équilibré par rappport à 0 si, pour tout $x_0 \in E$ il existe $a > 0$ tel que la relation $|\lambda| \leqslant a$ entraîne $\lambda x_0 \in S$. Dans E , l'ensemble $\mathfrak{T}$ de tous les ensembles étoilés, symétriques et équilibrés satisfait aux axiomes (L''_I),(L''_{II}) et (L''_{III}) ; montrer que si E est de dimension infinie sur $\mathbf{R}$, $\mathfrak{T}$ ne satisfait pas à l'axiome (L''_{IV}). Pour cela, soit (e_n) une famille libre infinie dans E ; pour tout n , soit A_n l'ensemble des points $\sum_{i=1}^{n} t_i e_i$ tels que $|t_i| \leqslant 1/n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; soit A la réunion des A_n , B un sous-espace vectoriel supplémentaire de l'espace engendré par les e_n , C l'ensemble A+B ; montrer qu'il n'existe pas d'ensemble M étoilé, symétrique et équilibré, tel que $M+M \subset C$.

5) Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des fonctions numériques continues dans $I=[0,1]$. Pour tout couple (δ,ε) de nombres tels que $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, soit $V_{\delta,\varepsilon}$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $|x(t)| \leqslant \delta$ sauf dans un ensemble ouvert dont la somme des longueurs des composantes connexes soit $\leqslant \varepsilon$. Montrer que les $V_{\delta,\varepsilon}$ forment une base de filtre $\mathfrak{G}$ sur E satisfaisant aux conditions de la prop.3, et définissent sur E une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ,

montrer que cette topologie est séparée. Aucun voisinage de 0 dans E n'est borné ; en outre, quels que soient δ et ε tels que $0 < \delta$, $0 < \varepsilon < 1$, il existe un entier n tel que $E = \sum_{i=1}^{n} A_i$, où $A_i = V_{\delta,\varepsilon}$ pour $1 \leq i \leq n$ (considérer une partition continue de l'unité convenable dans I).

6) Soit K un corps valué non discret, K_s^{N} le produit d'une infinité dénombrable d'espace vectoriels topologiques identiques à K_s ; montrer que, dans K_s^{N}, aucun voisinage de 0 n'est borné. pourquoi?

7) Soit K un corps topologique séparé et non discret quelconque. Généraliser aux espaces vectoriels topologiques sur K les propriétés démontrées dans le § 1 pour les espaces vectoriels topologiques sur les corps valués (Pour la complétion, on supposera que $\hat{K}$ est un corps ; pour les propriétés des ensembles bornés, on observera que, pour tout voisinage U de 0 dans K et pour tout $\alpha \in K$, il existe $\mu \in K$ non nul et tel que $\mu\alpha \in U$).

8) Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille __infinie__ quelconque d'espaces vectoriels topologiques séparés sur un corps valué K. Soit F l'espace vectoriel (non topologique) produit des E_ι. Soit $\mathcal{C}$ la topologie compatible avec la structure de groupe additif de F, pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formé des produits $\prod_{\iota \in I} V_\iota$, où, pour __chaque__ $\iota \in I$, V_ι est un voisinage __quelconque__ de 0 dans E_ι (topologie strictement plus fine que la topologie produit ; cf. __Top.gén.__, chap. III, § 2, exer. 22). si $E_\iota \neq \{0\}$

a) Montrer que la topologie $\mathcal{C}$ n'est pas compatible avec la structure d'espace vectoriel de F si K n'est pas discret.

b) Soit E le sous-espace vectoriel de F somme directe des E_ι. Montrer que E est fermé dans F, et que la topologie induite par $\mathcal{C}$ sur E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E. Muni de cette topologie, on dit que E est la __somme directe topologique__ des E_ι.

c) Déduire de b) que si chacun des E_i est complet, E est complet (cf. Top.gén.,chap.III, § 3, exerc.8).

d) Si K est non discret, montrer que, pour qu'une partie B de E soit bornée, il faut et il suffit que B soit contenu dans un sous-espace produit $\prod_{i\in H} E_i$ de E , où H est une partie finie de I et soit bornée dans ce sous-espace (dans le cas contraire, montrer qu'on peut former par récurrence, un voisinage V de 0 dans E tel qu'il n'existe pas d'élément $\lambda\neq 0$ de K tel que $B\subset \lambda V$).

X

9) Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps valué non discret K . Soit B une partie de E telle que, pour toute suite (x_n) de points de B et toute suite (λ_n) de scalaires tendant vers 0 , la suite $(\lambda_n x_n)$ tende vers 0 . Montrer que B est borné dans E .

X

§ 2. Variétés linéaires dans un espace vectoriel topologique.

1. Adhérence d'une variété linéaire.

Rappelons (Alg.,chap.IX) qu'une variété linéaire affine (ou simplement variété linéaire) dans un espace vectoriel E sur un corps K est la transformée par une translation quelconque d'un sous-espace vectoriel de E .

PROPOSITION 1.- Dans un espace vectoriel topologique E , l'adhérence d'une variété linéaire est une variété linéaire.

En effet, toute translation étant un homéomorphisme de E , il suffit de démontrer la proposition pour un sous-espace vectoriel V de E . Or, l'application continue $(x,y)\to x+y$ (resp. $(\lambda,x)\to\lambda x$) applique $V\times V$ dans V (resp. $K\times V$ dans V), donc elle applique $\overline{V}\times\overline{V}$ dans $\overline{V}$ (resp. $K\times\overline{V}$ dans $\overline{V}$) (Top.gén.,chap.I, § 4,prop.1) ce qui montre que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel.

pas de valuation

COROLLAIRE.- Pour qu'un hyperplan soit fermé dans un espace topologique E, il faut et il suffit que son complémentaire dans E ait un point intérieur.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si un hyperplan H n'est pas fermé, son adhérence est un sous-espace vectoriel (prop.1) distinct de H et contenant H , donc nécessairement l'espace E tout entier; autrement dit, H est *partout dense* dans E , ce qui démontre le corollaire.

Étant donnée une partie A d'un espace vectoriel topologique E , rappelons que le sous-espace vectoriel V *engendré* par A est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A (*Alg.*, chap.II, § 1, n°5) ; l'*adhérence* de V dans E est, d'après la prop.1, le *plus petit* sous-espace vectoriel *fermé* contenant A ; on dit que c'est le *sous-espace vectoriel fermé engendré par* A .

DÉFINITION 1. *Dans un espace vectoriel topologique* E , *on dit qu'un ensemble* A *est total si le sous-espace vectoriel fermé engendré par* A *est identique à* E (ou, en d'autres termes, si l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est *partout dense* dans E).

Il est clair que toute partie *partout dense* de E est un ensemble total.

Tout *système de générateurs* de E est un ensemble total. Par exemple, si K est *non discret*, nous avons vu (§ 1, n°2, remarque 2 suivant la prop.3) que tout *voisinage de* 0 engendre l'espace E , et est par suite un ensemble total.

De ce fait, il résulte que si K est *non discret*, une variété linéaire non identique à E ~~non partout dense dans E~~ ne peut contenir de point intérieur si elle est fermée ; c'est par suite un ensemble *rare* dans E (*Top.gén.*, chap.IX, § 5, n°1).

DÉFINITION 2. *Dans un espace vectoriel topologique* E , *on dit qu'une famille* $(a_\iota)_{\iota \in I}$ *de points de* E *est topologiquement libre si quel que soit* $\varkappa \in I$, *le sous-espace vectoriel fermé engendré par les* a_ι *d'indice* $\iota \neq \varkappa$ *ne contient pas* $a_\varkappa$.

Une famille topologiquement libre est libre (au sens algèbrique ; cf. Alg.,chap.II, § 3,prop.1) ; la réciproque est inexacte, même pour une famille libre finie dans un espace séparé, si on ne fait pas d'hypothèse restrictive sur E ou K (cf.cor.3 du th.2) .

L'ensemble des éléments d'une famille topologiquement libre est appelé partie topologiquement libre de E . Toute partie d'une partie topologiquement libre est topologiquement libre ; toute partie réduite à un point $\neq 0$ est topologiquement libre si l'espace E est séparé.

Remarques.- 1) Au contraire de ce qui se passe en Algèbre pour les parties libres d'un espace vectoriel, on notera que l'ensemble des parties topologiquement libres d'un espace vectoriel topologique E n'est pas inductif en général pour la relation d'inclusion (exerc.1), et qu'il n'existe pas nécessairement dans E de partie topologiquement libre maximale (exerc.2).

2) Soit V un sous-espace fermé de E , $(\dot{a}_\iota)_{\iota \in I}$ une famille topologiquement libre dans l'espace quotient E/V . Si a_ι est un élément quelconque de la classe $\dot{a}_\iota$, la famille $(a_\iota)_{\iota \in I}$ est topologiquement libre dans E , comme il résulte de la déf.2 et du fait que l'application canonique de E sur E/V est continue. Mais, si W est le sous-espace vectoriel fermé engendré par les a_ι , on peut avoir $V \cap W \neq \{0\}$ (exerc.1).

2. Droites et hyperplans fermés.

PROPOSITION 2.- Dans un espace vectoriel topologique séparé E sur un corps valué non discret K , tout sous-espace vectoriel D de dimension 1 est isomorphe à K_s ; de facon précise, pour tout $a \neq 0$ dans D , l'application $\lambda \to \lambda a$ de K_s sur D est un isomorphisme.

ajouter le cas de l'espace indiscrète

Cette proposition ne fait que reproduire sous une autre forme la prop.5 du § 1 .

ou plutôt en exercice !

THÉORÈME 1.- *Soit* E *un espace vectoriel topologique sur un corps valué non discret. Pour qu'un hyperplan* H *soit fermé dans* E , *il faut et il suffit qu'il soit défini par une équation de la forme* $f(x)=\alpha$, *où* f *est une forme linéaire continue non nulle*.

ajouter le cas des espaces en dualité (grâce à ce qu'on aura dit des espaces quotients)

La condition est évidemment suffisante ; montrons qu'elle est nécessaire. On peut supposer que H est un hyperplan fermé homogène ; l'espace quotient E/H est alors un espace vectoriel topologique séparé de dimension 1 sur K , et l'application canonique φ de E sur E/H est continue. Soit x_0 un point de E n'appartenant pas à H ; le composant de $x \in E$ sur la droite $D=K.x_0$ s'écrit d'une seule manière $f(x)x_0$, où f est une forme linéaire sur E ; tout revient à prouver que f est continue. Or, on a $\varphi(x)=f(x)\varphi(x_0)$; l'application $x \to f(x)$ est composée de l'application $\lambda\varphi(x_0) \longrightarrow \lambda$ et de φ ; comme la première de ces applications est continue d'après la prop.2, le théorème est démontré.

COROLLAIRE.- *Pour tout sous-espace vectoriel* D *de dimension* 1 *supplémentaire d'un hyperplan fermé* H , E *est somme directe topologique de* H *et de* D.

En effet, si x_0 est un point de D non nul, nous avons vu dans la démonstration précédente que l'application $x \to f(x)x_0$ est continue dans E , et $f(x)x_0$ est le composant de x dans la décomposition de E en somme directe de H et de D .

Remarques.- 1) Le théorème 1 ne s'étend pas au cas où le corps K est discret. Par exemple, si K désigne le corps $\mathbf{R}$ muni de la valeur absolue impropre, le plan numérique $\mathbf{R}^2$ (muni de sa topologie ordinaire) est un espace vectoriel topologique sur K , mais la forme linéaire $(x,y) \to y$ n'est pas continue dans $\mathbf{R}^2$, bien que l'hyperplan $\mathbf{R}\times\{0\}$ soit fermé. Le cor. du th.1 ne s'étend pas non plus au cas où K est discret (exer. 6).

cf. aussi exer 4

2) On peut donner des exemples d'espaces vectoriels topologiques séparés sur un corps valué *complet*, dans lesquels toute forme linéaire

On aura ainsi tous les corollaires pour le cas des espaces en dualité. En particulier, le corollaire 4 ne nécessitera plus la dém. à part de l'Appendice.

continue est identiquement <u>nulle</u> (exerc. 2) ; dans un tel espace, tout hyperplan est donc <u>partout dense</u> (cor. de la prop.1).

3. Sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Énoncer plutôt le cor. 2 (par analogie avec la prop. 2) et l'étendre aux espaces en dualité (ou en exercice)

THÉORÈME 2.- <u>Tout espace vectoriel topologique séparé</u> E <u>de dimension finie</u> n <u>sur un corps valué</u> complet <u>et non discret</u> K , <u>est isomorphe à</u> K_s^n ; <u>de façon précise, pour toute base</u> $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ <u>de</u> E <u>sur</u> K , <u>l'application linéaire</u> $(\xi_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ <u>est un isomorphisme de</u> K_s^n <u>sur</u> E .

La prop.2 exprime que le th.2 est vrai pour $n=1$; raisonnons par récurrence sur n . Soit H le sous-espace vectoriel de E engendré par $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$; l'hypothèse de récurrence montre que l'application $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n-1} \rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i$ est un isomorphisme de K_s^{n-1} sur H . Le sous-espace H , isomorphe à un produit d'espace complets, est <u>complet</u> (<u>Top.gén.</u>, chap.II, § 5, prop.4) ; par suite, il est <u>fermé</u> dans E (<u>Top.gén.</u>, chap.II, § 3, prop.6). Soit D le sous-espace Ke_n supplémentaire de H dans E ; E est <u>somme directe topologique</u> de H et de D (cor. du th.1), donc l'application $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ de $K_s^{n-1} \times K_s$ sur E est un isomorphisme.

L'hypothèse que K est <u>complet</u> est essentielle pour la validité du th.2 dès que $n > 1$. En effet, soit K un corps valué non complet, et soit $\hat{K}$ son <u>complété</u> : pour tout $a \in \hat{K}$ $a \neq 0$, K.a est partout dense dans $\hat{K}$. Si $a \notin K$, le sous-espace K+Ka , de dimension 2 sur K , dans l'espace vectoriel topologique $\hat{K}$ sur K , n'est pas isomorphe à K_s^2 , puisque tout sous-espace de dimension 1 dans K+Ka est partout dense dans cet espace.

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> K <u>est un corps valué complet et non discret, toute application linéaire d'un espace vectoriel topologique séparé</u> E <u>de dimension finie sur</u> K , <u>dans un espace vectoriel topologique quelconque</u> F <u>sur</u> K , <u>est continue</u>.

COROLLAIRE 2.- *Dans un espace vectoriel topologique séparé* E *sur un corps valué complet et non discret* K , *tout sous-espace vectoriel* F *de dimension finie* n *est isomorphe à* K_s^n *et fermé dans* E .

La première partie du corollaire résulte aussitôt du th.2 ; comme F est complet, il est fermé dans E (*Top.gén.*, chap.II, § 3, prop.6).

COROLLAIRE 3.- *Dans un espace vectoriel topologique séparé* E *sur un corps valué complet et non discret* K , *toute partie libre finie est topologiquement libre*.

COROLLAIRE 4.- *Soit* E *un espace vectoriel topologique sur un corps valué complet non discret* K . *Soient* V *un sous-espace vectoriel fermé de* E , W *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E ; *le sous-espace* $V+W$ *est fermé dans* E .

En effet, l'espace quotient E/V est séparé ; soit φ l'homomorphisme canonique de E sur E/V ; le sous-espace $V+W$ est égal à $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(W))$. Or, $\varphi(W)$ est de dimension finie dans E/V , donc (cor.2), $\varphi(W)$ est fermé dans E/V , et par suite $V+W$ est fermé dans E .

On observera que si V et W sont deux sous-espaces vectoriels fermés *quelconques* dans un espace vectoriel topologique séparé E sur K , $V+W$ n'est pas nécessairement fermé dans E (§5, exercice ?) (chap.III, § , exerc.).

PROPOSITION 3.- *Soit* E *un espace vectoriel topologique séparé sur un corps valué complet et non discret* K . *Soit* V *un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie* n *dans* E . *Pour tout sous-espace* W *supplémentaire de* V *dans* E , E *est somme directe topologique de* V *et de* W .

En effet, E/V est un espace vectoriel topologique séparé et de dimension n sur K , donc E/V et W sont tous deux isomorphes à K_s^n et l'application canonique de E/V sur W (*Alg.*, chap.II, § 1, n°4) est un *isomorphisme* de E/V sur W (cor.1 du th.2). L'application qui, à tout $x \in E$, fait correspondre son composant sur W dans la décomposition de E en somme directe de V

et de W , est donc continue, d'où la proposition.

Pour $n > 1$, la prop.3 ne s'étend pas au cas où K est un corps valué non complet (exerc.5).

4. Espaces vectoriels topologiques localement précompacts.

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique E est localement précompact s'il existe dans E un voisinage précompact de 0 ; un tel espace est donc séparé.

THÉORÈME 3.- Pour qu'un espace vectoriel topologique E sur un corps valué complet et non discret K soit localement précompact, il faut et il suffit que K soit localement compact et que E soit séparé et de dimension finie sur K . L'espace E est alors localement compact.

Les conditions sont évidemment suffisantes, puisqu'en vertu du th.2 E est alors isomorphe à K_s^n , qui est localement compact. Montrons qu'elles sont nécessaires. Nous savons déjà que E doit être séparé ; soit V un voisinage précompact de 0 dans E ; V est borné (§ 1,prop.11), donc, pour tout voisinage W de 0 dans E , il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $\lambda V \subset W$; cela signifie que, lorsque λ parcourt K^*, les ensembles λV forment un système fondamental de voisinages de 0 , et comme E est séparé, l'intersection des λV (λ parcourant K^*) est réduite au point 0 .

Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, et α un élément de K^* tel que $|\alpha| \leqslant \varepsilon$; par hypothèse, il existe un nombre fini de points a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de V tels que V soit contenu dans la réunion des voisinages $a_i + \alpha V$; si M est le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les a_i, on a a fortiori $V \subset M + \alpha V$. Supposons alors que E soit distinct de M , et soit b un point de $\complement M$. Comme M est fermé (cor.2 du th.2), l'ensemble des $|\lambda|$ pour tous les λ tels que $b + \lambda V$ rencontre M , admet une borne inférieure $d > 0$ (puisque les λV , où λ parcourt K^* , forment un système fondamental de voisinages de 0). Il existe donc un point $y \in M$ et un $\mu \in K^*$ tels que $b-y \in \mu V$ et $d \leqslant |\mu| \leqslant d(1+\varepsilon)$; posons $x_0 = \mu^{-1}(b-y)$. On a $x_0 \in V$ donc $x_0 \in M + \alpha V$, c'est-à-dire $x_0 = z + \alpha t$, avec $z \in M$ et $t \in V$; on en déduit $b = y + \mu z + \mu \alpha t$, ou encore $b - \mu\alpha t = \overset{y+}{\mu} z \in M$; comme $|\mu \alpha| \leqslant \varepsilon |\mu| \leqslant \varepsilon(1+\varepsilon)d < d$, nous aboutissons à une contradiction, ce qui démontre que E est de dimension finie sur K . Il résulte alors du th.2 que E est isomorphe à K_s^n , donc est <u>complet</u>, et par suite <u>localement compact</u> ; or, cela n'est possible que si K lui-même est <u>localement compact</u> (<u>Top.gén.</u>, chap.I, § 10, prop.11), ce qui achève la démonstration.

Le th.3 ne s'étend pas au cas où K est non complet ou discret. Par exemple, $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel topologique localement compact et de dimension infinie sur le corps $\mathbf{Q}$ (muni de sa topologie usuelle) ou sur le corps discret obtenu en munissant $\mathbf{Q}$ de la topologie discrète.

<u>Exercices</u>.- 1) Dans l'espace vectoriel topologique $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sur le corps $\mathbf{R}$, on désigne par e_n ($n \in \mathbf{N}$) les éléments de la base canonique de l'espace $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$. On pose $a_0 = e_0$, $a_n = e_0 + \frac{1}{n} e_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que, pour tout n , les a_i tels que $0 \leqslant i \leqslant n$ forment une famille (topologiquement) libre dans E , mais que la famille infinie de tous les a_n n'est pas topologiquement libre. Si V est le sous-espace fermé $\mathbf{R} a_0$, les classes $\dot{a}_n$ des a_n dans E/V forment une famille topologiquement libre ($n \geqslant 1$) ; mais le sous-espace vectoriel fermé W engendré par les a_n d'indice $n \geqslant 1$ contient V .

2) Sur l'espace E défini dans l'exerc.5 du § 1, montrer que toute forme linéaire continue f est nulle (remarquer que si une fonction continue numérique x est nulle dans $[0,1]$ sauf dans un intervalle de longueur $< \delta$, on a $\lambda x \in V_{\delta,\varepsilon}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$; en déduire qu'il existe un voisinage $V_{\delta,\varepsilon}$ de 0 dans E , dans lequel f est nulle).

Montrer que, dans E , il n'existe pas de famille topologiquement libre maximale.

¶ 3) Soit K un corps topologique non discret et satisfaisant à l'axiome suivant :

(KT_b) Quels que soient les voisinages U et V de 0, il existe $\lambda \in K$ non nul et tel que $\lambda(\complement V)^{-1} \subset U$ et $(\complement V)^{-1}\lambda \subset U$.

(Tout corps non discret satisfaisant à l'axiome (KT_a) de l'exerc.13 de <u>Top.gén.</u>, chap.III, § 5, satisfait a fortiori à (KT_b)). Montrer que les th.1 et 2 et la prop.3 sont valables pour tout espace vectoriel topologique séparé sur K (cf. § 1, exerc.9).

4) Soit K le corps topologique obtenu en transportant au corps $Q(\sqrt{2})$ la topologie de Q^2 par l'application $(x,y) \to x+y\sqrt{2}$.

a) Soit E l'ensemble $Q(\sqrt{2})$ muni de sa structure d'espace vectoriel sur K et de la topologie induite par celle de R. Montrer que E est un espace vectoriel topologique de dimension 1 sur K , qui n'est pas isomorphe à K .

b) Soit F l'espace vectoriel topologique $E \times E$ sur K ; dans F , l'hyperplan $E \times \{0\}$ est fermé, mais il n'existe aucune équation de cet hyperplan de la forme $f(x)=0$, où f est une forme linéaire continue.

5) Soit K un corps valué non discret et non complet, et soit E le sous-espace vectoriel topologique $K+Ka$ de $\hat{K}$, où $a \notin K$; soit F l'espace produit $K \times E$. Dans F , le sous-espace $M=K \times \{0\}$ est fermé et de codimension 2 . Soit W le sous-espace supplémentaire de M engendré par les points $(0,1)$ et $(1,a)$; montrer que F n'est pas somme directe topologique de M et de W .

~~$(\lambda,0)+(\nu,$~~ $\cancel{\lambda(1,0)+\mu(0,1)+\nu(1,a) = (\lambda+\nu,\ \mu+\nu a)}$

$(\lambda,0)+(\mu,\nu+\mu a) = (\lambda+\mu,\ \nu+\mu a)$

$\lambda+\mu \to 0$ dans K
$\nu+\mu a \to 0$ dans $\hat{K}$

Faire: $\nu \xrightarrow{\in K} a$ dans $\hat{K}$
$\mu=-1$ $\lambda=1$

La prop. 1 est vidée

On commence par la prop. 7

6) Soit K le corps $Q(\sqrt{2})$, muni de la topologie discrète. Dans le plan numérique $\mathbb{R}^2$, soit E la somme (directe) du sous-groupe Q^2 et de la droite D d'équation $y=\theta x$, où θ est irrationnel. On définit sur E une structure d'espace vectoriel par rapport à K, de la manière suivante : si $(x,\theta x)$ est dans D, on pose $(r+s\sqrt{2})(x,\theta x)=((r+s\sqrt{2})x, \theta(r+s\sqrt{2}))$; si (x,y) est dans Q^2, on pose $(r+s\sqrt{2})(x,y)=(rx+2sy, ry+sx)$. Si on munit E de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$, cette topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E sur K. Dans E, D est un hyperplan fermé, mais il n'existe aucun sous-espace supplémentaire topologique de D.

Dl

§ 3. Espaces d'applications linéaires continues.

1. Espaces d'applications dans un groupe abélien.

pas de valuation

Soit E un ensemble quelconque, G un groupe abélien topologique, noté additivement. L'ensemble $\mathcal{F}(E,G)$ de toutes les applications de E dans G, identique à l'ensemble produit G^E, est donc muni de la structure de groupe abélien produit de celles de ses facteurs.

PROPOSITION 1.- *Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble quelconque de parties de E. Sur l'ensemble $\mathcal{F}(E,G)$, la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$* (Top.gén., chap.X, § 1, n°2) *est compatible avec la structure de groupe de $\mathcal{F}(E,G)$.*

Rappelons qu'un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est formé des ensembles $\underline{W}(A,V)$ définis comme suit : pour toute partie $A\in\mathfrak{S}$ et tout voisinage V de 0 dans G, $\underline{W}(A,V)$ est l'ensemble des couples (u,v) tels que $u(x)-v(x)\in V$ pour tout $x\in A$. Montrons que $(u,v)\to u+v$ est uniformément continue pour cette structure : en effet, si U est un voisinage de 0 dans G tel que $U+U\subset V$, les relations $u(x-u'(x)\in U$ et $v(x)-v'(x)\in U$

pour tout $x \in A$ entraînent $(u(x)+v(x))-(u'(x)+v'(x)) \in U+U \subset V$ pour tout $x \in A$, ce qui établit notre assertion. On prouve de même que l'application $u \to -u$ est uniformément continue dans $\mathcal{F}(E,G)$, d'où la proposition.

On notera que, pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, un système fondamental de voisinages de 0 dans le groupe topologique $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,G)$ est formé des ensembles $\mathrm{T}(A,V)$ définis comme suit : pour toute partie $A \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage V de 0 dans G, $\mathrm{T}(A,V)$ est l'ensemble des $u \in \mathcal{F}(E,G)$ tels que $u(A) \subset V$.

Supposons maintenant que E lui-même soit un groupe abélien.

PROPOSITION 2.- Soient E un groupe abélien, G un groupe abélien topologique séparé, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E tel que tout élément de E appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins. Dans ces conditions, l'ensemble $\mathcal{H}(E,G)$ de toutes les représentations de E dans G est un sous-groupe fermé du groupe séparé $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,G)$.

En effet, soit u_0 un point de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,G)$ adhérent à $\mathcal{H}(E,G)$, et soient x,y deux éléments quelconques de E. En vertu de l'hypothèse, on peut supposer qu'il existe un ensemble $A \in \mathfrak{S}$ contenant à la fois x,y et x+y (Top.gén., chap.X, §1,n°2) ; pour tout voisinage symétrique V de 0 dans G, il existe une représentation u de E dans G telle que $u(x)-u_0(x) \in V$, $u(y)-u_0(y) \in V$ et $u(x+y)-u_0(x+y) \in V$, d'où, comme $u(x+y)=u(x)+u(y)$, $u_0(x+y)-u_0(x)-u_0(y) \in V+V+V$, et comme V est arbitraire et G séparé, on a $u_0(x+y)=u_0(x)+u_0(y)$, ce qui démontre la proposition.

dans la prop.

On notera que si G est un groupe complet, $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,G)$ est complet (Top.gén., chap.X, §1,th.1), donc il en est de même de $\mathcal{H}(E,G)$.

Remarque.- Supposons que E et G soient munis d'une structure de groupe à opérateurs, relative au même ensemble d'opérateurs Ω ; supposons en outre que pour tout opérateur $\lambda \in \Omega$, l'application $x \to \lambda x$

soit continue dans G ; pour tout voisinage V de 0 dans G , il existe alors un voisinage $W \subset V$ de 0 tel que $\lambda W \subset V$. Soit alors $\mathcal{H}_0(E,G)$ l'ensemble de toutes les représentations de E dans G pour les structures de groupe à opérateurs de E et de G , c'est-à-dire telles que $u(\alpha x)=\alpha u(x)$ identiquement. Cet ensemble est un sous-groupe fermé de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,G)$. En effet, pour tout $x \in E$ et tout $\alpha \in \Omega$, soit $A \in \mathfrak{S}$ un ensemble contenant à la fois x et αx ; pour tout voisinage V de 0 dans G , il existe un voisinage W de 0 contenu dans V et tel que $\alpha W \subset V$; si $u_0 \in \mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,G)$ est adhérent à $\mathcal{H}_0(E,G)$, il existe par hypothèse $u \in \mathcal{H}_0(E,G)$ telle que $u(x)-u_0(x) \in W$ et $u(\alpha x)-u_0(\alpha x) \in W$, d'où on tire $u_0(\alpha x)-\alpha u_0(x) \in \alpha W+W \subset V+V$, ce qui démontre la proposition.

2. Parties équicontinues de $\mathcal{H}(E,G)$.

Dans ce n° , E et G sont deux groupes abéliens topologiques séparés, $\mathcal{H}(E,G)$ l'ensemble des représentations (continues ou non) de E dans G .

PROPOSITION 3.- *Pour qu'une partie L de $\mathcal{H}(E,G)$ soit équicontinue, il faut et il suffit qu'elle soit équicontinue au point $x=0$; elle est alors uniformément équicontinue.*

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est vérifiée, pour tout voisinage U de 0 dans G , il existe un voisinage V de 0 dans E tel que l'on ait $u(x) \in U$ pour tout $u \in L$ et tout $x \in V$. On en déduit que la relation $x-y \in V$ entraîne $u(x)-u(y)=u(x-y) \in U$, pour tout $u \in L$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 4.- *Pour toute partie équicontinue L de $\mathcal{H}(E,G)$, l'adhérence $\bar{L}$ de L dans l'espace produit G^E est contenu dans $\mathcal{H}(E,G)$ et est équicontinue.*

La première partie résulte de la prop.2 ; on sait d'autre part que $\bar{L}$ est équicontinue (Top.gén., chap.X, § 3, prop.7).

154bis41
Dixmier

PROPOSITION 5.- Sur toute partie équicontinue L de $\mathcal{H}$(E,G), la topologie de la convergence simple dans E , la topologie de la convergence simple dans une partie partout dense de E , et la topologie de la convergence uniforme dans les parties précompactes de E , sont identiques.

L'identité des deux premières topologies est une propriété générale des ensembles équicontinus (Top.gén., chap.X, § 3,n°2,prop.3) . D'autre part, soit A une partie précompacte de E ; comme L est uniformément équicontinue (prop.3), pour tout voisinage symétrique V de 0 dans G , il existe un voisinage symétrique U de 0 dans E tel que les relations $x-y \in U$ entraînent $u(x)-u(y) \in V$ pour tout $u \in L$. Mais, A étant précompact, il existe un nombre fini de points $x_i \in A$ tels que les ensembles x_i+U forment un recouvrement de A ; si u et v appartiennent à L et sont telles que $u(x_i)-v(x_i) \in V$ pour tout indice i , on en déduit que $u(x)-v(x) \in V+V+V$ pour tout $x \in A$ ce qui achève de démontrer la propositi

COROLLAIRE.- Si G est complet, tout filtre sur L qui converge simplement dans une partie partout dense de E converge uniformément dans toute partie précompacte de E vers une représentation continue de E dans G . horreur!

En effet, un tel filtre est un filtre de Cauchy pour la topologie de la convergence simple dans E , en vertu de la prop.5, donc converge en tout point de E puisque G est complet ; le reste du corollaire est alors une conséquence des prop. 4 et 5 .

langage peu clair ; on peut confondre avec qui converge pour la top. de la convergence simple ; Dire : Soit A une partie partout dense de E ; soit F un filtre sur L tel que l'application u → u(x) ait une limite suivant F pour tout x ∈ A

On notera qu'une partie relativement compacte de $\mathcal{H}$(E,G), pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, n'est pas nécessairement équicontinue (cf. Appendice exerc. 3c). Lorsqu'on considère sur $\mathcal{H}$(E,G) la topologie de la convergence simple, le th. de Tychonoff et le fait que $\mathcal{H}$(E,G) est fermé dans l'espace produit G^E (prop.2) montrent aussitôt que :

PROPOSITION 6.- <u>Pour qu'une partie</u> M <u>de</u> $\mathcal{H}$(E,G) <u>soit relativement compacte dans</u> $\mathcal{H}$(E,G) <u>pour la topologie de la convergence simple, il faut et il suffit que, pour tout</u> $x \in E$, <u>l'ensemble</u> M(x) <u>soit relativement compact dans</u> G .

Si cette condition est vérifiée et si en outre M est <u>équicontinu</u>, alors M est aussi relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties <u>précompactes</u> de E (prop.5).

3. <u>Espaces d'applications continues dans un espace vectoriel topologique</u>.

Soit E un ensemble quelconque, F un <u>espace vectoriel topologique</u> (à gauche) sur un corps valué <u>non discret</u> K . L'ensemble $\mathcal{F}$(E,F) de toutes les applications de E dans F (identique à l'ensemble produit F^E) est ici muni d'une structure d'<u>espace vectoriel</u> à gauche sur le corps K (produit de celles de ses facteurs).

PROPOSITION 7.- <u>Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties de</u> E . <u>Pour que, sur un sous-espace vectoriel</u> H <u>de l'espace</u> $\mathcal{F}$(E,F), <u>la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de</u> $\mathfrak{S}$ <u>soit compatible</u> (§ 1,n°1) <u>avec la structure d'espace vectoriel de</u> H , <u>il faut et sil suffit que, pour tout</u> $u \in H$ <u>et tout ensemble</u> $A \in \mathfrak{S}$, u(A) <u>soit borné dans</u> F .

En effet, il résulte de la prop.1 que la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est en tout cas compatible avec la structure de <u>groupe additif</u> de H . Considérons alors le système fondamental de voisinages $\mathfrak{T}$(A,V) de l'origine dans H , et cherchons s'il peut satisfaire aux conditions de la prop.3 du § 1 . Si le voisinage V de 0 dans F est tel que la relation $|\mu| \leqslant 1$ entraîne $\mu V \subset V$, il est clair que si $u \in \mathfrak{T}(A,V)$ (c'est-à-dire $u(A) \subset V$), on aura aussi $\mu u \in \mathfrak{T}(A,V)$ pour $|\mu| \leqslant 1$. De même, on a $\mathfrak{T}(A,\lambda V) = \lambda \mathfrak{T}(A,V)$.

pas de valuation

Reste donc à vérifier la condition (L''_{II}) du § 1 : cette condition signifie ici que pour tout $u \in H$, tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage V de 0 dans F , il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $\lambda u \in \mathfrak{T}(A,V)$, c'est-à-dire $\lambda u(A) \subset V$. On en déduit aussitôt la proposition.

Si au contraire on suppose le corps K <u>discret</u>, la topologie de la convergence uniforme dans les ensemble de $\mathfrak{S}$ est toujours compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$ tout entier ; en effet, l'ensemble des parties $\mathfrak{T}(A,V)$ est invariant par toute homothétie (§ 1, n°2, remarque 1 suivant la prop.3).

La condition de la prop.~~6~~7 est vérifiée dans les cas importants suivants:

pourquoi pas les parties réduites à un point

1° On prend pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble de toutes les parties <u>finies</u> de E ; alors u(A) est fini, donc borné dans F (§ 1,cor.2 de la prop.10) pour tout $u \in \mathcal{F}(E,F)$; la topologie sur $\mathcal{F}(E,F)$ est alors la topologie de la convergence <u>simple</u>, et $\mathcal{F}(E,F)$, muni de cette topologie, n'est autre que l'espace vectoriel topologique <u>produit</u> F^E .

2° E étant un ensemble quelconque, F un espace vectoriel topologique, on prend pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ de toutes les parties de E , autrement dit on considère sur $\mathcal{F}(E,F)$ la topologie de la convergence <u>uniforme</u> ; si alors on prend pour H l'ensemble $\mathcal{B}(E,F)$ des applications <u>bornées</u> u de E dans F , c'est-à-dire telles que u(E) soit <u>borné</u> dans F, $\mathcal{B}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$ (§ 1,cor.1 de la prop.10) et il résulte de la prop.~~6~~7 que la topologie de la convergence uniforme est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{B}(E,F)$.

En particulier, si F est un espace <u>normé</u>, on obtient ainsi sur l'espace $\mathcal{B}(E,F)$ des applications bornées de E dans F , la topologie définie par la <u>norme</u> $\|u\| = \sup_{x \in E} \|u(x)\|$ (<u>Top.gén.</u>,chap.X, § 1, n°6).

On notera par contre que, sur l'ensemble de toutes les applications continues d'un espace topologique non compact E dans un espace normé F , la topologie de la convergence uniforme <u>n'est pas compatible</u>

 44

en général avec la structure d'espace vectoriel de cet ensemble, car il existe en général des applications continues non bornées de E dans F (il en est ainsi par exemple si on prend $E = \mathbb{R}$, F étant un espace normé sur $\mathbb{R}$).

3° Soit E un espace topologique séparé, F un espace vectoriel topologique séparé ; prenons pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties relativement compactes de E (autrement dit, nous considèrons sur $\mathcal{F}(E,F)$ la topologie de la convergence compacte (Top.gén., chap.X, § 1, n°3)). Alors, sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}(E,F)$ des applications continues de E dans F, la topologie de la convergence compacte est compatible avec la structure d'espace vectoriel, car pour toute application continue u de E dans F et tout ensemble $A \subset E$ relativement compact, u(A) est relativement compact dans F, donc borné (§ 1, n°7, prop.12).

4° Supposons le corps valué K commutatif (et non discret), et soient E et F deux espaces vectoriels topologiques quelconques sur K ; l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F est alors un espace vectoriel sur K. Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble quelconque de parties bornées de E, la topologie de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$, car pour toute application linéaire continue u de E dans F, et toute partie bornée B de E, u(B) est borné dans F (§ 1, n°7, prop.9).

Soit $\mathfrak{S}'$ une partie de $\mathfrak{S}$ telle que tout ensemble de $\mathfrak{S}$ soit contenu dans un ensemble de la forme $\sum_i \lambda_i A_i$, où $\lambda_i \in K$, $A_i \in \mathfrak{S}'$. Alors, on a un système fondamental de voisinages dans $\mathcal{L}(E,F)$ en se bornant aux ensembles $\mathcal{T}(A,V)$, où $A \in \mathfrak{S}'$, car les relations $u(A_i) \subset V$ entraînent $u(\sum_i \lambda_i A_i) \subset \sum_i (\lambda_i V)$.

préciser que l'ensemble des indices est fini

<u>Remarques</u>.- 1) Lorsque E et F sont deux espaces <u>normés</u> sur un corps valué commutatif K , la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ (<u>Top.gén.</u>, chap.X, § 2,n°2) ; on sait en outre (<u>loc.cit.</u>) que dans ce cas, cette topologie peut être définie par la norme $\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$, et que $\mathcal{L}(E,F)$, muni de cette norme, est <u>complet</u> lorsque F est <u>complet</u>.

Z On notera qu'en général, lorsque E et F sont deux espaces vectoriels topologiques séparés sur un corps valué (commutatif) <u>complet</u> K , le fait que F soit <u>complet</u> n'entraîne pas nécessairement que $\mathcal{L}(E,F)$ le soit quand on munit cet espace de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E, même lorsqu'on prend pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble de <u>toutes</u> les parties bornées de E (§ 4, exerc. 5) .

2) Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques (à gauche) sur un corps valué <u>non commutatif</u> K ; soit C le <u>centre</u> de K , et désignons par E_0 et F_0 les espaces E et F considérés comme espaces vectoriels topologiques <u>sur le corps</u> C . L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace vectoriel <u>sur</u> C mais non sur K ; on peut le considèrer comme sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{L}(E_0, F_0)$ des applications linéaires continues de E_0 dans F_0. Considérons dans E un ensemble de parties <u>bornées</u> $\mathfrak{S}$; si C est un corps <u>discret</u>, la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E_0,F_0)$, et a fortiori avec celle de $\mathcal{L}(E,F)$. Il en est encore de même lorsque C est non discret, car dans ce cas on sait (§ 1,n°7) que tout ensemble borné <u>dans</u> E est aussi borné <u>dans</u> E_0 et vice-versa. On notera que $\mathcal{L}(E,F)$ est alors un sous-espace vectoriel <u>fermé</u> de $\mathcal{L}(E_0,F_0)$

si tout point de E appartient à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins ; c'est ce qui résulte de la remarque qui suit la prop.2 .

pas évident, car il s'agit d'applications continues

3) Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques séparés, et supposons en outre que F soit complet. Alors, toute application linéaire continue de E dans F se prolonge par continuité d'une seule manière au complété $\hat{E}$ de E (Top.gén., chap.III, § 3,n°4). On obtient ainsi une application linéaire biunivoque canonique de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{L}(\hat{E},F)$, qui permet d'identifier leurs structures d'espaces vectoriels non topologiques sur le centre C de K . En outre, si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E , la topologie (sur $\mathcal{L}(E,F)$) de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est identifiée (au moyen de l'application canonique précédente) avec la topologie (sur $\mathcal{L}(\hat{E},F)$) de la convergence uniforme dans les adhérences dans $\hat{E}$ des ensembles de $\mathfrak{S}$ (Top.gén., chap.X, § 2,prop.5). Si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de E (resp. l'ensemble des parties précompactes de E), on évitera de confondre la topologie ainsi définie sur $\mathcal{L}(\hat{E},F)$ avec la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de $\hat{E}$ (resp. dans les ensembles relativement compacts de $\hat{E}$) ; on sait en effet (§ 1,n°7) qu'un ensemble borné (resp. compact) dans $\hat{E}$ n'est pas nécessairement contenu dans l'adhérence d'un ensemble borné (resp. précompact) dans E .

On notera qu'on peut appliquer aux parties équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$ les propositions démontrées au n°2. En outre, dans l'énoncé de la prop.5, pour une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$, on peut remplacer les mots "partie partout dense dans E" , par "ensemble total dans E" . En effet, si A est total dans E , si V est un voisinage de 0 dans F , et si x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des points de A , les relations $u(x_i) \in V$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ entraînent $u(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i) \in \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i V)$; la topologie de la convergence simple dans A est donc identique (sur H) à celle de la convergence simple dans le le sous-espace vectoriel M engendré par A , qui est partout dense dans E par hypothèse.

PROPOSITION 8.- Soit K un corps valué dont le centre C n'est pas discret. Pour qu'une partie H de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ (sur C) soit bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que, pour toute partie $A \in \mathfrak{S}$, la réunion des ensembles $u(A)$, où u parcourt H , soit bornée dans F .

En effet, dire que H est bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$ signifie que pour tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage V de 0 dans F , il existe $\lambda \in C$ non nul et tel que $\lambda H \subset \underline{T}(A,V)$, ou encore que $\lambda u(A) \subset V$ pour tout $u \in H$; cela signifie évidemment que si B est la réunion des $u(A)$ pour $u \in H$ on a $\lambda B \subset V$, donc que B est borné dans F .

COROLLAIRE.- Pour tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E , toute partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$ est bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}$.

En effet, si H est équicontinue, pour tout voisinage V de 0 dans F , il existe un voisinage U de 0 dans F tel que $u(U) \subset V$ pour tout $u \in H$. Si $A \in \mathfrak{S}$, il existe $\lambda \in C$ tel que $\lambda A \subset U$, donc $u(\lambda A) = \lambda u(A) \subset V$ pour tout $u \in H$, et par suite la réunion des $u(A)$ pour $u \in H$ est bornée dans F .

4. Applications linéaires continues d'un espace quotient.

PROPOSITION 9.- Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur un corps valué non discret K . Soit M un sous-espace vectoriel fermé de E , φ l'application canonique de E sur E/M , $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E . Si, à toute application linéaire continue u de E/M dans F , on fait correspondre l'application linéaire $u \circ \varphi$ de E dans F , on définit un isomorphisme de l'espace $\mathcal{L}(E/M,F)$, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\varphi(\mathfrak{S})$, sur le sous-espace de $\mathcal{L}(E,F)$ formé des applications linéaires continues de E dans F, nulles dans M, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ étant supposé muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$.

pas de valuation

En effet, $u \circ \varphi$ est continue et nulle dans M si u est continue dans E/M, et réciproquement toute application linéaire continue de E dans F, nulle dans M, peut s'écrire d'une seule manière $u \circ \varphi$, où u est continue dans E/M (Top.gén., chap.I, § 9, th.1) ; l'application $u \to u \circ \varphi$ est donc bien un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E/M, F)$ sur celle d'un sous-espace de $\mathcal{L}(E,F)$. Cet isomorphisme (dit canonique) est bicontinu en raison même de la définition des topologies de $\mathcal{L}(E,F)$ et de $\mathcal{L}(E/M, F)$.

Si K est discret, la proposition reste valable sans aucune hypothèse sur l'ensemble $\mathfrak{S}$.

5. Applications linéaires continues d'un produit.

Soit $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie d'espaces vectoriels topologiques sur un corps valué non discret K, et soit $E = \prod_{i=1}^{n} M_i$ leur produit ; nous identifierons canoniquement chacun des M_i au sous-espace composant correspondant dans E, de sorte que E peut être considéré comme somme directe topologique des M_i, et $pr_i(x)$, pour $x \in E$, comme le composant de x dans le sous-espace M_i. Pour toute application linéaire continue u de E dans un espace vectoriel topologique F (sur K), soit u_i la restriction de u à M_i ; on a pour tout $x \in E$, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(pr_i(x))$, et par suite l'application $u \to (u_i)$ est une application linéaire biunivoque de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ sur l'espace produit $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}(M_i, F)$; cette application et son application réciproque seront dites canoniques.

Contre exemple à la prop. 10 :

$F = M_1 = M_2 = \mathbb{R}$

$\mathfrak{S}_1 = \{1\}$ $\mathfrak{S}_2 = \{1\}$ $\mathfrak{S} = \{1, 1\}$

$\mathcal{L}(M_1, F)$ et $\mathcal{L}(M_2, F)$ sont séparés donc aussi $\mathcal{L}(M_1, F) \times \mathcal{L}(M_2, F)$

$\mathcal{L}(E, F)$ ne l'est pas

PROPOSITION 10.- *Soit* $\mathfrak{S}_i$ *un ensemble de parties bornées dans* M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, *et soit* $\mathfrak{S}$ *l'ensemble des parties de* E *de la forme* $\prod_{i=1}^{n} A_i$ *où* $A_i \in \mathfrak{S}_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$. *L'application canonique de* $\mathcal{L}(E,F)$ *sur* $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}(M_i,F)$ *est un isomorphisme quand on munit* $\mathcal{L}(E,F)$ *de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}$, *et chacun des* $\mathcal{L}(M_i,F)$ *de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}_i$.

En effet, la relation $u(x) \in V$ pour $x \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ entraîne $u_i(x_i) \in V$ pour $x_i \in A_i$; inversement, les relations $u_i(pr_i(x)) \in V_i$ entraînent $u(x) \in V_1+V_2+\ldots+V_n$.

Ai on suppose $0 \in A_i$ pour $i=1,2,\ldots,n$

6. *Fonctions bilinéaires séparément continues.*

Soient E_1, E_2, F trois espaces vectoriels topologiques séparés sur un corps *commutatif* valué non discret K . Soit $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties *bornées* de E_1 (resp. E_2), tel que tout point de E_1 (resp. E_2) appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$). Etant donnée une application bilinéaire u de $E_1 \times E_2$ dans F , nous dirons que u est *séparément continue relativement à* $\mathfrak{S}_1$ *et* $\mathfrak{S}_2$ si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

est-ce nécessaire ?

1° pour tout ensemble $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, l'ensemble des applications linéaires $y \to u(x,y)$, où x parcourt M_1 , est *équicontinu* ;

2° pour tout ensemble $M_2 \in \mathfrak{S}_2$, l'ensemble des applications linéaires $x \to u(x,y)$, où y parcourt M_2, est *équicontinu*.

Compte-tenu de la prop.3, ces conditions équivalent aux ~~xxx~~ suivantes

1° quels que soient le voisinage W de 0 dans F et l'ensemble borné $B_1 \in \mathfrak{S}_1$, il existe un voisinage V_2 de 0 dans E_2 tel que les relations $x_1 \in B_1$, $x_2 \in V_2$ entraînent $u(x_1,x_2) \in W$;

2° quels que soient le voisinage W de 0 dans F et l'ensemble borné $B_2 \in \mathfrak{S}_2$, il existe un voisinage V_1 de 0 dans E_1 tel que les relations $x_1 \in V_1$, $x_2 \in B_2$ entraînent $u(x_1,x_2) \in W$.

Si u est <u>continue</u> dans $E_1 \times E_2$, elle est séparément continue quels que soient les ensembles $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ de parties bornées ; en effet, pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe alors un voisinage V_1 de 0 dans E_1 et un voisinage V_2 de 0 dans E_2 tels que $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$ entraînent $u(x_1,x_2) \in W$. Or, si B_1 est borné dans E_1, il existe $\lambda \in K$ tel que $\lambda B_1 \subset V_1$; pour $x_1 \in B_1$ et $x_2 \in \lambda V_2$, on a alors $u(x_1,x_2) = u(\lambda x_1, \lambda^{-1} x_2) \in W$ puisque $\lambda x_1 \in V_1$; on montre de même que la seconde condition est vérifiée.

Nous verrons par la suite des exemples d'applications bilinéaires séparément continues (par rapport à l'ensemble $\mathfrak{S}_1$ de toutes les parties bornées de E_1 et à l'ensemble $\mathfrak{S}_2$ de toutes les parties bornées de E_2), mais qui <u>ne sont pas continues</u> (§4, exerc.4).

notations dépendantes ~~[illegible]~~ qu'est-ce que u_{t_0} ?

Nous désignerons par u_x et u_y les applications partielles $y \to u(x,y)$ et $x \to u(x,y)$.

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $t_0 \in E_1$ et E_2

PROPOSITION 11.- <u>Pour que l'application bilinéaire</u> u <u>soit séparément continue relativement aux ensembles de parties bornées</u> $\mathfrak{S}_1$ <u>et</u> $\mathfrak{S}_2$, <u>il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées</u> :

1° <u>lorsqu'on munit</u> $\mathcal{L}(E_2,F)$ <u>de la topologie de la convergence uniforme dans les parties de</u> $\mathfrak{S}_2$, <u>l'application linéaire</u> $x \to u_x$ <u>de</u> E_1 <u>dans</u> $\mathcal{L}(E_2,F)$ <u>est continue</u> ;

2° <u>lorsqu'on munit</u> $\mathcal{L}(E_1,F)$ <u>de la topologie de la convergence uniforme dans les parties de</u> $\mathfrak{S}_1$, <u>l'application linéaire</u> $y \to u_y$ <u>de</u> E_2 <u>dans</u> $\mathcal{L}(E_1,F)$ <u>est continue</u>.

En effet, dire que $x \to u_x$ est continue signifie que pour tout voisinage W de 0 dans F et pour tout ensemble borné $B_2 \in \mathfrak{S}_2$, il existe un

pas de valuation

~~un~~ voisinage V_1 de 0 dans E_1 tel que la relation $x \in V_1$ entraîne $u(x,y) \in W$ pour *tout* $y \in B_2$, c'est-à-dire que l'ensemble des applications u_y, où y parcourt B_2, est équicontinu. On traduit de même la seconde condition.

PROPOSITION 12.- *Soit u une application bilinéaire de* $E_1 \times E_2$ *dans* F.

1° *Si pour tout* $y \in E_2$, u_y *est continue dans* E_1 *et si l'application* $y \rightarrow u_y$ *de* E_2 *dans* $\mathcal{L}(E_1,F)$ *est continue, alors, pour tout ensemble* $B_1 \in \mathfrak{S}_1$, u *est continue dans* $B_1 \times E_2$.

2° *Si* u *est séparément continue relativement à* $\mathfrak{S}_1$ *et* $\mathfrak{S}_2$, *pour tout couple d'ensembles* $B_1 \in \mathfrak{S}_1$, $B_2 \in \mathfrak{S}_2$, *u est continue dans* $B_1 \times E_2$ *et dans* $E_1 \times B_2$, *et uniformément continue dans* $B_1 \times B_2$.

1° Si x_0 et x appartiennent à B_1, y_0 et y à E_2, on a $u(x,y)-u(x_0,y_0)=u_{y_0}(x-x_0)+u_y(x)-u_{y_0}(x)$. Par hypothèse, dès que $x-x_0$ est assez petit, $u_{y_0}(x-x_0)$ (y_0 fixe) est aussi petit qu'on veut, puisque u_{y_0} est continue ; d'autre part, comme $y \rightarrow u_y$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}_1$, dès que y est assez voisin de y_0, $u_y(x)-u_{y_0}(x)$ est aussi petit qu'on veut pour tout $x \in B_1$, d'où la première partie de la proposition.

2° Il ne reste à démontrer que la continuité uniforme de u dans $B_1 \times B_2$. Or, si x et x' sont dans B_1, y et y' dans B_2, on a $u(x,y)-u(x',y') = u_{x-x'}(y)+u_{y-y'}(x')$; les hypothèses entraînent que $u_{x-x'}(y)$ (resp. $u_{y-y'}(x')$) est arbitrairement petit dès que $x-x'$ (resp. $y-y'$) est arbitrairement petit, y (resp. x') étant arbitraire dans B_2 (resp. B_1).

Nous allons maintenant généraliser aux fonctions bilinéaires séparément continues le théorème de prolongement des fonctions bilinéaires continues (*Top.gén.*, chap. III, § 5, th. 1) :

pas de valuation

Autre dem. de la prop. 13 : Soit (x_0, y_0) un point qcq de $E_1 \times E_2$, B_1 un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ tel que $x_0 \in \overline{B_1}$, B_2 un ensemble de $\mathfrak{S}_2$ tel que $y_0 \in \overline{B_2}$. Comme u est unif. continue dans $B_1 \times B_2$ (prop. 12), elle se prolonge par continuité en une fonction v définie ds $\overline{B_1} \times \overline{B_2}$. On va voir que $v(x_0, y_0)$ ne dépend pas du choix de B_1 et B_2. Soit en effet $B'_1 \in \mathfrak{S}_1$, $B'_2 \in \mathfrak{S}_2$ tels que $x_0 \in \overline{B'_1}$, $y_0 \in \overline{B'_2}$, et soit v' le prolongement de u, défini dans $B'_1 \times B'_1$, à $\overline{B'_1} \times \overline{B'_2}$. Soit $B''_1 = B_1 \cup B'_1$, $B''_2 = B_2 \cup B'_2$; ~~qui sont bornés~~ on peut évidemment supposer $B''_1 \in \mathfrak{S}_1$, $B''_2 \in \mathfrak{S}_2$, d'où un prolongement v'' de u, défini dans $B''_1 \times B''_2$, à $\overline{B''_1} \times \overline{B''_2}$; donc $v(x_0, y_0) = v''(x_0, y_0) = v'(x_0, y_0)$. L'application v de $E_1 \times E_2$ dans F est donc bien définie. Sa bilinéarité est immédiate : si $x_0 \in E_1$, $x'_0 \in E_1$, $y_0 \in E_2$ par exemple, soient $B_1 \in \mathfrak{S}_1$, $B_2 \in \mathfrak{S}_2$ tels que $y_0 \in \overline{B_2}$, $x_0 \in \overline{B_1}$, $x'_0 \in \overline{B_1}$, $x_0 + x'_0 \in \overline{B_1}$; pour $x \in B_1$, $x' \in B_1$, $y \in B_2$, on a $u(x+x', y) = u(x, y) + u(x', y)$, d'où, par continuité et par définition de v, $v(x_0 + x'_0, y_0) = v(x_0, y_0) + v(x'_0, y_0)$. Montrons par exemple que les applications $x \to v(x, y)$ ~~sont~~ forment un ensemble équicontinu quand y parcourt l'adhérence $\overline{B_2}$ d'un $B_2 \in \mathfrak{S}_2$. Soit W un voisinage fermé de 0 dans F. Il existe un voisinage V de 0 dans G_1 tel que $u(x, y) \in W$ quand $x \in V$, $y \in B_2$; on peut supposer $V = V' \cap G_1$ où ~~W~~ V' est un voisinage ouvert de 0 dans E_1 ~~lequel est partout dense~~ ~~et on peut supposer V est un voisinage de 0 dans E_1~~ ; on va montrer que, si $x_0 \in V'$ et $y_0 \in \overline{B_2}$, on a $v(x_0, y_0) \in W$. Or x_0 est dans l'adhérence $\overline{B_1}$ d'un $B_1 \in \mathfrak{S}_1$; en remplaçant B_1 par $B_1 \cap V'$, ce qui est loisible puisque V' est ouvert, on peut supposer $B_1 \subset V'$, donc $B_1 \subset V$; il suffit donc de faire tendre x vers x_0 dans B_1, y vers y_0 dans B_2 pour obtenir notre assertion.

Enfin l'unicité de $\overline{v}$ est immédiate. Car, dans tout ensemble $\overline{B_1} \times \overline{B_2}$, $\overline{v}$ doit être uniformément continue si elle a les propriétés de la prop., donc doit s'obtenir en prolongeant u dans $B_1 \times B_2$

à mettre au début

Si on dit tout ceci de F, il faut en dire autant de E_1 et E_2

Supposons F complet

PROPOSITION 13.- ~~Soit F un espace vectoriel topologique séparé et complet.~~ Soient G_1, G_2 deux sous-espaces vectoriels partout denses de E_1, E_2 respectivement. Soit $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées de G_1 (resp. G_2) tel que tout point de E_1 (resp. E_2) soit adhérent à un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$). Soit u une application bilinéaire de $G_1 \times G_2$ dans F, séparément continue relativement à $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$; cette application se prolonge d'une seule manière en une application bilinéaire $\overline{u}$ de $E_1 \times E_2$ dans F, séparément continue relativement à l'ensemble $\mathfrak{S}'_1$ des adhérences des ensembles de $\mathfrak{S}_1$ dans E_1 et à l'ensemble $\mathfrak{S}'_2$ des adhérences des ensembles de $\mathfrak{S}_2$ dans E_2.

Il faudrait, semble-t-il, que tout $x \in E_1$ soit dans un ensemble de $\mathfrak{S}_1$

En effet, pour tout $x \in G_1$, u_x est une application linéaire continue de G_2 dans F, qui se prolonge donc par continuité en une application linéaire continue $\overline{u}_x$ de E_2 dans F. Soit y_0 un point de E_2, B_2 un ensemble appartenant à $\mathfrak{S}_2$ et tel que $y_0 \in \overline{B}_2$; $\overline{u}_x(y_0)$ est donc limite de $u_x(y)$ lorsque y tend vers y_0 en restant dans B_2. Mais cela signifie que l'application $x \to \overline{u}_x(y_0)$ est limite simple des applications $x \to u_x(y)$ de G_1 dans F lorsque y tend vers y_0 en restant dans B_2. Or, la famille des applications linéaires $x \to u_x(y) = u_y(x)$ est équicontinue lorsque $y \in B_2$; lorsque y parcourt $\overline{B}_2$, les applications $x \to \overline{u}_x(y)$ forment donc un ensemble équicontinu d'applications linéaires de G_1 dans F (prop.4). En particulier, pour tout $y_0 \in \overline{B}_2$, $x \to \overline{u}_x(y_0)$ est continue dans G_1 et peut donc être prolongée par continuité en une application linéaire continue de E_1 dans F, que nous noterons $x \to \overline{u}(x, y_0)$. Il est clair que la fonction $\overline{u}$ ainsi définie dans $E_1 \times E_2$ est bilinéaire ; d'autre part, lorsque y parcourt $\overline{B}_2$, les applications linéaires $x \to \overline{u}(x,y)$ de E_1 dans F forment un ensemble équicontinu : en effet, soit W un voisinage fermé de 0 dans F ; il existe un voisinage V de 0 dans G_1 tel que $\overline{u}_x(y) \in W$ pour tout $x \in V$ et tout $y \in \overline{B}_2$; or, l'adhérence $\overline{V}$ de V dans E_1 est un voisinage de 0 dans cet espace, et comme W est fermé, on a $\overline{u}(x,y) \in W$ pour $x \in \overline{V}$ et $y \in \overline{B}_2$.

On peut naturellement dans le raisonnement précédent permuter les rôles de E_1 et de E_2 , ce qui donne un second prolongement de u en une application bilinéaire $\overline{u}'$ de $E_1 \times E_2$ dans F , tel que pour tout ensemble $B_1 \in \mathfrak{S}_1$, les applications $y \to \overline{u}'(x,y)$ de E_2 dans F forment un ensemble équicontinu lorsque x parcourt $\overline{B}_1$. La proposition sera démontrée si on prouve que $\overline{u}'=\overline{u}$. Soit (x_0,y_0) un point quelconque de $E_1 \times E_2$, B_1 un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ tel que $x_0 \in \overline{B}_1$, B_2 un ensemble de $\mathfrak{S}_2$ tel que $y_0 \in \overline{B}_2$. Comme $u(x,y)$ est uniformément continue dans $B_1 \times B_2$ (prop.12), elle se prolonge par continuité en une fonction v~~(x,y)~~ définie dans $\overline{B_1 \times B_2}$. Or, pour $x \in B_1$, $\overline{u}_x(y_0)$ est limite de $u(x,y)$ lorsque y tend vers y_0 ; on a donc $\overline{u}_x(y_0)=v(x,y_0)$; d'autre part $\overline{u}(x_0,y_0)$ est limite de $\overline{u}_x(y_0)$ lorsque x tend vers x_0 ; on a donc $\overline{u}(x_0,y_0)=v(x_0,y_0)$, et par le même raisonnement, on prouve que $\overline{u}'(x_0,y_0)=v(x_0,y_0)$. Et l'unicité ? (Utiliser le dernier raisonnement, qui donne p.c. aussi l'existence)

<u>Exercices</u>.- 1) Soit (~~x~~) (E_n) une suite infinie d'espaces vectoriels topologiques séparés sur un corps valué K , et soit E l'espace <u>somme directe topologique</u> des E_n (§ 1,exerc.8). Montrer que si, pour tout n, u_n est une application linéaire continue de E_n dans un espace vectoriel topologique F , alors il existe une application linéaire continue u et une seule de E dans F qui coïncide avec u_n dans tout sous-espace E_n. En déduire que si on munit chacun des espaces $\mathcal{L}(E_n,F)$ de la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E_n (resp. de la topologie de la convergence simple), l'espace $\mathcal{L}(E,F)$, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E (resp. de la topologie de la convergence simple) est isomorphe à l'espace produit $\prod_n \mathcal{L}(E_n,F)$ (cf. § 4, exerc.5).

(Contre-exemple pour une famille (E_i) non dénombrable)

?

2) Soient E un espace vectoriel topologique sur K , $F = \prod_\iota F_\iota$ un produit d'espaces vectoriels topologiques sur K ; soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E . Montrer que l'espace $\mathcal{L}(E,F)$, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}$, est isomorphe à l'espace produit $\prod_\iota \mathcal{L}(E,F_\iota)$, où chaque $\mathcal{L}(E,F_\iota)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}$.

X

3) Soient E,F,G trois espaces vectoriels topologiques sur un corps valué non discret K ; soit $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) un ensemble de parties bornées de E (resp. F) tel que pour toute application linéaire continue u de E dans F , $u(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{T}$. On suppose les espaces $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E,G)$ munis de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ et $\mathcal{L}(F,G)$ de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{T}$.

a) Montrer que pour tout $u_0 \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application $v \rightarrow v\circ u_0$ de $\mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est continue, et que pour tout $v_0 \in \mathcal{L}(F,G)$ l'application $u \rightarrow v_0\circ u$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est continue.

b) Montrer que même si on prend pour $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ l'ensemble de toutes les parties bornées de E (resp. F), l'application $(u,v) \rightarrow v\circ u$ de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ n'est pas nécessairement continue (prendre $E=F=G$, E étant somme directe topologique d'une famille infinie d'espaces identiques à K).

X

§ 4. Dual d'un espace vectoriel topologique.

non Dans ce paragraphe et le suivant, le corps des scalaires K sera un corps valué (commutatif ou non) non discrzet (cf. Appendice).

1. Définition du dual d'un espace vectoriel topologique.

On sait (Alg.,chap.II, § 4) que le dual d'un espace vectoriel E (à gauche sur un corps K est l'espace vectoriel (à droite) E^* sur K constitué par toutes les formes linéaires sur E . Par abus de langage, lorsque E est

$(\lambda, \lambda') \subset U$

$V(A, \lambda_0) \in U$

Condition n. et s. pour que la topo de la conv. unif. ds les ensembles de $\mathfrak{S}$ soit compatible avec la structure de E' :

Pour tout $x' \in E'$, et tout $A \in \mathfrak{S}$, tout voisinage U de 0 dans K, $\exists\, U'$ (voisinage de 0 ds K) tel que $\langle x, x'\rangle U' \subset U$ pour tout $x \in A$.

Cette condition est remplie : toujours si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties finies ; si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées, si K est valué ou commutatif.

on le savait déjà par la théorie des espaces en dualité

~~Soit A un ens. de $\mathfrak{S}$, U un voisinage de 0 dans K, et soit $T(A,U)$ l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\langle x, x'\rangle \in U$ pour tout $x \in A$; on sait que les $T(A,U)$ forment ...~~

~~Montrer~~ directement que $(\lambda, x') \to x'\lambda$ est continue :

~~Soit $x'_0 \in E'$, $\lambda_0 \in K$. Soit $A \in \mathfrak{S}$ et U un voisinage de 0 ds K.~~

~~Soit U' et U'' deux autres voisinages de 0 dans K. Supposons $\lambda - \lambda_0 \in U'$, et $\langle x, x' - x'_0\rangle \in U''$ pour $x \in A$. Alors~~

~~$\langle x, x'\lambda - x'_0\lambda_0\rangle =$~~

$x, x'(\lambda-\lambda_0)$

$+\, x, (x'-x'_0)\lambda_0$

~~$\langle x, x'_0(\lambda-\lambda_0) + (x'-x'_0)\lambda_0 + (x'-x'_0)(\lambda-\lambda_0)\rangle \in \langle x, x'_0\rangle U' + U''\lambda_0 + U''U'$~~

~~$= \langle x, x'_0\rangle$~~ $\in \langle x, x'_0\rangle U' + U''\lambda_0 + U''U'$ pour $x \in A$

Soit U_1 tel que $U_1 + U_1 + U_1 \subset U$. Soit U_2 tel que $U_2 U_2 \subset U_1$

Soit V un voisinage de 0 ds E tel que

Puis soit U'' tel que $U''\lambda_0 \subset U_1$, $U''U' \subset U_1$

un espace vectoriel topologique sur un corps valué (non discret) K , nous appellerons dual de E le sous-espace E' de E^* constitué par les formes linéaires continues dans E ; E^* lui-même, lorsqu'il aura à intervenir, sera appelé le dual algèbrique de E , pour éviter toute confusion.

On notera que E' peut être réduit à 0 , même si E n'est pas lui-même réduit à 0 (§ 2, exerc. 2).

PROPOSITION 1.- Pour tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E , la topologie de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel (à droite) de E' sur K .

En effet, cette topologie est compatible avec la structure additive de E' (§ 3,prop.1). ~~Soit~~ Soit A ~~est~~ un ensemble de $\mathfrak{S}$, α un nombre réel >0 quelconque, et soit $\mathfrak{T}(A,\alpha)$ l'ensemble des formes linéaires $x'\in E'$ telles que $|\langle x,x'\rangle|\leqslant\alpha$ pour tout $x\in A$; on sait que les $\mathfrak{T}(A,\alpha)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E' pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$. Pour tout $x'\in E'$, il existe un nombre $\beta>0$ tel que $|\langle x,x'\rangle|\leqslant\beta$ pour tout $x\in A$, puisque A est borné ; si et x' continue $\lambda\in K$ est tel que $|\lambda|\leqslant\frac{\alpha}{\beta}$, on aura $|\langle x,x'\lambda\rangle|=|\langle x,x'\rangle|\cdot|\lambda|\leqslant\alpha$ pour tout $x\in A$, c'est-à-dire $x'\lambda\in\mathfrak{T}(A,\alpha)$, ce qui achève la démonstration.

Rappelons que la topologie de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}$ est séparée si tout point de E appartient à un ensemble de $\mathfrak{S}$.

En particulier, la topologie de la convergence simple dans E (correspondant au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties finies de E) est compatible avec la structure d'espace vectoriel sur E' et est séparée ; nous la désignerons sous le nom de topologie faible sur E' et par la notation $\sigma(E',E)$. Les notions correspondant à cette topologie sur E' seront désignées par les qualificatifs "faible" ou "faiblement" (par exemple, on dira "adhérence faible" d'un ensemble dans E' , ou "application faiblement continue"

aura ne déjà été dit

On mettra ici $\sigma(E,E')$

On pourra observer tout de suite que E et E' sont en dualité faible. Les propriétés de cette dualité auront été données antérieurement.

mettre ici la définition de V^0 (pour un K qcq) puis tous les th. et cor. du n° 5 (th. 2 et la suite). Cela donne le dual de E' faible et absorbe complètement la p. 81 de l'Appendice.

Bref : 1. Définition de V^0 pour 2 espaces en dualité (p.-ê sans D_I, $\mathfrak{B}$)
2. Th. 2 mis sous forme de la recherche du dual. et corollaires.

3. Cas de E et de son dual.

de E' dans un espace topologique). Pour tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E tel que tout point de E appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$ la topologie de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}$ est plus fine que la topologie faible sur E .

Lorsque $E=K_s$ est de dimension 1, toute forme linéaire sur E , étant de la forme $\xi \rightarrow \xi\lambda$, est continue, donc on a $E'=E^{*}=K_d$. La topologie faible sur E' est alors identique à la topologie définie par la valeur absolue sur K ; en effet, si $x'(\xi)=\xi\lambda$, la relation $|x'(1)| \leqslant \alpha$ est identique à $|\lambda| \leqslant \alpha$; et inversement, si $|\lambda| \leqslant \alpha$, on en tire $|\xi_i\lambda| \leqslant |\xi_i|\alpha$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

non

On notera que pour tout $x \in E$, la forme linéaire $x' \rightarrow \langle x,x'\rangle$ sur E' est faiblement continue (Top.gén., chap.X, § 1,n°3) ; elle est par suite continue lorsqu'on munit E' d'une topologie plus fine que la topologie faible.

La forme bilinéaire $(x,x') \rightarrow \langle x,x'\rangle$ n'est pas continue en général dans $E \times E'$, même lorsqu'on munit E' de la topologie de la convergence uniforme dans l'ensemble de toutes les parties bornées de E (cf. exerc.4, n°3 et chap.III, §).

Remarque.- Si le corps K est complet, l'application qui, à toute forme linéaire continue $x' \in E'$, fait correspondre son prolongement par continuité au complété $\hat{E}$ de E , est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de E' sur celle du dual $(\hat{E})'$. Si on identifie E' et $(\hat{E})'$ par cet isomorphisme, on notera que les topologies faibles $\sigma(E',E)$ et $\sigma(E',\hat{E})$ sont en général distinctes, la première étant moins fine que la seconde (cf. cor.2 du th.2).

WBK 056 61

2. Ensembles polaires et sous-espaces orthogonaux. corps valué

DÉFINITION 1.- Etant donnée une partie quelconque M de E (resp. une partie quelconque M' de E') on appelle ensemble polaire de M (resp. M') et on désigne par M^0 (resp. M'^0) l'ensemble des $x' \in E'$ (resp. des $x \in E$) tels que $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in M$ (resp. pour tout $x' \in M'$).

Pour toute partie M de E (resp. M' de E') la relation $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $M^0\lambda \subset M^0$ (resp. $\lambda M'^0 \subset M'^0$).

Si V est un sous-espace vectoriel de E et $x' \in V^0$, on a par hypothèse $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in V$, donc aussi $|\langle \lambda x,x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $\lambda \in K$. Comme K n'est pas discret par hypothèse, on déduit de là qu'on a nécessairement $\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout $x \in V$; la réciproque étant immédiate, on voit que V^0 n'est autre que l'ensemble des $x' \in E'$ qui sont orthogonaux (Alg., chap. II, § 4, n° 2) à V. Par abus de langage, on dira que V^0 est le sous-espace de E' orthogonal à V (c'est l'intersection de E' et du sous-espace de E^* orthogonal à V). On montre de même que si W' est un sous-espace vectoriel de E', W'^0 est le sous-espace de E orthogonal à W'.

concorde avec une déf. antérieure

En particulier, on a $E^0 = \{0\}$; le sous-espace vectoriel de E' (resp. E) orthogonal au sous-espace de E (resp. E') réduit à 0, est E' (resp. E) tout entier. On notera par contre qu'on peut avoir $E'^0 \neq \{0\}$.

C'est ce qui a lieu par exemple quand E' est réduit à 0. On dit que le dual E' d'un espace vectoriel topologique E est séparant si $E'^0 = \{0\}$: cela signifie donc que pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe $x' \in E'$ tel que $\langle x,x'\rangle \neq 0$; en d'autres termes encore, on peut dire que deux éléments distincts de E sont toujours séparés par une forme linéaire continue. Bien entendu, cela entraîne que la topologie de E est séparée, mais cette condition n'est pas suffisante (§ 2, exerc. 2). On notera que tout sous-espace d'un espace à dual séparant a un dual séparant.

Aux chap. II et III, nous étudierons une importante catégorie d'espaces vectoriels topologiques les espaces *localement convexes séparés*, pour lesquelles le dual est toujours séparant.

PROPOSITION 2.- *Si* M *et* N *sont deux parties de* E *telles que* $M \subset N$ *on a* $N^o \subset M^o$.

PROPOSITION 3.- *Pour toute famille* (M_ι) *de parties de* E , *l'ensemble polaire de la réunion des* M_ι *est l'intersection des* M_ι^o .

PROPOSITION 4.- *Pour toute partie* M *de* E *et tout* $\lambda \in K$ *non nul, on a* $(\lambda M)^o = M^o \lambda^{-1}$.

Les démonstrations de ces propositions sont des conséquences immédiates de la déf. 1 . Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les propositions correspondantes pour les ensembles polaires de parties du dual E' .

Il est clair que pour toutepartie M de E , on a $M \subset (M^o)^o$; pour les espaces localement convexes séparés, nous caractériserons au chap. III l'ensemble *bipolaire* $(M^o)^o$ de M , qu'on note aussi M^{oo}. Il est facile de voir qu'en général on a $M^{ooo} = M^o$; en effet on a $M^{ooo} = (M^o)^{oo} \supset M^o$; d'autre part comme $M \subset M^{oo}$, on a $M^o \supset (M^{oo})^o = M^{ooo}$, donc $M^{ooo} = M^o$.

PROPOSITION 5.- *Pour toute partie* M *de* E , M^o *est faiblement fermé dans* E' *et on a* $(\overline{M})^o = M^o$. *Pour toute partie* M' *de* E' , M'^o *est fermé dans* E , *et si* $\overline{M}'$ *désigne l'adhérence faible de* M' *dans* E', *on a* $(\overline{M}')^o = M'^o$.

En effet, pour tout $x \in M$, l'ensemble $\{x\}^o$ des $x' \in E'$ tels que $|\langle x,x'\rangle| \leq 1$ est faiblement fermé, puisque c'est l'image réciproque de l'ensemble fermé $|\xi| \leq 1$ dans K par l'application faiblement continue $x' \to \langle x,x'\rangle$. L'ensemble M^o est l'intersection des ensembles $\{x\}^o$ lorsque x parcourt M , donc est faiblement fermé. D'autre part, si $x_0 \in \overline{M}$, la relation $|\langle x,x'\rangle| \leq 1$ pour tout $x \in M$ entraîne $|\langle x_0,x'\rangle| \leq 1$ puisque x' est continue dans E ; on a donc $(\overline{M})^o \supset M^o$, et comme $M \subset \overline{M}$, $(\overline{M})^{\circ} = M^{\circ}$. La seconde partie de la proposition se démontre de même.

PROPOSITION 6.- <u>Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de</u> E . <u>Pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}$, les homothétiques des polaires des ensembles de $\mathfrak{S}$ forment un système fondamental de voisinages de</u> 0 <u>dans</u> E' .

En effet, considérons un ensemble $\mathcal{T}(A,\alpha)$, formé des $x' \in E'$ tels que $|\langle x,x'\rangle| \leq \alpha$ pour tout $x \in A$, A étant un ensemble quelconque de $\mathfrak{S}$; on sait que ces ensembles forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E' . Or, si $\lambda \in K$ est tel que $0 < |\lambda| \leq \alpha$, la relation $x' \in (\lambda^{-1}A)^{\circ} = A^{\circ}\lambda$ entraîne évidemment $|\langle x,x'\rangle| \leq |\lambda| \leq \alpha$ pour tout $x \in A$, d'où la proposition.

3. <u>Ensembles équicontinus dans le dual d'un espace vectoriel topologique.</u>

Corps valué

PROPOSITION 7.- <u>Pour qu'une partie du dual</u> E' <u>d'un espace vectoriel topologique</u> E <u>soit un ensemble équicontinu</u> (pour la topologie considérée sur E), <u>il faut et il suffit qu'il soit contenu dans l'ensemble polaire d'un voisinage de</u> 0 <u>dans</u> E .

En effet, dire qu'une partie H' de E' est équicontinue signifie que pour tout $\alpha > 0$, il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $|\langle x,x'\rangle| \leq \alpha$ pour tout $x \in U$ et tout $x' \in H'$ (§ 3,prop.3) ; si $\lambda \in K$ est tel que $|\lambda| \geq \alpha$, on a donc $|\langle \lambda^{-1}x,x'\rangle| \leq |\lambda^{-1}| \cdot \alpha \leq 1$ pour tout $x \in U$ et tout $x' \in H'$, ce qui signifie que $H' \subset (\lambda^{-1}U)^{\circ}$. La réciproque est immédiate.

On a déjà vu (§ 3,cor. de la prop.8) que dans E', tout ensemble équicontinu est <u>borné</u> pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles d'un ensemble quelconque $\mathfrak{S}$ de parties bornées. En outre :

On peut se passer complètement de la valuation en considérant, au lieu de U°, un ensemble faiblement fermé de E' et équicontinu

compacité des ensembles équicontinus ?

64

THÉORÈME 1.- Soit K un corps valué (non discret) localement compact, et E un espace vectoriel topologique sur K. Pour tout voisinage U de 0 dans E, l'ensemble polaire U° de U dans E' est faiblement compact.

En effet, comme U° est équicontinu et faiblement fermé, il est aussi fermé dans l'espace produit K^E (§ 3, prop. 4). D'autre part, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda \in K$ non nul tel que $\lambda x \in U$, donc $|\langle \lambda x, x' \rangle| \leq 1$ pour tout $x' \in U^\circ$, ou encore $|\langle x, x' \rangle| \leq |\lambda^{-1}|$ pour tout $x' \in U^\circ$; cela signifie que les projections de U° sur les espaces facteurs de K^E sont bornées, donc relativement compactes par hypothèse ; le th. de Tychonoff (Top. gén., chap. I, 2^e éd., § 10, th. 3) montre alors que U° est relativement compact dans K^E, donc compact puisqu'il est fermé dans cet espace.

Comme sur U°, équicontinu, la topo. de la convergence simple de E (topo faible) et la topo de la conv. unif. dans les parties précompactes sont identiques, U° est compact pour cette topologie

On aura soin de noter qu'un ensemble borné dans E' pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E, n'est pas nécessairement relativement compact pour la topologie faible (exerc. 5). Il est en effet faiblement borné, donc relativement compact dans l'espace produit K^E, mais son adhérence dans cet espace produit n'est pas nécessairement contenue dans E'. On peut donc seulement dire qu'un ensemble faiblement borné dans E' est faiblement précompact (réciproque vraie d'après le §1, n°9). D'autre part, nous avons déjà fait remarquer qu'un ensemble faiblement compact dans E' n'est pas nécessairement équicontinu. (Appendice, exerc. 3c))

PROPOSITION 8.- Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Si on munit le dual E' de E de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, la forme bilinéaire canonique $(x, x') \to \langle x, x' \rangle$ est séparément continue relativement à l'ensemble $\mathfrak{S}$ et à l'ensemble des parties équicontinues de E'.

→ on peut se passer de la valuation

En effet, soit B un ensemble de $\mathfrak{S}$, α un nombre > 0 quelconque. Soit λ un élément $\neq 0$ de K tel que $|\lambda| \leqslant \alpha$; les relations $x \in B$, $x' \in B^0\lambda$ entraînent $|\langle x,x'\rangle| \leqslant |\lambda| \leqslant \alpha$ et $B^0\lambda$ est un voisinage de 0 dans E'. De même, si H' est une partie équicontinue quelconque de E', il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $H' \subset U^0$; les relations $x \in \lambda U^0$, $x' \in H'$ entraînent donc $|\langle x,x'\rangle| \leqslant |\lambda| \leqslant \alpha$, ce qui achève la démonstration.

définition même de l'équicontinuité

4. Dual d'un espace quotient. Dual d'une somme directe topologique.

PROPOSITION 9.- Soit V un sous-espace vectoriel fermé de E, φ l'application canonique de E sur E/V, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Si, à toute forme linéaire continue u sur E/V, on fait correspondre la forme linéaire continue $u\circ\varphi$ sur E, on définit un isomorphisme de l'espace dual (E/V)' de E/V, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\varphi(\mathfrak{S})$, sur le sous-espace V^0 de E' orthogonal à V, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$.

pas de valuation

Cela découle aussitôt de la prop.9 du § 3, compte-tenu de ce que l'application $u \to u\circ\varphi$ est aussi un isomorphisme des structures d'espace vectoriel à droite sur K de (E/V)' et V^0.

COROLLAIRE.- L'application $u \to u\circ\varphi$ est un isomorphisme de la topologie faible $\sigma((E/V)',E/V)$ sur la topologie induite sur V^0 par la topologie faible $\sigma(E',E)$.

Il suffit d'appliquer la prop.9 au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties finies de E.

Soit $N=E'^0$ (sous-espace de E orthogonal à E') ; on a évidemment $N^0=E'$. Si φ est l'application canonique de E sur E/N, la prop.9 montre que le dual de E/N, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les

les ensembles de $\varphi(\mathfrak{S})$, est isomorphe à E' muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$. On remarquera en outre que le dual de E/N est *séparant* par définition de N. L'étude des topologies sur le dual d'un espace vectoriel topologique peut donc toujours se ramener au cas des duals séparants.

La prop. 10 du § 3, appliquée au dual d'un espace produit, donne de même la proposition suivante :

$0 \in B$ pour $B \in \mathfrak{S}$

PROPOSITION 10.- *Soit* E *un espace somme directe topologique de sous-espaces* M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, *identifié canoniquement à l'espace produit* $\prod_{i=1}^{n} M_i$. *Soit* $\mathfrak{S}$ *un ensemble de parties bornées de* E *tel que pour toute partie* $B \in \mathfrak{S}$, *l'ensemble* $\prod_{i=1}^{n} pr_i(B)$ *soit contenu dans un ensemble de* $\mathfrak{S}$. *Soit* N_i *le sous-espace* $\sum_{j \neq i} M_j$, *supplémentaire de* M_i. *Le dual* E' *de* E *muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}$ *est somme directe topologique des sous-espaces* N_i^0 *respectivement orthogonaux aux* N_i ; *pour chaque indice* i *le sous-espace* N_i^0 *de* E' *est isomorphe au dual de* M_i, *muni de la topologie de la convergence uniforme dans les intersections avec* M_i *des ensembles de* $\mathfrak{S}$; *et le sous-espace* M_i^0, *orthogonal à* M_i, *est égal à* $\sum_{j \neq i} N_j^0$.

La prop. 10, appliquée au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties finies de E, montre entre autres que la topologie $\sigma(E', E)$ est identique au produit des topologies faibles $\sigma(N_i^0, M_i)$.

5. *Sous-espaces vectoriels d'un dual.*

~~Propriété de topologies localt convexes (topo faible) E et E' et de la dualité faible~~

THÉORÈME 2.- *Pour tout sous-espace vectoriel* V' *du dual d'un espace vectoriel topologique* E, *l'adhérence faible* $\overline{V'}$ de V' *dans* E' *est égale au sous-espace* $(V'^0)^0$ *orthogonal au sous-espace* V'^0 *de* E *orthogonal à* V'.

Il revient au même de dire que $\overline{V'}$ est l'*intersection des hyperplans d'équation* $\langle a, x' \rangle = 0$ *contenant* V' (c'est-à-dire tels que $a \in V'^0$).

Ces hyperplans sont évidemment faiblement fermés, donc aussi leur intersection ; pour montrer que cette intersection est identique à $\overline{V'}$, il suffit de prouver que, <u>pour tout</u> $x' \notin \overline{V'}$, <u>il existe</u> $a \in V'^{0}$ <u>tel que</u> $\langle a,x' \rangle \neq 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage faible U' de x' ne rencontrant pas V', c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini de points $a_i \in E$ et un nombre $\alpha > 0$ tels que pour tout $y' \in E'$ satisfaisant aux inégalités $|\langle a_i, x'-y' \rangle| \leqslant \alpha$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on ait $y' \notin V'$. Soit W' le sous-espace vectoriel faiblement fermé de E' défini par les n équations $\langle a_i, z' \rangle = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; par définition, U' contient la variété linéaire $x'+W'$, donc cette dernière ne rencontre pas V' . Ce dernier résultat peut encore s'exprimer sous la forme $x' \notin V'+W'$; par suite (<u>Alg.</u>, chap.II, §3, prop.9) il existe un hyperplan H' dans E' contenant $V'+W'$ et ne contenant pas x' ; mais comme H' contient W' , il a une équation de la forme $\langle a,z' \rangle = 0$, où $a \in V'^{0}$ est combinaison
comme H' contient V', $a \in V'^{0}$
linéaire des a_i (<u>Alg.</u>, chap.II, §4, n°6), ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- <u>Dans</u> E', <u>tout hyperplan faiblement fermé</u> H' <u>a une équation de la forme</u> $\langle a,x' \rangle = 0$, <u>où</u> $a \in E$.

En effet, on ne peut avoir $H'^{0} = E'^{0}$, sans quoi on en déduirait $H' = \overline{H'} = (H'^{0})^{0} = E'$ en vertu du th.2 ; il existe donc dans E un point $a \notin E'^{0}$ tel que $\langle a,x' \rangle = 0$ pour tout $x' \in H'$; comme l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\langle a,x' \rangle = 0$ n'est pas E' tout entier, c'est un hyperplan, qui est donc identique à H' .

c'est cela qu'on démontre plus haut

On peut donc encore exprimer le th.2 en disant que pour tout sous-espace vectoriel $V' \subset E'$, <u>l'adhérence faible</u> $\overline{V'}$ <u>est l'intersection des hyperplans faiblement fermés contenant</u> V' .

COROLLAIRE 2.- <u>Toute forme linéaire faiblement continue dans</u> E' <u>est de la forme</u> $x' \rightarrow \langle a,x' \rangle$, <u>où</u> $a \in E$.

En effet, si u est une forme linéaire $\neq 0$ faiblement continue dans E', $\overset{-1}{u}(0)$ est un hyperplan faiblement fermé dans E', donc (cor.1) il existe $a \in E$ tel que $u(x') = \langle a, x' \rangle$ pour tout $x' \in E'$.

Remarques.- 1) Si le dual de E est séparant, une forme linéaire faiblement continue dans E' peut se mettre sous la forme $x' \to \langle a, x' \rangle$ d'une manière et d'une seule, puisque si $\langle a-b, x' \rangle = 0$ pour tout $x' \in E'$, on a $a=b$.

2) Le cor.2 montre que si E n'est pas complet, les topologies faibles $\sigma(E', E)$ et $\sigma(E', \hat{E})$ sur E' sont distinctes, puisqu'il existe alors sur E' des formes linéaires continues pour la seconde topologie et non pour la première.

COROLLAIRE 3.- Tout sous-espace vectoriel faiblement fermé V' de E' est isomorphe au dual de l'espace quotient E/V'°, muni de la topologie faible.

En effet (cor. de la prop.9) ce dual est isomorphe au sous-espace $(V'^{\circ})^{\circ}$ de E', qui est identique à V'.

COROLLAIRE 4.- Pour qu'une famille (x'_ι) soit topologiquement libre dans E' muni de la topologie faible, il faut et il suffit que pour tout indice $\varkappa$, il existe $a_\varkappa \in E$ tel que $\langle a_\varkappa, x'_\varkappa \rangle \neq 0$ et $\langle a_\varkappa, x'_\iota \rangle = 0$ pour tout $\iota \neq \varkappa$.

En effet, cette condition exprime qu'il existe dans E' un hyperplan faiblement fermé contenant les x'_ι d'indice $\neq \varkappa$ et ne contenant pas $x'_\varkappa$ (cor.1) ; d'après le th.2, cela équivaut à dire que $x'_\varkappa$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel faiblement fermé engendré par les x'_ι d'indice $\neq \varkappa$.

COROLLAIRE 5.- Soit E un espace vectoriel topologique à dual séparant ($n^{\circ}2$). Pour qu'un ensemble A' soit total dans le dual E' munide la topologie faible, il faut et il suffit que, pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, il existe $x' \in A'$ tel que $\langle x, x' \rangle \neq 0$.

En effet, soit V' le sous-espace vectoriel engendré par A' ; d'après le th.2, la condition $\overline{V'}=E'$ est équivalente à $(V'^{o})^{o}=E'$; comme V'^{o} doit être orthogonal à E' , on a d'après l'hypothèse $V'^{o}=\{0\}$ et réciproquement, ce qui démontre le corollaire.

6. Transposée d'une application linéaire continue.

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur un corps valué K non discret, et soit u une application linéaire continue de E dans F . Pour toute forme linéaire continue y' sur F , l'application $y' \circ u$ est une forme linéaire continue sur E . L'application $y' \to y' \circ u$, qui n'est autre que la restriction au dual F' de F de la transposée de u définie en Algèbre (comme application de F^* dans E^* ; cf. Alg., chap. II, § 4, n°9) est donc une application linéaire de F' dans le dual E' de E ; par abus de langage, c'est cette application que nous appellerons la transposée de u et noterons ${}^t u$; elle est caractérisée par l'identité en $x \in E$ et $y' \in F'$

$$(1) \qquad \langle u(x), y' \rangle = \langle x, {}^t u(y') \rangle .$$

Si u et v sont deux applications linéaires continues de E dans F , on a ${}^t(u+v) = {}^t u + {}^t v$, ${}^t(\lambda u) = \lambda . {}^t u$ pour tout scalaire λ appartenant au centre de K . Si G est un troisième espace vectoriel topologique sur K , u une application linéaire continue de E dans F , v une application linéaire continue de F dans G , on a ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

PROPOSITION 11.- Pour toute partie A de E et toute application linéaire continue u de E dans F , on a

$$(2) \qquad (u(A))^{o} = {}^t u^{-1}(A^{o}) . \qquad ({}^t u)^{-1}$$

Ajouter la prop. 7 de l'App. pour un corps qq

C'est une conséquence évidente de (1) et de la définition des ensembles polaires.

La relation (2) entraîne par suite que ${}^t u((u(A))^{o}) \subset A^{o}$.

PROPOSITION 12.- Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées dans E , $\mathfrak{T}$ un ensemble de parties bornées dans F , $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ étant invariants par homothétie et tels que pour toute application continue u de E dans F , $u(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{T}$. Dans ces conditions si on munit E' (resp. F') de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$), pour toute application linéaire continue u de E dans F , ${}^t u$ est une application linéaire continue de F' dans E' .

En effet, lorsque A parcourt $\mathfrak{S}$, A^o parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans E' (prop.6), et comme $u(A) \in \mathfrak{T}$, $(u(A))^o$ est un voisinage de 0 dans F' tel que ${}^t u((u(A))^o) \subset A^o$, d'où la proposition.

On peut appliquer la prop.12 en prenant pour $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) l'ensemble de toutes les parties bornées, ou de toutes les parties précompactes, ou de toutes les parties compactes, ou enfin de toutes les parties finies de E (resp. F). Ce dernier choix prouve que :

COROLLAIRE.- Pour toute application linéaire continue u de E dans F , ${}^t u$ est une application linéaire faiblement continue de F' dans E' .

Les ensembles de parties $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ étant supposés satisfaire à la même condition que dans la prop.12, nous désignerons par $\mathcal{L}(F',E')$ l'espace des applications linéaires continues de F' dans E', pour les topologies respectives de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{T}$ et dans les ensembles de $\mathfrak{S}$. La prop.12 montre alors que l'application $u \rightarrow {}^t u$ est une application linéaire de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F',E')$; nous désignerons par ${}^t H$ l'image d'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ par cette application.

On notera que $u \rightarrow {}^t u$ n'applique pas en général $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{L}(F',E')$; autrement dit, une application linéaire continue de F' dans E' (pour les topologies envisagées) n'est pas nécessairement la transposée d'une application linéaire continue de E dans F (cf. chap.III, §).

PROPOSITION 13.- <u>Soit</u> $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) <u>l'ensemble de toutes les parties bornées de</u> E (resp. F). <u>Pour toute partie</u> H <u>de</u> $\mathcal{L}(E,F)$, <u>bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de</u> $\mathfrak{S}$, <u>l'ensemble</u> ${}^tH$ <u>est équicontinu dans</u> $\mathcal{L}(F',E')$.

Il faut prouver qu'étant donné un voisinage U' de 0 dans E', il existe un voisinage V' de 0 dans F' tel que ${}^tu(V') \subset U'$ pour tout $u \in H$. On peut supposer que $U'=B^0$, où $B \in \mathfrak{S}$ (prop.6) ; comme H est borné dans $\mathcal{L}(E,F)$ par hypothèse, pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}$, la réunion C des ensembles u(B), où u parcourt H , est un ensemble borné dans F (prop.8) ; $V'=C^0$ est alors un voisinage de 0 dans F' , et on a ${}^tu(C^0) \subset B^0$, pour tout $u \in H$, car $C^0 \subset (u(B))^0$ pour tout $u \in H$.

PROPOSITION 14.- <u>Soit</u> u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F ; <u>si</u> u(E) <u>est partout dense dans</u> F , ${}^tu$ <u>est une application linéaire biunivoque de</u> F' <u>dans</u> E' .

En effet, dire que ${}^tu(y')=0$ signifie que y' est orthogonal à u(E) (prop.11) ; si u(E) est partout dense dans F , la relation ${}^tu(y')=0$ entraîne donc $y'=0$.

Au chap.III, nous montrerons que, pour les espaces <u>localement convexes séparés</u>, la réciproque de la prop.14 est exacte (cf. Appendice).

PROPOSITION 15.- <u>Soit</u> u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F , <u>telle que</u> u(E) <u>soit partout dense dans</u> F . <u>Soit</u> $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) <u>un ensemble de parties bornées de</u> E (resp. F) <u>invariant par homothétie et tel que</u> $u(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{T}$. <u>Pour que</u> ${}^tu$ <u>soit un isomorphisme de</u> F'

72

généralisée (il ne faut pas que $u(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{T}$ pour toute u continue)

dans E' lorsqu'on munit E' (resp. F') de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$), il faut et il suffit que pour tout ensemble $B \in \mathfrak{T}$, il existe un ensemble $A \in \mathfrak{S}$ tel que $B \subset (u(A))^{oo}$.

En effet, lorsque A parcourt $\mathfrak{S}$, les ensembles A^o forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E' (prop.6). Les images réciproques par ${}^tu$ des ensembles $A^o \cap {}^tu(F')$ lorsque A parcourt $\mathfrak{S}$ sont les ensembles $(u(A))^o$. Comme ${}^tu$ est biunivoque (prop.14), et continue d'après la prop. 12 un peu pour que ${}^tu$ soit un isomorphisme de F' dans E', il faut et il suffit, en vertu de la prop.6, que pour tout ensemble $B \in \mathfrak{T}$ il existe $A \in \mathfrak{S}$ tel que $(u(A))^o \subset B^o$. Or cette relation entraîne $B \subset B^{oo} \subset (u(A))^{oo}$; et réciproquement, comme $M^{ooo} = M^o$ pour toute partie de E, la relation $B \subset (u(A))^{oo}$ entraîne $(u(A))^o \subset B^o$.

Remarque.- Si F est l'espace quotient de E par un sous-espace vectoriel fermé W, et φ l'application canonique de E sur F, la transposée ${}^t\varphi$ n'est autre que l'application canonique de W^o dans E' ; c'est un isomorphisme si on munit E' de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, et $F' = V^o$ de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\varphi(\mathfrak{S})$ (prop.9). → ou plutôt $\mathfrak{S}$ puisqu'on identifie F' à V^o ; finalement, c'est une trivialité

souille

PROPOSITION 16.- Soient E et F deux espaces à dual séparant ; pour qu'une application linéaire continue u de E dans F soit biunivoque il faut et il suffit que ${}^tu(F')$ soit faiblement dense dans E'.

En effet, la relation (1) montre que la relation $u(x)=0$ entraîne que x est orthogonal à $V = {}^tu(F')$, et réciproquement en vertu de l'hypothèse $F'^o = \{0\}$. Si u est biunivoque, V^o est donc réduit à 0, et par suite (th.2) $E' = (V^o)^o = \overline{V}$, autrement dit, ${}^tu(F')$ est faiblement dense dans E'. Réciproquement, si $\overline{V} = E'$ on a $V^o = (\overline{V})^o = \{0\}$ d'après l'hypothèse, donc u est biunivoque.

§ 5. Espaces vectoriels topologiques métrisables.

1. Propriétés des espaces vectoriels topologiques métrisables.

oui

Soit E un espace vectoriel topologique métrisable sur un corps valué non discret K . L'origine admet alors un système fondamental dénombrable de voisinages dont l'intersection se réduit à 0 . On peut toujours supposer en outre qu'un tel système (V_n) est tel que $V_{n+1}+V_{n+1} \subset V_n$, et que la relation $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda V_n \subset V_n$ (§ 1, prop.3). Inversement :

Ce n'est pas immédiat Il faut la démonstration

PROPOSITION 1.- *Soit E un espace vectoriel sur K , et soit (V_n) une suite décroissante d'ensembles possédant les propriétés (L''_I) et (L''_{II}) du § 1 , telle que $V_{n+1}+V_{n+1} \subset V_n$, et que l'intersection des V_n se réduise à 0 . Alors, si (λ_n) est une suite d'éléments de K tendant vers 0, les ensembles $\lambda_m V_n$ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie métrisable, compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.*

En effet, pour tout $\lambda \neq 0$ dans K , il existe m tel que $|\lambda_m| \leqslant |\lambda|$ donc $\lambda_m V_n \subset \lambda V_n$ (en raison de (L''_I)). Cela montre aussitôt (§ 1, prop.3 et 4) que les ensembles $\lambda_m V_n$ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie sur E séparée et compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ; comme ces ensembles sont en infinité dénombrable, la topologie qu'ils définissent est métrisable (Top.gén., chap.IX, § 3, prop.1).

On peut en outre définir la structure uniforme de E par une distance invariante $d(x,y)=|x-y|$, $x \rightarrow |x|$ étant une fonction numérique $\geqslant 0$ dans E , satisfaisant aux trois conditions :

a) $|-x|=|x|$; b) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$; c) la relation $|x|=0$ est équivalente à $x=0$ (Top.gén., chap.IX, § 3, n°1). En outre, l'hypothèse que pour tout V_n , la relation $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda V_n \subset V_n$ montre

à voir

aussitôt, compte tenu de la définition de $|x|$ (Top.gén., chap.IX, § 1, prop.2) que l'on peut toujours supposer que la relation $|\lambda| \leqslant 1$

<u>entraîne</u> $|\lambda x| \leqslant |x|$. Enfin, la condition (L''_{II}) du § 1 signifie que pour tout $x_0 \in E$, $|\lambda x_0|$ <u>tend vers</u> 0 <u>avec</u> λ . Inversement, si la fonction $|x|$ a ces propriétés, elle définit une structure topologique métrisable compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ; si V_n est l'ensemble des $x \in E$ tels que $|x| \leqslant 1/2^n$ (pour $V_{n+1}+V_{n+1} \subset V_n$), on constate en effet aussitôt que les V_n vérifient les conditions de la prop. 1 .

vague ; dire : $d(x,y)=|x-y|$ est une distance et la topo correspondante est compatible avec la structure d'espace vectoriel

<u>Remarque</u>.- Les espaces <u>normés</u> forment une des classes d'espaces vectoriels métrisables les plus importantes, et il est clair qu'une norme vérifie les conditions que nous venons d'énumérer. Mais il faut noter que la topologie d'un espace vectoriel métrisable E <u>ne peut pas toujours être définie par une norme</u> (cf. § 1, exerc. 6) ; nous étudierons plus tard d'importants exemples d'espaces fonctionnels qui sont des espaces vectoriels métrisables mais dont la topologie ne peut être définie par une norme.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique métrisable E est métrisable ; il en est de même de tout espace quotient E/V de E par un sous-espace vectoriel <u>fermé</u> V (<u>Top. gén.</u>, chap. IX, § 3, prop. 4). Tout produit d'une famille <u>dénombrable</u> d'espaces vectoriels topologiques métrisables est métrisable (<u>Top. gén.</u>, chap. IX, § 2, cor. du th. 1). Le <u>complété</u> $\hat{E}$ d'un espace vectoriel topologique métrisable est un espace vectoriel métrisable sur le corps valué complet $\hat{K}$. (Référence ?)

Soient E un ensemble quelconque, F un espace vectoriel métrisable, $\mathfrak{S}$ un ensemble <u>dénombrable</u> de parties de E , tel que E soit la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$. Soit H un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F , tel que pour tout $u \in H$ et tout $A \in \mathfrak{S}$, u(A) soit borné dans F ; alors l'espace vectoriel H , muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, est <u>métrisable</u> ; en effet, si d est une distance compatible avec la topologie de F , la structure uniforme de H est définie par la famille des écarts $\delta_A(u,v) = \sup_{x \in A} d(u(x),v(x))$, où A parcourt l'ensemble dénombrable $\mathfrak{S}$.

Les conditions précédentes sont remplies en particulier dans les cas suivants :

1° E est dénombrable, $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties finies de E , H un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{F}(E,F)$;

2° E est quelconque, $\mathfrak{S}$ réduit au seul ensemble E (topologie de la convergence uniforme), H un ~~sous-espace vectoriel de~~ l'espace $\mathcal{B}(E,F)$ des applications bornées de E dans F ;

3° E est un espace topologique localement compact et dénombrable à l'infini, $\mathfrak{S}$ une suite croissante de parties compactes de E dont la réunion est E , H ~~un sous-espace vectoriel de~~ l'espace $\mathcal{C}(E,F)$ des applications continues de E dans F ;

4° E est un espace vectoriel topologique dans lequel il existe un système fondamental dénombrable de parties bornées, $\mathfrak{S}$ est ce système, H un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F .

Dans un espace vectoriel métrisable, les ensembles bornés déterminent la topologie ; de façon précise :

Les voisinages sont les ensembles qui peuvent avaler les bornés. Est-ce que ça caractérise les métrisables?

PROPOSITION 2.- Soit E un espace vectoriel métrisable. Soit V une partie de E telle que la relation $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda V \subset V$. Si, pour toute suite (x_n) tendant vers 0 dans E il existe un $\alpha \neq 0$ dans K tel que $\alpha x_n \in V$ pour tout n, alors V est un voisinage de 0 dans E .

En effet, soit (V_n) un système fondamental décroissant de voisinages de 0 dans E tels que $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda V_n \subset V_n$; si (λ_n) est une suite d'éléments de K , non nuls et tendant vers 0 , les ensembles $\lambda_n V_n$ forment encore un système fondamental de voisinages de 0 .

Cela étant, si V n'était pas un voisinage de 0, il ne contiendrait aucun des ensembles $\lambda_n V_n$; il existerait donc une suite (a_n) de points de E telle que $a_n \in \lambda_n V_n$ et $a_n \notin V$. La suite $(\lambda_n^{-1} a_n)$ converge vers 0 dans E, mais il ne peut exister aucun $\alpha \neq 0$ dans K tel que $\alpha \lambda_n^{-1} a_n \in V$ pour tout n : en effet, comme $\lambda_n \alpha^{-1}$ tend vers 0 dans K, on aurait, à partir d'un certain rang, $a_n = (\lambda_n \alpha^{-1})(\alpha \lambda_n^{-1} a_n) \in V$, contrairement à la définition de (a_n) ; nous aboutissons ainsi à une conclusion absurde, ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 3.- *Soient E un espace vectoriel métrisable, (B_n) une suite quelconque de parties bornées de E. Il existe alors une suite (λ_n) de scalaires $\neq 0$ telle que la réunion des ensembles $\lambda_n B_n$ soit bornée.*

En effet, soit (V_n) un système fondamental décroissant de voisinages de 0 dans E, tels que la relation $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda V_n \subset V_n$. Par hypothèse, pour chaque n, on peut déterminer une suite (α_{mn}) $(m=1,2,\dots)$ de scalaires $\neq 0$ tels que $\alpha_{mn} B_n \subset V_m$, et ~~en raison de l'hypothèse sur les V_n~~, on peut toujours supposer que $|\alpha_{m+1,n}| \leqslant |\alpha_{mn}|$ pour tout m. Prenons alors $\lambda_n = \alpha_{nn}$, et montrons que la réunion B des $\lambda_n B_n$ est bornée ; en effet, pour tout indice m, on a $\alpha_{mn} B_n \subset V_m$ pour tout n ; comme on a $|\alpha_{nn}| \leqslant |\alpha_{mn}|$ pour $n \geqslant m$, on a fortiori $\lambda_n B_n = \alpha_{nn} B_n \subset V_m$ pour $n \geqslant m$; d'autre part, il existe un $\mu \in K$ non nul tel que $\mu \lambda_n B_n \subset V_m$ pour $1 \leqslant n \leqslant m$; comme on peut supposer $|\mu| \leqslant 1$, on aura aussi $\mu B \subset V_m$, ce qui démontre la proposition.

2. Fonctions linéaires définies dans un espace vectoriel métrisable.

PROPOSITION 4.- *Soient E un espace vectoriel métrisable, F un espace vectoriel topologique quelconque. Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit que pour toute suite (x_n) de points de E tendant vers 0, la suite $(u(x_n))$ soit bornée dans F.*

La condition est évidemment nécessaire, sans hypothèse de métrisabilité sur E (§1, prop. 9). Pour montrer qu'elle est suffisante, considérons un voisinage V de 0 dans F, tel que $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda V \subset V$. Si $W = \overset{-1}{u}(V)$, la condition $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne aussi $\lambda W \subset W$; d'autre part, si la suite (x_n) de points de E tend vers 0, il existe par hypothèse un élément $\alpha \neq 0$ dans K tel que $\alpha u(x_n) = u(\alpha x_n) \in V$ pour tout n, d'où $\alpha x_n \in W$ pour tout n. La prop. 2 montre donc que W est un voisinage de 0 dans E, c'est-à-dire que u est continue.

THÉORÈME 1 (Banach).- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces vectoriels métrisables et complets</u>. <u>Toute application linéaire continue</u> u <u>de</u> E sur F <u>est un homomorphisme</u>.

Il faut prouver que l'image par u de tout ensemble ouvert dans E est un ensemble ouvert dans F. Nous munirons chacun des espaces E, F d'une distance compatible avec sa topologie et invariante par translation (n°1). Nous utiliserons la notation $B_r(x)$ pour désigner, dans un espace métrique, la boule <u>fermée</u> de centre x et de rayon r.

Le théorème résultera des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 5.- <u>Soient</u> E <u>un espace vectoriel métrisable</u>, F <u>un espace vectoriel métrisable et complet</u>, E <u>et</u> F <u>étant munis de distances compatibles avec leur topologie et invariantes par translation</u>. <u>Soit</u> u <u>une application linéaire continue de</u> E sur F. <u>Alors, pour tout nombre</u> $r > 0$, <u>il existe un nombre</u> $\rho > 0$ <u>tel que l'image par</u> u <u>de la boule</u> $B_r(0)$ <u>de</u> E <u>soit dense par rapport à la boule</u> $B_\rho(0)$ <u>de</u> F.

Soit V un voisinage de 0 dans E, tel que $V + V \subset B_r(0)$ et que $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda V \subset V$. Soit d'autre part α un élément de K tel que $|\alpha| > 1$; alors la réunion des ensembles $\alpha^n V$ est E tout entier, car pour tout $x \in E$ il existe $\beta \in K$ tel que $x \in \beta V$, et si n est assez grand

ici la valuation est fondamentale

pour que $|\beta|<|\alpha|^n$, on a aussi $x\in\alpha^n V$. Par suite, la réunion des ensembles $u(\alpha^n V)=\alpha^n u(V)$ est F tout entier ; comme F est un espace de Baire, l'un au moins des ensembles $\alpha^n\overline{u(V)}$ a un point intérieur (Top.gén.,chap.IX, § 5,th.1 et déf.3), et par suite $\overline{u(V)}$ admet un point intérieur y_0 ; comme $-u(V)=u(V)$, on a $-\overline{u(V)}=\overline{u(V)}$, d'où résulte que 0 est point intérieur de $\overline{u(V)+u(V)}$; comme ce dernier ensemble est contenu dans l'adhérence de $u(V+V)$, on voit que $\overline{u(B_r(0))}$ est un voisinage de 0 dans F , ce qui démontre la proposition.

On notera qu'en raison de l'invariance de la distance par translation, $u(B_r(x))$ est dense par rapport à $B_\rho(u(x))$.

PROPOSITION 6.- Soient E et F deux espaces métriques, E étant supposé complet. Soit u une application continue de E dans F , ayant la propriété suivante : quel que soit le nombre $r>0$, il existe un nombre $\rho>0$ ~~(dépendant de r)~~ tel que pour tout $x\in E$, l'image $u(B_r(x))$ soit dense par rapport à la boule $B_\rho(u(x))$. Dans ces conditions, pour tout nombre $a>r$, l'image $u(B_a(x))$ contient la boule $B_\rho(u(x))$.

Soit en effet (r_n) une suite infinie de nombres >0 telle que $r_1=r$, et $a=\sum_{n=1}^{\infty} r_n<+\infty$. Pour chaque indice n , il existe un nombre ρ_n (avec $\rho_1=\rho$) tel que $u(B_{r_n}(x))$ soit dense par rapport à $B_{\rho_n}(u(x))$ pour tout $x\in E$; en remplaçant ρ_n par $\inf(\rho_n,\frac{1}{n})$ pour $n>1$, on peut toujours supposer que $\lim_{n\to\infty}\rho_n=0$.

Soit x_0 un point de E , et soit y un point de $B_\rho(u(x_0))$. Nous allons montrer que y appartient à $u(B_a(x_0))$.

Nous allons déterminer par récurrence une suite $(x_n)_{n>0}$ de points de E telle que pour tout $n\geqslant 1$, on ait $x_n\in B_{r_n}(x_{n-1})$ et $u(x_n)\in B_{\rho_{n+1}}(y)$ (fig.1). Si les x_i sont déterminés pour $1\leqslant i\leqslant n-1$ et satisfont à ces relations, on a $y \in B_{\rho_n}(u(x_{n-1}))$; comme l'image de $B_{r_n}(x_{n-1})$ par u est dense par rapport à $B_{\rho_n}(u(x_{n-1}))$, il existe un point $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ dont l'image $u(x_n)$ appartient au voisinage $B_{\rho_{n+1}}(y)$ de y .

La suite (x_n) est une suite de Cauchy dans E , car la distance de x_n à x_{n+p} est majorée par $r_{n+1}+r_{n+2}+\ldots+r_{n+p}$, qui est arbitrairement petit dès que n est assez grand. Comme E est complet, la suite (x_n) converge vers un point $x \in E$, et la distance entre x_0 et x est majorée par $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a$, donc $x \in B_a(x_0)$. Comme u est continue, la suite $(u(x_n))$ converge vers $u(x)$; mais on a $u(x_n) \in B_{\rho_{n+1}}(y)$, donc $y=u(x)$, ce qui achève la démonstration.

Le th.1 entraîne les conséquences suivantes :

COROLLAIRE 1.- Si E et F sont deux espaces vectoriels métrisables et complets, toute application linéaire continue et biunivoque u de E sur F est un isomorphisme.

En particulier, si E et F sont des espaces normés complets, il existe un nombre $a > 0$ tel que $\|u(x)\| \geqslant a.\|x\|$ pour tout $x \in E$.

COROLLAIRE 2.- Si E et F sont deux espaces vectoriels métrisables et complets, pour qu'une application linéaire continue u de E dans F soit un homomorphisme, il faut et il suffit que u(E) soit fermé dans F

La condition est nécessaire, car si u est un homomorphisme, u(E) , isomorphe au quotient $E/\overset{-1}{u}(0)$, est complet (Top.gén., chap;IX, § 3, prop.4), donc fermé dans F . La condition est suffisante, car si u(E) est fermé dans F , c'est un espace vectoriel métrisable et complet, donc u est un homomorphisme de E sur u(E) (th.1) .

COROLLAIRE 3.- <u>Soient</u> E <u>un espace vectoriel,</u> $\mathcal{C}_1$ <u>et</u> $\mathcal{C}_2$ <u>deux topologies sur</u> E <u>compatibles avec sa structure d'espace vectoriel et pour chacune desquelles</u> E <u>est métrisable et complet</u>. <u>Si</u> $\mathcal{C}_1$ <u>et</u> $\mathcal{C}_2$ <u>sont comparables, elles sont identiques</u>.

En effet, si E_1 et E_2 sont les espaces vectoriels topologiques obtenus en munissant E de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, l'application identique de l'un de ces espaces sur l'autre est continue, donc est un isomorphisme (cor.1).

Au chap.III, nous donnerons des exemples d'espaces E sur lesquels il y a deux topologies distinctes compatibles avec la structure d'espace vectoriel, non toutes deux métrisables et pour chacune desquelles E est complet.

COROLLAIRE 4.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces vectoriels métrisables et complets</u>. <u>Pour qu'une application linéaire</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>soit continue, il faut et il suffit que son graphe dans l'espace produit</u> $E \times F$ <u>soit fermé</u>.

La condition est nécessaire, le graphe d'une application continue dans un espace séparé étant toujours fermé (<u>Top.gén</u>.,chap.I, 2^{è} éd., §8, cor.2 de la prop.6). Pour voir qu'elle est suffisante, remarquons qu'elle entraîne que le graphe G de u , sous-espace vectoriel fermé de l'espace métrisable et complet $E \times F$, est lui-même métrisable et complet. La projection $z \longrightarrow pr_1(z)$ de G sur E , est une application linéaire continue et biunivoque, donc un isomorphisme (cor.1) ; comme son application réciproque est $x \longrightarrow (x,u(x))$, u est continue dans E .

On peut encore exprimer ce corollaire en disant que si u est une application linéaire <u>non continue</u> de E dans F , il existe une suite de points (x_n) de E qui converge vers 0 et est telle que la suite $(u(x_n))$ ait une limite $y \neq 0$.

COROLLAIRE 5.- *Soit* E *un espace vectoriel métrisable et complet. Si* V *et* W *sont deux sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires dans* E , E *est somme directe topologique* (§ 1,n°6) *de* V *et de* W .

En effet, $V \times W$ est un espace vectoriel métrisable et complet, et l'application $(y,z) \to y+z$ de $V \times W$ sur E est continue et biunivoque, donc un isomorphisme (cor.1).

3. *Espaces de fonctions linéaires continues définies dans un espace vectoriel métrisable.*

PROPOSITION 7.- *Soient* E *un espace vectoriel métrisable,* F *un espace vectoriel topologique quelconque. Si* F *est complet, l'espace* $\mathcal{L}(E,F)$ *des applications linéaires continues de* E *dans* F , *muni de la topologie de la convergence uniforme dans un ensemble* $\mathfrak{S}$ *de parties bornées de* E, *contenant toutes les parties compactes de* E , *est complet.*

Contre-exemple si E n'est pas métrisable ?

Soit en effet Φ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{L}(E,F)$ pour une telle topologie. Comme F est complet, Φ converge simplement dans E vers une application linéaire u_0 de E dans F ; en outre, comme Φ converge uniformément vers u_0 dans toute partie compacte de E , u_0 est continue sur toute partie compacte de E , et l'image par u_0 d'une partie compacte de E est donc compacte dans F , et a fortiori bornée dans F . En particulier, pour toute suite (x_n) de points de E tendant vers 0, la suite $(u(x_n))$ est bornée dans F ; cela prouve (prop.3) que u_0 est continue dans E , donc appartient à $\mathcal{L}(E, F)$.

COROLLAIRE.- *Si* K *est un corps valué complet, le dual* E' *d'un espace vectoriel métrisable* E *sur* K , *muni de la topologie de la convergence uniforme dans un ensemble* $\mathfrak{S}$ *de parties bornées de* E , *contenant toutes les parties compactes de* E , *est complet.*

NBK 056 82

Nous avons vu (§ 3, cor. de la prop. 8) que dans $\mathcal{L}(E,F)$ tout ensemble équicontinu est borné pour la topologie de la convergence uniforme dans un ensemble quelconque $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E. Lorsque E est un espace vectoriel métrisable et complet, cette propriété admet une réciproque:

THÉORÈME 2.- Soient E un espace vectoriel métrisable et complet, F un espace vectoriel topologique séparé ? quelconque. Si une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ est bornée pour la topologie de la convergence simple, elle est équicontinue (et par suite bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans un ensemble quelconque de parties bornées de E).

Soit V un voisinage de 0 dans F, W un voisinage fermé de 0 dans F tel que $W+W \subset V$ et que la relation $|\lambda| \leq 1$ entraîne $\lambda W \subset W$. Soit U l'intersection des ensembles $\overset{-1}{u}(V)$ lorsque u parcourt H ; nous allons montrer que U est un voisinage de 0 dans E. Soit T l'intersection des ensembles $\overset{-1}{u}(W)$ lorsque u parcourt H ; c'est un ensemble fermé dans E. Pour tout $x \in E$, l'ensemble des $u(x)$, où u parcourt H, est borné dans F par hypothèse. Si $\alpha \in K$ est tel que $|\alpha| > 1$, il existe donc un entier n tel que $u(x) \in \alpha^n W$ pour tout $u \in H$. Cela signifie encore que x appartient à l'ensemble $\alpha^n T$; en d'autres termes, E est réunion des ensembles fermés $\alpha^n T$ lorsque n parcourt l'ensemble des entiers > 0. Mais E est un espace de Baire, donc (Top. gén., chap. IX, § 5), l'un au moins des ensembles fermés $\alpha^n T$, et par suite T lui-même, a un point intérieur y_0. Comme on a $-T=T$, $-y_0$ est aussi point intérieur de T, et par suite 0 est point intérieur de T+T et à fortiori de U, par définition de W.

$-y_0 \in T$ suffit

COROLLAIRE.- Dans le dual d'un espace vectoriel métrisable et complet, toute partie faiblement bornée est équicontinue.

On notera que le th. 2 s'applique plus généralement au cas où l'espace vectoriel topologique E est un espace de Baire (non nécessairement métrisable).

est-ce sûr ?

4. Continuité des applications bilinéaires.

THÉORÈME 3.- Soient E un espace vectoriel métrisable et complet, F un espace topologique métrisable, G un espace vectoriel topologique séparé quelconque. Soit f une application de $E \times F$ dans G telle que : 1° pour tout $y_0 \in F$, $x \to f(x,y_0)$ soit une application linéaire continue de E dans G ; 2° pour tout $x_0 \in E$, $y \to f(x_0,y)$ soit une application continue de F dans G. Dans ces conditions, f est une application continue de $E \times F$ dans G.

Soit d une distance compatible avec la topologie de F. Soit W un voisinage fermé symétrique de 0 dans G, et b un point quelconque de F. Pour tout $x \in E$, désignons par $g(x)$ la borne supérieure des nombres $\alpha > 0$ tels que la relation $d(y,b) < \alpha$ entraîne $f(x,y)-f(x,b) \in W$. Nous allons montrer que $g(x)$ (qui est par hypothèse un nombre > 0) est une fonction semi-continue supérieurement dans E. En effet, soit $g(x_0)=\rho$ et supposons que pour tout voisinage V de x_0, il existe $x \in V$ tel que $g(x) > \rho+\varepsilon$. Soit y_0 un point quelconque de F tel que $d(y_0,b) < \rho+\varepsilon$; on aurait donc $f(x,y_0)-f(x,b) \in W$; mais comme les fonctions $x \to f(x,y_0)$ et $x \to f(x,b)$ sont continues par hypothèse, et que W est fermé, on aurait aussi, à la limite $f(x_0,y_0)-f(x_0,b) \in W$; comme cette relation est vraie pour tout y_0 tel que $d(y_0,b) < \rho+\varepsilon$, on en déduirait par définition que $g(x_0) \geqslant \rho+\varepsilon$, ce qui est absurde.

Cela étant, $1/g(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement et finie en tout point de E ; comme E est un espace de Baire, il existe un point $a \in E$ tel que $1/g$ soit bornée dans un voisinage $a+U$ de a (Top. gén., chap. IX, § 5, th. 2) ; autrement dit, il existe un nombre $r > 0$ tel que les relations $x-a \in U$ et $d(y,b) \leqslant r$ entraînent $f(x,y)-f(x,b) \in W$; cette relation ayant lieu en particulier pour $x=a$, on en tire que $f(x-a,y)-f(x-a,b) \in W+W$ pour $x-a \in U$ et $d(y,b) \leqslant r$.

Comme $z \to f(z,b)$ est continue dans E, on en déduit qu'il existe un voisinage $U' \subset U$ de 0 dans E tel que $z \in U'$ et $d(y,b) \leqslant r$ entraînent $f(z,y) \in W+W+W$. Enfin, si x_0 est un point quelconque de E, la fonction $y \to f(x_0,y)$ est continue dans F, donc il existe $r' \leqslant r$ tel que la relation $d(y,b) \leqslant r'$ entraîne $f(x_0,y)-f(x_0,b) \in W$; d'où on déduit que les relations $x-x_0 \in U'$ et $d(y,b) \leqslant r'$ entraînent $f(x,y)-f(x_0,b) \in W+W+W+W$, ce qui démontre la continuité de f au point (x_0,b) qui est quelconque dans $E \times F$.

COROLLAIRE.- *Le hypothèses sur* E *et* G *étant les mêmes, supposons que* F *soit un espace vectoriel métrisable. Soit* f *une application bilinéaire de* $E \times F$ *dans* G *telle que :* 1° *pour tout* $y_0 \in F$, $x \to f(x,y_0)$ *soit une application linéaire continue de* E *dans* G ; 2° *pour tout* $x_0 \in E$, $y \to f(x_0,y)$ *soit une application linéaire continue de* F *dans* G. *Dans ces conditions,* f *est une application bilinéaire continue de* $E \times F$ *dans* G

En particulier, on voit que si f est *séparément continue* relativement à des ensembles quelconques $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ de parties bornées de E et F respectivement (cf. § 3, n°6), f est *continue* dans $E \times F$.

Remarques.- 1) Le th. 3 et son corollaire s'appliquent plus généralement si on suppose que E est un espace de Baire (non nécessairement métrisable).

2) Le th.3 n'est plus valable si on suppose E métrisable mais non complet (*Top.gén.*, chap.IX, § 5, exerc.22 b)), ou si on ne suppose plus F métrisable (§ 4, exerc. 4).

5. Espaces vectoriels métrisables de type dénombrable.

DÉFINITION 1.- *On dit qu'un espace métrisable* E *est de type dénombrable s'il existe dans* E *un ensemble dénombrable partout dense.*

Il revient au même de dire que la topologie de E admet une <u>base dénombrable</u> (<u>Top.gén.</u>,chap.I, §2). En effet, si (U_n) est une base dénombrable de la topologie de E , et a_n un point quelconque de U_n , l'ensemble des a_n est partout dense, tout ensemble ouvert non vide contenant un des U_n . Inversement, si (a_n) est une suite de points formant un ensemble partout dense dans E , et si d est une distance compatible avec la topologie de E , les boules de centre a_n et de rayon $1/m$ (m et n entiers arbitraires) forment une base de la topologie de E : en effet, pour tout point $x_o \in E$, et tout voisinage V de x_o , il existe un entier p tel que la boule de centre x_o et de rayon $1/p$ soit contenue dans V ; d'autre part, il existe un entier n tel que $d(x_o,a_n) \leqslant 1/2p$; la boule de centre a_n et de rayon $1/2p$ contient x_o et est contenue dans V , ce qui prouve notre assertion.

On déduit aussitôt de cette remarque que tout <u>sous-espace</u> d'un espace métrisable de type dénombrable est de type dénombrable. La déf.1 montre par ailleurs que tout <u>espace quotient</u> d'un espace vectoriel métrisable de type dénombrable est de type dénombrable. Enfin, si (E_n) est une suite d'espaces métrisables de type dénombrable, leur produit $E = \prod_n E_n$ est de type dénombrable, car si $(U_{mn})_{m \in \mathbb{N}}$ est une base dénombrable de la topologie de E_n , on a une base de la topologie de E en considérant les ensembles élémentaires produits d'un nombre fini d'ensembles $U_{m_k,k}$ (k parcourant une partie finie quelconque J de $\mathbb{N}$) et des E_n d'indices $n \notin J$ (<u>Top.gén.</u>, chap.I, 2è éd. §8,n°1).

Si le corps valué K (non discret) est de <u>type dénombrable</u>, pour qu'un espace vectoriel métrisable E sur K soit de type dénombrable il suffit qu'il existe dans E un <u>ensemble total dénombrable</u>. En effet, si (a_n) est un tel ensemble, l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_k \lambda_k a_k$, où les λ_k appartiennent à K , forment un ensemble partout dense dans K . Si L est un ensemble dénombrable partout dense dans K , toute combinaison linéaire $\sum_k \lambda_k a_k$ peut être approchée arbitrairement par une combinaison linéaire $\sum_k \mu_k a_k$, où les $\mu_k \in L$; ces dernières étant en infinité dénombrable, E est de type dénombrable.

pas question d'espaces vectoriels là-dedans

PROPOSITION 8.- *Soient E un espace métrisable, F un espace métrisable de type dénombrable, $\mathfrak{S}$ une famille dénombrable de parties compactes de E , telles que tout point de E appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$. Dans ces conditions, l'espace $\mathcal{C}(E,F)$ des applications continues de E dans F , muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, est un espace métrisable de type dénombrable.*

Soient d et d' des distances compatibles avec les topologies de E et F respectivement, et supposons les ensembles de $\mathfrak{S}$ rangés en une suite (K_n) qu'on peut supposer croissante. La structure uniforme de $\mathcal{C}(E,F)$ est définie par la famille d'écarts $\delta_n(f,g) = \sup_{x \in K_n} d'(f(x), g(x))$, donc est métrisable. Pour tout système de trois entiers (n,p,q), désignons par $A_{n,p,q}$ l'ensemble des applications continues f de E dans F , dont la restriction à K_n est telle que la condition $d(x,y) \leqslant 1/p$ pour deux points quelconques de K_n , entraîne $d'(f(x),f(y)) \leqslant 1/q$; comme toute application continue d'un espace compact dans F est uniformément continue pour n et q fixes , $\mathcal{C}(E,F)$ est réunion des $A_{n,p,q}$ (p variable). Si on prouve que, dans chaque ensemble $A_{n,p,q}$, il existe un ensemble dénombrable $B_{n,p,q}$ tel que pour toute fonction $f \in A_{n,p,q}$, il existe une fonction $g \in B_{n,p,q}$ satisfaisant à la relation $\delta_n(f,g) \leqslant 4/q$, la réunion B de tous les ensembles $B_{n,p,q}$ sera un ensemble dénombrable partout dense dans $\mathcal{C}(E,F)$. Or, il existe dans K_n un ensemble *fini* $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de points tels que tout point $x \in K_n$ soit à une distance $\leqslant 1/p$ de l'un des a_i ;

d'autre part, il existe dans F un ensemble dénombrable (b_n) tel que tout point de F soit à une distance $\leqslant 1/q$ d'un des b_n. Pour toute application $i \rightarrow \rho(i)$ de l'intervalle $[1,r]$ de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$, désignons par H_ρ l'ensemble des fonctions $f \in A_{n,p,q}$ telles que l'on ait $d'(f(a_i),b_{\rho(i)}) \leqslant 1/q$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$; les ensembles H_ρ sont en infinité dénombrable, et toute fonction $f \in A_{n,p,q}$ appartient à un H_ρ au moins. Pour chacun des H_ρ non vides, soit g_ρ une fonction appartenant à H_ρ, et soit $B_{n,p,q}$ l'ensemble des g_ρ ; nous allons voir que cet ensemble répond à la question. En effet, si f est une fonction quelconque de $A_{n,p,q}$, il existe ρ tel que $f \in H_\rho$; on a donc $d'(f(a_i),g_\rho(a_i)) \leqslant 2/q$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$; mais pour tout $x \in K_n$, il existe un i tel que $d(x,a_i) \leqslant 1/p$, d'où $d'(f(x),f(a_i)) \leqslant 1/q$ et $d'(g_\rho(a_i),g_\rho(x)) \leqslant 1/q$; on en tire $d'(f(x),g_\rho(x)) \leqslant 4/q$ pour tout $x \in K_n$, ce qui achève la démonstration.

Remarque.- On notera qu'on a utilisé exclusivement dans cette démonstration le fait que chacun des sous-espaces K_n est compact et métrisable, et que la restriction de f à chacun de ces sous-espaces est continue. Il est donc inutile de supposer que E lui-même soit métrisable, et la proposition est encore valable pour l'espace des applications de E dans F dont la restriction à chacun des K_n est continue.

PROPOSITION 9.- Soit E un espace vectoriel topologique tel qu'il existe dans E un ensemble dénombrable partout dense. Soit F un espace vectoriel métrisable topologique quelconque, H une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$; sur H, la structure uniforme de la convergence simple est métrisable.

Il faut bloquer les prop. 9 et 10 de la manière suivante (et on dira un peu plus que la prop. 10)

Soit E un espace vectoriel topologique tel qu'il existe dans E un ensemble dénombrable partout dense. Soit F un espace vectoriel topologique métrisable, H une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$. Sur H, la structure uniforme de la conv. simple est métrisable. Si de plus E est métrisable et F de type dénombrable, H est de type dénombrable.

Corollaire : Soit E ~~est~~ un espace vectoriel topologique tel qu'il existe ds E un ensemble dén. partout dense. [illegible] L'ensemble polaire V° de tout voisinage V de 0 dans E est métrisable pour la topo faible [illegible] $\sigma(E', E)$.
Si de plus E est métrisable et K de type dénombrable, V° est de type dénombrable, et il existe ds E' une suite dénombrable partout dense.

Seule reste à dém. la dernière affirmation

Remarques : 1. Si K est localt compact, l'hypothèse qu'il existe ds E une suite partout dense suffit à assurer ~~la métris~~ le fait que V° est de type dén., car V° est compact

En effet, si D est une partie dénombrable partout dense de E , la structure uniforme de la convergence simple (dans E) sur H est identique à la structure uniforme de la convergence simple dans D , (§ 3,prop.5), donc est définie par une infinité dénombrable d'écarts, et par suite est métrisable.

il faut F métrisable ?

COROLLAIRE.- Si K est un corps valué localement compact, et s'il existe dans E une partie dénombrable partout dense, l'ensemble polaire de tout voisinage de 0 dans E est un espace compact métrisable pour la topologie faible $\sigma(E',E)$.

PROPOSITION 10.- Soit E un espace vectoriel métrisable de type dénombrable sur un corps valué de type dénombrable. Il existe dans le dual E' un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie faible $\sigma(E',E)$.

résulte de ce qui suit

~~Remarquons d'abord que si U est un voisinage de 0, l'ensemble polaire U^o est métrisable pour la topologie faible (prop.9)~~ ; d'autre part, si D est une partie dénombrable partout dense de E , la topologie faible sur U^o est identique à la topologie de la convergence simple dans D ; comme K est de type dénombrable, la prop.8 montre que U^o , muni de la topologie faible, est un espace métrisable de type dénombrable. Cela étant, soit (U_n) un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans E ; E' est la r union des ensembles U_n^o , car pour toute forme linéaire continue x' sur E , il existe n tel que $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in U_n$, ce qui signifie que $x' \in U_n^o$. Comme il existe dans chacun des U_n^o un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie faible, la réunion de ces ensembles est une partie de E' dénombrable et partout dense dans E' pour cette topologie.

répétition

Pour les applications, il est utile de savoir qu'il existe un ensemble dénombrable p. dense dans les U_n^o. Bref

et ça ne résulte pas de la prop. 9.

NBR 056 90

Remarque.- Même s'il existe dans E une famille dénombrable $\mathfrak{S}$ de parties bornées dont la réunion est E (par exemple si E est normé), et si on considère sur E' la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, qui est métrisable, E' n'est pas nécessairement de type dénombrable pour cette topologie (chap.III, exerc.).

Exercices.- 1) Montrer que la somme directe topologique d'une famille infinie d'espaces vectoriels métrisables et complets (§ 1,exerc.8) n'est jamais métrisable (se ramener au cas d'une famille infinie dénombrable, et montrer que l'espace somme directe topologique n'est pas un espace de Baire).

2a) Soit E un espace vectoriel sur un corps valué K, muni d'une topologie compatible avec sa structure de groupe additif, pour laquelle E est un groupe métrisable ; on suppose en outre que, pour tout $\lambda_0 \in K$, $x \to \lambda_0 x$ soit continue dans E, et que pour tout $x_0 \in E$, $\lambda \to \lambda x_0$ soit continue dans K. Montrer que si l'un des deux groupes métrisables K, E est complet, la topologie de E est compatible avec sa structure d'espace vectoriel (raisonner comme dans le th.3).

b) Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, soit G_α le groupe topologique $\mathbf{R}/\alpha\mathbf{Z}$, et soit G le groupe topologique produit $\prod_\alpha G_\alpha$ (α parcourant l'ensemble des nombres >0). Pour tout $x \in \mathbf{R}$, soit $t_\alpha(x)$ l'image canonique de x dans G_α ; l'application $x \to (t_\alpha(x))$ est une représentation biunivoque et continue de $\mathbf{R}$ sur un sous-groupe H de G. L'image réciproque $\mathcal{C}$ par φ de la topologie de H est par suite une topologie compatible avec la structure de groupe de $\mathbf{R}$; soit E le groupe topologique obtenu en munissant $\mathbf{R}$ de cette topologie. Montrer que l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbf{R} \times E$ dans E n'est pas continue, mais que, pour tout $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, $x \to \lambda_0 x$ est continue dans E, et que, pour tout $x_0 \in E$, $\lambda \to \lambda x_0$ est continue dans $\mathbf{R}$.

3) Soit E un espace vectoriel métrisable sur le corps $\mathbf{R}$, d une distance invariante par translation et compatible avec la topologie de E ; on pose $|x| = d(0,x)$. Montrer que, pour tout entier n , on a $\frac{1}{n}|x| \leqslant \left|\frac{x}{n}\right|$. En déduire que, si B est une partie bornée de E , $\sup_{x \in B} |x|$ est finie (autrement dit, B est bornée pour la distance d). (Raisonner par l'absurde, en remarquant que dans le cas contraire, il existerait une suite (x_n) de points de B telle que $|x_n| \geqslant n|x_{n-1}|$).

4) Soient E et F deux espaces vectoriels métrisables, et soit u une application linéaire continue de E dans F . Si, pour toute partie bornée B de F , $\overset{-1}{u}(B)$ est borné~~e~~ dans E , u est un isomorphisme de E dans F .

5) Soient E et F deux espaces vectoriels métrisables et complets, et soit u une application linéaire continue de E dans F . Montrer que, si u n'est pas une application de E sur F , u(E) est <u>maigre</u> dans F (en raisonnant comme dans le th.1, prouver que, si u(E) n'est pas maigre dans F , pour tout voisinage V de 0 dans E , u(V) contient un voisinage de 0 dans F).

6) Soient E et F deux espaces vectoriels métrisables et complets, et soit $\mathcal{T}$ une topologie séparée sur F moins fine que la topologie donnée $\mathcal{T}_0$ sur cet espace. Montrer que si une application linéaire u de E dans F est continue pour la topologie $\mathcal{T}$ sur F , elle est continue pour la topologie $\mathcal{T}_0$ (utiliser le cor.4 du th.1). En déduire que si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies distinctes sur E , pour lesquelles E est métrisable et complet, il n'existe pas de topologie séparée sur E moins fine que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

7) a) Soient E un espace vectoriel métrisable et complet, d une distance sur E invariante par translation et compatible avec la topologie, M et N deux sous-espaces vectoriels fermés tels que $M \cap N = \{0\}$.

montrer que, pour que $M+N$ soit fermé, il faut et il suffit que, pour tout entier n, il existe un entier m tel que les relations $x \in M$, $y \in N$, $d(0,x) \geqslant 1/n$ entraînent $d(x,y) \geqslant 1/m$ (utiliser le cor.5 du th.1).

b) Montrer que, si en outre K est de type dénombrable, et si E est dimension infinie et a un dual séparant, il existe dans E deux sous-espaces vectoriels fermés M,N tels que $M \cap N = \{0\}$ et que $M+N$ ne soit pas fermé (se ramener au cas où il existe dans E un ensemble dénombrable partout dense ; à l'aide de la prop.10, montrer qu'il existe dans le dual E' une suite (a'_n) formant un ensemble total pour la topologie faible, et algébriquement libre. Soit V_k le sous-espace de E orthogonal à l'ensemble des a'_i d'indice $i \leqslant 2k$, P_k un supplémentaire de V_{k+1} par rapport à V_k ; choisir dans P_k une base de deux éléments x_k, y_k de sorte que si M est l'adhérence du sous-espace engendré par les x_k, N l'adhérence du sous-espace engendré par les y_k, M et N répondent à la question ; on utilisera a)).

8) Soit K un corps valué commutatif et non discret, S un ensemble infini quelconque.

Ça n'a pas grand chose à voir avec les EVT

a) Soit $D=(a_n)$ un ensemble infini dénombrable d'éléments de S. Pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$, soit u_λ l'élément de l'espace normé $\mathcal{B}_K(S)$ des applications bornées de S dans K, tel que $u_\lambda(a_n)=\lambda^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et $u_\lambda(b)=0$ pour $b \notin D$. Montrer que la famille des u_λ est libre.

b) En déduire que toute base de l'espace vectoriel $\mathcal{B}_K(S)$ est équipotente à K^S (en utilisant a), montrer que toute base de $\mathcal{B}_K(S)$ a une puissance au moins égale à celle de K ; remarquer d'autre part que $\mathcal{B}_K(S)$ est équipotent à K^S, et utiliser l'exerc.14 de Alg., chap.II, § 1).

à voir

LIVRE V
ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES
CHAPITRE II (Etat 4)
ENSEMBLES CONVEXES ET ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

Sommaire.

- Suite -

6. Application : dérivées des fonctions à valeurs dans un espace localement convexe. 7. Extension aux espaces localement convexes complexes.

§ 6 : Points extrémaux des ensembles convexes. 1. Facettes et point extrémaux des ensembles convexes. 2. Variétés d'appui d'un ensemble convexe. 3. Points extrémaux des ensembles convexes compacts. 4. Génératrices extrémales des cônes convexes.

LIVRE V

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE II (Etat 4)

ENSEMBLES CONVEXES ET ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

----

§ 1. Définition et propriétés des ensembles convexes.

Dans les §§ 1 et 2 de ce chapitre, il ne sera question que d'espaces vectoriels et d'espaces affines sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, munis ou non d'une topologie. Quand on parlera d'un espace vectoriel (ou d'un espace affine) sans préciser son corps des scalaires, il sera sous-entendu que ce corps est le corps $\mathbb{R}$.

Rappelons (Alg., chap.IX) qu'un espace affine E peut être défini comme espace homogène (Alg.,chap.I, § 7,n°6) d'un espace vectoriel T, tel que 0 soit le seul opérateur de T laissant invariants tous les points de E. On dit que T est l'espace des translations de E ; le transformé d'un point $a\in E$ par une translation $t\in T$ se note $a+t$ (ou $t+a$) ; si a et b sont deux points quelconques de E, il existe une translation et une seule transformant a en b, qu'on note b-a ; on a $a-a=0$, $a-b=-(b-a)$. Etant donné un point $a\in E$, l'application $x\to x-a$ est une application biunivoque de E sur T ; quand on identifie E à T par cette application, on dit qu'on considère E comme espace vectoriel en prenant une origine a dans E. Inversement, tout espace vectoriel T peut être identifié à l'espace affine correspondant au sous-groupe $\{0\}$ de T (Alg.,chap.I, § 7,n°6). Lorsqu'on fait une telle identification, les variétés linéaires affines de E sont identifiées aux parties de T obtenues par translation à partir des sous-espaces vectoriels de T (appelés encore alors variétés linéaires homogènes) ; la dimension (affine) d'une variété linéaire affine est égale à la dimension du sous-espace vectoriel dont elle est transformée par translation. Etant donnée une famille (x_ι) de points de E, et une famille (λ_ι) de scalaires nuls sauf pour un nombre fini d'indices et tels que $\sum_\iota \lambda_\iota = 1$, on pose $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota = a + \sum_\iota \lambda_\iota (x_\iota - a)$, point qui ne dépend pas de $a \in E$; on dit que ce point est le <u>centre de gravité</u> de la famille (x_ι) lorsque chaque x_ι est <u>affecté de la masse</u> (positive ou négative) λ_ι. L'ensemble de tous ces centres de gravité (pour tous les choix possibles des λ_ι tels que $\sum_\iota \lambda_\iota = 1$) est identique à la variété linéaire affine engendrée par la famille (x_ι).

Rappelons encore que si a est un point de E, t un vecteur $\neq 0$ de T l'ensemble des points $a + \lambda t$, où $\lambda \geqslant 0$ (resp. $\lambda > 0$) est appelé <u>demi-droite fermée</u> (resp. <u>demi-droite ouverte</u>) d'<u>origine</u> a et de <u>vecteur directeur</u> t. Si x et y sont deux points de E, l'ensemble des points $\lambda x + \mu y$, où $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ et $\lambda + \mu = 1$ (resp. $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et $\lambda + \mu = 1$ lorsque $x \neq y$) est appelé <u>segment fermé</u> (resp. <u>segment ouvert</u>) d'<u>extrémités</u> x et y et noté parfois xy ; il est réduit à un point lorsque $x = y$. Enfin, si $x \neq y$, le <u>segment ouvert en</u> x, <u>fermé en</u> y est l'ensemble des points $\lambda x + \mu y$ où $\lambda + \mu = 1$, $\lambda > 0$, $\mu \geqslant 0$.

1. Définition d'un ensemble convexe.

DÉFINITION 1.- <u>Dans un espace affine</u> E <u>sur</u> $\mathbb{R}$, <u>on dit qu'un ensemble</u> A <u>est convexe si, quels que soient les points</u> x, y <u>de</u> A, <u>le segment fermé d'extrémités</u> x <u>et</u> y <u>est contenu dans</u> A.

Cette définition équivaut donc à la suivante : quels que soient les points x, y de A et le nombre réel λ tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, le point $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ appartient à A. Il revient au même de dire que pour tout λ tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, on a $\lambda A + (1-\lambda) A \subset A$.

Enfin, comme $(1-\lambda)a+\lambda x = a+\lambda(x-a)$, une autre forme de la définition 1 est la suivante : un ensemble A est convexe si pour tout point $a\in A$, toute homothétie de centre a et de rapport λ tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ transforme A en une partie de A .

Exemples.- 1) L'ensemble vide est convexe ; il en est de même de l'ensemble réduit à un point quelconque de E .

2) Toute variété linéaire affine de E est convexe.

3) **Les seules parties convexes non vides de $\mathbf{R}$ sont les intervalles** (Top.gén.,chap.IV, § 2,prop.1).

Demi espace

4) Soit E un espace vectoriel et $\|x\|$ une norme sur E ; la boule fermée B , formée des points x tels que $\|x\| \leqslant 1$ est convexe, car les relations $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ entraînent, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda + (1-\lambda)=1$ (cf. § 2,n°).

PROPOSITION 1.- Soit (x_ι) une famille de points d'un ensemble convexe A; tout centre de gravité $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$ des x_ι affectés de masses positives λ_ι (telles que $\sum_\iota \lambda_\iota = 1$), appartient à A .

On peut évidemment se borner au cas ou' l'ensemble d'indices est un intervalle fini $[1,p]$ de $\mathbf{N}$, et où $\lambda_i > 0$ pour tout indice i ; la proposition est triviale pour p=1 ; démontrons-la par récurrence sur p . Posons $\mu = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i > 0$, et $y = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i$; l'hypothèse de récurrence entraîne que $y\in A$. Comme $\lambda_p = 1-\mu$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \mu y+(1-\mu)x_p$ le point $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ appartient à A d'après la déf.1 .

PROPOSITION 2.- Soient E et F deux espaces affines, f une application linéaire affine de E dans F ; l'image par f de toute partie convexe de E est une partie convexe de F ; l'image réciproque par f de toute partie convexe de F est une partie convexe de E .

La première partie résulte de ce que l'image par f du segment fermé d'extrémités x,y est le segment fermé d'extrémités f(x),f(y) . On déduit de là que l'image réciproque par f d'un segment fermé de F contient le segment fermé ayant pour extrémités deux quelconques de ses points, d'où la seconde partie de la prop.2 .

On notera en particulier que le transformé d'un ensemble convexe par une <u>homothétie</u> ou une <u>translation</u> est convexe.

COROLLAIRE.- <u>Les parties convexes non vides d'une droite</u> D <u>contenue dans un espace affine</u> E <u>sont la droite D elle-même, et les demi-droites et segments contenus dans</u> D .

En effet, il existe une application linéaire affine biunivoque de $\mathbb{R}$ sur D .

Soit H un hyperplan dans E , g(x)=0 une équation de H (g application linéaire affine de E dans $\mathbb{R}$) ; on sait (<u>Alg.</u>,chap.IX) que les <u>demi-espaces algèbriquement fermés</u> (resp. <u>ouverts</u>) définis par H sont les parties de E définies par l'une des deux relations $g(x) \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$ (resp. $g(x) > 0$, $g(x) < 0$). Comme ce sont les images réciproques de demi-droites par une application linéaire affine, on voit que :

PROPOSITION 3.- <u>Les demi-espaces algèbriquement fermés</u> (resp. <u>ouverts</u>) <u>définis par un hyperplan sont des ensembles convexes</u>.

Rappelons qu'une partie d'un espace affine est dite <u>d'un même coté</u> (resp. <u>strictement d'un même côté</u>) d'un hyperplan H si elle est contenue dans un demi-espace algèbriquement fermé (resp. ouvert) défini par H

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> H <u>un hyperplan dans</u> E . <u>Pour qu'une partie convexe</u> A <u>de</u> E <u>soit strictement d'un même coté de</u> H , <u>il faut et il suffit que</u> A <u>ne rencontre pas</u> H .

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la remplie, et soit $g(x)=0$ une équation de H ; soit a un point de A ; on a $g(a)\neq 0$ par hypothèse. Pour tout point $b \in A$, $g(b)$ et $g(a)$ ont le même signe, sans quoi il existerait un point x du segment fermé d'extrémités a et b tel que $g(x)=0$, et on aurait donc $x \in H \cap A$ contrairement à l'hypothèse.

2. Intersection d'ensembles convexes. Produit d'ensembles convexes.

PROPOSITION 5.- L'intersection d'une famille quelconque de parties convexes de E est convexe.

La proposition est évidente à partir de la déf.1 .

COROLLAIRE.- L'intersection d'un ensemble convexe et d'une variété linéaire affine est un ensemble convexe.

PROPOSITION 6.- Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espaces affines, et pour chaque $\iota \in I$, soit A_ι une partie non vide de E_ι . Pour que l'ensemble $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ soit convexe dans $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$, il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, A_ι soit convexe dans E_ι .

En effet, chacune des projections pr_ι est une application linéaire affine, et on a $A_\iota = pr_\iota A$ et $A = \bigcap_{\iota \in I} \overset{-1}{pr_\iota}(A_\iota)$; la proposition résulte donc des prop.2 et 5 .

COROLLAIRE.- Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, tout parallélotope (Top.gén., chap. VI, § 1,n°3) est un ensemble convexe.

En effet, c'est l'image d'un pavé par une application linéaire affine, et un pavé de $\mathbb{R}^n$ est convexe en vertu de la prop.6 .

PROPOSITION 7.- Soient E un espace vectoriel, A et B deux parties convexes de E . Quels que soient les nombres réels α et β l'ensemble $\alpha A + \beta B$ (ensemble des $\alpha x+\beta y$, où x parcourt A et y parcourt b) est convexe.

En effet, $\alpha A+\beta B$ est l'image de l'ensemble convexe $A\times B$ de $E\times E$ par l'application linéaire $(x,y) \to \alpha x+\beta y$ de $E\times E$ dans E .

3. Enveloppe convexe d'un ensemble.

DÉFINITION 2.- Etant donnée une partie quelconque A d'un espace affine E on appelle enveloppe convexe de A l'intersection des ensembles convexes contenant A .

PROPOSITION 8.- Soit $(A_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de parties convexes d'un espace affine E ; l'enveloppe convexe de la réunion $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota$ est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{\iota\in I} \lambda_\iota x_\iota$, où $x_\iota \in A_\iota$ et $\lambda_\iota \geqslant 0$ pour tout $\iota\in I$ ($\lambda_\iota=0$ sauf pour un nombre fini d'indices) et $\sum_{\iota\in I} \lambda_\iota = 1$.

En effet, l'ensemble C de ces combinaisons est évidemment contenu dans tout ensemble convexe contenant la réunion des A_ι , et d'autre part on a $A_\iota \subset C$ pour tout ι ; tout revient à prouver que C est convexe. Soient $x=\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$, $y = \sum_\iota \mu_\iota y_\iota$ deux points de C , et α un nombre tel que $0<\alpha<1$; posons $\gamma_\iota = \alpha\lambda_\iota+(1-\alpha)\mu_\iota$ pour tout ι , et soit J la partie (finie) de I formée des indices ι tels que $\gamma_\iota\neq 0$; on peut écrire $\alpha x+(1-\alpha)y = \sum_{\iota\in J} \gamma_\iota z_\iota$, où $z_\iota = \dfrac{\alpha\lambda_\iota x_\iota+(1-\alpha)\mu_\iota y_\iota}{\alpha\lambda_\iota+(1-\alpha)\mu_\iota}$ appartient à A_ι pour tout $\iota\in J$; comme $\sum_{\iota\in J} \gamma_\iota = \alpha.\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota+(1-\alpha)\sum_{\iota\in I}\mu_\iota=1$, le point $\alpha x+(1-\alpha)y$ appartient à C .

COROLLAIRE 1.- L'enveloppe convexe de la réunion de deux ensembles convexes A,B est la réunion des ensembles $\lambda A+(1-\lambda)B$, lorsque λ parcourt l'intervalle $[0,1]$.

COROLLAIRE 2.- L'enveloppe convexe d'une partie A de E est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_i \lambda_i x_i$, où (x_i) est une famille finie quelconque de points de A , $\lambda_i > 0$ pour tout i et $\sum_i \lambda_i=1$.

La dimension de la variété linéaire affine engendrée par un ensemble convexe A , lorsqu'elle est finie (autrement dit (Alg., chap.IX) le rang affine de A) est encore appelée la dimension de l'ensemble convexe A Si B est une partie quelconque de E , le rang affine de B (lorsqu'il est défini) est égal à la dimension de l'enveloppe convexe de B .

4. Cônes convexes.

On dit qu'une partie C d'un espace affine E sur $\mathbf{R}$ est un cône de sommet x_0 si C est stable pour les hom. ≥ 0 ~~est une réunion de demi-droites fermées d'origine~~ $\cancel{x_0}$. Nous supposerons dans ce n° et le suivant qu'on a choisi comme origine dans E le sommet du cône que l'on considère ; autrement dit, nous supposerons que E est un espace vectoriel et quand nous parlerons de cônes, il sera sous-entendu que leur sommet est au point 0 . Le complémentaire de 0 par rapport à un cône C sera appelé cône épointé : on peut encore caractériser un tel ensemble comme réunion de demi-droites ouvertes d'origine 0 .

PROPOSITION 9.- Pour qu'un ensemble $C \subset E$ soit un cône convexe, il faut et il suffit que l'on ait $C+C \subset C$ et $\lambda C \subset C$ pour tout $\lambda \geqslant 0$.

En effet, pour tout cône C (de sommet 0), on a $\lambda C=C$ pour tout $\lambda > 0$, et $0.C \subset C$; si C est convexe, on a $C+C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C \subset C$. Inversement, si C satisfait aux conditions de l'énoncé, c'est évidemment un cône, donc on a $\lambda C=C$ pour $\lambda > 0$; il s'ensuit que pour $0 < \lambda < 1$, on a $\lambda C+(1-\lambda)C=C+C \subset C$, ce qui prouve que C est convexe.

COROLLAIRE 1.- Si C est un cône convexe, le sous-espace vectoriel engendré par C est l'ensemble $C-C$ (ensemble des $x-y$, où x et y parcourant C).

En effet, si $V=C-C$, on a $\lambda V=V$ pour tout $\lambda \neq 0$ et $V+V = (C+C)-(C+C) \subset C-C = V$, ce qui montre que V est un sous-espace vectoriel, et tout sous-espace vectoriel contenant C contient évidemment V

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> C <u>est un cône convexe</u>, $C \cap (-C)$ <u>est le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans</u> C .

En effet, tout sous-espace vectoriel contenu dans C est évidemment contenu dans $C \cap (-C) = W$; d'autre part, on a $\lambda W = W$ pour tout $\lambda \neq 0$ et $W + W \subset (C+C) \cap (-(C+C)) \subset C \cap (-C) = W$, ce qui prouve que W est un sous-espace vectoriel.

PROPOSITION 10.- <u>Si</u> C <u>est un cône convexe ne contenant aucune droite, le cône épointé complètement de</u> 0 <u>par rapport à</u> C <u>est convexe</u>.

En effet, si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ sont deux points de C , et $0 < \lambda < 1$, on a $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$ et la relation $\lambda x = -(1-\lambda)$ entraînerait que la droite passant par 0 et x serait contenue dans C contrairement à l'hypothèse.

Il est clair que si f est une application linéaire homogène de E dans un espace vectoriel F , l'image $f(C)$ de tout cône convexe dans E est un cône convexe dans F .

Toute intersection de cônes convexes (de sommet 0) est un cône convexe ou est réduite à 0 . Pour tout ensemble $A \subset E$ contenant un point $\neq 0$ au moins, l'intersection de tous les cônes convexes contenant A (il en existe, ne serait-ce que E lui-même) est donc le plus petit cône convexe contenant A ; on dit que c'est le cône convexe <u>engendré</u> par A .

PROPOSITION 11.- <u>Soit</u> $(C_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille non vide de cônes convexes dans</u> E ; <u>le cône convexe engendré par la réunion</u> $\bigcup_{\iota \in I} C_\iota$ <u>est identique à l'ensemble des sommes</u> $\sum_{\iota \in I} x_\iota$ <u>où</u> $x_\iota \in C_\iota$ <u>pour tout</u> $\iota \in I$ ($x_\iota = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices).

En effet, l'ensemble C de ces sommes est évidemment un cône contenu dans tout cône convexe contenant la réunion des C_ι , et on a $C_\iota \subset C$ pour tout ι ; il est clair d'autre part que $C + C \subset C$, donc C est un cône convexe, ce qui établit la proposition.

COROLLAIRE 1.- Si C_1 et C_2 sont deux cônes convexes, C_1+C_2 est le cône convexe engendré par $C_1 \cup C_2$.

COROLLAIRE 2.- Soit A une partie de E contenant au moins un point $\neq 0$; le cône convexe engendré par A est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_i \lambda_i x_i$, où (x_i) est une famille finie quelconque de points de A et où $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i .

Il suffit de remarquer que le cône convexe engendré par A est aussi le cône convexe engendré par la réunion des demi-droites d'origine 0 passant par les points de A .

PROPOSITION 12.- Soit A une partie convexe de E , contenant au moins un point $\neq 0$. Le cône convexe engendré par A est identique à la réunion des demi-droites fermées d'origine 0 passant par les points $\neq 0$ de A .

En effet, la réunion C de ces demi-droites est identique à la réunion des ensembles λA , lorsque λ parcourt l'intervalle $[0,+\infty[$. Tout revient à prouver que C est convexe ; or, si λx et μy sont deux points de C $(\lambda \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0,\ x \in A,\ y \in A)$, supposons par exemple que $\lambda \leqslant \mu$. Alors λx et μy appartiennent tous deux à la réunion des ensembles ρA où $0 \leqslant \rho \leqslant \mu$; mais cet ensemble n'est autre que l'enveloppe convexe de $\{0\}$ et de μA (cor.1 dela prop.8) ; donc tout point du segment d'extrémités λx et μy est de la forme ρz , où $\rho \geqslant 0$ et $z \in A$, ce qui démontre la proposition.

Remarques.- 1) On notera que si $0 \notin A$, le cône convexe C engendré par A ne contient pas de droite, sinon il existerait un point $x \neq 0$ de A et un nombre $\lambda < 0$ tel que $\lambda x \in A$; mais 0 appartient au segment d'extrémités x et λx , donc on aurait $0 \in A$ contrairement à l'hypothèse. On voit donc que dans ce cas, le cône épointé complémentaire de 0 dans C est convexe (prop.10).

2) Soit A un ensemble convexe quelconque dans E ; considérons, dans l'espace $F = E \times \mathbb{R}$, l'ensemble convexe $A_1 = A \times \{1\}$, et le cône convexe C de sommet 0 engendré par A_1, c'est-à-dire l'ensemble des points $(\lambda x, \lambda)$ de F, où λ parcourt l'ensemble des nombres $\geqslant 0$ et x parcourt A ; il est clair que A_1 est l'intersection de C et de l'hyperplan $E \times \{1\}$ dans F. Tout ensemble convexe dans E peut donc être considéré comme la projection sur E de l'intersection d'un cône convexe de sommet 0 dans F et de l'hyperplan $E \times \{1\}$.

5. Espaces vectoriels ordonnés.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; on dit qu'une structure d'ordre sur E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E si elle satisfait aux deux axiomes suivants :

(EO_I) La relation $x \leqslant y$ entraîne $x+z \leqslant y+z$ quel que soit $z \in E$.

(EO_{II}) La relation $x \geqslant 0$ entraîne $\lambda x \geqslant 0$ pour tout scalaire $\lambda \geqslant 0$.

L'espace E, muni de ces deux structures, est appelé espace vectoriel ordonné. On notera que l'axiome (EO_I) signifie que la structure d'ordre et la structure de groupe additif de E sont compatibles, autrement dit que E, muni de ces deux structures, est un groupe ordonné (Alg., chap.VI, § 1).

Il résulte en particulier de la théorie des groupes ordonnés que les relations $x \leqslant y$ et $x+z \leqslant y+z$ sont équivalentes. De même on déduit de (EO_{II}) que les relations $x \leqslant y$ et $\lambda x \leqslant \lambda y$ sont équivalentes pour tout scalaire $\lambda > 0$: en effet, la relation $\lambda x \leqslant \lambda y$ est équivalente à $\lambda(y-x) \geqslant 0$, donc entraîne $\lambda^{-1}(\lambda(y-x)) \geqslant 0$, qui est équivalente à $x \leqslant y$.

PROPOSITION 13.- <u>Si</u> E <u>est un espace vectoriel ordonné</u>, <u>l'ensemble</u> P <u>des éléments</u> $\geqslant 0$ <u>de</u> E <u>est un cône convexe dans</u> E . <u>Inversement, soit</u> P <u>un cône convexe dans un espace vectoriel</u> E , <u>tel que</u> $P \cap (-P) = \{0\}$; <u>il existe alors une relation d'ordre et une seule dans</u> E (<u>savoir la relation</u> $y-x \in P$) <u>compatible avec la structure d'espace vectoriel de</u> E <u>et pour laquelle l'ensemble des éléments positifs soit identique à</u> P .

La première partie est immédiate, car les axiomes (EO_I) et (EO_{II}) entraînent $P+P \subset P$ et $\lambda P \subset P$ pour tout $\lambda \geqslant 0$ (cf.prop.9). Réciproquement, si P est un cône convexe, les relations $P+P \subset P$ et $P \cap (-P) = \{0\}$ entraînent que la relation $y-x \in P$ dans E est une relation d'ordre dans E compatible avec la structure de groupe additif de E ; et la relation $\lambda P \subset P$ pour $\lambda \geqslant 0$ signifie que l'axiome (EO_{II}) est satisfait.

Si P est un cône convexe quelconque dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, $P \cap (-P)$ est un sous-espace vectoriel H de E (cor.2 de la prop.9). L'image canonique P' de P dans l'espace quotient E/H est un cône convexe, et l'image réciproque de P' dans E est P ; donc on a $P' \cap (-P') = \{0\}$, et P' définit sur E/H une structure d'ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel.

On dit qu'une forme linéaire f sur un espace vectoriel ordonné E est <u>positive</u> si pour tout $x \geqslant 0$ dans E , on a $f(x) \geqslant 0$. Si f n'est pas identiquement nulle, il revient au même de dire que le cône convexe P des éléments $\geqslant 0$ de E est <u>contenu dans le demi-espace fermé</u> $f(x) \geqslant 0$ défini par f . Il est clair que, dans le dual algébrique E^* de E , les formes linéaires positives forment un <u>cône convexe</u> (cf.chap.III, §   ).

6. Points internes d'un ensemble convexe.

DÉFINITION 3.- Etant donné un ensemble convexe A dans un espace ~~vectoriel~~ affine E sur $\mathbb{R}$, on dit qu'un point $x_0 \in A$ est point interne de A si, pour tout point $x \in A$ distinct de x_0, l'intersection de A et de la droite passant par x_0 et x contient un segment ouvert auquel appartient x_0.

Exemples.- Si A est réduit à un point x_0, x_0 est point interne de A. Dans un segment, tout point distinct des extrémités est point interne. Tout point d'une variété linéaire affine est point interne de cette variété. Si un ensemble convexe A est symétrique (c.à.d. si $-A=A$), 0 est point interne de A. Pour tout espace E de dimension infinie, il existe dans E des ensembles convexes non vides n'ayant aucun point interne (exerc.4).

PROPOSITION 14.- Soit A un ensemble convexe, V la variété linéaire affine engendrée par A. Pour qu'un point $x_0 \in A$ soit point interne de A, il faut et il suffit que pour toute droite D passant par x_0 et contenue dans V, $D \cap A$ contienne un segment ouvert auquel appartient x_0.

La condition est évidemment suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, supposons A non réduit à x_0, et considérons le cône convexe C de sommet x_0 engendré par A ; pour tout point $x \in C$ distinct de x_0, il existe un $\lambda > 0$ tel que $x_0+\lambda(x-x_0) \in A$; par suite il existe $\mu > 0$ tel que $x_0-\mu(x-x_0) \in A$ puisque x_0 est point interne de A ; cela entraîne que la droite passant par x_0 et x est tout entière contenue dans C, et par suite (cor.2 de la prop.9) $C=V$, d'où la proposition.

Il revient au même de dire que le cône convexe de sommet x_0 engendré par A est une variété linéaire.

COROLLAIRE 1.- Si le sommet d'un cône convexe C est point interne de C, C est identique à la variété linéaire affine qu'il engendre.

COROLLAIRE 2.- Soient A et B deux ensembles convexes tels que $B \quad A$; si A et B engendrent la même variété linéaire affine, tout point interne de B est point interne de A .

PROPOSITION 15.- Soit f une application linéaire affine de E dans F ; si x_0 est un point interne de l'ensemble convexe $A \subset E$, $f(x_0)$ est point interne de $f(A)$.

En effet, si $z \in A$ est tel que $f(z) \neq f(x_0)$, l'image par f de la droite D joignant x_0 et z est la droite joignant $f(x_0)$ et $f(z)$, et comme $D \cap A$ contient un segment ouvert auquel appartient x_0 , l'image par f de ce segment est un segment ouvert contenu dans $f(D) \cap f(A)$ et auquel appartient $f(x_0)$.

PROPOSITION 16.- Soient A un ensemble convexe, x_0 un point interne de A, $x \neq x_0$ un point quelconque de A . Tout point du segment ouvert d'extrémités x_0 et x est point interne de A .

En effet, soit y un point quelconque de ce segment ; y est l'image de x_0 par une homothétie f de centre x et de rapport λ tel que $0 < \lambda < 1$; on a donc $f(A) \subset A$ et les variétés linéaires affines engendrées par A et $f(A)$ sont identiques. Or, $f(x_0)=y$ est point interne de $f(A)$ (prop.15), donc aussi de A (cor.2 de la prop.14).

COROLLAIRE 1.- L'ensemble B des points internes d'un ensemble convexe A est un ensemble convexe, et tout point de B est point interne de B .

COROLLAIRE 2. Soit x_0 un point interne d'un ensemble convexe A , et soit x un point non interne de A ; l'intersection de A et de la droite passant passant par x_0 et x est un segment ou une demi-droite dont x est une extrémité.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, x serait point interne de A d'après la prop.7 .

<u>Remarque</u>.- Si C est un cône convexe de sommet x_0 , et x un point interne de C , tout point de la demi-droite ouverte d'origine x_0 passant par x est interne dans C , car toute homothétie de centre x_0 et de rapport >0 transforme C en lui-même.

PROPOSITION 17.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces affines</u>, A (resp. B) <u>un ensemble convexe dans</u> E (resp. F). <u>Si</u> x <u>est un point interne de</u> A <u>et</u> y <u>un point interne de</u> B , (x,y) <u>est point interne de</u> $A\times B$ <u>et réciproquemen</u>

En effet, soit (u,v) un point de $A\times B$ distinct de (x,y) ; supposons par exemple que $u\neq x$. Alors, par définition, il existe $r>0$ tel que le point $x+\lambda(u-x)$ appartienne à A pour $|\lambda|\leq r$; si $v\neq y$ il existe de même r' tel que $y+\lambda(v-y)$ appartienne à B pour $|\lambda|<r'$; si au contraire $v=y$, on a $y+\lambda(v-y)=y$ pour tout λ ; de toutes façons le point $(x+\lambda(u-x),y+\lambda(v-y))=(x,y)+\lambda((u,v)-(x,y))$ appartient à $A\times B$ pour $\lambda<\min(r,r')$, ce qui prouve la première partie de la proposition La réciproque est une conséquence immédiate de la prop.15 .

COROLLAIRE 1.- <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux ensembles convexes dans un espace vectoriel</u> E , x <u>un point interne de</u> A , y <u>un point interne de</u> B . <u>Quels que soient les scalaires</u> α <u>et</u> β , $\alpha x+\beta y$ <u>est point interne de</u> $\alpha A+\beta B$.

Cela résulte aussitôt des prop. 17 et 15 .

COROLLAIRE 2.- <u>Soient</u> a <u>un point quelconque de</u> E , x_0 <u>un point interne d'un ensemble convexe</u> $A\subset E$; <u>alors</u> x_0 <u>est aussi point interne du cône de sommet a engendré par</u> A .

En effet, on peut supposer que $x_0=0$; le cône C de sommet a engendré par A est l'ensemble des points $a+\lambda(x-a)$, où $\lambda\geqslant 0$ et $x\in A$.

Soit S le segment fermé d'extrémités $\frac{1}{2}a$ et $-\frac{1}{2}a$; alors C contient l'ensemble $S+\frac{1}{2}A$, car pour $-\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ et $y\in\frac{1}{2}A$, on peut écrire $\lambda a+y=(1-\mu)a+\mu x$, avec $\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 3/2$, et $x=\frac{1}{\mu}y$ appartient à A puisque $0<\frac{1}{\mu}\leqslant 2$. Comme 0 est point interne de S et de $\frac{1}{2}A$, il est aussi point interne de $S+\frac{1}{2}A$ (cor.1), donc de C puisque $S+\frac{1}{2}A$ et C engendrent la même variété linéaire (cor.2 de la prop.14).

7. Ensembles convexes dans les espaces vectoriels topologiques.

PROPOSITION 18.- Dans un espace vectoriel topologique E sur $\mathcal{R}$, l'adhérence d'un ensemble convexe (resp. d'un cône convexe) est un ensemble convexe (resp. un cône convexe de même sommet).

En effet, soit A un ensemble convexe ; pour tout λ tel que $0<\lambda<1$ l'application $(x,y)\rightarrow\lambda x+(1-\lambda)y$ est continue dans $E\times E$ et applique $A\times A$ dans A, donc (Top.gén., chap.I, § 4, prop.1) elle applique $\overline{A}\times\overline{A}$ dans $\overline{A}$, ce qui démontre que $\overline{A}$ est convexe. On prouve de même que si C est un cône convexe de sommet 0, on a $\overline{C}+\overline{C}\subset\overline{C}$ et $\lambda\overline{C}\subset\overline{C}$ pour tout $\lambda>0$.

PROPOSITION 19.- Dans un espace vectoriel topologique E, soit A un ensemble convexe ayant au moins un point intérieur x_0. Pour tout point $x\in\overline{A}$, tout point du segment ouvert d'extrémités x_0 et x est point intérieur de A.

En effet, soit y un point de ce segment, et soit f l'homothétie de centre y qui transforme x_0 en x ; si V est un voisinage ouvert de x_0 contenu dans A, f(V) est un voisinage de x, donc contient un point $f(z)\in A$ par hypothèse ; l'homothétie g de centre f(z) qui transforme z en y (et qui est de rapport λ tel que $0<\lambda<1$) transforme alors V en un voisinage de y contenu dans A, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1.- Si l'ensemble convexe A contient au moins un point intérieur, l'ensemble de ses points internes est identique à l'ensemble de ses points intérieurs.

En effet, si x est point intérieur de A , et V un voisinage de x contenu dans A , pour toute droite D passant par x , $D \cap V$ contient un segment ouvert auquel appartient x (chap.I, § 1) donc x est point interne de A . Inversement, si A possède un point intérieur x_0 , pour tout point interne x de A , il existe $t > 0$ tel que $y = x + t(x - x_0)$ appartienne à A ; comme x est alors un point du segment ouvert d'extrémités x_0 et y , x est point intérieur de A d'après la prop.19.

COROLLAIRE 2.- Si A est un ensemble convexe contenant des points intérieurs, l'intérieur de A est identique à l'intérieur de $\overline{A}$, l'adhérence de A est identique à l'adhérence de $\mathring{A}$.

En effet, tout point frontière x de A est adhérent à $\mathring{A}$ d'après la prop.19 ; d'autre part, il ne peut être intérieur à $\overline{A}$, car il serait alors point interne de $\overline{A}$ (cor.1), donc il appartiendrait à un segment ouvert dont une extrémité serait point intérieur de A , et l'autre appartiendrait à $\overline{A}$; en vertu de la prop.19, x serait alors point intérieur de A , contrairement à l'hypothèse.

DÉFINITION 4.- Dans un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, on appelle corps convexe un ensemble convexe fermé ayant au moins un point intérieur.

L'adhérence d'un ensemble convexe ayant au moins un point intérieur est donc un corps convexe.

PROPOSITION 20.- Soient E un espace vectoriel topologique séparé, A un ensemble convexe non vide dans E et de dimension finie, V la variété linéaire affine engendrée par A . Pour qu'un point de A soit point interne il faut et il suffit qu'il soit intérieur à A par rapport à V ; l'ensemble de ces points est dense par rapport à A (et par suite est non vide).

On peut se borner au cas où V est un sous-espace vectoriel de E ; alors, comme E est séparé, le sous-espace V est isomorphe à un espace $\mathbf{R}^n$. On peut donc se borner au cas où $E=V=\mathbf{R}^n$; comme A engendre E, il existe $n+1$ points de A formant un système affinement libre ; par une translation, on peut supposer que ces points sont l'origine et les n vecteurs e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ d'une base de E. A contient alors tous les points $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, où $\lambda_k \geqslant 0$ et $0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leqslant 1$ (prop.1) ; par suite, il contient aussi le parallèlotope ouvert formé des points tels que $0 < \lambda_k < 1/n$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$; ceci montre que l'intérieur de A n'est pas vide ; la proposition résulte alors des cor.1 et 2 de la prop.19 .

Dans un espace vectoriel topologique E de dimension <u>infinie</u> sur $\mathbf{R}$, un ensemble convexe qui engendre E peut avoir tous ses points internes, mais aucun point intérieur (cf. §3, exerc.4).

remonté

8. <u>Cônes convexes maximaux</u>.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. On dit qu'un cône convexe C (de sommet 0) dans E est <u>maximal</u> s'il est élément maximal de l'ensemble des cônes convexes $\neq E$, ordonné par inclusion.

THÉORÈME 1.- <u>Pour qu'un cône convexe C soit maximal, il faut et il suffit qu'il soit identique à un demi-espace fermé défini par un hyperplan passant par</u> 0 .

La condition est <u>suffisante</u>. En effet, soit H un hyperplan passant par 0, et C un des demi-espaces fermés définis par H ; si $x_0 \notin C$, l'ensemble des points $\lambda x_0 + y$, où $\lambda > 0$ et $y \in H$, est le demi-espace ouvert complémentaire de C, donc tout cône convexe contenant C et x_0 est identique à E .

Montrons que la condition est <u>nécessaire</u>. Prouvons en premier lieu que si C est maximal, on a $C \cup (-C) = E$. En effet, dans le cas contraire, il existerait $z \in E$ tel que $z \notin C$ et $-z \notin C$. Le cône convexe C_1 engendré par C et z est alors distinct de C, et $-z$ n'appartient pas à C_1, car C_1 est l'ensemble des points $\lambda z+y$, avec $\lambda \geqslant 0$ et $y \in C$, et la relation $-z=\lambda z+y$ donnerait $-(1+\lambda)z=y$, donc on aurait $-z \in C$ contrairement à l'hypothèse. On aurait donc $C_1 \neq E$ et C ne serait pas maximal.

Montrons en second lieu que si z est un point <u>non interne</u> de C, $-z \in C$. Supposons le contraire, et montrons que dans ce cas le cône convexe C_2 engendré par $-z$ et C serait distinct de C et de E, contrairement à l'hypothèse. En effet, s'il n'en était pas ainsi tout $x \in E$ pourrait s'écrire $x=-\lambda z+y$ avec $\lambda \geqslant 0$ et $y \in C$, d'où $z+\frac{1}{\lambda}x = \frac{1}{\lambda}y$, si $\lambda \neq 0$, et par suite sur toute demi-droite ouverte d'origine z et de vecteur directeur $x \notin C$, il y aurait des points de C. Mais par hypothèse il y a au moins une demi-droite ouverte d'origine z qui ne contient aucun point de C, et on vérifie sans peine que son vecteur directeur ne peut appartenir à C.

Ces propriétés montrent en premier lieu que C admet des points internes, sans quoi on aurait $C=-C=C \cup (-C)=E$ contrairement à la définition. Soit $V=C \cap (-C)$; on sait que V est le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C (cor.2 de la prop.9). Nous allons montrer que E/V est de dimension 1, ce qui montrera que V est un hyperplan contenu dans C ; comme C engendre E, il a au moins un point $x_0 \notin V$, donc est un demi-espace fermé défini par V.

Supposons que E/V ait une dimension >1, et soit f l'application canonique de E sur E/V ; $C'=f(C)$ est un cône convexe maximal dans E/V, ayant des points internes (prop.15), tel que $C'\cup(-C')=E/V$ et $C'\cap(-C')=\{0\}$. Soit x_0 un point interne de C', et considérons un plan P passant par 0 et x_0 ; soit $D=P\cap C'$. Comme tous les points de C' à l'exception de 0 sont internes (puisque C' $(-C')$ est réduit à 0 et que C' est maximal dans E/V), tous les points de D sauf 0 sont internes ; si on munit P de l'unique topologie séparée compatible avec sa structure d'espace vectoriel, le complémentaire D' de 0 dans D est donc <u>ouvert</u> dans P (cor.1 de la prop.19). Le complémentaire de 0 dans P serait donc réunion de deux ensembles ouverts D' et $-D'$ sans point commun, ce qui est absurde, car on sait que dans un plan ~~mm~~ le complémentaire d'un point est connexe (<u>Top.gén.</u>, chap.VI, § 2, n°   ).

C.Q.F.D.

Z <u>Remarque</u>.- Etant donné un cône convexe dans E , il n'existe pas toujours un cône convexe maximal le contenant (exerc.4).

9. <u>Points fixes des ensembles convexes compacts</u>.

THÉORÈME 2.- <u>Soient</u> E <u>un espace vectoriel topologique séparé sur</u> $\mathbb{R}$, K <u>un ensemble convexe compact dans</u> E , Γ <u>un ensemble d'applications linéaires affines de</u> E <u>dans lui-même</u>, <u>dont les restrictions à</u> K <u>sont continues, deux à deux permutables et telles que</u> $u(K)\subset K$ <u>pour tout</u> $u\in\Gamma$. <u>Alors il existe un point</u> $x_0\in K$ <u>tel que</u> $u(x_0)=x_0$ <u>pour tout</u> $u\in\Gamma$.

Désignant par e l'application identique de E sur lui-même, nous poserons, pour tout $u\in\Gamma$ et tout entier $n>0$, $u_n=\frac{1}{n}(e+u+\dots+u^{n-1})$. Il est clair que u_n est une application linéaire affine de E dans lui-même, et l'hypothèse que K est convexe et $u(K)\subset K$ entraîne que $u_n(K)\subset K$ pour tout n et que u_n est continue dans K . Soit Γ_1 l'ensemble des produits d'un nombre fini d'applications de la forme u_n , où $u\in\Gamma$ et n est un entier >0 ; il est clair que Γ_1 est, comme Γ , un ensemble d'applications linéaires affines de E dans lui-même, dont les restrictions à K sont continues, deux à deux permutables et telles que $v(K) \subset K$ pour tout $v \in \Gamma_1$. De ces deux dernières propriétés résulte que l'ensemble $\mathfrak{B}$ des ensembles $v(K)$, où v parcourt Γ_1, est une <u>base de filtre</u>; en effet, si v et w sont deux éléments de Γ_1, on a, en posant $u=vw=wv$, $u(K)=v(w(K)) \subset v(K)$ et de la même manière $u(K) \subset w(K)$. Comme les ensembles de $\mathfrak{B}$ sont <u>compacts</u> par hypothèse, leur intersection A est un ensemble compact <u>non vide</u> ; d'autre part les $v(K)$ où $v \in \Gamma_1$, sont convexes, donc il en est de même de A.

Prouvons maintenant que pour tout $v \in \Gamma_1$, on a $v(A)=A$. Pour tout $w \in \Gamma_1$, on a $v(w(K))=w(v(K)) \subset w(K)$, donc $v(A) \subset w(K)$, et par définition de A, cela entraîne $v(A) \subset A$. Supposons qu'on ait $v(A) \neq A$; il existerait donc un point $x \in A$ tel que $x \notin v(A)$; comme $v(A)$ est compact, il y aurait par suite un voisinage U de $v(A)$ dans K tel que $x \notin U$. Or $\overset{-1}{v}(U) \cap K$ est un voisinage de A, puisque v est continue dans K ; d'après la définition de A comme intersection d'ensembles compacts, il existerait un $w \in \Gamma_1$ tel que $w(K) \subset \overset{-1}{v}(U)$ (<u>Top. gén.</u>, chap. I, 2è éd., § 10, th. 1) ; on aurait donc $v(w(K)) \subset U$, et par suite $x \notin v(w(K))$, ce qui est contradictoire avec la définition de A.

Nous allons montrer maintenant que pour tout $x \in A$, on a $u(x)=x$ A. pour tout $u \in \Gamma$ ce qui établira le théorème. En effet, comme $u_n \in \Gamma_1$ par construction, on a $u_n(A)=A$, donc pour tout entier $n>0$ il existe $z_n \in A$ tel que $u_n(z_n)=x$. On peut donc écrire

$$(1) \qquad x-u(x)=u_n(z_n)-u(u_n(z_n))=\frac{1}{n}(z_n-u^n(z_n))$$

Or, soit V un voisinage quelconque de 0 tel que $\mu V \subset V$ pour $0 \leqslant \mu \leqslant 1$; comme K est borné, ainsi que K-K, il existe a 0 tel que $K-K \subset aV$. Comme $u^n(z_n) \in K$ la formule (1) prouve que $x-u(x) \in \frac{a}{n} V$.

Il suffit donc de prendre $n > \alpha$ pour avoir $x-u(x) \in V$; comme l'espace E est séparé, cela montre que $x=u(x)$, et achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Soient K un ensemble convexe compact dans E, Γ un groupe d'applications linéaires affines continues de E dans lui-même, tel que $u(K) \subset K$ pour tout $u \in \Gamma$. On suppose en outre qu'il existe dans Γ un sous-groupe abélien distingué Δ tel que Γ/Δ soit abélien. Alors il existe un point $x_0 \in K$ tel que $u(x_0)=x_0$ pour tout $u \in \Gamma$.

Le th.2 montre d'abord que l'ensemble A des points $x \in K$ tels que $v(x)=x$ pour tout $v \in \Delta$, n'est pas vide, puisque Δ est abélien. En outre, cet ensemble est évidemment convexe et fermé dans K, donc compact. Soit u quelconque dans Γ ; pour tout $v \in \Delta$, on a $uvu^{-1} \in \Delta$, donc $v(u^{-1}(x))=u^{-1}(x)$ pour tout $x \in A$, et par définition de A, cela prouve que $u(A)=A$; en outre, si u_1 et u_2 sont deux transformations de Γ telles que $u_1=u_2v$, où $v \in \Delta$, on a, pour tout $x \in A$, $u_1(x)=u_2(v(x))=u_2(x)$; cela montre que les restrictions à A des transformations de Γ forment un groupe isomorphe à un groupe quotient de Γ/Δ, donc abélien. L'application du th.2 à ce groupe et à l'ensemble compact convexe A prouve alors le corollaire.

Exercices.- 1) Dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, on dit qu'un ensemble A est étoilé par rapport à 0 si, pour tout $x \in A$ et tout nombre λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$, λx appartient à A. Soit A un ensemble étoilé, tel que, pour tout $x \in A$, il existe $\mu > 1$ tel que $\mu x \in A$. Montrer que si, pour tout couple (x,y) de points de A, $\frac{1}{2}(x+y)$ appartient à A, A est convexe. Donner un exemple d'ensemble étoilé non convexe A tel que $\frac{1}{2}(A+A) \subset A$.

2) Soient A un ensemble convexe, B un ensemble quelconque contenant A. Montrer que, parmi les ensembles convexes contenant A et

contenus dans B , il existe au moins un ensemble maximal.

3) Soient E et F deux espaces affines, A un ensemble convexe dans E admettant des points internes, f une application linéaire affine de E dans F . Montrer que tout point interne de f(A) est l'image par f d'un point interne de A (considérer l'image $z_0=f(x_0)$ d'un point interne de A et utiliser la prop.16).

4) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ admettant une base infinie dénombrable (e_n) . Soit C l'ensemble des points $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ tels que, pour le plus grand indice n tel que $\xi_n \neq 0$, on ait $\xi_n > 0$. Montrer que C est un cône convexe n'ayant aucun point interne, tel que $C \cap (-C) = \{0\}$ et $C \cup (-C) = E$; en déduire que C est l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ dans E , pour une structure d'ordre pour laquelle E est totalement ordonné. Montrer qu'il n'existe aucun cône convexe maximal contenant C ; en d'autres termes, sur l'espace vectoriel ordonné E , il n'existe aucune forme linéaire positive non identiquement nulle.

5) Soit E un espace affine sur $\mathbb{R}$, f une application biunivoque de E sur lui-même ; montrer que si l'image par f de tout ensemble convexe dans A est un ensemble convexe, f est une application linéaire affine (remarquer qu'un segment fermé est l'intersection des ensembles convexes qui contiennent ses extrémités).

6) Soient A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ un nombre fini d'ensembles convexes dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$; soit W_i le sous-espace vectoriel parallèle à la variété linéaire affine engendrée par A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Si W est le sous-espace $\sum_{i=1}^{p} W_i$, montrer que la variété linéaire affine engendrée par l'ensemble convexe $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i$ (ou' les λ_i sont tous $\neq 0$) est parallèle à W .

7) Soit A une partie quelconque d'un espace affine de dimension n sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'enveloppe convexe de A est identique à l'ensemble des points $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$, où $x_i \in A$ et $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. (On établira d'abord le lemme suivant : si les p+1 points x_i $(0 \leqslant i \leqslant p)$ forment un système affinement lié (c'est-à-dire s'il existe une relation $\sum_{i=0}^{p} \beta_i x_i = 0$ où les β_i ne sont pas tous nuls et $\sum_{i=0}^{p} \beta_i = 0$), et si $x = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i$, où les α_i sont $\geqslant 0$ et $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i = 1$, alors il existe un indice k et p nombres γ_i $(i \neq k)$ tels que $\gamma_i \geqslant 0$, $\sum_{i \neq k} \gamma_i = 1$ et $x = \sum_{i \neq k} \gamma_i x_i$; pour cela, on comparera ceux des nombres α_i/β_i qui sont définis).

8) a) Soient A_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ $r > n+1$ ensembles convexes dans un espace affine E de dimension n sur $\mathbb{R}$; on suppose que r-1 quelconques des A_i ont une intersection non vide ; montrer que les r ensembles A_i ont une intersection non vide (soit x_i un point de l'intersection des A_j d'indice $j \neq i$; il existe r nombres λ_i non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = 0$; grouper dans ces équations les termes correspondant aux $\lambda_i \geqslant 0$ et ceux correspondant aux $\lambda_i < 0$).

b) Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble d'ensembles convexes compacts dans E . Montrer que, pour que l'intersection des ensembles $A \in \mathfrak{S}$ soit non vide, il suffit que l'intersection de n+1 quelconques d'entre eux soit non vide.

9) Montrer que, dans un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, l'enveloppe convexe d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert.

10) Montrer que, dans $\mathbb{R}^n$, tout ensemble convexe ouvert non vide est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (utiliser l'exerc.12 de <u>Top.gén.</u>, chap.VI, § 2).

11) Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, et soit A un corps convexe dans E . Pour chaque $x \in A$, soit V(x) la réunion des droites passant par x et contenues dans A ; montrer que V est

est une variété linéaire fermée, et que pour deux points quelconques x,y de A, $V(x)$ et $V(y)$ se déduisent l'une de l'autre par translation. En déduire que, si W est le sous-espace vectoriel déduit de l'un quelconque des $V(x)$ par translation, et si φ est l'application canonique de E sur E/W, on a $A = \overset{-1}{\varphi}(B)$, où B est un corps convexe dans E/W, ne contenant aucune droite.

12) Soit A un ensemble convexe fermé non borné dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout point $x \in A$, montrer qu'il existe au moins une demi-droite fermée d'origine x, contenue dans A. L'ensemble $C(x)$ des demi-droites fermées d'origine x, contenues dans A, est un cône convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$. Pour deux points quelconques x,y de A, les cônes convexes $C(x)$ et $C(y)$ se déduisent l'un de l'autre par une translation.

13) Soit C un cône convexe de sommet 0, fermé dans $\mathbb{R}^n$, ne contenant aucune droite. Montrer que le complémentaire par rapport à la sphère S_{n-1} de l'ensemble $C \cap S_{n-1}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$ (faire une projection stéréographique d'un point de $C \cap S_{n-1}$, et utiliser l'exerc.12 de Top.gén., chap.VI, § 2).

Si C possède un point intérieur, montrer que $C \cap S_{n-1}$ est homéomorphe à la boule fermée B_{n-1} (même méthode).

14) Soit A un corps convexe non borné dans $\mathbb{R}^n$, ne contenant aucune droite. Montrer que la frontière de A est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$ (utiliser les exerc. 12 et 13).

15) Montrer que, dans $\mathbb{R}^n$, pour qu'un ensemble convexe soit fermé, il faut et il suffit que son intersection avec toute droite D soit un ensemble fermé (cf. § 3, exerc.11).

§ 2. Fonctions convexes.

1. Définition d'une fonction convexe.

Soit A une partie d'un ensemble E , f une fonction numérique finie définie dans A , G le graphe ou ensemble représentatif de la fonction f dans l'ensemble produit $E \times \mathbb{R}$, formé des points $M_x = (x, f(x))$, où x parcourt A . Généralisant les définitions données pour les fonctions d'une variable réelle (Fonct.var.réelle, chap.I, § 4) nous dirons qu'un point (a,b) de $E \times \mathbb{R}$ tel que $a \in A$ est au-dessus (resp. strictement au-dessus, au-dessous, strictement au-dessous) de G si on a $b \geqslant f(a)$ (resp. $b > f(a)$, $b \leqslant f(a)$, $b < f(a)$) .

DEFINITION 1.- Etant donnée une partie convexe H d'un espace affine E sur $\mathbb{R}$, on dit qu'une fonction numérique finie f , définie dans H , est convexe (resp. strictement convexe) dans H si, quels que soient les points x,x' de H , tout point du segment $M_x M_{x'}$ distinct des extrémités est au-dessus (resp. strictement au-dessus) du graphe de f .

Autrement dit, la condition pour que f soit convexe (resp. strictement convexe) dans H est que l'on ait l'inégalité

$$f(\lambda x+(1-\lambda)x') \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x')$$

(resp. $$f(\lambda x+(1-\lambda)x') < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x')$$)

pour tout couple de points distincts x,x' de H et tout λ tel que $0 < \lambda < 1$.

La déf.1 montre que, pour que f soit convexe (resp. strictement convexe) dans H , il faut et il suffit que, pour toute droite $D \subset E$, la restriction de f à $H \cap D$ soit convexe (resp. strictement convexe) dans cet ensemble. Soit $t \to at+b$ une représentation paramétrique de D , la variable, t décrivant $\mathbb{R}$; si I est la partie convexe de $\mathbb{R}$ correspondant à $H \cap D$ dans cette représentation paramétrique, il revient au même de dire que la fonction $t \to f(at+b)$ est convexe (resp. strictement convexe) dans I .

Pour qu'une fonction f soit convexe dans une partie convexe H de E , il faut et il suffit que l'ensemble des points de $E \times R$ situés au-dessus du graphe de G soit convexe ; on peut dans cet énoncé remplacer les mots "au-dessus" par "strictement au-dessus". La démonstration est tout à fait analogue à celle de la proposition correspondante pour les fonctions d'une variable réelle (*Fonct.var.* ~~xxx~~ *réelle*, chap.I, § 4,n°); nous laissons au lecteur le soin de la développer.

De même, compte tenu de la prop.1 du § 1, on démontre, comme pour les fonctions d'une variable réelle, la proposition suivante :

PROPOSITION 1.- *Soit* f *une fonction convexe* (resp. *strictement convexe*) *dans une partie convexe* H *de* E . *Pour toute famille finie* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *de* $p \geqslant 2$ *points distincts de* H , *et toute famille* $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *de* p *nombres réels que* $0 < \lambda_i < 1$ *et* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, *on a*

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

(resp.
$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) < \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) .\ )$$

En d'autres termes, l'image par l'application $x \rightarrow (x,f(x))$ de tout centre de gravité des points x_i affectés de masses $\lambda_i > 0$, est au-dessous (resp. strictement au-dessous) du centre de gravité des points $(x_i,f(x_i))$ affectés des mêmes masses.

Nous laissons enfin au lecteur le soin de vérifier que les prop.2,3 et 4 de *Fonct.Var.réelle*, chap.I, § 4, sont encore valables pour des fonctions convexes définies dans une partie convexe d'un espace vectoriel quelconque sur R .

2. Fonctions convexes positivement homogènes.

DÉFINITION 2.- *On dit qu'une fonction numérique finie* p , *définie dans un espace vectoriel* E *sur* R , *est positivement homogène*, *si*, *pour tout* $x \in E$ *et tout* $\lambda \geqslant 0$, *on a* $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (ce qui entraîne $p(0)=0$).

Il revient au même de dire que le <u>graphe</u> de la fonction p dans l'espace $E \times \mathbb{R}$ est un cône de sommet 0 .

Toute fonction <u>linéaire homogène</u> définie dans E est une fonction connexe et positivement homogène.

PROPOSITION 2.- <u>Soit p une fonction convexe et positivement homogène définie dans E . L'ensemble A des points $x \in E$ tels que $p(x) < 1$ est un ensemble convexe, contenant 0 , qui engendre E , et dont tous les points sont internes. Réciproquement, soit A un ensemble convexe contenant 0 , engendrant E , et dont tous les points sont internes ; il existe alors une fonction convexe positivement homogène p et une seule telle que A soit identique à l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) < 1$.</u>

1° La fonction convexe et positivement homogène p étant donnée, soient x et y tels que $p(x) < 1$, $p(y) < 1$; on a $p(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda p(x)+(1-\lambda)p(y) < \lambda+(1-\lambda)=1$ pour $0 < \lambda < 1$, donc l'ensemble A est convexe ; il contient évidemment l'origine 0 de E , et pour tout $x \in E$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda x \in A$, puisque $p(\lambda x)=\lambda p(x)$; on en déduit que A engendre E et que 0 est point interne de A . Enfin, si $x \neq 0$ est un point quelconque de A , on a $p(x) < 1$, donc il existe $\mu > 1$ tel que $p(\mu x)=\mu p(x) < 1$, autrement dit tel que $\mu x \in A$; le point x , appartenant au segment ouvert d'extrémités 0 et μx , est point interne de A (§ 1,prop.16), ce qui achève de démontrer la première partie de la proposition. En outre, pour tout $x \in E$, l'ensemble des $\rho > 0$ tels que $\rho x \in A$ est l'intervalle $0 < \rho < \frac{1}{p(x)}$ ($1/p(x)$ étant pris égal à $+\infty$ lorsque $p(x)=0$), donc on peut écrire $p(x)=1/\sup_{\rho x \in A} \rho$ (en prenant $p(x)=0$ lorsque $\sup_{\rho x \in A} \rho = +\infty$).

2° L'ensemble convexe A étant donné et possédant les propriétés énumérées dans l'énoncé, posons, pour tout $x \neq 0$ dans E , $p(x)=1/\sup_{\rho x \in A} \rho$ (avec la convention $1/+\infty=0$) et $p(0)=0$. Pour tout $x \in E$, l'ensemble des $\lambda > 0$ tels que $\lambda x \in A$ est un intervalle non vide puisque 0 est point interne de A, et cet intervalle est ouvert, car s'il était majoré et contenait son extrémité α, le point αx appartiendrait à A et ne serait pas point interne de A. Comme $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$ en raison de la définition de p, on voit que A est identique à l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) < 1$. Tout revient donc à prouver que p est convexe. Or, soient x et y deux points de E distincts de 0 ; soient α et β deux nombres >0 tels que αx et βy appartiennent à A. Pour tout λ tel que $0 < \lambda < 1$, il existe un nombre γ tel que $\gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)$ appartienne au segment fermé d'extrémités αx et βy ; on satisfait en effet à la relation

$$\gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) = \rho\alpha x+(1-\rho)\beta y$$

en prenant $\gamma = 1/(\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1-\lambda}{\beta})$ et $\rho = \dfrac{\frac{\lambda}{\alpha}}{\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1-\lambda}{\beta}}$, ce qui donne bien $0 < \rho < 1$. On a donc, puisque A est convexe,

$$p(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant 1/\gamma = \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1-\lambda}{\beta}$$

Cette relation ayant lieu quels que soient $\alpha < 1/p(x)$ et $\beta < 1/p(y)$, on a $p(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda p(x)+(1-\lambda)p(y)$ ce qui achève la démonstration

On dit que, pour une fonction convexe et positivement homogène p définie dans E, l'ensemble A des $x \in E$ tels que $p(x) < 1$ est l'<u>indicateur</u> de la fonction p, et p la <u>jauge</u> de l'ensemble convexe A.

<u>Remarques</u>.- 1) Pour une fonction positivement homogène p, on notera que l'hypothèse que p est convexe est équivalente à la condition

(1) $\quad p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$

pour tout couple de points x,y de E.

2) La première partie de la démonstration de la prop.2 montre que pour toute fonction convexe et positivement homogène p, l'ensemble des points $x \in E$ tels que $p(x) \leqslant 1$ est convexe.

3) Pour qu'une demi-droite d'origine 0 soit contenu dans l'indicateur d'une fonction convexe et positivement homogène p, il faut et il suffit que $p(x) \leqslant 0$ pour un point de cette demi-droite.

DÉFINITION 3.- <u>On dit qu'une fonction numérique finie</u> p <u>définie dans un espace vectoriel</u> E <u>sur</u> $\mathbb{R}$ <u>est une semi-norme si elle est positive, convexe, positivement homogène et telle que</u> $p(-x)=p(x)$.

Il revient au même de dire que p satisfait aux trois axiomes :

a) $p(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$;

b) $p(\lambda x)=|\lambda| p(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

c) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ quels que soient $x \in E$ et $y \in E$.

Une <u>norme</u> sur E peut donc être caractérisée comme une semi-norme telle que la relation $p(x)=0$ entraîne $x=0$.

PROPOSITION 3.- <u>Pour qu'une fonction convexe et positivement homogène</u> p <u>soit une semi-norme, il faut et il suffit que son indicateur soit un ensemble convexe, symétrique, engendrant</u> E <u>et dont tout point est interne</u>

Cela résulte aussitôt de la prop.2 et de la déf.3 .

3. <u>Fonctions convexes dans un espace de dimension finie.</u>

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> E <u>un espace vectoriel topol~~og~~ogique séparé,</u> C <u>un cône épointé convexe et ouvert de sommet</u> x_0 , V <u>un ensemble ouvert convexe</u> contenant x_0 , <u>et soit</u> $S=C \cap V$ <u>.Si</u> f <u>est une fonction convexe et majorée dans</u> S , f(x) <u>tend vers une limite finie lorsque</u> x <u>tend vers</u> x_0 <u>en restant dans</u> S

Pour simplifier l'écriture, nous pouvons supposer que $x_0=0$. Posons $\beta = \varlimsup_{x \in S, x \to 0} f(x)$, nombre qui est fini par hypothèse ; nous allons raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que, dans chaque voisinage de 0 , il existe un point y appartenant à S et tel que $f(y) \leqslant \beta-\alpha$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre tel que $\varepsilon < \frac{\alpha}{6}$, et soit U un voisinage de 0 tel que $\lambda U \subset U$ pour $|\lambda| \leqslant 1$ et tel que

$\sup_{z \in U \cap S} f(z) \leqslant \beta+\varepsilon$; il existe par hypothèse un point $a \in \frac{1}{2}(U \cap S)$ tel que $f(a) \geqslant \beta-\varepsilon$. Comme la fonction f est convexe dans le segment ouvert d'extrémités 0 et $2a \in U \cap S$, on a, pour tout ρ tel que $0<\rho<1$, $f(\rho a) \geqslant (2-\rho)f(a)-(1-\rho)f(2a) \geqslant \beta-3\varepsilon$. Cela étant, lorsque y tend vers 0 en restant dans S , le point $x=y+\frac{1}{\rho}(\rho a-y)$ tend vers $a \in S$, donc appartient à S dès que y est assez voisin de 0 dans S . Mais comme ρa appartient au segment ouvert d'extrémités x et y , et que f est convexe dans ce segment, on a

$$f(x)-f(y) \geqslant \frac{1}{\rho}(f(\rho a)-f(y))$$

ou encore

$$f(x) \geqslant f(\rho a)+(\frac{1}{\rho}-1)(f(\rho a)-f(y))$$

Mais par hypothèse, il existe dans tout voisinage de 0 un point y tel que $f(y) \leqslant \beta-\alpha$, d'où , comme $f(\rho a) \geqslant \beta-3\varepsilon$, $f(\rho a)-f(y) \geqslant \alpha-3\varepsilon \geqslant \frac{\alpha}{2}$, et par suite $f(x) \geqslant f(\rho a)+(\frac{1}{\rho}-1)\frac{\alpha}{2} \geqslant \beta-3\varepsilon+(\frac{1}{\rho}-1)\frac{\alpha}{2}$; or, le dernier membre de cette inégalité est arbitrairement grand, en prenant ρ assez petit. Nous obtenons donc une contradiction avec l'hypothèse que f est amjorée dans S .

On notera que la proposition devient inexacte si on ne suppose plus f majorée dans S , ou si on remplace V par un ensemble ouvert convexe dans E , auquel x_0 est adhérent, mais n'appartient plus (exerc. 3b)) .

PROPOSITION 5.- <u>Toute fonction convexe définie dans une partie convexe H d'un espace affine E de dimension finie est continue dans l'ensemble des points internes de H .</u>

On peut évidemment se borner au cas où la dimension de H est égale à la dimension n de E ; tout point interne x_0 de H est alors point intérieur de H et réciproquement. Montrons que $f(x)$ tend vers une

une limite lorsque x tend vers x_0 en restant $\neq x_0$; on peut appliquer la prop.4, avec $C = \complement \{x_0\}$, si on prouve qu'il existe un voisinage convexe $V \subset H$ de x_0 tel que f soit <u>majorée</u> dans V .

Prenons une origine dans E , et soit $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base de E ; pour chaque k , la fonction $t \to f(x_0+te_k)$ est convexe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, donc continue dans ce voisinage ; il existe donc n nombres $a_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tels que $f(x_0+t_k e_k)$ soit majoré dans l'intervalle $|t_k| \leqslant a_k$; si V est l'ensemble des points $x=x_0+\sum_{k=1}^{n} t_k e_k$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \frac{|t_k|}{a_k} \leqslant 1$, V est un voisinage convexe de x_0 dans lequel f est majoré en vertu de la prop.1, ce qui établit notre assertion.

Enfin, la limite de f(x) lorsque x tend vers x_0 en restant $\neq x_0$ est égale à $f(x_0)$, puisque pour toute droite D passant par x_0 , la restriction de f à $D \cap H$ est convexe, donc continue au point x_0 , qui appartient à un segment ouvert contenu dans $D \cap H$ par hypothèse.

Une forme linéaire <u>non continue</u> sur un espace vectoriel topologique de dimension infinie donne un exemple de fonction convexe non continue dans un tel espace.

<u>Remarque</u>.- Soit A un ensemble convexe et compact dans $\mathbb{R}^n$, et soit H sa projection sur $\mathbb{R}^{n-1}$ (identifié à la variété coordonnée $\xi_n=0$); H est un ensemble convexe compact dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Pour tout point $u \in H$, l'ensemble des points (u,z) de projection u qui appartiennent à A est un segment fermé ; soient $f_1(u)$ et $f_2(u)$ ses extrémités (avec $f_1(u) \leqslant f_2(u)$). La fonction f_1 est <u>convexe</u> dans H , car le segment d'extrémités $(u,f_1(u))$ et $(v,f_1(v))$ est contenu dans A par définition, quels que soient u et v dans H , et par suite est au-dessus du graphe de f_1 par définition ; on voit de la même façon que f_2 est <u>concave</u> dans H . L'ensemble A est donc l'ensemble des points $(u,z) \in \mathbb{R}^n$ tels que $u \in H$ et $f_1(u) \leqslant z \leqslant f_2(u)$.

<u>Exercices</u>.- 1) Soit f une fonction convexe définie dans un ensemble convexe $H \subset E$.

a) Montrer que si f n'est pas constante dans H , elle ne peut atteindre sa borne supérieure dans H en un point interne de H .

b) Montrer que l'ensemble des points de H où f atteint sa borne inférieure dans H , est convexe.

2) a) Soit H un ensemble convexe relativement compact dans un espace E de dimension finie n sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'une fonction convexe définie dans H est minorée dans cet ensemble.

b) En déduire que si A est un ensemble convexe de dimension n dans E , x_0 un point frontière de A , f une fonction convexe dans A , $\liminf_{x \to x_0, x \in A} f(x)$ est finie ou égale à $+\infty$. Si $x_0 \in A$, montrer que, pour toute droite D passant par x_0 et rencontrant $\overset{\circ}{A}$, $f(x_0)$ est au moins égal à la limite de f(x) lorsque x tend vers x_0 en restant dans $\overset{\circ}{A} \cap D$.

3) a) Soit A un ensemble convexe de dimension n dans $\mathbb{R}^n$, tel que l'origine O soit point frontière de A . Pour tout $x \neq 0$, on désigne par $\lambda(x)$ la borne supérieure des $\rho \geqslant 0$ tels que $\rho x \in A$, et on pose $p(0)=0$, $p(x)=1/\lambda(x)$ ($p(x)=+\infty$ si $\lambda(x)=0$) . Montrer que l'ensemble C des points x où p(x) est fini est un cône convexe de sommet O , et que p est une fonction convexe et positivement homogène dans C .

b) Déduire de a) : 1° un exemple de fonction convexe non majorée définie dans un demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$ et ne tendant vers aucune limite au point O ; 2° un exemple de fonction convexe majorée, définie dans un ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^2$ et ne tendant vers aucune limite en un point frontière de cet ensemble (prendre pour A un disque fermé) .

4) Soit H un ensemble ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$, et soit G un ensemble de fonctions convexes dans H.

a) Soient K, K' deux ensembles ouverts convexes contenus dans H et tels que $\overline{K} \subset K'$, $\overline{K'} \subset H$. On suppose que les fonctions de G sont uniformément majorées sur la frontière de K' et uniformément minorées sur la frontière de K ; montrer que l'ensemble G est équicontinu dans H (se ramener au cas où $n=1$).

b) G étant supposé quelconque, soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur G qui converge simplement dans H vers une fonction finie f_0 ; montrer que $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers f_0 dans tout ensemble compact contenu dans H (utiliser a), en remarquant que pour tout cube K contenu dans H, il existe un ensemble M du filtre $\mathfrak{F}$ tel que les fonctions appartenant à M soient uniformément bornées dans K).

5) a) On considère l'ensemble $\mathfrak{F}(E)$ des parties fermées de $E = \mathbb{R}^n$, muni de la structure uniforme déduite de la structure uniforme additive de $\mathbb{R}^n$, par le procédé de l'exerc. 7 de Top. gén., chap. II, § 2. Montrer que, dans cet espace, l'ensemble $\mathfrak{K}(E)$ des parties convexes fermées de E est un ensemble fermé. En déduire que si K est un ensemble compact dans E, l'ensemble des parties convexes fermées de E contenues dans K est un ensemble compact dans $\mathfrak{K}(E)$ (cf. Top. gén., chap. II, 2ᵉ éd. § 4, exerc.)

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E ; montrer que si K est un ensemble compact dans E, l'application $C \to C \cap F$ de l'ensemble des parties convexes fermées de E contenues dans K, dans $\mathfrak{K}(F)$, est continue.

c) Pour tout ensemble convexe compact A dans E ayant 0 comme point intérieur, soit p_A la jauge de $\overset{\circ}{A}$. Montrer que si $\mathfrak{K}_0(E)$ est l'ensemble de ces ensembles convexes, l'application $A \to p_A$ est un isomorphisme du sous-espace uniforme $\mathfrak{K}_0(E)$ de $\mathfrak{K}(E)$ dans l'espace $\mathcal{C}_c(E, \mathbb{R})$ des applications continues de E dans $\mathbb{R}$, muni de la structure uniforme de la convergence compacte (Top. gén., chap. X, § 1).

§ 3. Espaces localement convexes.

1. Espaces localement convexes réels.

DÉFINITION 1. On dit qu'un espace vectoriel topologique E sur le corps $\mathbb{R}$ est localement convexe s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans E, formé d'ensembles convexes. La topologie d'un tel espace est dite localement convexe.

Soit V un voisinage convexe de 0 dans un espace localement convexe E ; d'après la condition (L''_{II}) du chap.I, § 1 (qui exprime que pour tout $x_0 \in E$, l'application $\lambda \to \lambda x_0$ de $\mathbb{R}$ dans E est continue) pour tout point $x_0 \neq 0$ dans E, l'intersection de la droite passant par 0 et x_0 contient un segment ouvert auquel appartient 0 ; en d'autres termes, l'ensemble convexe V engendre E et 0 est point interne de V (§ 1, n°6). D'autre part, $V \cap (-V)$ est un voisinage convexe et symétrique de 0, donc les voisinages convexes et symétriques de 0 forment un système fondamental de voisinages de ce point.

Inversement :

PROPOSITION 1.- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{S}$ une base de filtre sur E, invariante par homothétie, formée d'ensembles convexes, symétriques et engendrant E ; alors $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.

Il suffit de vérifier que les conditions (L''_I), (L''_{II}), (L''_{III}) et (L'_{IV}) de la prop.3 du chap.I, § 1 sont satisfaites. C'est évident pour (L''_{III}) par hypothèse, et (L''_{II}) est vérifiée parce que chaque ensemble de , étant symétrique, admet 0 comme point interne et engendre E (§ 1, prop.14). Comme chaque ensemble $V \in \mathfrak{S}$ est symétrique et convexe, la relation $x \in V$ entraîne $\lambda x \in V$ pour tout λ tel que $|\lambda| \leqslant 1$, ce qui signifie que (L''_I) est vérifiée. Enfin, comme V est convexe, on a $V+V=2V$, donc la condition (L'_{IV}) est vérifiée en prenant $W = \frac{1}{2} V$.

2. Définition d'un espace localement convexe par des semi-normes.

Soit E un espace localement convexe sur $\mathbb{R}$. Pour tout voisinage convexe V de 0 dans E , 0 est point intérieur de V , donc l'intérieur $\overset{\circ}{V}$ de V , qui est identique à l'ensemble des points internes de V (§ 1, cor.1 de la prop.19) est ~~un ensemble~~ un voisinage ouvert convexe de (§ 1,cor.1 de la prop.16). Si $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages convexes et symétriques de 0, l'ensemble $\mathfrak{S}_0$ des intérieurs des ensembles de $\mathfrak{S}$ est donc un système fondamental de voisinages ouverts convexes et symétriques de 0, dont tous les points sont <u>internes</u>. Les jauges de ces ensembles (§ 2,n°2) forment un ensemble Γ de <u>semi-normes</u> sur E , et chacun des voisinages de $\mathfrak{S}_0$ est défini par une relation de la forme $p(x) < 1$, où $p \in \Gamma$. Comme $\mathfrak{S}_0$ est une base de filtre, l'intersection d'un nombre fini de voisinages $V_i \in \mathfrak{S}_0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ contient un ensemble W de $\mathfrak{S}_0$; si p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est la jauge de V_i , q la jauge de W , cela signifie que l'on a $q(x) \geqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x)$ pour tout $x \in E$, d'après la définition d'une jauge (§ 2,n°2). Remarquons encore que si p est la jauge de $V \in \mathfrak{S}_0$, la jauge de λV est $\frac{1}{\lambda} p$; si $\mathfrak{S}_0$ est invariant par homothétie, les ensembles de $\mathfrak{S}_0$ sont donc encore définis par les relations $p(x) < \lambda$, où p parcourt Γ et λ l'ensemble des nombres > 0 .

Inversement :

PROPOSITION 2.- <u>Soit</u> E <u>un espace vectoriel sur</u> $\mathbb{R}$, <u>et soit</u> Γ <u>un ensemble quelconque de semi-normes sur</u> E . <u>Soit</u> $\mathfrak{G}$ <u>l'ensemble des ensembles convexes dont chacun est défini par une relation de la forme</u> $p(x) < \lambda$, p <u>parcourant</u> Γ <u>et</u> λ <u>l'ensemble des nombres</u> > 0 . <u>Alors l'ensemble</u> $\mathfrak{S}$ <u>des intersections finies d'ensembles de</u> $\mathfrak{G}$ <u>est un système fondamental invariant par</u> toute <u>homothétie</u> $\neq 0$, <u>de voisinages ouverts, convexes et symétriques de</u> 0 <u>pour une topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de</u> E .

En effet, soient V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n ensembles de $\mathfrak{S}$, définis par les relations $p_i(x) < \lambda_i$ respectivement; et soit $W = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$; W est symétrique, et pour tout scalaire $\alpha > 0$, αW est l'ensemble des $x \in E$ tels que $p_i(x) < \alpha\lambda_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; donc $\mathfrak{S}$ est invariant par homothétie. D'autre part, W est l'indicateur de la semi-norme $\sup_{1\leqslant i\leqslant n} (\frac{1}{\lambda_i} p_i)$; la prop.1 montre donc que $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie localement convexe sur E ; comme tous les points de chacun des ensembles de $\mathfrak{S}$ sont internes, ces ensembles sont ouverts (§ 1, prop.19), ce qui achève la démonstration.

On dit que la topologie pour laquelle $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de 0 est <u>définie par l'ensemble de semi-normes</u> Γ . Si pour toute semi-norme $p \in \Gamma$ et tout $\alpha > 0$, la semi-norme αp appartient encore à Γ (auquel cas nous dirons pour abréger que Γ est <u>invariant par homothétie</u>) chacun des voisinages du système $\mathfrak{S}$ peut encore être défini par un nombre fini de relations de la forme $p_i(x) < 1$, où $p_i \in \Gamma$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Notons que lorsque la topologie de E est définie par l'ensemble de semi-normes Γ , on a un système fondamental de voisinages de 0 dans E en considérant les ensembles dont chacun est défini par une relation de la forme $\sup_{p \in H} p(x) < \lambda$, où H parcourt l'ensemble des parties finies de Γ , et λ l'ensemble des nombres > 0 . En effet, le voisinage de 0 défini par les relations $p_i(x) < \inf_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est évidemment contenu dans le voisinage défini par les relations $p_i(x) < \lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Posons $p_H(x) = \sup_{p\in H} p(x)$ pour toute partie finie H de Γ ; p_H est encore une semi-norme, et la borne supérieure d'un nombre fini quelconque de fonctions de la famille (p_H) appartient encore par définition à cette famille. La famille (p_H) définit donc la même topologie localement convexe que Γ ; on dit que c'est la famille de semi-normes obtenus en saturant Γ ; ce qui précède montre qu'on peut toujours se borner si on veut aux topologies localement convexes définies par des familles saturées de semi-normes.

Exemples.- 1) Un espace normé sur $\mathbb{R}$ n'est autre qu'un espace localement convexe dont la topologie est définie par une seule norme. En particulier, comme la topologie de $\mathbb{R}^n$ peut être définie par une norme, $\mathbb{R}^n$ est un espace localement convexe.

2) Soit E un espace vectoriel quelconque sur $\mathbb{R}$, et soit Ω l'ensemble de toutes les semi-normes sur E . La topologie définie sur E par Ω peut encore être considérée comme celle dont un système fondamental de voisinages de 0 est formé de tous les ensembles convexes, symétriques et engendrant E ; il est clair que c'est la plus fine de toutes les topologies localement convexes sur E (cf.chap.I, § 1,exerc.4). Cette topologie est séparée ; en effet, si (e_ι) est une base de E , et si, pour tout $x = \sum_\iota \xi_\iota e_\iota$ dans E , on pose $p(x) = \sum_\iota |\xi_\iota|$, p est une norme sur E , et la topologie qu'elle définit est moins fine que celle définie par Ω .

3) Soit $(\mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque de topologies localement convexes compatibles avec la structure d'un espace vectoriel E ; soit Γ_ι un ensemble de semi-normes définissant la topologie $\mathcal{T}_\iota$ (pour chaque $\iota \in I$). Si $\mathcal{T}$ est la topologie localement convexe définie par l'ensemble de semi-normes $\Gamma = \bigcup_{\iota \in I} \Gamma_\iota$; il résulte de la prop.2 que $\mathcal{T}$ est la borne supérieure des topologies $\mathcal{T}_\iota$. En particulier, lorsqu'une topologie localement convexe $\mathcal{T}_0$ est définie par un ensemble Γ_0 de semi-normes, pour chaque semi-norme $p \in \Gamma_0$, soit $\mathcal{T}_p$ la topologie localement convexe définie par la seule semi-norme p ; alors $\mathcal{T}_0$ est borne supérieure des $\mathcal{T}_p$ lorsque p parcourt Γ_0 .

PROPOSITION 3.- Soit E un espace vectoriel localement convexe, dont la topologie est définie par un ensemble Γ de semi-normes. Pour que E soit séparé, il faut et il suffit que pour tout $x \neq 0$ il existe une semi-norme $p \in \Gamma$ telle que $p(x) \neq 0$.

PROPOSITION 4.- Soit E un espace vectoriel localement convexe, dont la topologie est définie par un ensemble Γ de semi-normes. Pour qu'un ensemble A soit borné dans E, il faut et il suffit que

$$\sup_{x \in A} p(x) < +\infty \quad \text{pour toute semi-norme} \quad p \in \Gamma .$$

Ces deux propositions sont évidentes à partir des définitions.

PROPOSITION 5.- Pour qu'un espace localement convexe E soit métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé et que sa topologie soit définie par une famille dénombrable de semi-normes.

La condition est évidemment suffisante ~~d'après ce qui précède (chap.I, § 5, prop.1)~~. Elle est nécessaire, car dans un espace localement convexe métrisable E il existe un système fondamental dénombrable de voisinages de 0, qu'on peut supposer ouverts, convexes et symétriques ; les jauges de ces voisinages forment un ensemble dénombrable de semi-normes définissant la topologie de E.

3. Structure uniforme et complétion d'un espace localement convexes.

Soit E un espace localement convexe, défini par un ensemble Γ de semi-normes. Comme $p(x-z) \leqslant p(x-y)+p(y-z)$ pour toute semi-norme $p \in \Gamma$ (puisque p est convexe), la fonction $p(x-y)$ est un écart sur E, et il résulte aussitôt des définitions que cet ensemble d'écarts définit sur E la structure uniforme de cet espace vectoriel topologique. En particulier :

PROPOSITION 6.- Si la topologie d'un espace localement convexe E est définie par un ensemble Γ de semi-normes, toute semi-norme $p \in \Gamma$ est uniformément continue dans E.

COROLLAIRE.- *Pour toute semi-norme* $p \in \Gamma$ *et tout nombre* $a > 0$ *,* *l'ensemble des* $x \in E$ *tels que* $p(x) \leq a$ *est l'adhérence du voisinage ouvert* V *de* 0 *formé des* x *tels que* $p(x) < a$.

En effet, l'ensemble considéré est fermé en vertu de la prop.6 , et si $p(x) = a$, tout point y du segment ouvert d'extrémités 0 et x est tel que $p(y) < a$, donc x est adhérent à V .

Si Γ est un ensemble saturé de semi-normes définissant la topologie de E , les ensembles définis par $p(x) \leq \lambda$, où p parcourt Γ , et λ l'ensemble des nombres > 0 , est donc un *système fondamental* de voisinages fermés et convexes de 0 dans E .

Supposons maintenant que E soit séparé ; en vertu de la prop.6 , les fonctions $p \in \Gamma$ se prolongent par continuité au complété $\hat{E}$ de E (*Top.gén.*, chap.II, §3,th.1) ; soit $\overline{\Gamma}$ l'ensemble de ces fonctions prolongées. D'après le principe de prolongement des inégalités (*Top.gén.*,chap.IV, § 5), les fonctions de $\overline{\Gamma}$ sont des *semi-normes* sur $\hat{E}$; en outre, si, pour toute fonction $p \in \Gamma$, on désigne par $\overline{p}$ son prolongement à $\hat{E}$, les fonctions $\overline{p}(x-y)$ forment un système d'écarts définissant la structure uniforme de $\hat{E}$ (*Top.gén.*,chap.IX, § 1,n°3) ; $\hat{E}$ est donc *localement convexe*, et les fonctions de $\overline{\Gamma}$ forment un ensemble de semi-normes définissant la topologie de $\hat{E}$.

4. *Sous-espaces vectoriels, espaces quotients et espaces produits d'espaces localement convexes.*

Il est clair que tout sous-espace vectoriel V d'un espace localement convexe E sur R est un espace localement convexe ; si Γ est un ensemble de semi-normes définissant la topologie de E , l'ensemble des restrictions à V des semi-normes $p \in \Gamma$ définit la topologie de V .

Soit φ l'application canonique de E sur l'espace quotient E/V ; pour tout voisinage ouvert symétrique et convexe U de 0 dans E ,

$\varphi(U)$ est un ensemble convexe et symétrique dans E/V (§1,prop.2) ; comme les ensembles $\varphi(U)$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans E/V, E/V est localement convexe. En outre, si p est la jauge de U, pour tout $z \in E/V$, l'ensemble des $\lambda > 0$ tels que $\lambda z \in \varphi(U)$ est identique à l'ensemble des $\lambda > 0$ tels qu'il existe $x \in E$ pour lequel on a $\lambda x \in U$ et $\varphi(x)=z$; il en résulte que la jauge $\dot{p}$ de $\varphi(U)$ est donnée par la formule

$$(1) \qquad \dot{p}(z) = \inf_{x \in \overset{-1}{\varphi}(z)} p(x) \quad ;$$

la topologie de E/V est donc définie par la famille des semi-normes $\dot{p}$, lorsque p parcourt Γ.

En particulier, si E est un espace localement convexe <u>non séparé</u> l'adhérence N de 0 dans E est un sous-espace vectoriel non réduit à 0, et l'espace séparé E/N associé à E est localement convexe.

Plus particulièrement, considérons un espace localement convexe E défini par la donnée d'<u>une seule</u> semi-norme p ; pour que E soit séparé, il faut et il suffit que p soit une norme (prop.3). Si p n'est pas une norme, l'adhérence N de 0 dans E est le sous-espace vectoriel $\overset{-1}{p}(0)$; l'espace séparé associé E/N est alors un espace <u>normé</u> défini par la norme $\dot{p}$ correspondant à p ; on a ici $\dot{p}(\dot{x})=p(x)$ pour tout x appartenant à la classe $\dot{x}$ modulo N.

Soit enfin $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espaces localement convexes. Soit H une partie finie quelconque de I, et pour chaque $\iota \in H$, soit U_ι un voisinage convexe ouvert et symétrique de 0 dans E_ι. L'ensemble $U = \prod_{\iota \in I} W_\iota$ où $W_\iota = U_\iota$ pour $\iota \in H$ et $W_\iota = E_\iota$ pour $\iota \notin H$, est convexe, ouvert et symétrique dans l'espace produit $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ (§1,prop.6) ; donc E est un espace localement convexe. En outre, pour que $\lambda > 0$ soit tel que $\lambda(x_\iota) \in U$, il faut et il suffit que

$\lambda x_\iota \in U_\iota$ pour tout $\iota \in H$; la jauge de U est donc donnée par la formule

$$(2) \qquad p((x_\iota)) = \sup_{\iota \in H} p_\iota(x_\iota)$$

5. <u>Applications multilinéaires continues d'un espace localement convexe dans un espace localement convexe.</u>

PROPOSITION 7.- <u>Soient</u> E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>et</u> F , $n+1$ <u>espaces localement convexes. Soit</u> Γ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>un ensemble saturé de semi-normes définissant la topologie de</u> E_i , <u>et</u> Γ <u>un ensemble saturé de semi-normes définissant la topologie de</u> F . <u>Pour qu'une application multilinéaire</u> u <u>de</u> $\prod_{i=1}^{n} E_i$ <u>dans</u> F <u>soit continue, il faut et il suffit que pour toute semi-norme</u> $q \in \Gamma$, <u>il existe une semi-norme</u> $p_i \in \Gamma_i$ <u>pour chaque indice</u> i , <u>ainsi qu'un nombre</u> $a > 0$ <u>tels que l'on ait identiquement</u>

$$(3) \qquad q(u(x_1,x_2,\ldots,x_n)) \leqslant a.p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_n(x_n) .$$

La condition est nécessaire. En effet, par hypothèse pour toute semi-norme $q \in \Gamma$ et tout $\beta > 0$, il existe n nombres $\alpha_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et, pour chaque indice i , une semi-norme $p_i \in \Gamma_i$ tels que les relations $p_i(x_i) \leqslant \alpha_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) entraînent $q(u(x_1,x_2,\ldots,x_n)) \leqslant \beta$. Soit alors $(x_1,\ldots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ un point quelconque, et pour chaque indice i , soit λ_i un nombre >0 tel que $\lambda_i p(x_i) \leqslant \alpha_i$; comme ces relations s'écrivent $p_i(\lambda_i x_i) \leqslant \alpha_i$, on a $q(u(\lambda_1 x_1,\lambda_2 x_2,\ldots,\lambda_n x_n)) \leqslant \beta$, c'est-à-dire $q(u(x_1,x_2,\ldots,x_n)) \leqslant \dfrac{\beta}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$. Cela étant, si $p_i(x_i)=0$ pour un indice i au moins, on peut prendre λ_i arbitrairement grand, donc $q(u(x_1,x_2,\ldots,x_n))=0$. Si au contraire tous les $p_i(x_i)$ sont $\neq 0$, on peut prendre $\lambda_i=\alpha_i/p_i(x_i)$, et dans tous les cas on obtient l'inégalité (3) avec $a = \dfrac{\beta}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$.

Réciproquement, supposons que la condition de l'énoncé soit vérifiée, et montrons que u est continue en tout point $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. On peut écrire

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) - u(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} u(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i - c_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) .$$

Les conditions $p_i(x_i - c_i) \leqslant r$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ entraînent $p_i(x_i) \leqslant p_i(c_i) + r$, d'où, en vertu de (3)

$$q(u(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i - c_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \leqslant ar \prod_{j \neq i} (p_j(c_j) + r)$$

et finalement

$$q(u(x_1, x_2, \ldots, x_n) - u(c_1, c_2, \ldots, c_n)) \leqslant ar . \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} (p_i(c_i) + r) \right)$$

Comme le second membre de cette relation est un polynome en r sans terme constant, donc tend vers 0 avec r, la proposition est démontrée.

COROLLAIRE 1.- Pour que u soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme $q \in \Gamma$, la fonction $q(u(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ soit bornée dans un voisinage de 0 dans $\prod_{i=1}^{n} E_i$.

La condition est évidemment nécessaire, et la première partie de la démonstration de la prop.7 montre que cette condition entraîne l'identité (3), donc la continuité de u.

COROLLAIRE 2.- Pour qu'une application multilinéaire u de $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ dans un espace normé F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de 0 dans E dont l'image par u soit bornée dans F.

On notera que ce corollaire ne s'étend pas au cas où F est un espace localement convexe quelconque. Par exemple, si E est un espace localement convexe dans lequel aucun voisinage n'est borné (chap.I, § 1, n°7) l'application identique de E sur lui-même ne transforme aucun voisinage en ensemble borné.

PROPOSITION 8.- Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux topologies localement convexes compatibles avec la structure d'espace vectoriel de E, et définies respectivement par deux ensembles saturés Γ, Γ' de semi-normes.

<u>Pour que</u> $\mathcal{C}$ <u>soit moins fine que</u> $\mathcal{C}'$, <u>il faut et il suffit que, pour toute semi-norme</u> $p \in \Gamma$, <u>il existe une semi-norme</u> $q \in \Gamma'$ <u>et un nombre</u> $a > 0$ <u>tels que l'on ait identiquement</u>

(4) $$p(x) \leqslant a.q(x) \quad .$$

En effet, cela exprime que l'application identique de E , muni de la topologie $\mathcal{C}'$, sur E , muni de la topologie $\mathcal{C}$, est continue.

COROLLAIRE.- <u>Pour que</u> $\mathcal{C}$ <u>soit moins fine que</u> $\mathcal{C}'$, <u>il faut et il suffit que toute semi-norme</u> $p \in \Gamma$ <u>soit continue pour la topologie</u> $\mathcal{C}'$.

En effet, la condition (4) exprime que p est continue à l'origine, et alors p est continue en tout point x_0 ; puisque l'on a

$$|p(x)-p(x_0)| \leqslant p(x-x_0) \leqslant a.q(x-x_0) \quad .$$

<u>Remarques</u>.- 1) Deux ensembles Γ , Γ' de semi-normes sur E sont dits <u>équivalents</u> lorsqu'ils définissent la même topologie. Si Γ et Γ' sont saturés, la prop.8 montre que, pour que Γ et Γ' soient équivalents, il faut et il suffit que 1° pour toute semi-norme $p \in \Gamma$, il existe une semi-norme $q \in \Gamma'$ et un nombre a tels que $p \leqslant a.q$; 2° pour toute semi-norme $q \in \Gamma'$, il existe une semi-norme $p' \in \Gamma$ et un nombre b tels que $q \leqslant b.p'$.

2) La topolgogie $\mathcal{C}$ d'un espace localement convexe E est définie par l'ensemble Γ_ω de <u>toutes</u> les semi-normes <u>continues pour</u> $\mathcal{C}$ (autrement dit, que cet ensemble est équivalent à tout ensemble Γ de semi-normes définissant $\mathcal{C}$). En effet, on a évidemment $\Gamma \subset \Gamma_\omega$ (prop.6), donc la topologie définie par Γ_ω est plus fine que $\mathcal{C}$; mais le cor. de la prop.8 montre que cette topologie est moins fine que $\mathcal{C}$, ce qui établit notre assertion.

3) Si on munit un espace vectoriel E sur R de la topologie localement convexe <u>la plus fine</u>, toute application linéaire u de E dans un espace localement convexe F est continue, car pour toute

semi-norme continue q sur F , q(u(x)) est une semi-norme sur E , et pour la topologie de E toutes les semi-normes sont continues.

6. Espaces localement convexes complexes.

Soit E un espace vectoriel topologique sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; rappelons que la topologie de E est aussi compatible avec la structure d'espace vectoriel réel de E obtenue en restreignant à $\mathbb{R}$ le corps des scalaires. Nous désignerons par E_0 l'espace vectoriel topologique réel ainsi obtenu, et nous dirons que cet espace est associé à E . On notera que, dans E_0 , l'application $x \to ix$ (qui n'est plus une homothétie) est un automorphisme (topologique) u de E_0 tel que $u^2(x)=-x$.

Inversement, soit F_0 un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ et supposons qu'il existe un automorphisme u (topologique) de F_0 tel que $u^2(x)=-x$; on sait (Alg.,chap.VIII) qu'on peut alors définir sur F_0 une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ en posant, pour tout $\lambda = \alpha+i\beta$ et tout $x \in F_0$, $\lambda x = \alpha x+\beta u(x)$. En outre, l'application $(\alpha,\beta,x) \to \alpha x+\beta u(x)$ de $\mathbb{R}^2 \times F_0$ dans F_0 étant continue, la topologie de F_0 est compatible avec la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ainsi définie ; si on désigne par F l'espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$ qu'on définit de cette manière, F_0 est l'espace vectoriel réel associé à F .

On notera qu'il n'existe pas toujours un automorphisme u de F_0 tel que $u^2(x)=-x$; par exemple, on ne peut pas définir de structure d'espace vectoriel complexe sur un espace vectoriel réel de dimension impaire sur $\mathbb{R}$.

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique complexe E est localement convexe si l'espace vectoriel topologique réel associé E_0 est localement convexe. On sait (chap.I, § 1,prop.3) qu'il existe alors un système fondamental de voisinages W de 0 dans E , tels que la relation

$|\lambda| \leqslant 1$ dans $\mathbb{C}$ entraîne $\lambda W \subset W$; si V est un voisinage convexe de 0 dans E, il contient un tel voisinage W, donc l'intersection des ensembles $e^{i\theta}V$ lorsque $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, contient W et est par suite un voisinage U de 0. Comme intersection d'ensembles convexes, U est convexe ; en outre on a $e^{i\theta}U=U$ pour tout θ (et en particulier $-U=U$). On dit qu'un ensemble convexe U dans E est <u>cerclé</u> si on a la relation $e^{i\theta}U=U$ pour tout θ ; on voit donc que dans un espace localement convexe complexe E, il existe un système fondamental de voisinages de 0 formé d'ensembles <u>convexes</u>, <u>cerclés</u> et engendrant E.

Inversement :

PROPOSITION 9.- <u>Soit</u> E <u>un espace vectoriel sur</u> $\mathbb{C}$. <u>Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>une base de filtre sur</u> E, <u>invariante par homothétie</u>, <u>formée d'ensembles convexes cerclés et engendrant</u> E ; <u>alors</u> $\mathfrak{S}$ <u>est un système fondamental de voisinages de</u> 0 <u>pour une topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de</u> E.

En effet, en vertu de la prop.1, $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages pour une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel <u>réel</u> de E. Tout revient à montrer que l'application $\lambda \rightarrow \lambda x$ de $\mathbb{C}$ dans E est continue pour cette topologie ; mais comme 0 est point interne de tout voisinage $V \in \mathfrak{S}$ (puisque V est symétrique), et que V engendre E, pour tout $x \in E$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda x \in V$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha$; mais V étant cerclé, on a aussi $\lambda x \in V$ pour tout λ complexe tel que $|\lambda| \leqslant \alpha$.

La jauge d'un voisinage ouvert, convexe et cerclé V de 0 dans E est une semi-norme p telle que $p(e^{i\theta}x)=p(x)$ identiquement ; il revient au même de dire que $p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)$ pour tout scalaire λ <u>complexe</u>.

Lorsque nous parlerons désormais de semi-normes sur un espace vectoriel complexe, il sera toujours sous-entendu qu'elles satisfont à la condition précédente. Avec cette convention, et en remplaçant partout le mot "symétrique" par "cerclé", le lecteur vérifiera sans peine que toutes les propositions établies dans ce paragraphe pour les espaces localement convexes réels s'étendent sans autre modification aux espaces localement convexes complexes.

Exercices.- 1) Montrer que tout espace localement convexe séparé est isomorphe à un sous-espace d'un produit d'espaces normés (cf. Top. gén., chap. IX, § 2, exerc. 1).

2) Pour que la topologie d'un espace localement convexe E puisse être définie par une seule semi-norme, il faut et il suffit qu'il existe dans E un voisinage de 0 borné.

3) Pour qu'un ensemble Γ de semi-normes sur un espace vectoriel réel E soit l'ensemble de toutes les semi-normes continues pour une topologie localement convexe sur E, il faut et il suffit que Γ satisfasse aux conditions suivantes : 1° si $p \in \Gamma$ et si q est une semi-norme telle que $q \leqslant ap$ (a constante), alors $q \in \Gamma$; 2° si p et q appartiennent à Γ, $\sup(p,q)$ appartient à Γ.

4) Soit E un espace normé de dimension infinie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe sur E une topologie d'espace normé strictement plus fine que la topologie $\mathcal{C}$ donnée, et une topologie d'espace normé strictement moins fine que $\mathcal{C}$ (définir les voisinages de 0 dans ces topologies en considérant une base de E, $(a_{\alpha,n})$, où l'ensemble d'indices est de la forme $I \times N$ et où $\|a_{\alpha,n}\| = 1$).

5) Soit E un espace vectoriel topologique réel. Montrer que sur l'espace vectoriel topologique réel $E \times E$, on peut définir une structure d'espace vectoriel topologique complexe pour laquelle la structure d'espace vectoriel topologique réel associée soit la structure donnée

6) Pour les espaces vectoriels topologiques sur le corps K des quaternions, donner les définitions et propriétés correspondant à celles de ce paragraphe.

7) Soit E un espace localement convexe. Montrer que si E est un espace de Baire et s'il existe un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés dans E , la topologie de E peut être définie par une seule semi-norme (cf. exerc.2).

§ 4. Ensembles convexes dans un espace localement convexe.

1. Points internes et points intérieurs des ensembles convexes.

Nous avons déjà vu (§ 1, n°7) que dans un espace vectoriel topologique réel E , tout point intérieur d'un ensemble convexe A est un point interne, et qu'inversement, si A admet au moins un point intérieur, tout point interne de A est point intérieur (loc.cit., cor.1 de la prop.19) ; mais, même dans un espace localement convexe, un ensemble convexe peut avoir des points internes mais aucun point intérieur.

Considérons toutefois, sur un espace vectoriel réel E , la topologie localement convexe <u>la plus fine</u> $\mathcal{C}$ (§ 3, n°2, exemple 2). Alors, si un ensemble convexe A <u>engendre</u> E , tout point interne de A est point intérieur de A pour la topologie $\mathcal{C}$; en effet, on peut se ramener au cas où 0 est point interne de A ; alors l'ensemble convexe $A \cap (-A)$ engendre E et est symétrique, donc est un voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{C}$, ce qui établit notre assertion. En particulier, tout demi-espace <u>algèbriquement ouvert</u> (resp. <u>Algèbriquement fermé</u>) dans E est <u>ouvert</u> (resp. <u>fermé</u>) pour la topologie.

L'étude des ensembles convexes dans un espace vectoriel réel E (non muni d'une topologie) peut donc toujours se ramener à l'étude des ensembles convexes dans un espace localement convexe.

Si A n'engendre pas E , soit V la variété linéaire affine engendrée par A , et supposons d'abord que V soit un sous-espace vectoriel. Si W est un sous-espace supplémentaire de V dans E , et U un ensemble convexe, symétrique et engendrant V, U+W est un ensemble convexe, symétrique et engendrant E , donc un voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{C}$, et sa trace sur V est identique à U . On voit donc que la topologie induite par $\mathcal{C}$ sur V est la plus fine des topologies d'espace localement convexe sur V ; il en résulte que tout point interne de A est point intérieur de A <u>par rapport à V</u> . On passe de là au cas où $0 \notin V$ par translation.

La propriété suivante des ensembles convexes est spéciale aux espaces normés :

PROPOSITION 1.- <u>Dans un espace normé</u> E <u>sur</u> $\mathbb{R}$, <u>soit</u> A <u>un corps convexe borné, dont</u> 0 <u>est point intérieur</u>. <u>Il existe alors un homéomorphisme de</u> E <u>sur lui-même, transformant</u> A <u>en la boule fermée</u> B <u>de centre</u> 0 <u>et de rayon</u> 1 , <u>et transformant la frontière de</u> A <u>en la sphère de centre</u> 0 <u>et de rayon</u> 1 .

Définissons l'application f de E dans lui-même de la façon suivante : soit p la jauge de l'ensemble $\mathring{A}$, de sorte que A est l'ensemble des x tels que $p(x) \leq 1$, la frontière de A l'ensemble des x tels que $p(x)=1$. Par hypothèse, pour tout $x \neq 0$ dans E , il existe λ tel que $\lambda x \notin A$, donc $p(x) \neq 0$; nous poserons $f(x) = \frac{p(x)}{\|x\|} . x$ pour $x \neq 0$, et $f(0)=0$. L'application f est évidemment biunivoque, et on a $f(E)=E$, car si $y \neq 0$, on a $y=f(x)$, avec $x = \frac{\|y\|}{p(y)} y$. Montrons que f et son application réciproque sont continues. Par hypothèse A contient une boule de centre 0 et de rayon $a > 0$, donc on a $a.p(x) \leq \|x\|$, ce qui montre que p est continue dans E (§ 3, prop.8) . L'application f et son application réciproque sont donc continues en tout point $x \neq 0$.

D'autre part il existe une boule de centre 0 et de rayon $b > 0$ contenant A , donc on a $p(x) \leqslant b.\|x\|$ pour tout $x \in E$, d'où on tire $a\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant b.\|x\|$, ce qui prouve que f et son application réciproque sont continues au point 0 .

COROLLAIRE.- <u>Dans un espace normé, deux corps convexes bornés quelconques sont homéomorphes</u>.

2. <u>Enveloppe convexe d'une partie d'un espace localement convexe</u>.

PROPOSITION 2.- <u>Dans un espace localement convexe, l'enveloppe convexe d'un ensemble borné est un ensemble borné</u>.

En effet, soit A une partie bornée de E . Pour tout voisinage convexe V de 0 dans E , il existe $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda V$; comme λV est convexe, l'enveloppe convexe de A est contenue dans λV , ce qui montre qu'elle est bornée.

PROPOSITION 3.- <u>Dans un espace localement convexe séparé, l'enveloppe convexe d'un ensemble précompact est un ensemble précompact</u>.

En effet, soit A un ensemble précompact ; pour tout voisinage convexe V de 0 dans E , il existe un nombre fini de points $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que A soit contenu dans la réunion des voisinages $a_i + \frac{1}{2} V$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. L'enveloppe convexe B de A est donc contenue dans l'enveloppe convexe de la réunion de ces voisinages ; mais cette dernière n'est autre que $C + \frac{1}{2} V$, où C est l'enveloppe convexe de l'ensemble fini formé des n points a_i (§ 1,prop.8). Or, si G est le sous-espace vectoriel engendré par les a_i , G est de dimension finie, et C , enveloppe convexe d'une partie bornée de G , est bornée dans G (prop.2), donc précompacte dans E puisque pour la topologie induite sur G par celle de E , G est isomorphe à un R^p (chap.I, § 2,prop.   ) ; il existe par suite un nombre fini de points $b_k \in C$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ tels que C soit contenu dans la réunion des voisinages $b_k+\frac{1}{2}V$ $(1\leq k\leq m)$; a fortiori, B est contenue dans la réunion des voisinages b_k+V $(1\leq k\leq m)$, ce qui achève la démonstration.

On notera que l'enveloppe convexe B d'un ensemble compact A n'est pas nécessairement fermée (exerc.3).

DÉFINITION 1.- Dans un espace localement convexe E, on appelle enveloppe fermée convexe d'un ensemble A l'adhérence de l'enveloppe convexe de A.

On peut encore dire que l'enveloppe fermée convexe de A est le plus petit ensemble à la fois fermé et convexe contenant A.

La prop.3 entraîne donc le corollaire suivant :

COROLLAIRE.- Dans un espace localement convexe séparé et complet E, l'enveloppe fermée convexe d'un ensemble compact est un ensemble compact.

Par contre, dans un espace non complet, l'enveloppe fermée convexe d'un ensemble compact peut être non compacte (exerc.3).

On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 3 bis.- Soient A_i $(1\leq i\leq n)$ un nombre fini d'ensembles convexes compacts dans un espace vectoriel topologique séparé E. Alors l'enveloppe convexe de la réunion des A_i est compacte.

En effet, c'est l'image, par l'application continue

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,x_1,\ldots,x_n)\to\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$$

de l'ensemble $B\times\prod_{i=1}^{n}A_i$ dans $R^n\times E^n$, B désignant la partie de R^n définie par $\lambda_i\geq 0$ $(1\leq i\leq n)$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$; la proposition résulte de ce que B et les A_i sont compacts.

3. Espaces tonnelés.

DÉFINITION 2.- Dans un espace localement convexe E, on appelle tonneau un ensemble convexe, symétrique, fermé dans E et engendrant E.

Tout tonneau T admet donc 0 comme point interne ; soit p la jauge de l'ensemble des points internes de T ; comme T est fermé, il est identique à l'ensemble des points x tels que $p(x)\leq 1$. On en déduit aussitôt que p est une semi-norme <u>semi-continue inférieurement</u> dans E , puisque pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble des x tels que $p(x) \leq \alpha$ est fermé (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 6,prop.1) ; la réciproque est immédiate.

DÉFINITION 3.- <u>On dit qu'un espace localement convexe</u> E <u>est tonnelé si tout tonneau dans</u> E <u>est un voisinage de</u> 0 .

Il revient au même de dire que <u>toute semi-norme semi-continue inférieurement dans</u> E <u>est continue</u>.

Par exemple, si on munit un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de la topologie localement convexe <u>la plus fine</u> (§ 1, n°2), on obtient un espace tonnelé, car <u>tout</u> ensemble convexe symétrique et engendrant E est un voisinage de 0 dans E . Un exemple plus important est fourni par la proposition suivante :

PROPOSITION 4.- <u>Tout espace localement convexe</u> E <u>qui est un espace de Baire est tonnelé</u>.

En effet, soit V un tonneau quelconque dans E ; comme V engendré E , E est réunion des ensembles nV (n entier >0) ; en vertu du th. de Baire, comme les nV sont fermés dans E , l'un au moins admet un point intérieur, donc V admet un point intérieur ; comme 0 est point interne de V , il est aussi point intérieur de V , ce qui montre que V est un voisinage de

COROLLAIRE.- <u>Tout espace localement convexe métrisable et complet est tonnelé</u> (cf. prop.10).

Un espace tonnelé n'est d'ailleurs pas nécessairement un espace de Baire ; par exemple, si E est un espace vedtoriel de dimension infinie sur $\mathbb{R}$, on peut montrer que E , muni de la topologie localement convexe la plus fine, n'est pas un espace de Baire (ex.5)

On notera aussi qu'il y a des espaces localement convexes complets qui ne sont pas tonnelés (chap.III, § ,exerc.) et des espaces localement convexes tonnelés qui ne sont pas complets (chap.III, § exerc.

PROPOSITION 5.- Tout espace quotient d'un espace tonnelé est tonnelé.

En effet, soit E un espace tonnelé, V un sous-espace vectoriel de E , et φ l'application canonique de E sur E/V . Pour tout tonneau $U \subset E/V$, $\overset{-1}{\varphi}(U)$ est convexe, symétrique et fermé dans E et engendre E , autrement dit est un tonneau dans E ; par hypothèse , $\overset{-1}{\varphi}(U)$ est un voisinage de 0 dans E , et par suite $U = \varphi(\overset{-1}{\varphi}(U))$ est un voisinage de 0 dans E/V , ce qui démontre la proposition.

2 On notera qu'un sous-espace d'un espace tonnelé n'est pas nécessairement tonnelé, même s'il est complet (chap.III, § ,exerc.). On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 6.- Soit E un espace localement convexe, somme directe topologique de deux sous-espaces vectoriels M et N . Pour que E soit tonnelé, il faut et il suffit que M et N le soient.

La condition est nécessaire en vertu de la prop.5 , puisque M est par hypothèse isomorphe à l'espace quotient E/N . Supposons inversement que M et N soient des espaces tonnelés, et soit U un tonneau dans E . Alors il est clair que $V=U\cap M$ et $W=U\cap N$ sont des tonneaux dans M et N respectivement, donc des voisinages de 0 dans ces espaces ; or U contient l'ensemble $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}W$, puisqu'il est connexe, et par hypothèse cet ensemble est un voisinage de 0 dans E , ce qui démontre la proposition.

On peut démontrer plus généralement que tout produit d'espaces tonnelés est un espace tonnelé (chap.III, § , exerc.).

4. Application. Position respective de deux ensembles convexes.

THÉORÈME 1.- Soient E un espace localement convexe séparé, A un ensemble convexe, symétrique, borné et complet dans E . Pour tout tonneau B dans E , il existe $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda B$.

En considérant le sous-espace vectoriel V engendré par A et l'ensemble convexe $V \cap B$, on peut se ramener au cas où A <u>engendre</u> E (autrement dit, est lui-même un tonneau complet). Soit p la jauge de l'ensemble des points internes de A ; comme, pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe un voisinage U de 0 dans E ne contenant pas x, et un nombre $\alpha > 0$ tel que $\alpha A \subset U$ (puisque A est borné), on a $p(x) \neq 0$, autrement dit, p est une <u>norme</u> sur E ; en outre, comme l'intersection de A et de toute droite passant par 0 est fermée, A est l'ensemble des x tels que $p(x) \leqslant 1$.

Désignons par E_0 l'espace vectoriel E muni de la topologie définie par la norme p, qui est <u>plus fine</u> que la topologie de E (puisque A est <u>borné</u>). Nous allons montrer que E_0 est un <u>espace de Banach</u>. En effet, soit (x_n) une suite de Cauchy dans E_0 ; elle est bornée dans E_0, donc il existe $\lambda > 0$ tel que tous les x_n soient contenus dans λA ; comme la topologie de E est moins fine que celle de E_0, (x_n) est une suite de Cauchy <u>dans</u> E, et comme λA par hypothèse est un sous-espace complet de E, la suite (x_n) a une limite a <u>dans</u> E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ entraîne $x_n \in x_{n_0} + \varepsilon A$; comme cet ensemble est fermé dans E, a lui appartient, d'où $p(x_n - a) \leqslant 2\varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$, ce qui montre que a est limite de (x_n) <u>dans</u> E_0.

Cela étant, comme B est fermé dans E, il est aussi fermé dans E_0, donc est un tonneau dans E_0 ; comme E_0 est tonnelé (cor. de la prop.4), B est un voisinage de 0 dans E_0 ; mais cela signifie, par définition de la topologie de E_0, qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\mu A \subset B$.

<u>Remarque</u>.- La démonstration ne fait usage en réalité que du fait que toute <u>suite de Cauchy</u> dans A converge vers un point de A, ce qui n'entraîne pas nécessairement que A soit complet (un <u>filtre de Cauchy</u> sur A n'étant pas nécessairement convergent).

En particulier, si dans E toute suite de Cauchy est convergente, le th.1 s'applique en supposant seulement A fermé dans E , au lieu de complet.

COROLLAIRE.- *Si A est un ensemble convexe compact dans E , B un ensemble convexe, symétrique, fermé dans E et engendrant E , il existe $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda B$.*

En effet, l'enveloppe convexe C de $A \cup (-A)$ est convexe, symétrique, bornée et compacte (donc complète) dans E (prop. 3 bis), ce qui établit le corollaire.

5. Espaces bornologiques.

DÉFINITION 4.- *On dit qu'un espace localement convexe E sur $\mathbb{R}$ est bornologique si tout ensemble convexe A dans E tel que, pour toute partie bornée B de E , il existe $\lambda > 0$ satisfaisant à $B \subset \lambda A$, est un voisinage de 0 dans E .*

On notera qu'un ensemble convexe A tel que pour tout ensemble borné B , il existe $\lambda > 0$ satisfaisant à $B \subset \lambda A$, admet nécessairement 0 comme point interne et engendre E , comme on le voit en prenant pour B un segment fermé ayant deux extrémités symétriques x et -x $(x \neq 0)$. On en déduit que si on munit un espace vectoriel E de la topologie localement convexe la plus fine (§ 1, n°2), on obtient un espace bornologique, puisque tout ensemble convexe engendrant 0 et ayant 0 comme point interne est un voisinage de 0 pour cette topologie.

Il revient au même de dire que E est bornologique si *toute fonction convexe, positive, positivement homogène, bornée dans toute partie bornée de E , est continue dans E .*

 149

PROPOSITION 7.- <u>Tout espace localement convexe métrisable est bornologique</u>.

En effet, soit A un ensemble convexe tel que pour tout ensemble borné B , il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda A$. Soit (V_n) un système fondamental décroissant de voisinages de 0 dans E ; alors les ensembles V_n/n forment encore un système fondamental de voisinages de 0 . Si A n'était pas un voisinage de 0 , il existerait une suite (x_n) de points de E telle que $x_n \in V_n/n$ et $x_n \notin A$; comme $nx_n \in V_n$, la suite (nx_n) tend vers 0 , donc est bornée ; mais on a $nx_n \notin nA$, ce qui est contraire à l'hypothèse (cf.chap.I, §5, prop.2).

Il existe des espaces bornologiques non métrisables (exerc. 6).

PROPOSITION 8.- <u>Tout espace quotient d'un espace bornologique est bornologique</u>.

En effet, soit E un espace bornologique, V un sous-espace de E , φ l'application canonique de E sur E/V . Soit A un ensemble convexe dans E/V tel que, pour toute partie bornée B de E/V , il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda A$. Si C est un ensemble borné dans E , $\varphi(C)$ est borné dans E/V , donc il existe $\mu > 0$ tel que $\varphi(C) \subset \mu A$, c'est-à-dire $C \subset \mu \overset{-1}{\varphi}(A)$; cela prouve, en vertu de l'hypothèse, que $\overset{-1}{\varphi}(A)$ est un voisinage de 0 dans E , donc A est un voisinage de 0 dans E/V .

Z Un <u>sous-espace</u> d'un espace bornologique n'est pas nécessairement <u>bornologique</u> (chap.III, §   , exerc.   ). On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 9.- <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe, somme directe topologique de deux sous-espaces vectoriels</u> M <u>et</u> N . <u>Pour que</u> E <u>soit bornologique, il faut et il suffit que</u> M <u>et</u> N <u>le soient</u>.

La condition est nécessaire en vertu de la prop.8, M étant isomorphe à E/N . Supposons inversement que M et N soient des espaces bornologiques et soit A un ensemble convexe dans E tel que pour tout ensemble borné $B \subset E$, il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda A$; les ensembles $V = A \cap M$ et $W = A \cap N$ ont respectivement la même propriété dans M et N , donc sont des voisinages par hypothèse ; comme A contient $\frac{1}{2} V + \frac{1}{2} W$, qui est un voisinage de 0 dans E , la proposition est démontrée.

On peut démontrer que tout produit d'une famille dénombrable d'espaces bornologiques est bornologique (exerc.10).

Il existe des espaces localement convexes métrisables (donc bornologiques) et non tonnelés (exerc.9) ; mais on a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 10.- <u>Tout espace bornologique et complet est tonnelé</u>.

En effet, soit E un espace bornologique et complet, et soit U un tonneau dans E . Pour tout ensemble borné A , l'enveloppe fermée convexe C de $A \cup (-A)$ est un ensemble convexe, symétrique borné et fermé dans E , donc complet. En vertu du th.1, il existe $\lambda > 0$ tel que $C \subset \lambda U$, ce qui, d'après l'hypothèse, montre que U est un voisinage de 0 dans E .

On ignore s'il existe des espaces tonnelés non bornologiques. La propriété la plus importante des espaces bornologiques est la suivante :

THÉORÈME 2.- <u>Soient E un espace bornologique, F un espace localement convexe quelconque. Toute application linéaire u de E dans F qui transforme tout ensemble borné en un ensemble borné est continue</u>.

En effet, pour toute semi-norme q continue dans F , $q \circ u$ est une semi-norme sur E , qui est bornée dans tout ensemble borné, donc continue par hypothèse ; cela entraîne la continuité de u (§ 3, cor.1 de la prop.7) .

COROLLAIRE.- <u>Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux topologies localement convexes sur un espace vectoriel</u> E , <u>telles que</u> E , <u>muni de l'une ou l'autre de ces topologies, soit un espace bornologique</u>. <u>Alors, si les ensembles bornés sont les mêmes pour les topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ on a $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$</u> .

En effet, l'application identique de E , muni de $\mathcal{C}_1$, sur E , muni de $\mathcal{C}_2$, est alors bicontinue en raison du th.2 .

6. <u>Extension aux espaces localement convexes complexes</u>.

Les résultats de ce paragraphe s'étendent aisément aux espaces localement convexes complexes. Dans un tel espace E , si A est une partie quelconque, il y a lieu de considérer l'<u>enveloppe convexe cerclée</u> (resp. <u>cerclée fermée</u>) de A , c'est-à-dire le plus petit ensemble convexe et cerclé (resp. cerclé et fermé) contenant A ; c'est aussi l'enveloppe convexe (resp. l'enveloppe convexe fermée) de la réunion des ensembles $e^{i\theta}A$. On peut donc la définir comme l'ensemble des points $\sum_i \lambda_i x_i$, où $x_i \in A$ et $\sum_i |\lambda_i| = 1$ (resp. l'adhérence de cet ensemble). On en déduit aussitôt que cette enveloppe est contenue dans l'enveloppe convexe (resp. l'enveloppe convexe fermée) de la réunion des ensembles 2A, -2A, 2iA et -2iA ; les prop.2 et 3 montrent donc qu'elle est bornée lorsque A est borné, et précompacte lorsque A est précompact.

Un espace localement convexe complexe E est dit <u>tonnelé</u> lorsque tout tonneau <u>cerclé</u> dans E est un voisinage de 0 ; pour que E soit tonnelé, il faut et il suffit que l'espace localement convexe réel associé E_0 soit tonnelé : la condition est évidemment suffisante. Inversement, si T est un tonneau dans E_0 , il en est de même de iT , donc de $U = T \cap (iT)$, et comme l'intersection V des ensembles $e^{i\theta}U$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ contient $\frac{1}{2}U$, c'est un tonneau cerclé ; comme par hypothèse V est un voisinage de 0, il en est de même de T .

 154 bis

Un espace localement convexe complexe est dit <u>bornologique</u> s'il satisfait à la définition 4 , c'est-à-dire si l'espace localement convexe réel associé est bornologique. Toutes les propriétés des espaces tonnelés (resp. bornologiques) réels sont valables pour les espaces tonnelés (resp. bornologiques) complexes.

<u>Exercices</u>.- 1) Donner un exemple d'une partie fermée et non compacte dans R^2 , donc l'enveloppe convexe ne soit pas fermée.

2) Dans un espace vectoriel de dimension finie sur , montrer que l'enveloppe convexe d'un ensemble compact est un ensemble compact (cf. § 1, exerc.7).

3) Dans l'espace localement convexe complet $E = R^N$, soit e_n le point dont la n-ème coordonnée est 1 , les autres étant 0 . Soit A l'ensemble formé de l'origine et des points e_n ; montrer que A est compact, mais que l'enveloppe convexe de A n'est pas fermée dans E . Si F est le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_n (et non complet), montrer que l'enveloppe fermée convexe de A dans F est non compacte.

4) Pour que, dans un espace localement convexe E , il existe un corps convexe ne contenant aucune variété linéaire, il faut et il suffit que la topologie de E soit plus fine qu'une topologie d'espace normé. Lorsqu'il en est ainsi, montrer que les frontières de deux corps convexes quelconques ne contenant aucune demi-droite sont homéomorphes.

5) Soit E un espace vectoriel topologique séparé <u>somme topologique</u> d'une famille infinie (E_α) de sous-espaces ; montrer que, pour toute topologie $\mathcal{C}$ plus fine que la topologie de E et compatible avec la structure d'espace vectoriel de E , E est réunion d'une suite

croissante de sous-espaces vectoriels rares, et par suite n'est pas un espace de Baire. En déduire qu'un espace vectoriel de dimension infinie E, muni de la topologie localement convexe la plus fine, n'est pas un espace de Baire.

6) Soit E un espace vectoriel sur R, et soit $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille filtrante de sous-espaces vectoriels de E, telle que E soit réunion des E_α. Soit $\mathcal{C}_\alpha$ une topologie d'espace localement convexe sur E_α ; on suppose que, si $E_\alpha \subset E_\beta$, la topologie induite sur E_α par $\mathcal{C}_\beta$ est moins fine que $\mathcal{C}_\alpha$. Soit $\mathcal{C}$ la topologie d'espace localement convexe sur E la plus fine de celles qui, sur chaque E_α, induisent une topologie moins fine que $\mathcal{C}_\alpha$ (il existe de telles topologies, par exemple la topologie la moins fine sur l'ensemble E). On dit que E, muni de la topologie $\mathcal{C}$, est la limite inductive des E_α.

a) Montrer que pour qu'un ensemble convexe $V \subset E$ soit un voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que pour tout α, $V \cap E_\alpha$ soit un voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{C}_\alpha$.

b) Pour chaque indice $\alpha \in A$, soit W_α un voisinage convexe de 0 pour $\mathcal{C}_\alpha$, et soit W l'enveloppe convexe de la réunion des W_α ; montrer que les ensembles W constituent un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie $\mathcal{C}$.

c) Sur un espace vectoriel quelconque E sur R, montrer que la topologie localement convexe la plus fine est la limite inductive des topologies des sous-espaces de dimension finie de E (chacun de ces derniers étant muni de son unique topologie séparée compatible avec la structure d'espace vectoriel).

d) Soit (E_α) une famille quelconque d'espaces vectoriels localement convexes, E l'espace somme directe des E_α. Montrer que sur E, la topologie somme directe des topologies des E_α est identique à la limite inductive $\mathcal{T}$ des topologies des sommes directes d'un nombre fini de E_α , si l'ensemble d'indices est dénombrable, et est strictement moins fine que cette limite inductive si l'ensemble d'indices est non dénombrable, et si aucun des E_α n'est réduit à un seul point.

En déduire que pour qu'un ensemble B soit borné dans E pour $\mathcal{T}$, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans la somme d'un nombre fini de E_α , et que sa projection sur chaque E_α soit bornée.

e) Montrer que toute limite inductive d'espaces tonnelés est un espace tonnelé.

f) Montrer que toute limite inductive d'espaces bornologiques est un espace bornologique.

7) a) Soient E un espace localement convexe séparé, F un sous-espace fermé de E , C un ensemble convexe ouvert dans F . Pour tout $x \notin F$, montrer qu'il existe un ensemble convexe A ouvert dans E , tel que $A \cap F = C$ et que $x \notin A$ (si $x_0 \in C$, considérer un voisinage convexe ouvert V de x_0 dans E , qui ne rencontre pas $\complement C$ et ne contient pas x , et montrer que l'enveloppe convexe de V et de A répond à la question).

b) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soit (E_n) une suite croissante de sous-espaces de E , telle que E soit réunion des E_n . Soit $\mathcal{T}_n$ une topologie d'espace localement convexe séparé sur E_n , telle que $\mathcal{T}_n$ soit identique à la topologie induite sur E_n par $\mathcal{T}_{n+1}$. Montrer que sur E , la topologie $\mathcal{T}$, limite inductive des $\mathcal{T}_n$, est séparée, et qu'elle induit la topologie $\mathcal{T}_n$ sur E_n (utiliser a)) ; montrer en outre que chacun des E_n est fermé dans E .

En déduire que E , muni de la topologie $\mathcal{C}$, n'est pas un espace de Baire.

c) Les hypothèses étant les mêmes que dans b), on suppose en outre que chacun des E_n est complet pour la topologie $\mathcal{C}_n$. montrer que E est complet pour la topologie $\mathcal{C}$. (Si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur E , considèrer le filtre de Cauchy $\mathfrak{G}$ sur E formé des ensembles M+V , où M parcourt et V le filtre des voisinages de 0 dans E . Montrer que la trace de $\mathfrak{G}$ sur E_n est un filtre pour un entier n au moins ; pour cela raisonner par l'absurde, en supposant que pour chaque n il existe un ensemble M_n et un voisinage V_n de 0 dans E tels que M_n soit petit d'ordre V_n et que M_n+V_n ne rencontre pas E_n , la suite (V_n) étant décroissante. Si W est l'enveloppe convexe dans E des ensembles $\frac{1}{2}(V_n \cap E_n)$ montrer qu'il ne peut exister dans $\mathfrak{F}$ aucun ensemble petit d'ordre, en considérant dans $\mathfrak{F}$ les ensembles petits d'ordre W_n , où W_n est l'enveloppe convexe de V_n et des ensembles $\frac{1}{2}(V_k \cap E_k)$ pour $k < n$).

d) Les hypothèses étant les mêmes que dans b), montrer que pour qu'un ensemble B soit borné dans E , il faut et il suffit qu'il existe un entier n tel que $B \subset E_n$ et que B soit borné dans E_n .

e) Pour qu'il existe dans E un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés, il faut et il suffit que chacun des E_n ait la même propriété.

8) montrer que le complété d'un espace tonnelé et séparé est un espace tonnelé.

9) Soit $E = R^{(N)}$ le sous-espace (métrisable) du produit R^N ; montrer que E n'est pas un espace tonnelé.

10) montrer que tout produit d'une famille dénombrable d'espaces bornologiques est bornologique (Si $E = \prod_n E_n$ est produit d'une suite d'espaces bornologiques E_n, montrer que si A est un ensemble convexe tel que pour toute partie bornée B de E, il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda A$, il ne peut exister dans $\complement A$ une suite (x_n) de points de E telle que x_n ait ses $n-1$ premières coordonnées nulles, mais au moins une coordonnée d'indice $\geqslant n$ non nulle).

11) Soit E un espace de Banach de dimension infinie, et soit $\mathcal{C}$ une topologie d'espace normé strictement plus fine que celle de E (cf. § 3, exerc.4). montrer que si $p(x)$ est une norme définissant la topologie $\mathcal{C}$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) \leqslant 1$ n'est pas fermé pour la topologie initiale $\mathcal{C}_0$ de E (utiliser le cor. de la prop.4). En déduire qu'il existe dans E des ensembles convexes non fermés (pour la topologie $\mathcal{C}_0$) dont l'intersection avec toute variété linéaire de dimension finie est fermée (cf. § 1, exerc.15).

§ 5. Hyperplans d'appui d'un ensemble convexe.

1. Le théorème de Minkowski.

THÉORÈME 1 (Minkowski).- Soient E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, A un ensemble ouvert convexe non vide dans E, V une variété linéaire ne rencontrant pas A. Il existe un hyperplan fermé H contenant V et ne rencontrant pas A.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme.- Soit A un ensemble convexe ouvert non vide dans E ; si H est un hyperplan tel que A soit tout entier d'un même côté de H, H ne rencontre pas A et est fermé.

En effet, on ne peut avoir $A \subset H$, puisque A engendre E ; si $a \in A \cap \complement H$, il ne peut exister de point $b \in A \cap H$, car b étant point interne de A, la droite joignant a et b contiendrait des points non situés d'un même côté de H , contrairement à l'hypothèse. Par suite A est <u>strictement</u> d'un même côté de H , et comme le demi-espace algébriquement ouvert défini par H et contenant A contient un point intérieur, H est fermé dans E (Chap.I, § 2, cor. de la prop.1).

<u>1ère démonstration</u>. On peut se borner au cas où V contient l'origine. Si φ est l'application canonique de E sur l'espace quotient E/V , $\varphi(A)$ est non vide ouvert et convexe dans E/V et ne contient pas l'origine ; si H' est un hyperplan fermé dans E V passant par 0 et ne rencontrant pas $\varphi(A)$, $H = \overset{-1}{\varphi}(H')$ répondra à la question. On peut donc se ramener au cas où V est réduit à 0 .

Il suffit alors de prouver qu'il existe un <u>cône convexe maximal</u> de sommet 0 contenant A ; car un tel cône est un demi-espace algébriquement fermé (§ 1, th.1) et l'hyperplan H qui le définit répondra à la question, d'après le lemme.

Soit $a \in A$, et soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des cônes convexes de sommet 0, contenant A et ne contenant pas $-a$; $\mathfrak{K}$ n'est pas vide, car si C_0 est le cône convexe engendré par A , on a $-a \notin C_0$: en effet, dans le cas contraire, on aurait $-a = \lambda x$ avec $x \in A$, et par suite $0 = \frac{1}{1+\lambda}(a+\lambda x)$ appartiendrait à A , contrairement à l'hypothèse.

L'ensemble $\mathfrak{K}$, ordonné par inclusion, est évidemment inductif, toute réunion d'une famille totalement ordonnée de cônes convexes étant un cône convexe ; soit C un élément maximal de $\mathfrak{K}$; tout revient à prouver que C est un <u>cône convexe maximal</u>. Or, si C_1 est un cône convexe distinct de C et contenant C , C_1 n'appartient pas à $\mathfrak{K}$ et on a par suite $-a \in C_1$; mais comme a est point interne de C_1 , il en est de même de 0 , et par suite $C_1 = E$, ce qui achève la démonstration.

2$^{\text{è}}$ démonstration. Considérons sur E la topologie d'espace localement convexe la plus fine ; A est ouvert a fortiori pour cette topologie, et il suffit donc de démontrer le théorème en supposant E muni de cette topologie.

Commençons par démontrer le théorème dans le cas particulier où E est de dimension 2 ; la topologie de E étant séparée , E est alors isomorphe à $\mathbb{R}^2$. Il n'y a de démonstration à faire dans ce cas que si V est réduit à un point, qu'on peut supposer être l'origine. Soit C le cône convexe épointé de sommet O engendré par A (§ 1, n°4) ; C est réunion des λA , où $\lambda > 0$, donc C est ouvert dans E . Il suffit de prouver qu'il existe $x \neq 0$ dans E tel que la droite passant par O et x ne rencontre pas C ; pour cela, il suffit que l'on ait $x \notin C$ et $-x \notin C$. Or, comme le complémentaire G de O par rapport à E est connexe (Top.gén., chap.VI, § 2, prop.5) et non convexe, il existe au point un point frontière x de C par rapport à G ; on a $x \neq 0$ et $x \notin C$, puisque C est ouvert dans G ; d'autre part, si on avait $-x \in C$, O appartiendrait à C , ce qui est absurde.

Passons maintenant au cas général où E est quelconque ; on peut toujours supposer que $O \in V$. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels contenant V et ne rencontrant pas A ; il est clair que $\mathfrak{M}$ est inductif ; soit H un élément maximal de $\mathfrak{M}$; tout revient à prouver que H est un hyperplan.

Supposons le contraire, et soit a un point de A , et V le sous-espace vectoriel engendré par a et H ; dans cet espace, H admet pour supplémentaire la droite D passant par O et a . Comme par hypothèse $V \neq E$, il existe une droite D' passant par O et non contenue dans V ; soit F le sous-espace vectoriel V+D' . Dans F , H est fermé, et a pour supplémentaire le plan P=D+D' , et $A' = A \cap F$ est un ensemble ouvert convexe non vide ne rencontrant pas H . L'espace quotient F/H est séparé et de dimension 2 ; si φ est l'application canonique de F sur F/H , $\varphi(A')$ est un ensemble convexe ouvert non vide dans F/H , qui ne contient pas l'origine. Il existe donc dans E/H une droite Δ passant par 0 et ne rencontrant pas $\varphi(A')$; dans F , $H_1=H+\overset{-1}{\varphi}(\Delta)$ est donc un sous-espace vectoriel distinct de H , contenant H , et ne rencontrant pas A', ni a fortiori A , H_1 appartiendrait donc à $\mathfrak{M}$, ce qui est absurde.

C.Q.F.D.

2. <u>Séparation des ensembles convexes</u>. <u>Hyperplans d'appui</u>.

Rappelons (<u>Alg.</u>,chap.IX) que deux parties non vides A,B d'un espace vectoriel réel E sont dites <u>séparées</u> (resp. <u>strictement séparées</u>) par un hyperplan H , si A est contenue dans l'un des demi-espaces algèbriquement fermés (resp. ouverts) définis par H , et B dans l'autre.

PROPOSITION 1.- <u>Dans un espace vectoriel topologique</u> E <u>sur</u> $\mathbb{R}$, <u>soient</u> A <u>un ensemble ouvert convexe non vide, et soit</u> B <u>un ensemble convexe non vide quelconque ne rencontrant pas</u> A ; <u>il existe alors un hyperplan fermé</u> H <u>séparant</u> A <u>et</u> B .

En effet, l'ensemble convexe $C=A-B$ est ouvert et 0 n'appartient pas à C ; il existe par suite un hyperplan H' passant par 0 et tel que C soit tout entier d'un même coté de H' . Soit $f(x)=0$ une équation de H' (f forme linéaire $\neq 0$), et supposons par exemple que $f(x) \geqslant 0$ dans C . Alors, pour tout $x\in A$ et tout $y \in B$, on a $f(x) \geqslant f(y)$. Posons $\alpha = \inf_{x\in A} f(x)$; α est fini, et on a $f(x) \geqslant \alpha$ pour tout $x\in A$, et $f(y) \leqslant \alpha$ pour tout $y\in B$; l'hyperplan H d'équation $f(x)=\alpha$ <u>sépare</u> par suite A et B ; le lemme de démonstration du th.1 montre alors que H est fermé.

Remarque.- Même si les adhérences $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont sans point commun, il n'existe pas toujours d'hyperplan fermé qui sépare strictement A et B (exerc.4).

PROPOSITION 2.- Soient E un espace localement convexe, A un ensemble convexe fermé dans E , x_0 un point de E n'appartenant pas à A . Il existe alors un hyperplan fermé H séparant strictement x_0 et A .

En effet, il existe un voisinage ouvert convexe B de x_0 ne rencontrant pas A ; la prop.1 montre qu'il existe un hyperplan fermé H' séparant A et B ; si $f(x)=a$ est une équation de H' (f forme linéaire $\neq 0$), on a par exemple $\inf_{x\in A} f(x) \geqslant f(x_0)$; si on pose $a=\inf_{x\in A} f(x)$ et $b=f(x_0)$, l'hyperplan H d'équation $f(x) = \frac{1}{2}(a+b)$ répond à la question.

Remarque.- Si A et B sont deux ensembles convexes fermés sans point commun dans un espace localement convexe E , il n'existe pas toujours d'hyperplan fermé séparant A et B (chap.III, §2, exerc. 2).

COROLLAIRE 1.- Dans un espace localement convexe, tout ensemble convexe fermé A est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

En effet, pour tout $x_0 \notin A$, il existe un demi-espace fermé contenant A et ne contenant pas x_0 , en vertu de la prop. 2 .

COROLLAIRE 2.- Soient E un espace localement convexe, A un ensemble convexe fermé dans E , x_0 un point de E n'appartenant pas à A . Il existe un hyperplan fermé passant par x_0 et ne rencontrant pas A .

Si H est un hyperplan fermé séparant strictement x_0 et A , l'hyperplan fermé passant par x_0 et parallèle à H répond à la question.

DÉFINITION 1.- Dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, on appelle hyperplan d'appui d'une partie non vide A de E un hyperplan H contenant au moins un point de A et tel que A soit tout entier d'un même côté de H .

PROPOSITION 3.- Soit A un corps convexe (§1, n°7, déf.4) dans un espace vectoriel topologique E sur $\mathbb{R}$. Tout hyperplan d'appui de A est fermé, et tout point frontière de A appartient à un hyperplan d'appui au moins.

Il suffit d'appliquer le th.1 à l'intérieur $\mathring{A}$ de A et à un point frontière quelconque de A.

Remarque.- Si A est un ensemble convexe fermé dans E, engendrant E, ayant des points internes mais aucun point intérieur, il peut se faire qu'il existe des points de A non internes, mais n'appartenant à aucun hyperplan d'appui fermé de A (chap.III, § , exerc.).

3. Application aux variétés linéaires.

PROPOSITION 4.- Dans un espace localement convexe, toute variété linéaire fermée M est l'intersection des hyperplans fermés qui la contiennent.

En effet, pour tout $x_0 \notin M$, il existe un hyperplan fermé H' séparant strictement x_0 et M (prop.2) ; M est donc parallèle à H', et par suite l'hyperplan fermé H contenant M et parallèle à H' ne contient pas x_0, ce qui établit la proposition.

COROLLAIRE.- Dans un espace localement convexe séparé E, pour tout point $x_0 \neq 0$, il existe un hyperplan fermé passant par 0 et ne contenant pas x_0.

PROPOSITION 5.- Soient E un espace localement convexe séparé, M un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Il existe un sous-espace fermé N, supplémentaire topologique de M.

Il suffit de prouver qu'il existe un sous-espace fermé supplémentaire de M (chap.I, §2, prop.3). La proposition résulte de la prop.4 si M est de dimension 1. Si M est de dimension $n > 1$, raisonnons par récurrence sur n. Soit $a \neq 0$ un point de M, H un hyperplan fermé supplémentaire de la droite passant par 0 et a ; $H \cap M$ est de dimension n-1, donc, dans l'espace localement convexe séparé H , il existe un supplémentaire fermé N de $H \cap M$; il est clair que N est fermé dans E et suppélémentaire de M dans E .

Un sous-espace fermé M de dimension infinie d'un espace localement convexe séparé E n'admet pas nécessairement de supplémentaire topologique (chap.I, Appendice, exerc.11 et chap.III, § . exerc.).

4. Prolongement des formes linéaires continues.

THÉORÈME 2 (Hahn-Banach).- *Soit p une semi-norme sur un espace vectoriel réel E . Soit M un sous-espace vectoriel de E , et soit f une forme linéaire définie dans M et telle que $|f(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de M . Il existe alors une forme linéaire $\overline{f}$ définie dans E , prolongeant f , et telle que $|\overline{f}(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de E .*

On peut supposer que f n'est pas identiquement nulle, sans quoi le théorème est trivial. Considérons sur E la topologie localement convexe définie par l'unique semi-norme p ; l'ensemble convexe A indicateur de la semi-norme p , défini par l'inégalité $p(x) < 1$ est alors ouvert dans E . Soit V la variété linéaire définie dans M par la relation $f(x)=1$ (hyperplan dans M) ; on a $p(x) \geqslant 1$ en tout point de V , autrement dit, V ne rencontre pas A . Le th.1 montre donc qu'il existe un hyperplan H dans E , contenant V et ne rencontrant pas A . Soit $\overline{f}$ la forme linéaire définie dans E et telle que $\overline{f}(x)=1$ dans H ; comme V est un hyperplan dans M sur lequel les restrictions de f et $\overline{f}$ sont égales, on a $\overline{f}(x)=f(x)$ dans M ; enfin, comme 0 appartient au demi-espace ouvert défini par $f(x) < 1$, ce demi-espace contient A , et par suite la relation $\overline{f}(x)=1$ entraîne $p(x) \geqslant 1$. En vertu de l'homogénéité de $\overline{f}$ et de p , on a donc $|\overline{f}(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de E , et le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1.- Soient E un espace normé, M un sous-espace vectoriel de E, f une forme linéaire continue définie dans M ; il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ définie dans E, prolongeant f et telle que $\|\bar{f}\| = \|f\|$.

Il suffit d'appliquer le th.2 en prenant $p(x) = \|f\| . \|x\|$, ce qui donne $\|\bar{f}\| \leqslant \|f\|$; d'autre part, comme $\|\bar{f}\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |\bar{f}(x)|$, on a évidemment $\|\bar{f}\| \geqslant \|f\|$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.- Soient E un espace localement convexe, M un sous-espace de E, f une forme linéaire continue définie dans M ; il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ définie dans E et prolongeant f.

En effet, il existe par hypothèse une semi-norme p continue dans E et un nombre $a > 0$ tels que $|f(x)| \leqslant a.p(x)$ dans M (§ 3, prop.7) ; en vertu du th.2, il existe donc une forme linéaire $\bar{f}$ définie dans E, prolongeant f et telle que $|\bar{f}(x)| \leqslant a.p(x)$ dans E, ce qui prouve que $\bar{f}$ est continue.

COROLLAIRE 3.- Soient E un espace localement convexe, $x_0 \neq 0$ un point de E, p une semi-norme continue dans E ; il existe une forme linéaire continue f dans E, telle que $f(x_0)=p(x_0)$ et que $|f(x)| \leqslant p(x)$ dans E.

Il suffit d'appliquer le th.2 à la droite M passant par 0 et x_0 et à la forme linéaire $\lambda x_0 \rightarrow \lambda\, p(x_0)$ définie dans M.

5. Prolongement des formes linéaires positives dans un espace vectoriel ordonné.

PROPOSITION 6.- Soient E un espace localement convexe réel séparé, P un cône convexe dans E, ayant un point intérieur et tel que $P \cap (-P) = \{0\}$. Alors toute forme linéaire sur E, positive pour la structure d'ordre déterminée par P (§ 1, n°5), est continue.

En effet, si f est une forme linéaire positive et $\neq 0$, le demi-espace $f(x) \geqslant 0$ contient P par définition ; d'après le lemme de la démonstration du th.1, l'hyperplan H d'équation $f(x)=0$ est fermé, donc f est

est continue (chap.I, §2, th.1).

L'application du th.1 au point 0 et à l'ensemble convexe $\overset{\circ}{P}$ (intérieur de P) montre qu'il existe un hyperplan fermé H passant par 0 et ne rencontrant pas $\overset{\circ}{P}$; on en conclut que P est tout entier d'un seul côté de H , car dans le cas contraire, H contiendrait des points intérieurs à P (§ 1, prop. 19). Si $f(x)=0$ est une équation de H , f ou $-f$ est une forme linéaire positive ; on prouve ainsi l'existence de ces dernières dans E .

PROPOSITION 7.- Soient E un espace localement convexe réel séparé, P un cône convexe dans E , ayant un point intérieur et tel que $P\cap(-P)=\{0\}$. Soit M un sous-espace vectoriel de E contenant un point intérieur de P . Alors, pour toute forme linéaire positive f dans M (pour la structure d'ordre définie par $P\cap M$), il existe une forme linéaire $\bar{f}$ positive dans E (pour la structure d'ordre définie par Pà) et prolongeant f .

Soit N l'hyperplan fermé dans M , défini par l'équation $f(x)=0$; comme l'intérieur de $P\cap M$ (par rapport à M) n'est pas vide et est contenu dans un demi-espace fermé défini par N , N ne contient aucun point intérieur à $P\cap M$, en vertu du lemme ; a fortiori N ne contient aucun point intérieur à P (dans E). Le th.1 prouve qu'il existe un hyperplan fermé H contenant N et ne rencontrant pas l'intérieur de P ; comme M contient un point intérieur à P , on ne peut avoir $M\subset H$, d'où $M\cap H=N$. Si $\bar{f}(x)=0$ est une équation de H , et f_1 la restriction de $\bar{f}$ à M , $f_1(x)=0$ est une équation de N dans M , et par suite il existe un scalaire $\alpha\neq 0$ tel que $\alpha f=f_1$; en multipliant $\bar{f}$ par $1/\alpha$, on peut donc supposer que f est la restriction de $\bar{f}$ à M . Cela étant, si x_0 est un point intérieur à P et appartenant à M , on a $f(x_0)>0$, donc $\bar{f}(x_0)>0$; comme P est tout entier d'un même coté de H , on a nécessairement $\bar{f}(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in P$, ce qui montre que $\bar{f}$ est une forme linéaire positive, et achève la démonstration de la proposition.

2

Remarque.- Si on ne suppose pas que M contient un point intérieur de P , la proposition tombe en défaut, même si E est de dimension finie, et si $P \cap M$ contient des points intérieurs par rapport à M (exerc. 12).

6. Application : dérivées des fonctions à valeurs dans un espace localement convexe (en ~~pxxxx~~ petits caractères)

Au Livre IV, chap. I, § 2, nous avons démontré le théorème des accroissements finis pour des fonctions définies dans un intervalle de $\mathbb{R}$ et prenant leurs valeurs dans un espace normé sur $\mathbb{R}$; le théorème s'étend comme suit aux fonctions prenant leurs valeurs dans un espace localement convexe séparé quelconque :

PROPOSITION 8.- Soit f une fonction définie et continue dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, prenant ses valeurs dans un espace localement convexe séparé E . On suppose que f admet une dérivée en tous les points du complémentaire par rapport à I d'une partie dénombrable A de cet intervalle, et qu'en chacun de ces points $f'(x)$ appartient à un ensemble fermé convexe $D \subset E$. Dans ces conditions, pour tout couple de points distincts a,b de I , $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))$ appartient à D .

En effet, soit u une forme linéaire continue quelconque dans E , telle que D soit contenu dans le demi-espace fermé défini par la relation $u(z) \geqslant \alpha$. La fonction numérique continue $u(f(x))=g(x)$ est dérivable en tous les points de I n'appartenant pas à A , et en chacun de ces points, on a $g'(x)=u(f'(x))$ (Fonct. var. réelle, chap. I, § 1, n°), donc $g'(x) \geqslant \alpha$ par hypothèse ; en vertu du th. des accroissements finis pour les fonctions numériques, on a donc $\frac{1}{b-a}(g(b)-g(a)) \geqslant \alpha$; en d'autres termes, le point $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))$ est dans le demi-espace défini par $u(z) \geqslant \alpha$. Comme D est l'intersection de ces demi-espaces (cor. de la prop. 2), la proposition est démontrée.

COROLLAIRE 1.- *Si* D *est un corps convexe et si* $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))=c$ *est un point frontière de* D , *pour tout hyperplan d'appui* H *de* D *au point* c , $f'(x)$ *appartient à* $H\cap D$ *en tout point* x *de* $[a,b]$ *où cette dérivée est définie.*

En effet, si $u(\underset{\sim}{z})=\alpha$ est une équation de H et si $u(\underset{\sim}{z})\geqslant\alpha$ dans D , il résulte de la démonstration de la prop.8 que (en posant $g=u\circ f$) on ne peut avoir $g(b)-g(a)=\alpha(b-a)$ que si $g'(x)=0$ en tout point de $[a,b]$ n'appartenant pas à A ; ce qui signifie que $f'(x)$ appartient à H en ces points.

COROLLAIRE 2.- *Soit* p *une semi-norme continue dans* E . *Si, en tous les points de* $[a,b]$ *où* f *admet une dérivée, on a* $p(f'(x))\leqslant\alpha$, *on a*

$$p\left(\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))\right)\leqslant\alpha .$$

Il suffit d'appliquer la prop.8 à l'ensemble convexe fermé défini par la relation $p(z)\leqslant\alpha$.

7. *Extension aux espaces localement convexes complexes.*

Soient E un espace localement convexe *complexe*, E_0 l'espace localement convexe réel associé (§ 3,n°6). Toute variété linéaire M dans E est aussi une variété linéaire dans E_0 , la réciproque étant inexacte. Pour éviter toute confusion, on dira qu'une variété linéaire dans E (resp. dans E_0) est une variété linéaire *complexe* (resp. *réelle*). Une variété linéaire complexe de dimension finie n (resp. de codimension finie n) est une variété linéaire réelle de dimension 2n (resp. de codimension 2n).

Soit f une forme linéaire sur E (prenant donc des valeurs complexes); il est clair que $g=\mathcal{R}f$ et $h=\mathcal{J}f$ sont des formes linéaires sur E_0 ; en outre, la relation $f(ix)=if(x)$ entraîne l'identité $h(x)=-g(ix)$. Inversement, si g est une forme linéaire (réelle) sur E_0 , $f(x)=g(x)-ig(ix)$

est une forme linéaire (complexe) sur E telle que $\mathcal{R} f=g$; il est clair que, pour que f soit continue, il faut et il suffit que g le soit.

Soit maintenant H un hyperplan complexe dans E , d'équation $f(x)=\alpha+i\beta$, f désignant une forme linéaire complexe sur E ; en posant $g = \mathcal{R} f$, on voit que H est l'intersection des deux hyperplans réels H_1, H_2 d'équations respectives $g(x)=\alpha$ et $g(ix)=-\beta$; si H est fermé, il en est de même de H_1 et H_2 (chap.I, § 2, th.1). Inversement, soit H_o un hyperplan réel homogène, d'équation $g(x)=0$ (g forme linéaire (réelle) sur E_o) ; l'intersection H de H_o et de iH_o est un hyperplan complexe homogène, car si f est la forme linéaire (complexe) sur E telle que $\mathcal{R} f=g$, H est l'hyperplan d'équation $f(x)=0$; si H_o est fermé, il en est de même de H .

PROPOSITION 9.- *Dans un espace localement convexe complexe E , toute variété linéaire complexe fermée M est l'intersection des hyperplans complexes fermés qui la contiennent.*

Il suffit (par translation) de considérer le cas où M est un sous-espace vectoriel de E . Alors M est l'intersection des hyperplans réels fermés qui la contiennent (prop.4) ; or, si H_o est un hyperplan réel fermé contenant M , on a aussi $M=iM \subset iH_o$; donc M est contenue dans l'hyperplan complexe fermé $H=H_o \cap (iH_o)$; d'où résulte que l'intersection des hyperplans complexes fermés contenant M est contenue dans M , et par suite identique à M .

PROPOSITION 10.- *Soit p une semi-norme sur un espace vectoriel complexe E (§ 3, n°6). Soit M un sous-espace vectoriel de E , et soit f une forme linéaire* (complexe) *définie dans M et telle que $|f(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de M . Il existe alors une forme linéaire* (complexe) *f_1 définie dans E , prolongeant f et telle que $|f_1(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de E .*

En effet, $g = \mathcal{R} f$ est une forme linéaire réelle définie dans M et telle que $|g(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de M ; il existe donc une forme linéaire réelle g_1 définie dans E , prolongeant g et telle que $|g_1(x)| \leqslant p(x)$ dans E (th.2). Soit $f_1(x)=g_1(x)-ig_1(ix)$ la forme linéaire complexe sur E , dont g_1 est la partie réelle. Pour tout θ réel, on a $\mathcal{R}(e^{i\theta}f_1(x)) = \mathcal{R}(f_1(e^{i\theta}x))=g_1(e^{i\theta}x)$; en raison de la relation $p(e^{i\theta}x)=p(x)$, on a donc $|\mathcal{R}(e^{i\theta}f_1(x))| \leqslant p(x)$ pour tout θ , et en particulier $|f_1(x)| \leqslant p(x)$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 1.- Soient E un espace normé complexe, M un sous-espace vectoriel complexe de E , f une forme linéaire continue définie dans M ; il existe une forme linéaire continue f_1 définie dans E , prolongeant f et telle que $\|f\| = \|f_1\|$.

Il suffit d'appliquer la prop.10 en prenant $p(x)= \|f\| . \|x\|$, ce qui donne $\|f_1\| \leqslant \|f\|$; d'autre part, comme $\|f_1\| = \sup_{x \in E} |f_1(x)|$, on a évidemment $\|f_1\| \geqslant \|f\|$, d'où le corollaire .

COROLLAIRE 2.- Soient E un espace localement convexe complexe, M un sous-espace vectoriel complexe de E , f une forme linéaire continue définie dans M ; il existe une forme linéaire continue f_1 définie dans E et prolongeant f .

Il existe en effet par hypothèse une semi-norme p continue dans E et un nombre $a > 0$ tels que $|f(x)| \leqslant a.p(x)$ pour tout $x \in M$; il suffit d'appliquer la prop.10 à la semi-norme a.p et à la forme linéaire f.

Exercices.- 1) Soit A un corps convexe dans un espace vectoriel topologique séparé E sur $\mathbb{R}$, et soit H un hyperplan fermé contenant un point intérieur de A . Montrer que l'intersection de H et de la frontière F de A est un ensemble rare par rapport à F (pour montrer que dans tout voisinage d'un point de $H \cap F$, il existe des points de F n'appartenant pas à H , se ramener au cas où n=2) .

2) Dans un espace vectoriel topologique séparé E sur $\mathbb{R}$, soient A et B deux corps convexes n'ayant aucun point intérieur commun. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B .

3) Soient E un espace localement convexe séparé, A un ensemble convexe compact dans E , B un ensemble convexe fermé dans E . Montrer que si A et B n'ont aucun point commun, il existe un hyperplan fermé qui les sépare (remarquer que A-B est fermé).(*)

4) On considère, dans $\mathbb{R}^3$, le cone convexe fermé C défini par les inégalités $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z^2 \leqslant xy$. Montrer que la droite D d'équations $x=0$, $z=1$ ne rencontre pas C , mais qu'il n'existe aucun plan contenant D et ne rencontrant pas C .

5) Dans un espace vectoriel réel E , soit A un ensemble convexe, x_0 un point de E qui n'est pas point interne de A . Pour qu'il existe un hyperplan contenant x_0 et tel que A soit tout entier d'un même coté de cet hyperplan, il faut et il suffit qu'il existe un cône convexe C de sommet x_0 , tel que $C \cap A$ soit réduit au point x_0 , ayant au moins un point interne et engendrant E (pour voir que la condition est suffisante, utiliser le th. 1).

6) Soient E un espace localement convexe, C un cône convexe fermé de sommet 0 , distinct de E . Montrer que pour tout hyperplan H tel que C soit tout entier d'un même coté de H , il existe un hyperplan d'appui de C parallèle à H . En déduire que pour tout point $a \notin C$, il existe un hyperplan d'appui de C qui est fermé, ne contient pas a , et sépare a et C .

7) Soient E un espace localement convexe séparé, C un cône convexe fermé de sommet 0 dans E .

a) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension <u>finie</u> dans E , tel que $C \cap V = \{0\}$. Montrer que V+C est fermé dans E .

(Raisonner par l'absurde ; si $b \notin V+C$ était adhérent à $V+C$, pour tout voisinage convexe U de 0, l'intersection de $b+V$ et de $\overline{C+U} \subset C+2U$ ne serait pas vide ; remarquer ensuite que dans l'espace $W=V+\mathbb{R}b$, une sphère est compacte). Montrer que la proposition est inexacte si $V \cap C \neq \{0\}$, en prenant pour C le cône défini dans l'exerc.4, pour V la droite d'équations $x=0$, $z=0$.

b) Déduire de a) que, dans l'hypothèse où $C \cap V = \{0\}$, il existe un hyperplan d'appui fermé de C contenant V (utiliser l'exerc.6).

8) a) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, A et B deux ensembles convexes dans E, sans point commun. Montrer qu'il existe dans E deux ensembles convexes sans point commun, C et D, tels que $A \subset C$, $B \subset D$ et $C \cup D = E$ (appliquer le th. de Zorn à l'ensemble des couples (M,N) d'ensembles convexes sans point commun, tels que $A \subset M$ et $B \subset N$).

b) Soit E un espace localement convexe sur $\mathbb{R}$, de dimension infinie Montrer qu'il existe dans E deux ensembles convexes C, D sans point commun, partout denses dans E et tels que $C \cup D = E$ (utiliser l'exerc. 4 du §1).

9) Soient A un ensemble convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$, et x_0 un point de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à A ; on désigne par d la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer, sans utiliser le th.1 qu'il existe un point et un seul x de A tel que la distance euclidienne $d(x_0,x)$ soit égale à $d(x_0,A)$, et que l'hyperplan orthogonal à la droite joignant x_0 et x et passant par x est un hyperplan d'appui de A.

b) Déduire de a) une nouvelle démonstration du th.1 lorsque E est de dimension finie (se ramener au cas où V est un point frontière x_0 de A ; remarquer que la borne inférieure de la distance de x_0 aux hyperplans d'appui de A est nulle, et utiliser la compacité de S_{n-1}).

10) Soit A un ensemble compact dans $\mathbb{R}^n$, ayant des points intérieurs Montrer que si, par tout point frontière de A, il passe au moins un hyperplan d'appui de A, A est convexe (raisonner par l'absurde en montrant que si a et b sont deux points de A tels que le segment d'extrémités a et b ne soit pas contenu dans A, et si c est un point intérieur de A, non situé sur le segment d'extrémités a et b, il existe un point frontière de A, distinct de a et b, dans le triangle de sommets a,b,c).

11) Soit A un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$, ayant la propriété suivante: pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un point et un seul $y \in A$ tel que $d(x,y)=d(x,A)$ (d distance euclidienne).

a) Montrer que si $x \notin A$, l'hyperplan H passant par y et perpendiculaire au segment d'extrémités x et y, est un hyperplan d'appui de A (montrer qu'il est impossible qu'il existe des points de A situés strictement du même coté de H que x, en considérant les sphères dont le centre est sur la demi-droite d'origine y passant par x, et qui passent par y).

b) Déduire de a) que A est un ensemble convexe (raisonner par l'absurde en considérant deux points a,b de A et un point $x \notin A$ appartenant au segment d'extrémités a et b).

12) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soit P le cône convexe fermé de sommet O engendré par l'ensemble convexe défini par les relations $x=1$, $z \geqslant (y^3)^-$; on a $P \cap (-P)=0$. Soit M le sous-espace $z=0$ de $\mathbb{R}^3$; montrer que dans M, la forme linéaire $f(x,y)=y$ est positive pour la structure d'ordre définie par $P \cap M$, mais qu'il n'existe aucune forme linéaire $\bar{f}$ dans $\mathbb{R}^3$, positive pour la structure d'ordre définie par P, et prolongeant la forme f.

13) Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$.

a) Pour qu'il existe une forme linéaire continue non identiquement nulle dans E , il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de 0 dont l'enveloppe convexe ne soit pas partout dense.

b) Parmi toutes les topologies localement convexes sur E , moins fines que la topologie donnée $\mathcal{E}$ sur E , montrer qu'il existe une topologie $\mathcal{E}_0$ plus fine que toutes les autres, et que pour cette topologie, les formes linéaires continues sur E sont les mêmes que pour la topologie $\mathcal{E}$.

c) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension infinie, et soit (e_ι) une base de E . Pour tout $x = \sum_\iota x_\iota e_\iota$, soit $q(x) = \sum_\iota \sqrt{|x_\iota|}$; l'ensemble des parties définies par $q(x) \leqslant \varepsilon$ (ε nombre > 0 arbitraire) est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie $\mathcal{E}$ sur E compatible avec la structure d'espace vectoriel de E . Montrer que la plus fine des topologies localement convexes sur E moins fines que $\mathcal{E}$ est la topologie $\mathcal{E}_0$ définie par la norme $p(x)= \sum_\iota |x_\iota|$.

14) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, G un groupe <u>résoluble</u> d'automorphisme de E . Soit V un sous-espace vectoriel de E invariant par G , p une semi-norme sur E telle que $p(s.x)=p(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $s \in G$. Si u est une forme linéaire définie dans V , telle que $|u(x)| \leqslant p(x)$ dans V et $u(s.x)=u(x)$ pour tout $s \in G$, montrer qu'il existe une forme linéaire u_0 prolongeant u à E , telle que $|u_0(x)| \leqslant p(x)$ dans E et $u_0(s.x)=u_0(x)$ pour tout $s \in G$. (Dans l'espace produit $\mathbb{R}^E$, considérer l'ensemble K des fonctions numériques telles que $f(x)=u(x)$ pour $x \in V$ et $|f(x)| \leqslant p(x)$ dans E ; montrer que K est un ensemble convexe compact non vide ; appliquer ensuite le cor. du th.2 du § 1 à K et aux transformations linéaires

de $\mathbb{R}^E$ qui, à toute fonction $f \in \mathbb{R}^E$ font correspondre la fonction $x \to f(s.x)$, pour chaque $s \in G$).

15) Soit A un ensemble filtré par un filtre $\mathfrak{F}$, $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, prenant leurs valeurs dans un espace localement convexe séparé E . On suppose que chaque fonction f_α admet une primitive g_α dans I, que, suivant le filtre $\mathfrak{F}$, les fonctions f_α convergent uniformément dans toute partie compacte de I vers une fonction f à valeurs dans E , et que $g_\alpha(x_0)$ tend vers une limite (dans E) suivant $\mathfrak{F}$ pour un point $x_0 \in I$.

a) Montrer que les g_α convergent uniformément dans toute partie compacte de I vers une fonction continue g, suivant le filtre $\mathfrak{F}$. Si g_α est primitive <u>stricte</u> de f_α pour tout $\alpha \in A$, g est primitive stricte de f . Si le filtre $\mathfrak{F}$, ou le filtre des voisinages de 0 dans E , admet une base dénombrable, g est une primitive de f .

b) On prend pour E l'espace produit $\mathbb{R}^I$ des applications de I dans $\mathbb{R}$; la donnée d'une application u de I dans $\mathbb{R}^I$ équivaut alors à la donnée d'une application $(x,y) \to u(x,y)$ de $I \times I$ dans $\mathbb{R}$, $u(x)$ étant l'application partielle $y \to u(x,y)$. On prend pour A l'ensemble des parties finies de I , pour $\mathfrak{F}$ le filtre des sections de l'ensemble ordonné filtrant A (pour la relation $\subset$). Pour tout $\alpha = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans A , on prend pour $f_\alpha(x)$ l'application partielle $y \to f_\alpha(x,y)$, où $f_\alpha(x,y)=0$ pour $y \neq y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ et $f_\alpha(x,y_i)=D((x-y_i)\sin\frac{1}{x-y_i})$ pour $x \neq y_i$, $f_\alpha(y_i,y_i)=0$. Montrer que les fonctions f_α convergent uniformément suivant $\mathfrak{F}$ vers une fonction f qui n'admet pas de primitive, bien que chacune des fonctions f_α admette une primitive.

§ 6. Points extrémaux des ensembles convexes.

1. Facettes et points extrémaux d'un ensemble convexe.

DÉFINITION 1.- Soit A un ensemble convexe dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, et soit x un point quelconque de A. On appelle facette de x dans A l'ensemble formé de x et des points $y \neq x$ appartenant à A et tels que x soit point interne de l'intersection de A et de la droite passant par x et par y.

On dit qu'un point $x \in A$ est point extrémal de A si la facette de x dans A est réduite au point x.

Dire que x est point extrémal de A signifie donc que pour toute droite D passant par x, x est une extrémité du segment ou de la demi-droite $D \cap A$; en d'autres termes, si y et z sont deux points de A tels que x appartienne au segment fermé d'extrémités y et z, on a nécessairement $x=y$ ou $x=z$.

PROPOSITION 1.- Pour tout point x d'un ensemble convexe A, la facette F_x de x dans A est un ensemble convexe.

En effet, soient y et z deux points de F_x ; montrons que le segment d'extrémités y et z est contenu dans F_x. La propriété est conséquence évidente de la définition de F_x si $y=x$ ou $z=x$; supposons donc que y et z soient distincts de x ; par définition, il existe alors $\alpha > 0$ tel que, pour $|\rho| < \alpha$, les points $x+\rho(y-x)$ et $x+\rho(z-x)$ appartiennent à A. Pour tout λ tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, le point
$\lambda(x+\rho(y-x))+(1-\lambda)(x+\rho(z-x))=x+\rho(\lambda y+(1-\lambda)z-x)$ appartient donc à A pour $|\rho| < \alpha$, ce qui prouve que le point $\lambda y+(1-\lambda)z$ appartient à F_x.

COROLLAIRE.- La facette F_x d'un point x d'un ensemble convexe A est le plus grand ensemble convexe contenu dans A et dont x soit point interne.

En effet, il résulte aussitôt de la déf.1 que x est point interne de F_x et que si B est un ensemble convexe contenu dans A et tel que x soit point interne de B , on a $B \subset F_x$.

<u>Remarque</u>.- Si E est un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$, et A un ensemble convexe <u>fermé</u> dans E , la facette d'un point de A <u>n'est pas nécessairement fermée</u> (exerc. 4).

PROPOSITION 2.- <u>Soient</u> A <u>un ensemble convexe,</u> x <u>un point de</u> A ; <u>pour tout point</u> y <u>de la facette</u> F_x <u>de</u> x <u>dans</u> A , <u>la facette</u> F_y <u>de</u> y <u>dans</u> A <u>est identique à la facette de</u> y <u>dans</u> F_x (et par suite est <u>contenue dans</u> F_x) .

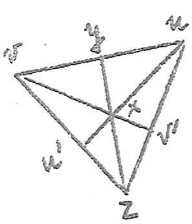

fig. 1

Il est clair par définition que tout point de la facette de y par rapport à F_x appartient à F_y ; il suffit donc de prouver que F_y est contenue dans F_x . Soient u et v deux points de A tels que y appartienne au segment ouvert d'extrémités u et v (fig.1) ; il suffit de montrer que u et v appartiennent à F_x . Comme $y \in F_x$ par hypothèse, il existe $\beta > 0$ tel que $z=x-\beta(y-x)$ appartienne à A ; on en déduit que le point u' où la droite passant par u et x rencontre la droite passant par v et z , appartient au segment d'extrémités v et z , donc à A : car, en supposant pour simplifier que $x=0$, on a $z=-\beta y$, $v=y-\alpha(u-y)$ avec $\alpha > 0$, d'où aisément $u' = -\frac{\alpha\beta}{1+\alpha+\beta}$ $u = \frac{\beta}{1+\alpha+\beta} v+(1-\frac{\beta}{1+\alpha+\beta})z$; cela démontre bien que $u \in F_x$ et on prouve de même que $v \in F_x$.

<u>2. Variétés d'appui d'un ensemble convexe.</u>

Soient A un ensemble convexe dans un espace vectoriel réel E , et soit H un <u>hyperplan d'appui</u> de A ; pour tout point $x \in H \cap A$ la facette de x par rapport à A est <u>contenue dans</u> H , car dans le cas contraire, il résulte de la déf.1 qu'il existerait des points de A qui ne seraient pas d'un même coté de H . Ceci conduit à généraliser la définition d'un hyperplan d'appui :

DÉFINITION 2.- Un dit qu'une variété linéaire affine V est une variété d'appui d'un ensemble convexe A si elle rencontre A et si, pour tout $x \in V \cap A$, la facette de x dans A est contenue dans V .

En particulier, si une variété d'appui V de A est telle que $V \cap A$ soit réduite à un point x_0 , x_0 est point extrémal de A .

Il résulte aussitôt de la déf.2 que si (V_α) est une famille quelconque de variétés d'appui de A et si l'intersection V des V_α rencontre A , V est une variété d'appui de A .

PROPOSITION 3.- Pour tout point x d'un ensemble convexe A , la variété linéaire V engendrée par la facette F_x de x dans A est l'intersection des variétés d'appui de A contenant x , et on a $V \cap A = F_x$.

En vertu de la déf.2, V est contenue dans toute variété d'appui de A contenant x ; d'autre part, comme x est point interne de F_x (cor. de la prop.1) V est identique à $\{x\}$ si $F_x = \{x\}$ et V est l'ensemble des droites passant par x et les points de F_x distincts de x si $F_x \neq \{x\}$, d'où $V \cap A = F_x$ en vertu de la déf.1 . Reste à montrer que V est variété d'appui de A ; or pour tout point $y \in V \cap A = F_x$, on a $F_y \subset F_x \subset V$ (prop.2), ce qui achève la démonstration.

Remarque.- Si un point $x \in A$ est contenu dans au moins un hyperplan d'appui de A , la facette de x par rapport à A est contenue dans l'intersection de A et de tous les hyperplans d'appui de A contenant x ; mais elle peut être distincte de cette intersection (ex.3).

2

3. Points extrémaux des ensembles convexes compacts.

PROPOSITION 4.- Soient E un espace vectoriel topologique séparé sur $\mathbb{R}$, A un ensemble compact dans E , H_0 un hyperplan fermé, x_0 un point quelconque de A . Il existe un hyperplan d'appui H de A , parallèle à H_0 et tel que x_0 et H soient du même coté de H_0.

En effet, soit g une forme linéaire continue dans E telle que $g(x)=a$ soit une équation de H_0 ; supposons par exemple que $g(x_0) > a$. Soit alors b la borne supérieure de g dans A ; il existe un point $z \in A$ tel que $g(z)=b$ (Top.gén., chap.IV, § 6,th.1) ; il est clair que l'hyperplan H d'équation $g(x)=b$ répond à la question.

COROLLAIRE.- Dans un espace localement convexe séparé E , tout ensemble convexe et compact A est intersection de demi-espaces fermés définis par des hyperplans d'appui de A .

En effet, pour tout point $x_0 \notin A$, il existe un hyperplan fermé H_0 qui sépare strictement x_0 et A (§ 5,prop.2). Soit y un point de A , H_1 l'hyperplan parallèle à H_0 passant par y ; s'il n'existe pas de point de A situé strictement du même coté de H_1 que H_0 , H_1 est un hyperplan d'appui de A qui sépare x_0 et A ; sinon, il existe d'après la prop.4 un hyperplan d'appui H de A situé strictement du même coté de H_1 que H_0 et qui sépare encore x_0 et A .

On notera que cette propriété, qui précise le cor. de la prop.2 du § 5, est valable aussi pour tout corps convexe (§ 5,prop.3) ; on ignore si elle est encore vraie pour un ensemble convexe fermé quelconque.

PROPOSITION 5.- Soient E un espace localement convexe séparé, A un ensemble convexe et compact dans E . Tout hyperplan d'appui fermé de A contient au moins un point extrémal de A .

Soit H un hyperplan d'appui fermé de A , et soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des variétés d'appui de A , fermées dans E et contenues dans H ; $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, puisque $H \in \mathfrak{F}$. Ordonnons $\mathfrak{F}$ par la relation $\supset$; nous allons voir que, pour cette relation, $\mathfrak{F}$ est inductif.

En effet, soit $\mathfrak{G}$ une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{F}$; tout revient à montrer que si $W = \bigcap_{V \in \mathfrak{G}} V$, W est une variété d'appui de A (car elle est évidemment fermée), et pour cela il suffit de vérifier que $W \cap A = \bigcap_{V \in \mathfrak{G}} (V \cap A)$ n'est pas vide ; or, lorsque V parcourt $\mathfrak{G}$, les intersections finies d'ensembles de la forme $V \cap A$ sont encore de cette forme, puisque $\mathfrak{G}$ est totalement ordonnée ; elles forment donc une base de filtre d'ensembles <u>fermés</u> (puisque par hypothèse $V \cap A$ n'est pas vide pour $V \in \mathfrak{G}$) sur un espace <u>compact</u> A , ce qui prouve que $W \cap A$ n'est pas vide.

En vertu du th. de Zorn (<u>Ens</u>. R, §6, n°10), il existe donc dans $\mathfrak{F}$ un élément <u>minimal</u> W_0 ; nous allons montrer que W_0 est réduite à un point x_0 , et par suite que x_0 est point extrémal de A . Supposons le contraire : dans la variété linéaire fermée W_0 , de dimension > 0 , $W_0 \cap A$ est un ensemble convexe compact, donc il existe dans W_0 un hyperplan d'appui fermé L de $W_0 \cap A$ (prop.4) ; pour tout point $x \in W_0 \cap A$, la facette de x dans A est contenue dans W_0 , donc identique à la facette de x dans $W_0 \cap A$; en particulier, si $x \in L \cap A$, la facette de x dans A est contenue dans L , autrement dit L est variété d'appui fermée de A ; comme $L \subset W_0$ et $L \neq W_0$, cela contredit la définition de W_0 , et la proposition est donc démontrée.

THÉORÈME 1 (Krein-Milman).- <u>Dans un espace localement convexe séparé</u> E , <u>tout ensemble convexe compact</u> A <u>est identique à l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux</u>.

En effet, soit B l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble des points extrémaux de A ; B n'est pas vide en vertu des prop. 4 et 5 , et on a évidemment $B \subset A$. Supposons qu'il existe un point $x_0 \in A$ n'appartenant pas à B ; il existerait alors un hyperplan fermé H_0 séparant strictement x_0 et B (§5, prop.2) ; en vertu de la prop.4, il existe un hyperplan d'appui fermé H de A', parallèle à H_o, et tel que H et x_o soient du même coté de H_o ; comme x_o et B sont d'un même coté de H, on a $H_o \neq H$, et par suite H ne rencontre pas B ; or, cela contredit la prop.5, et le théorème est donc démontré.

<u>Remarques</u>.- 1) Même dans un espace E de dimension finie, l'ensemble des points extrémaux d'un ensemble convexe compact <u>n'est pas nécessairement fermé</u> (exerc. 8).

2) Dans un espace localement convexe séparé et complet E, un ensemble convexe <u>fermé et borné</u> n'admet pas nécessairement de point extrémal s'il n'est pas compact (exerc. 11).

<u>4. Génératrices extrémales des cônes convexes</u>.

Dans ce n°, quand nous parlerons de cônes dans un espace vectoriel, il s'agira toujours de cônes de sommet d'origine. Soit C un cône convexe dans un espace localement convexe séparé E ; si V est une <u>variété d'appui</u> (n°2) de C, contenant un point $x_o \neq 0$ de C, V <u>contient l'origine</u> car la demi-droite d'origine 0 passant par x_o est contenue dans la facette de x_o dans C. Toute variété d'appui V de C contenant au moins un point $\neq 0$ de C est donc de dimension $\geqslant 1$; nous dirons qu'une variété d'appui de C, de dimension 1, est une <u>génératrice extrémale</u> de C.

Nous allons dans ce qui suit démontrer l'existence de génératrices extrémales d'une certaine catégorie de cônes convexes.

PROPOSITION 6.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe séparé</u>, A <u>un ensemble compact ne contenant pas l'origine</u> ; <u>alors le cône</u> C <u>engendré par</u> A <u>est fermé dans</u> E.

En effet, soit $a \neq 0$ un point adhérent à C ; la trace sur C du filtre des voisinages de a est alors une base de filtre $\mathfrak{B}$. Pour tout ensemble $V \in \mathfrak{B}$, soit C(V) le cône engendré par V ; l'intersection $A \cap C(V)$ n'est pas vide par hypothèse. Lorsque V parcourt $\mathfrak{B}$, les ensembles $A \cap C(V)$ forment donc une base de filtre sur A , et l'hypothèse que A est compact entraîne que cette base de filtre a un point adhérent b dans A . Par hypothèse, on a $b \neq 0$; si $a \notin C$ les points a et b ne peuvent être sur une même droite passant par 0, donc la droite D passant par 0 et le point $\frac{1}{2}(a+b)$ ne contient ni a ni b . Il existe par suite un hyperplan fermé H contenant D et séparant strictement a et b (§ 5, prop.4). Si U est la demi-espace ouvert défini par H et contenan a , b n'est pas adhérent à U . Mais en posant $V=U \cap C$, on a $V \in \mathfrak{B}$ et $C(V) \subset U$, donc b ne peut être adhérent à $C(V)$, ce qui est absurde, et montre que l'on a nécessairement $a \cap C$.

On notera que si $0 \in A$, le cône engendré par A n'est pas nécessairement fermé. Par exemple, dans le plan $\mathbb{R}^2$, le cône engendré par l'ensemble compact défini par l'inégalité $(x-1)^2+y^2 \leqslant 1$ est formé du point 0 et du demi-plan ouvert $x > 0$, donc n'est pas fermé.

PROPOSITION 7.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe séparé</u>, A <u>un ensemble convexe compact dans</u> E , G <u>un sous-espace vectoriel fermé de</u> E <u>de codimension</u> 2 , <u>ne rencontrant pas</u> A , H_0 <u>un hyperplan fermé passant par</u> G , x_0 <u>un point quelconque de</u> A . <u>Il existe un hyperplan d'appui fermé</u> H <u>de</u> A , <u>passant par</u> G , <u>et tel que</u> x_0 <u>et</u> $H \cap A$ <u>soient du même coté de</u> H_0 .

Soit φ l'homomorphisme canonique de E sur E/G ; comme $\varphi(A)$ est convexe et compact, et ne rencontrant pas $\varphi(G)$, on est évidemment ramené à démontrer la proposition lorsque E est de dimension 2 et G réduit à l'origine. Identifiant E et $\mathbb{R}^2$ par choix d'une base dans E , soit $\theta(x)$ la mesure de l'amplitude d'un point $x \neq 0$ comprise entre $-\pi$ et π ; comme on peut toujours supposer que A est contenu dans le demi-plan $y > 0$ (§ 5, prop.2) $\theta(x)$ est fonction <u>continue</u> de x dans A , donc attein son maximum et son minimum dans A en des points x_1 et x_2 . Soit

Soit d'autre part α l'amplitude d'un point de H_o ; il suffira de prendre pour H la droite passant par O et par celui des deux points x_1, x_2 tels que $\theta(x_o)$ appartienne à l'intervalle d'extrémités α et $\theta(x_i)$ dans $]-\pi , +\pi]$.

COROLLAIRE.- Soient E un espace localement convexe séparé, A un ensemble convexe compact dans E, ne contenant pas l'origine. Il existe alors un hyperplan d'appui fermé de A passant par O.

En effet, il existe un hyperplan fermé H_1 séparant strictement O et A (§ 5,prop.2) ; soit H_o l'hyperplan fermé passant par O et parallèle à H_1. Le corollaire résulte aussitôt de l'application de la prop.7 à un sous-espace fermé quelconque de codimension 2 contenu dans H_o.

PROPOSITION 8.- Soient E un espace localement convexe séparé, A un ensemble convexe compact dans E, ne contenant pas l'origine, H un hyperplan d'appui fermé de A passant par O. Il existe dans H une génératrice extrémale du cône convexe C engendré par A.

Raisonnons comme dans la prop.5, en considérant l'ensemble $\mathfrak{F}$ des variétés d'appui de C, fermées dans E, rencontrant A et contenues dans H ; comme $H \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ n'est pas vide. L'ensemble $\mathfrak{F}$, ordonné par la relation $\supset$, est inductif ; en effet, soit $\mathfrak{G}$ une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{F}$, et soit $W = \bigcap_{V \in \mathfrak{G}} V$; si on prouve que $W \cap A$ n'est pas vide, il en résultera que W est une variété d'appui de C appartenant à $\mathfrak{F}$. Or, lorsque V parcourt $\mathfrak{G}$, les intersections finies d'ensembles $V \cap A$ sont encore de cette forme, puisque $\mathfrak{G}$ est totalement ordonnée ; ces intersections forment par suite une base de filtre composée d'ensembles fermés dans l'espace compact A ; elles ont donc une intersection non vide $W \cap A$.

Soit alors W_0 un élément <u>minimal</u> de $\mathfrak{F}$; nous allons montrer que W_0 est de dimension 1 , et par suite que W_0 est une génératrice extrémale de C contenue dans H . Supposons le contraire ; alors, dans l'espace localement convexe W_0 , $W_0 \cap A$ est un ensemble convexe compact non vide, ne contenant pas l'origine ; il existe par suite dans W_0 un hyperplan d'appui fermé L de $W_0 \cap A$ passant par 0 (cor. de la prop.7). L est une variété d'appui de C , et comme W_0 est fermée dans E , il en est de même de L ; on aurait donc $L \in \mathfrak{F}$, $L \subset W_0$ et $L \neq W_0$, contrairement à la définition de W_0 .

THÉORÈME 2.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe séparé</u>, A <u>un ensemble convexe compact dans</u> E , <u>ne contenant pas l'origine</u>, C <u>le cône convexe engendré par</u> A ; <u>alors</u> C <u>est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses génératrices extrémales</u>.

En effet, soit B l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble des génératrices extrémales de C ; B est un cône non réduit à 0, en vertu du cor. de la prop.7 et de la prop.8, et on a évidemment $B \subset C$. Supposons qu'il existe un point $x_0 \in A$ n'appartenant pas à B ; il existerait alors un hyperplan fermé H_0 séparant strictement x_0 et B (§ 5,prop.2) ; si H_1 est l'hyperplan parallèle à H_0 et passant par l'origine, H_1 sépare x_0 et B et $x_0 \notin H_1$. Soit d'autre part L un hyperplan fermé passant par 0 et ne rencontrant pas A (par exemple un hyperplan parallèle à un hyperplan fermé séparant strictement 0 et A) ; $G = H_1 \cap L$ est un sous-espace fermé de codimension 2 , ne rencontrant pas A . En vertu de la prop.7, il existe donc un hyperplan d'appui fermé H de A contenant G tel que x_0 et $H \cap A$ soient du même coté de H_1 . Or, H contient une génératrice extrémale D de C d'après la prop.8, et si x_1 est un point de $D \cap A \subset H \cap A$, x_1 ne peut appartenir à H_1 (puisque $G \cap A = \emptyset$) , donc x_1 et B ne sont pas du même coté de H_1 ; mais cette conclusion est absurde puisque D est contenue dans B par définition.

Remarque.- Si D est une génératrice extrémale du cône C , $D \cap A$ est réduit à un point (qui est alors point extrémal de A) ou est un segment fermé dont les extrémités sont des points extrémaux de A . Mais on voit immédiatement que si x_0 est un point extrémal de A , la demi-droite d'origine O passant par x_0 n'est pas en général une génératrice extrémale de C , même lorsqu'il existe un hyperplan d'appui de C contenant D .

Exercices.- 1) Soit x un point non interne d'un ensemble convexe A , et soit F_x la facette de x dans A . Montrer que, pour qu'un point $y \in A$ soit tel que $F_y = F_x$, il faut et il suffit que y soit point interne de F_x . En déduire que, si F_x est de dimension finie, et si y est un point non interne de F_x , la dimension de F_y est strictement inférieure à celle de F_x .

2) Soit A un ensemble convexe, V une variété d'appui de A , F son intersection avec A . Montrer que F est la facette de chacun de ses points internes.

3) Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble convexe A défini par les relations $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant 1+\sqrt{1-x^2}$. Montrer qu'il existe des points frontières de A dont la facette dans A est distincte de l'intersection de A et des droites d'appui de A passant par ce point.

4) Dans l'espace normé $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ des suites bornées $x = (x_n)$ de nombres réels (avec $\| x \| = \sup_n |x_n|$), soit A l'ensemble convexe borné et fermé défini par les inégalités $-1/n \leqslant x_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 1$, et $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$. Montrer que A est un corps convexe, que l'origine est un point frontière de A et que la facette de O dans A n'est pas fermée

Si on considère A comme plongé dans l'espace produit $\mathbf{R}^N$, montrer que A est compact, mais que la facette de O dans A n'est pas fermée.

5) Soient E un espace normé, A un ensemble compact dans E.

a) Montrer que la distance de deux hyperplans d'appui parallèles de A est au plus égale au diamètre δ de A.

b) Montrer qu'il existe des couples (a,b) de points de A tels que $\|a-b\| = \delta$; pour un tel couple de points, il existe aux points a et b deux hyperplans d'appui de A, paralléles et dont la distance est égale à δ (considérer la boule fermée de centre a et de rayon δ).

6) a) Dans l'espace $\mathbf{R}^n$, normé par la norme euclidienne, soit A un ensemble convexe compact de dimension n ; pour tout $x \in S_{n-1}$, on désigne par $\rho(x)$ le maximum de la longueur des segments parallèles au vecteur x et contenus dans A. Montrer qu'il existe deux points u,v de A tels que le segment d'extrémités u,v soit parallèle au vecteur x et ait une longueur $\rho(x)$; en déduire qu'il existe deux hyperplans d'appui de A, parallèles et passant respectivement par u et v (considérer l'ensemble $A+\rho(x)x$, et appliquer la prop.1 du § 5).

b) Soit d la distance <u>minima</u> de deux hyperplans d'appui parallèles de A ; montrer qu'il existe deux points a,b de la frontière de A, tels que $\|a-b\| = d$, et que les hyperplans passant respectivement par a et b et perpendiculaires au segment d'extrémités a,b soient des hyperplans d'appui de A (utiliser a)).

7) Dans l'espace $\mathbf{R}^2$, montrer que l'ensemble des points extrémaux d'un ensemble convexe fermé A est fermé (remarquer que lorsque A est de dimension 2, sa frontière est homéomorphe à S_1 ou à $\mathbf{R}$, ou à une somme topologique de deux espaces homéomorphes à $\mathbf{R}$ (§ 1, exerc.11 et 14, et § 4, prop.1) ; montrer ensuite que les points de A dont la facette dans A est de dimension 1 forment un ensemble ouvert par rapport à la frontière de A).

8) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on considère l'ensemble convexe compact A , enveloppe convexe de la réunion du cercle $z=0$, $x^2+y^2-2x=0$ et des deux points (0,0,1) et (0,0,-1). Montrer que l'ensemble des points extrémaux de A n'est pas fermé.

9) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Montrer que tout ensemble convexe A fermé dans E et ne contenant aucune droite, est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux (raisonner par récurrence que la dimension de la facette d'un point de A).

10) Dans l'espace de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{N})$, soit e_n la suite dont tous les termes sont égaux à 0 sauf celui d'indice n , qui est égal à 1 . Soit A l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble formé de 0 et des points e_n/n $(n \geqslant 1)$. Montrer que A est compact, que ses points extrémaux sont 0 et les e_n/n $(n \geqslant 1)$ et que A n'est pas identique à l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

11) Soit E le sous-espace fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{N})$ formé des suites $x=(x_n)$ telles que $\lim_{n\to\infty} x_n=0$. Montrer que, dans l'espace de Banach E , la boule fermée S : $\|x\| \leqslant 1$ ne possède aucun point extrémal.

12) Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, f une fonction définie et continue dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans E , dérivable en tous les points du complémentaire par rapport à I d'une partie dénombrable de I , et telle qu'en chacun de ces points $f'(x)$ appartienne à un ensemble convexe D fermé dans E . Montrer que si a et b sont deux points de I tels que $a<b$ et si $c = \frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))$ appartient à la frontière de D , $f'(x)$ appartient à la facette de c dans D pour tout point de $[a,b]$ où cette dérivée est définie (raisonner par récurrence sur la dimension de D, en utilisant le cor.1 de la prop.8 du § 5).

13) On dit qu'un point x d'un ensemble convexe A est un point de <u>stricte convexité</u> s'il existe un hyperplan d'appui H de A tel que $H \cap A = \{x\}$.

a) Soit A un ensemble convexe compact dans un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que dans tout demi-espace ouvert déterminé par un hyperplan H et contenant au moins un point de A , il existe un point de stricte convexité de A (considérer dans H une boule fermée C de dimension n-1 de rayon assez grand contenant $H \cap A$, puis les boules S de dimension n et de plus grand rayon contenant C et A) .

b) Montrer que A est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points de stricte convexité (utiliser a)).

c) Tout point de stricte convexité est point extrémal, mais non réciproquement (cf. exerc.3). Montrer que tout point extrémal de A est adhérent à l'ensemble des points de stricte convexité (en utilisant b), ainsi que l'exerc.7 du §1, remarquer qu'un point extrémal est limite d'une suite de points de la forme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_{im} x_{im}$, où $\lambda_{im} \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_{im} = 1$ et où les x_{im} sont des points de stricte convexité ; observer en outre qu'on peut supposer que chacune des suites (x_{im}) et (λ_{im}) a une limite).
