RÉDACTION N° 153

COTE : NBR 054

TITRE : COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES (CARTAN)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 2

NOMBRE DE FEUILLES : 2

NBR 054 153 2

COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES (CARTAN)

Il me vient à l'esprit que, au sujet des fonctions analytiques de variables complexes, nous ne sommes pas allés au bout de nos idées. Si mes souvenirs sont exacts, on doit montrer que toute distribution f qui satisfait à $d''f=0$ est une fonction analytique ; cela tient à ce que, pour un choix de coordonnées complexes locales z_i, toute solution de $d''f=0$ est a fortiori une solution de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_i} = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire est harmonique. Or toute distribution harmonique est analytique.

Je propose de systématiser ce point de vue : pour l'étude locale des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, considérer que l'espace de ces fonctions est un sous-espace de celui des fonctions harmoniques. Il est évident, avec la théorie élémentaire des distributions, que ce sous-espace est fermé pour la topologie de l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions. Reste à étudier ce qu'est, sur l'espace des fonctions harmoniques, la topologie de l'espace des distributions. C'est dans ce sens que je propose d'envisager ce qui se rattache au théorème de Weierstrass concernant la convergence des familles de fonctions analytiques, qui serait traitée pour les fonctions harmoniques en général (avec possibilité de généralisation à d'autres équations aux dérivées partielles).

Or une fonction harmonique f peut être régularisée par des fonctions φ ne dépendant que de la distance à l'origine, et indéf. différentiables ; cela ne change pas f . Il en résulte aussitôt que la convergence, au sens de l'espace des distributions, pour f , entraîne la convergence uniforme sur tout compact, non seulement pour f mais pour chacune de ses dérivées ; il suffit d'observer que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f * \varphi) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, .$$

L'équicontinuité des familles bornées se prouve de la même manière (sans même qu'il soit besoin de faire appel à une formule intégrale genre Poisson) : la connaissance d'une borne sup. de f entraîne une majoration de chaque dérivée sur chaque compact contenu ; car pour un tel compact on choisit φ de support assez petit, puis, φ étant choisie, on majore $f * \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ à l'aide de f . Comme application, le théorème de Vitali pour les fonctions harmoniques ; il entraîne aussitôt le th. de Vitali pour les fonctions analytiques de variables complexes, puisqu'elles constituent un sous-espace fermé.