TITRE : LIVRE VIII : FONCTIONS ANALYTIQUES
(THÉORIE ÉLÉMENTAIRE)
CHAPITRES I ET II (ÉTAT 1)

NBR 052 2

Samuel 151 151+

LIVRE VIII

FONCTIONS ANALYTIQUES

(Théorie élémentaire)

CHAPITRE I (Etat 1)

SÉRIES ENTIÈRES.

Sommaire.

§ 1 : Propriétés élémentaires des séries entières. 1. Définition d'une série entière. 2. Convergence d'une série entière. 3. Substitution de séries entières dans une série entière. 4. La notion de fonction holomorphe. 5. Application : puissances négatives et puissances fractionnaires de fonctions holomorphes.

§ 2 : La méthode des majorantes. 1. Majorantes d'une série entière. 2. Résolution des équations analytiques. 3. Intégration des équations différentielles. 4. Applications : I. Dépendance des conditions initiales. 5. Applications : II. Equations complètement intégrables.

CHAPITRE II (Etat 1)

FONCTIONS HOLOMORPHES D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

Sommaire

§ 1 : Le principe du prolongement analytique. 1. Prolongement analytique d'une fonction holomorphe. 2. Domaines d'existence maximaux. Points singuliers. 3. Fonctions holomorphes de variables réelles.

§ 2 : Primitive d'une fonction holomorphe d'une variable complexe. 1 . Intégra-tion le long d'une route. 2. Déformation d'un chemin. 3. Primitives d'une fonction holomorphe.

§ 3 : L'intégrale de Cauchy. 1. Indice d'un circuit par rapport à un point. 2. La formule de Cauchy. 3. Extension aux fonctions de plusieurs variables complexes. 4. Convergence des suites de fonctions holomorphes. 5. Intégrales fonctions holomorphes de paramètres complexes.

...

<u>Cartan</u> : | d'abord ineg. de Cauchy
| d'où : convergence compacte des fcts holomorphes

| Elliptique $\left(\frac{1}{\pi z} * \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \delta \ldots\right)$
<u>3 pts de vue</u> | Harmonique (maximum, Liouville) majoration précise, Weierstrass
(Schw) | Holomorphe → rien avec n variable

Th. d'existence sur les surf. Riemann par distrib.

§ 4 : Les inégalités de Cauchy. 1. Les inégalités de Cauchy. 2. Le théorème de Liouville. 3. Applications : I. Le théorème de d'Alembert-Gauss. 4. Applications : II. Le théorème de Gelfand-Mazur. 5. Le principe du maximum. 6. Ensembles équicontinus de fonctions holomorphes.

§ 5 : Points singuliers isolés. Résidus. 1. La série de Laurent. 2. Points singuliers isolés. 3. Résidus. 4. Application : principe de l'amplitude. 5. Théorèmes d'existence pour les fonctions entières et méromorphes.

Appendice : Eléments de topologie plane. Application aux fonctions holomorphes

1. Applications inessentielles dans $\mathcal{U}$. 2. Coupures du plan. 3. Arcs simples et courbes closes simples. 4. Approximation des domaines contra-ctiles par des domaines de Jordan. 5. Approximation des fonctions holomorphes par des polynômes.

Commentaires.

Ceci est une rédaction état 1 plutôt qu'un rapport, pour plusieurs raisons : 1° préférences personnelles du rapporteur pour ce genre de travail ; 2° il n'est pas question d'innover sur la substance des questions traitées dans ce Livre, mais au plus sur leur présentation, ce qui est essentiellement affaire de rédaction.

Le rapporteur a suivi en gros le plan tracé dans La Tribu de Février 1950. Peu de remarques pour le chap.I ; on s'est simplement astreint à expliciter les opéra tions essentielles (substitution et méthode des majora-ntes) ; la plupart des bouquins, apparemment par flemme (car ce n'est pas drôle d'aligner des files d'indices) se contentent de décrire sommairement le procédé et de dire "on voit évidemment que ..." ; le rédacteur est d'a-vis que tant qu'on s'en tient là on n'a rien démontré, pas plus que les gens qui "démontrent" la commutativité du produit de 2 entiers en "montrant" un "Gitter" rectangulaire (avec peut-être 2^{1000} points dedans !)

il faut au moins écrire explicitement les formules qui permettent de faire le raisonnement ; ce n'est déjà pas une petite affaire !.

Pour le chap.II, la grosse différence avec le plan de La Tribu consiste, suivant une idée de CHEVALLEY adoptée d'enthousiasme par le rapporteur, à vider purement et simplement la définition des fonctions holomorphes comme fonctions continûment dérivables. Les raisons pour ce faire sont les suivantes : 1° le rapporteur ne connaît aucun raisonnement classique démontrant qu'une fonction est holomorphe par existence de la dérivée, qui ne donne pas en même temps le développement en série entière en chaque point ; 2° il est ridicule de démontrer par un raisonnement particulier l'analyticité des fonctions harmoniques de 2 variables, et pas de n , ou des solutions des équations elliptiques, question qui mérite certainement d'être traitée, mais en son lieu ; 3° du point de vue esthétique, il est extrêmement désagréable d'arrêter pile le développement naturel de la théorie (à partir des séries entières) pour suivre brusquement une tout autre idée, sans qu'on sache bien pourquoi, et après coup de rejoindre comme par miracle le point de vue primitif. Cela ne veut naturellement pas dire qu'il faille aller à l'extrême contraire (tout aussi ridicule) de la théorie dite "de Weierstrass", où on se refuse tout usage de l'intégration, au prix de grotesques contorsions (voir le bouquin de Hurwitz-Courant comme exemple à ne pas suivre) ; on a essayé ici un compromis qui donne très rapidement les résultats fondamentaux. Bien entendu, il est très facile, après coup, et si on y tient absolument, de démontrer qu'une fonction continûment dérivable est holomorphe par la méthode Whitehead : D étant un disque ouvert de frontière γ , on montre que pour tout $z \in D$, l'intégrale $\int_\gamma (f(x)-f(z))dx\ (x-z)$ est nulle en faisant une homothétie de centre z et de rapport λ , et prouvant (par dérivation sous le signe $\int$) que la dérivée par rapport à λ est nulle, et que l'intégrale tend vers 0 avec λ . Mais CHEVALLEY et le rapporteur sont d'avis qu'ici cela mérite au plus un exercice, avec renvoi dans le texte.

Cartan et Weil contre

de quoi s'agit-il ?

Autres remarques : comme signalé par CARTAN, le th. de Stokes n'a rien à voir avec la théorie ; il semble n'intervenir que lorsqu'on intègre des formes différentielles de degré 2 au moins ; pour les formes de degré 1 , un th. de déformation beaucoup plus élémentaire en tient lieu. Le rédacteur demande qu'on lui explique la différence profonde entre "analytique" et "holomorphe" (ce que dit là-dessus

SI La Tribu est dénué de sens), et propose qu'on s'en tienne une bonne fois à l'un de ces deux mots. On a donné chemin faisant quelques résultats sur les fonctions de plus d'une variable, quand ce sont des extensions immédiates des résultats sur les fonctions d'une seule variable ; faut-il supprimer ces résultats ou au contraire en donner davantage ? Bourbaki jugera !

Enfin, d'accord avec CHEVALLEY, on a inséré à la fin en tant que prime au lecteur, le papier sur la Topologie plane (th. de Janiszewski et Jordan par la méthode de la thèse SAMMY) préparé jadis par WEIL et CHEVALLEY. Le Haut Commissariat se voilera la face devant cette infraction à la méthode bourbachique "du généralissime au particulier" ; mais le commun des lecteurs ne sera peut-être pas fâché de voir que 8 pages suffisent pour arriver au th. de Jordan, sans avoir à en avaler 2000 sur les foncteurs, torseurs, suites exactes, anneaux spectraux, sic carapaces, faisceaux fins, etc., etc. Peut-être même cela les incitera t-il à regarder tout ce grand fourbi pour voir comment on peut généraliser d'aussi beaux théorèmes. Quant à la place de ce papier, il semble que cela s'insère ici assez naturellement, vu les considérations sur l'indice d'un circuit faites dans le texte. On a ajouté l'approximation d'un domaine simplement connexe par une suite de domaines polygonaux ; il semble qu'autrefois on se servait pas mal de cela ; est-ce vraiment utile ? Aux spécialistes de décider .

C'est des séries formelles en φ_i
Puis : substitution
Pas de déf
ou : famille de fonctions

recl. elem.

LIVRE VIII
FONCTIONS ANALYTIQUES
(Théorie élémentaire)

polydisque

CHAPITRE I (Etat 1)
SÉRIES ENTIÈRES.

§ 1 . Propriétés élémentaires des séries entières.

est ce utile?

1. Définition d'une série entière.

???

Soit K un corps commutatif, valué, complet, non discret (Top.gén., chap. IX, § 3) ; nous allons dans ce qui suit considérer des applications de certaines parties de l'espace produit K^p (p entier $\geqslant 1$ quelconque) dans un espace normé complet E sur K . On dira qu'une partie P de K^p est un poly~~cylindre~~disque ouvert (resp. fermé) s'il est le produit de p boules ouvertes (resp. fermées) dans les facteurs de K^p ; en d'autres termes, c'est l'ensemble des $x=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ tels que $|x_i-a_i|<\alpha_i$ (resp. $|x_i-a_i|\leqslant\alpha_i$) pour $1\leqslant i\leqslant p$ (les α_i étant n nombres >0 quelconques). On dit que le point $a=(a_i)$ est le centre du polycylindre P et les α_i ses rayons. Nous considérerons toujours K^p comme normé par la norme $\|x\| = \sup_i |x_i|$; une boule dans K^p est donc un polycylindre dont tous les rayons sont égaux.

stet

DÉFINITION 1.- *Etant donné un point* $a=(a_i)\in K^p$, *on appelle série entière par rapport aux p variables* x_i-a_i ($1\leqslant i\leqslant p$, $x_i\in K$), *à valeurs dans l'espace normé complet E sur K , toute famille d'éléments de E de la forme* $(c_{n_1n_2\ldots n_p}(x_1-a_1)^{n_1}(x_2-a_2)^{n_2}\ldots(x_p-a_p)^{n_p}$, *où l'indice* $(n_1,n_2,\ldots,n_p)$ *parcourt l'ensemble* N^p *et où les éléments* $c_{n_1n_2\ldots n_p}$ *appartiennent à E et sont appelés les coefficients de la série entière. En tout point* $x=(x_i)$ *où cette famille est sommable, sa somme est dite somme de la série entière.*

On notera que le terme traditionnel de "série" est impropre lorsque $p>1$; pour $p=1$, on peut effectivement considérer la série de terme général c_nx^n , et parler de sa somme même

~~Donner l'exemple de la prop. + la Hartogs~~

Dire qu'l le domaine de convergence n'est pas ~~nul~~ vide (= ens. des pts ~~où~~ au vois. desquels ça converge)

Cor: domaine de convergence $\begin{cases} = \bigcup \text{polycylindres} \\ = \text{intérieur de l'ensemble des pts où c'est borné} \end{cases}$

Exer: convexité logarithm. $\left[\begin{array}{l} \log|x_k| = \xi_k \\ \sum n_k \xi_k \leq \log M - \log|c\ldots| \\ \text{convexe} - \end{array}\right.$ suite croissante de convexes – Prendre l'intérieur –

Utile –
Donne des trucs
genre Hartogs
MAIS : exer.

Dire que c'est <u>borné</u> dans un polycylindre + petit.

aux points où la série est convergente, sans être commutativement convergente (Top.gén., chap.III, § 4, n°7).

Remarque.- Dans la plupart des applications, le corps valué K est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; nous signalerons les propriétés des séries entières qui dépendent des propriétés particulières à ces corps.

Une série entière est dite scalaire si ses coefficients appartiennent au corps K.

2. Convergence d'une série entière.

Pour étudier les valeurs des x_i pour lesquelles une série entière est sommable, on peut se borner (en effectuant une translation) au cas où les a_i sont tous nuls.

THEOREME 1.- Soit $b=(b_i)$ un point de K^p de coordonnées $b_i \neq 0$ (pour $1 \leq i \leq p$), tel que la famille de nombres réels $\| c_{n_1 n_2 \ldots n_p} b_1^{n_1} b_2^{n_2} \ldots b_p^{n_p} \|$ soit bornée. Pour tout système de nombres réels β_i tels que $0 < \beta_i < |b_i|$ pour $1 \leq i \leq p$, la série entière de terme général $c_{n_1 n_2 \ldots n_p} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots z_p^{n_p}$ est absolument et uniformément sommable dans le polycylindre fermé $|z_i| \leq \beta_i$ $(1 \leq i \leq p)$.

En effet, soit $A > 0$ un nombre tel que $\| c_{n_1 n_2 \ldots n_p} b_1^{n_1} \ldots b_p^{n_p} \| \leq A$ pour tous les indices $(n_1, \ldots, n_p)$. Pour $|z_i| \leq \beta_i$ $(1 \leq i \leq p)$, on a

$$\| c_{n_1 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p} \| \leq A \left(\frac{\beta_1}{|b_1|} \right)^{n_1} \cdots \left(\frac{\beta_p}{|b_p|} \right)^{n_p}$$

et le second membre de cette inégalité n'est autre que le produit de A et des termes généraux des progressions géomètriques $\left(\frac{\beta_i}{|b_i|} \right)^n$ $(1 \leq i \leq p)$ qui sont convergentes par hypothèse, d'où le théorème.

COROLLAIRE.- La somme de la série entière de terme général $c_{n_1 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}$ est une fonction continue dans le polycylindre ouvert $|z_i| < |b_i|$ $(1 \leq i \leq p)$.

En effet, tout point de ce polycylindre est intérieur à un polycylindre fermé $|z_i| \leqslant \beta_i < |b_i|$, et le corollaire résulte de ce que la série entière est uniformément sommable dans un tel polycylindre .

Remarques.- 1) Il résulte évidemment du th.1 que si une série entière est somma ble en un point $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$, elle est absolument sommable dans le polycylindre ouvert défini par les inégalités $|z_i| < |b_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$.

2) Soit $(c_{n_1 n_2 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p})$ une série entière absolument sommable dans un polycylindre ouvert P défini par les relations $|z_k| < r_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Comme toute sous-famille d'une famille absolument sommable est absolument sommable, on voit, en donnant à z_1 une valeur telle que $0 < |z_1| < r_1$, que pour tout entier $n \geqslant 0$, la série entière $(c_{n n_2 \ldots n_p} z_2^{n_2} \ldots z_p^{n_p})$ par rapport aux variables z_k d'indice $k \geqslant 2$, est absolument sommable pour $|z_k| < r_k$ $(2 \leqslant k \leqslant p)$; en outre, le th. d'associativité montre que si on désigne par $g_n(z_2, \ldots, z_p)$ la somme de cette série, la série entière $(g_n z_1^n)$ en z_1 est absolument sommable pour $|z_1| < r_1$ (quelles que soient les valeurs des z_i d'indice $\geqslant 2$ telles que $|z_i| < r_i$) et que sa somme est égale à celle de la série donnée . Et les polynômes homogènes

Pour les séries entières à une variable, le th.1 se précise comme suit :

PROPOSITION 1.- Soit $R = \lim_{n \to \infty} . \cancel{\inf} \|c_n\|^{\frac{1}{n}}$. Pour tout $z \in K$ tel que $|z| < R$, la série entière de terme général $c_n z^n$ est absolument convergente ; pour tout z tel que $|z| > R$, le terme général $c_n z^n$ n'est pas borné . ~~Déjà ...~~ Exercice (C.R. Delange à n variables)

En effet, si $\gamma |z| < 1$, pour tout nombre q tel que $\gamma |z| < q < 1$, il existe n_0 tel que $\|c_n\|^{\frac{1}{n}} |z| \leqslant q$ pour tout $n \geqslant n_0$, c'est-à-dire $\|c_n z^n\| \leqslant q^n$, ce qui démontre la première partie de la proposition . Si $\gamma |z| > 1$, et si q' est un nombre tel que $\gamma |z| > q' > 1$, il existe par définition une infinité de valeurs de n telles que $\|c_n\|^{\frac{1}{n}} |z| \geqslant q'$, c'est-à-dire $\|c_n z^n\| \geqslant q'^n$.

On dit que le nombre R est le <u>rayon de convergence</u> de la série entière de terme général $c_n z^n$; il peut avoir une valeur quelconque telle que $0 \leqslant R \leqslant +\infty$. Si $R > 0$, il résulte du th.1 que la série est uniformément convergente dans toute boule fermée de K , de centre 0 et de rayon $r < R$, et que la somme de la série est continue dans cette boule .

remonter à plusieurs variables

Remarque.- Soient $(a_n z^n)$, $(b_n z^n)$ deux séries entières de rayons de convergence R et R' ; il est clair que le rayon de convergence R" de la série entière de terme général $(a_n + b_n) z^n$ est au moins égal à $\mathrm{Min}(R,R')$; si $R \neq R'$ et si le corps des scalaires est le corps des nombres réels ou des nombres complexes, R" est exactement égal à $\mathrm{Min}(R,R')$, car si on avait par exemple $R < R'' < R'$, la série de terme général $a_n z^n = (a_n + b_n) z^n - b_n z^n$ serait absolument convergente pour $R < |z| < R''$, ce qui est absurde .

Par contre si $R = R'$ on peut avoir $R'' > R$ (par exemple si $b_n = -a_n$)

[illegible] remplacée par la prop 3

PROPOSITION 2.(principe des zéros isolés).- <u>Soit $(c_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont les coefficients ne sont pas tous nuls ; il existe alors un nombre r tel que $0 < r < R$ et que la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ne s'annule en aucun point $\neq 0$ de la boule $|z| \leqslant r$</u> .

En effet, soit h le plus petit entier tel que $c_h \neq 0$. On peut écrire $f(z) = z^h (c_h + c_{h+1} z + \ldots + c_{h+m} z^m + \ldots)$ et il est clair que la série de terme général $c_{h+m} z^m$ est convergente pour $|z| < R$; d'après le corollaire du th.1 , la fonction $g(z) = c_h + c_{h+1} z + \ldots + c_{h+m} z^m + \ldots$ est continue pour $|z| < R$, et comme $g(0) = c_h \neq 0$, il existe un nombre $r > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour $|z| \leqslant r$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE.- <u>Soient $(a_{n_1 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p})$ et $(b_{n_1 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p})$ deux séries entières sommables dans un même polycylindre ouvert P de centre 0.</u>

En cor. à la prop. 3.

car le corps n'est pas discret

Si, dans ce polycylindre, les sommes des deux séries sont égales, on a $a_{n_1 n_2 \dots n_p} = b_{n_1 n_2 \dots n_p}$ pour tout système d'indices $(n_1, n_2, \dots, n_p)$.

Raisonnons par récurrence sur p ; pour p=1, la proposition résulte ~~aussitôt~~ du principe des zéros isolés. Pour $p > 1$, en considérant la différence des deux séries, on peut supposer que les $b_{n_1 n_2 \dots n_p}$ sont tous nuls ; dans P, on peut écrire

$$\sum_{(n_1, n_2, \dots, n_p)} a_{n_1 n_2 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z_1, \dots, z_{p-1}) z_p^n$$

où chacune des séries entières $g_n(z_1, \dots, z_{p-1}) = \sum_{(n_1, \dots, n_{p-1})} a_{n_1 \dots n_{p-1} n} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_{p-1}}$ est sommable dans le polycylindre ouvert P' projection de P sur le produit des p-1 premiers facteurs de K^p. Pour tout point $(z_1, \dots, z_{p-1}) \in P'$, la relation $\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n_p = 0$ valable pour tout z_p dans un voisinage de 0 entraîne $g_n(z_1, \dots, z_{p-1}) = 0$; l'hypothèse de récurrence appliquée à chacun des g_n montre donc que tous les $a_{n_1 n_2 \dots n_p}$ sont nuls.

à renvoyer plus loin

Remarque.- Soit $p(X_1, \dots, X_r)$ un polynôme à coefficients entiers, et supposons que lorsqu'on substitue à X_k $(1 \leq k \leq r)$ la somme f_k d'une série entière scalaire à coefficients entiers par rapport à des variables dans un corps valué complet K de caractéristique 0 (les f_k étant supposées sommables au voisinage de 0), la série obtenue soit identiquement nulle ; alors le cor. de la prop.2 montre que l'on a encore une série entière identiquement nulle en substituant à X_k la somme g_k d'une série entière sommable, ayant les mêmes coefficients que f_k, mais par rapport à des variables à valeurs dans un corps valué complet quelconque K'.

L'unicité des coefficients d'une série entière sommable dans un voisinage de 0 résulte encore de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.- Soit $(c_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence $R>0$; pour tout entier $m \geqslant 0$, si on pose $r_m(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^n$, on a $r_m(z) = \underline{o}(z^m)$ et par suite, $c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m + r_m(z)$ est un développement asymptotique de la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ au voisinage de 0, suivant l'échelle des puissances entières de z (Fonct.var.réelle, chap.V, § 2) .

En effet, on peut écrire $r_m(z) = z^{m+1}(c_{m+1} + c_{m+2}z + \dots + c_{m+k}z^{k-1} + \dots)$ et la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} c_{m+k} z^{k-1}$ est convergente pour $|z| < R$, donc sa somme est une fonction continue (cor. du th.1) et a fortiori bornée au voisinage de 0, autrement dit on a $r_m(z) = \underline{O}(z^{m+1}) = \underline{o}(z^m)$.

3. Substitution de séries entières dans une série entière.

THÉORÈME 2.- Soit $f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{(n_j)} a(n_1, \dots, n_p) z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$ la somme d'une série entière sommable dans un polycylindre ouvert P de centre 0, défini par $|z_k| < r_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Soient $(b_k(m_1, \dots, m_q) u_1^{m_1} \dots u_q^{m_q})$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ p séries entières scalaires sommables dans un polycylindre ouvert Q de centre 0 dans K^q . On pose $g_k(u_1, \dots, u_q) = \sum_{(m_j)} b_k(m_1, \dots, m_q) u_1^{m_1} \dots u_q^{m_q}$ et $h_k(|u_1|, \dots, |u_q|) = \sum_{(m_j)} |b_k(m_1, \dots, m_q)| . |u_1|^{m_1} \dots |u_q|^{m_q}$ pour tout point $(u_j) \in Q$. Soit (u_j) un point de Q tel que l'on ait

$$h_k(|u_1|, \dots, |u_q|) < r_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant p \ .$$

Alors, la famille des éléments

$$(1) \qquad a(n_1, \dots, n_p) \prod_{j=1}^{p} \prod_{k=1}^{n_j} b_j(r_{kj1}, r_{kj2}, \dots, r_{kjq}) u_1^{r_{kj1}} \dots u_q^{r_{kjq}}$$

où $(n_1, \dots, n_p)$ parcourt $\mathbb{N}^p$ et où, pour chaque élément $(n_1, \dots, n_p)$ et chaque couple d'indices (k,j) $(1 \leqslant j \leqslant p,\ 1 \leqslant k \leqslant n_j)$, chacun des éléments $(r_{kj1}, \dots, r_{kjq})$ parcourt $\mathbb{N}^q$, est absolument sommable dans E, et a une somme égale à

$$(2) \qquad f(g_1(u_1, \dots, u_q), \dots, g_p(u_1, \dots, u_q)) \ .$$

Essayer de faire passer ça dans l'énoncé.

D'une manière imagée, si, dans chaque terme de la série $\mathfrak{a}(n_1,\dots,n_p)z_1^{n_1}\dots z_p^{n_p}$, on remplace chacun des z_k par la série entière $(b_k(m_1,\dots,m_q)u_1^{m_1}\dots u_q^{m_q})$ et qu'on fasse le produit des $n_1+n_2+\dots+n_p$ séries, <u>sans grouper</u> les termes de mêmes degrés par rapport aux u_j, la famille (1) est la famille "réunion" de toutes les familles ainsi obtenues pour toutes les valeurs de $(n_1,\dots,n_p)$.

Il suffit de montrer que la famille (1) est absolument sommable ; le reste du théorème se déduit alors de l'associativité des familles sommables : la somme des termes de la famille (1) correspondant à un système $(n_1,\dots,n_p)$ fixe est en effet égale à

$$\mathfrak{a}(n_1,\dots,n_p)(g_1(u_1,\dots,u_q))^{n_1}\dots(g_p(u_1,\dots,u_q))^{n_p}$$

et on sait alors que la famille de ces éléments est absolument sommable et a pour somme (2).

Pour prouver que la famille (1) est absolument sommable, il suffit de montrer que la somme des normes d'une sous-famille <u>finie</u> quelconque de cette famille est bornée par un nombre fixe. Or, dans une telle sous-famille, la somme des normes des termes correspondant à un même système $(n_1,\dots,n_p)$ est au plus égale à

Abréger par "somme des normes"

$$(3)\qquad \|\mathfrak{a}(n_1,\dots,n_p)\|\,(h_1(|u_1|,\dots,|u_q|))^{n_1}\dots(h_p(|u_1|,\dots,|u_q|))^{n_p}$$

Donc la somme des normes de tous les termes de la sous-famille ~~finie~~ considérée est au plus égale à la somme de tous les termes de la famille (3) de nombres réels $\geqslant 0$; mais cette somme est finie par hypothèse, ~~et indépendante de la sous-famille finie considérée, d'où le théorème.~~

remonter au [illegible] généralement

Chacun des termes de la famille (1) est de la forme $c_\alpha u_1^{m_1}\dots u_q^{m_q}$, où α désigne l'indice $((n_j),(r_{kji}))_{1\leqslant i\leqslant q,\,1\leqslant j\leqslant p,\,1\leqslant k\leqslant n_j}$; d'après le th. 2, la somme des c_α correspondant au <u>même</u> élément $(m_1,\dots,m_q)$ est absolument sommable ; si $d(m_1,\dots,m_q)$ est la somme de cette famille, le th. d'associativité montre que, pour le point $(u_1,\dots,u_q)$ considéré

<u>Trivial</u> : F, G, H s.f. f, g, h fonctions.

$(F(G))(H)$ et $F(G(H))$ ont un sens (thm)

$f(g(h)) = f(g(h))$: évident

unicité

(satisfaisant aux hypothèses du th.2), la série entière de terme général

(4) $\quad d(m_1,\ldots,m_q)u_1^{m_1}\ldots u_q^{m_q}$

réinventé

est absolument sommable, et a pour somme l'élément (2). On dit que la série entière (4) est obtenue en <u>substituant, dans la série entière</u> $(a(n_1,\ldots,n_p)z_1^{n_1}\ldots z_p^{n_p})$ <u>la série entière</u> $(b_k(m_1,\ldots,m_q)u_1^{m_1}\ldots u_q^{m_q})$ <u>à la variable</u> z_k <u>pour</u> $1 \leqslant k \leqslant p$; ces séries entières sont dites <u>substituables aux variables</u> z_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ si elles satisfont aux hypothèses du th.2 .

Le th.2 entraîne en particulier la conséquence suivante :

COROLLAIRE.- <u>Si le point</u> $(g_1(0,\ldots,0),\ldots,g_p(0,\ldots,0))$ <u>de</u> K^p <u>appartient au</u> domaine de convergence ~~polycylindre P~~ , <u>il existe dans</u> K^q <u>un</u> voisinage ~~polycylindre ouvert~~ Q_o <u>tel que pour tout point</u> $(u_j) \in Q_o$, <u>les séries entières</u> $(b^{(k)}_{m_1\ldots m_q}u_1^{m_1}\ldots u_q^{m_q})$ <u>soient substituables dans la série entière</u> $(a_{n_1\ldots n_p}z_1^{n_1}\ldots z_p^{n_p})$ (la somme de la série entière absolument sommable (4) obtenue par cette substitution étant égale à la fonction (2) dans Q_o)

En effet, on a $h_k(0,\ldots,0)=|g_k(0,\ldots,0)|=|b^{(k)}_{00\ldots0}|<r_k$ par hypothèse ; comme les fonctions h_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont toutes continues dans un pavé $0 \leqslant x_j < \beta_j$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ (cor. du th.1), il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour $|u_j| < \rho$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$, on ait encore $h_k(|u_1|,\ldots,|u_q|) < r_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$, ce qui démontre le corollaire.

<u>Remarque</u>.- Supposons que, dans chaque terme (1), on remplace chaque u_j par une série entière par rapport à $v_1,\ldots,v_r$, sommable dans un polycylindre ouvert, et de somme $\gamma_j(v_1,\ldots,v_r)$. On obtient ainsi une série entière en $v_1,\ldots,v_r$; cela étant, si les valeurs de $\gamma_j(0,\ldots,0)$ sont assez petites, on montre comme dans le th.2 que la famille formée de <u>tous</u> les termes de <u>toutes</u> ces séries entières est absolument sommable dans un polycylindre ouvert. On en déduit, par associativité, que l'on obtient la même série entière : 1° soit en substituant γ_j à u_j dans chacune

a écrire EXPLICITEMENT. | assoc. formelle (avec origine fixe et groupements finis)

NON

NBR 052 18

des séries entières g_k, et en substituant à z_k dans f chacune des séries entières en $v_1,\dots,v_r$ obtenues : 2° soit en substituant g_k à z_k dans f, et en substituant γ_j à u_j dans la série entière en $u_1,\dots,u_q$ obtenue.

4. La notion de fonction ~~holomorphe~~ ANALYTIQUE.

Le th.2 entraîne en particulier la proposition suivante :

Cor. du th. 2

~~PROPOSITION~~ Lemme 4.- Soit $f(z_1,\dots,z_p) = \sum_{(n_k)} c_{n_1 n_2 \dots n_p} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_p^{n_p}$ la somme d'une série entière sommable dans un polycylindre ouvert P de centre O défini par $|z_k| < r_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Soit (a_k) un point quelconque de P ; pour tout point $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ du polycylindre défini par $|u_k| < r_k - |a_k|$, les p polynomes $a_k + u_k$ sont substituables aux z_k dans la série entière $c_{n_1 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$, et la somme de la série entière (absolument sommable) par rapport aux u_k ainsi obtenue est égale à $f(a_1+u_1,\dots,a_p+u_p)$.

avec "boule égale"

En effet, avec les notations du th.2, on a ici $h_k(|u_1|,\dots,|u_p|) = |a_k| + |u_k| < r_k$ par hypothèse.

En d'autres termes, il existe un polycylindre ouvert de centre $(a_1,\dots,a_p)$ dans lequel $f(z_1,\dots,z_p)$ est égale à la somme d'une série entière absolument sommable, par rapport à $z_k - a_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$.

DÉFINITION 2.- Soit A un ensemble ouvert dans K^p. On dit qu'une application f de A dans E est une fonction holomorphe dans A si, pour tout point $a = (a_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de A, il existe un polycylindre ouvert de centre a, contenu dans A, et dans lequel $f(z_1,z_2,\dots,z_p)$ soit égale à la somme d'une série entière absolument sommable, par rapport aux variables $z_k - a_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$.

La prop.4 montre donc que :

PROPOSITION 5.- Si une série entière par rapport aux variables z_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ est sommable dans un polycylindre ouvert de centre O, sa somme est une fonction holomorphe dans ce polycylindre.

De même, en vertu du cor. du th.2 :

PROPOSITION 6.- Soit B un ensemble ouvert dans K^q , g_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ p fonctions scalaires holomorphes dans B , A un ensemble ouvert dans K^p contenant l'image de B par $(g_1,\dots,g_p)$. Si f est une fonction holomorphe dans A , la fonction composée $f(g_1,\dots,g_p)$ est holomorphe dans B .

De facon imagée, toute fonction composée de fonctions holomorphes est holomorphe .

PROPOSITION 6 bis.- Soient $E_1,\dots,E_r$ et F r+1 espaces de Banach sur K , et soit $(z_1,\dots,z_r) \to [z_1 . z_2 \dots z_r]$ une application multilinéaire continue de $E_1 \times \dots \times E_r$ dans F . Si $f_1,\dots,f_r$ sont r fonctions holomorphes dans un ensemble ouvert $A \subset K^p$, à valeurs dans $E_1,\dots,E_r$ respectivement, la fonction $[f_1 . f_2 \dots f_r]$ est une fonction holomorphe dans A , à valeurs dans F .

Réservé

Bornons-nous pour simplifier au cas r=2 . Il suffit alors de remarquer que si $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une famille absolument sommable dans E_1 de somme s , et $(y_\mu)_{\mu \in M}$ une famille absolument sommable dans E_2 , de somme t , la famille $([x_\lambda . y_\mu])_{(\lambda,\mu) \in L \times M}$ est absolument sommable dans F et a pour somme $[s.t]$, puisqu'il existe une constante $k > 0$ telle que $\| [z_1 . z_2] \| \leqslant k . \|z_1\| . \|z_2\|$; on appliquera cette remarque aux séries entières dont les sommes sont égales à f_1 et f_2 au voisinage d'un point de A .

COROLLAIRE.- Soit $f = (f_1,\dots,f_q)$ une fonction définie dans un ensemble ouvert $A \subset K^p$ et à valeurs dans K^q . Pour que f soit holomorphe dans A , il faut et il suffit que chacune des fonctions scalaires f_k $(1 \leqslant k \leqslant q)$ le soit .

PROPOSITION 7.- Soit $f(z_1, z_2, \ldots, z_p) = \sum_{(n_k)} c_{n_1 n_2 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}$ la somme d'une série entière sommable dans un polycylindre ouvert P de centre 0 . Alors, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, la série entière de terme général

Converge dans le même domaine de convergence de la donnée

$$n_k c_{n_1 n_2 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_k^{n_k - 1} \ldots z_p^{n_p} \tag{5}$$

est sommable dans P , et sa somme est égale à la dérivée partielle $D_k f = (\partial f / \partial z_k)$.

En effet, substituons dans la série entière donnée z_i à lui-même pour $i \neq k$, et $z_k + u_k$ à z_k ; en vertu du th.2 , on obtient une série entière par rapport aux $p+1$ variables $z_1, \ldots, z_p, u_k$, qui, pour tout point $(z_j) \in P$, est sommable pour tout u_k suffisamment petit ; comme le coefficient de u_k dans cette série n'est autre que la série entière de terme général (5), cette dernière est donc sommable dans P ; en outre, la somme de la série obtenue par la substitution considérée est $f(z_1, \ldots, z_k + u_k, \ldots, z_p)$, et la série entière de terme général (5) est le terme constant de la série entière (en u_k) de somme $(f(z_1, \ldots, z_k + u_k, \ldots, z_p) - f(z_1, \ldots, z_p)) / u_k$, qui est convergente pour u_k assez petit et $\neq 0$; la somme de la série de terme général (5) est donc égale à la limite de $(f(z_1, \ldots, z_k + u_k, \ldots, z_p) - f(z_1, \ldots, z_p)) / u_k$ lorsque u_k tend vers 0 (cor. du th.1), ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. Soit K un corps de caractéristique 0 , et soient f_k p fonctions à valeurs dans E , sommes de séries entières sommables dans P et telles que $D_j f_k = D_k f_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$ et $1 \leqslant k \leqslant p$. Il existe alors, pour tout $c \in E$, une série entière sommable dans P et une seule dont la somme g soit telle que $g(0) = c$ et $D_k g = f_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$.

NBR 052 21

Corollaire rejeté + loin (pour les réels et complexes seuls, peut-être ?)

régarder les valuations de $\mathbb{Q}$

En effet, en désignant par $c_{k;n_1,\dots,n_p}$ les coefficients de f_k, les coefficients $b_{n_1\dots n_p}$ de g (supposée exister) doivent satisfaire aux conditions $n_k b_{n_1\dots n_p} = c_{k;n_1,\dots,n_k-1,\dots,n_p}$ pour $(n_1,\dots,n_p) \neq (0,\dots,0)$ et $b_{00\dots0} = c$; l'hypothèse implique que ces conditions déterminent les $b_{n_1\dots n_p}$ de façon unique. En outre, on a, dans K, $\left|\frac{1}{n}\right| \leqslant n^\beta$ pour une constante fixe $\beta > 0$ ne dépendant que de la valeur absolue de K, et on vérifie aisément que dans $\mathbb{R}$, la série de terme général

$$((n_1+1)(n_2+1)\dots(n_p+1))^\beta \| a_{n_1 n_2\dots n_p} \| \, r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots r_p^{n_p}$$

converge en même temps que la série de terme général $\| a_{n_1\dots n_p} \| \, r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots r_p^{n_p}$.

PROPOSITION 8.- <u>Soit</u> $f(z_1,\dots,z_p)$ <u>une fonction</u> ~~holomorphe~~ analytique <u>dans un ensemble ouvert</u> A . <u>Pour tout point</u> $a = (a_1,\dots,a_p)$ <u>de</u> A <u>et tout nombre</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un polycylindre ouvert</u> P_0 <u>de centre</u> a <u>tel que, pour tout couple de points</u> $(u_1,\dots,u_p)$, $(v_1,\dots,v_p)$ <u>de ce polycylindre, on ait</u>

$$(6) \quad \left\| f(u_1,\dots,u_p) - f(v_1,\dots,v_p) - \sum_{k=1}^{p} D_k f(a_1,\dots,a_p)(u_k - v_k) \right\| \leqslant \varepsilon . \sup_{1 \leqslant k \leqslant p} |u_k - v_k|$$

On peut se ramener au cas où a est l'origine, $f(z_1,\dots,z_p)$ étant la somme d'une série entière $(c_{n_1\dots n_p} z_1^{n_1}\dots z_p^{n_p})$ absolument sommable dans un polycylindre ouvert Q . En vertu du th.2, le polynome $u_k + w_k$ est substituable à z_k dans cette série entière (pour $1 \leqslant k \leqslant p$), dès que (u_k) et (w_k) appartiennent à un polycylindre P assez petit, et par substitution, on obtient une série entière absolument sommable dans $P \times P$ par rapport à ces 2p variables. Par le théorème d'associativité, on peut donc écrire

Suivant ~~la~~ la prop. 7 (d'ailleurs inutile)

$$f(u_1+w_1,\dots,u_p+w_p)=f(u_1,\dots,u_p)+\sum_{k=1}^{p} D_k f(0,\dots,0)w_k+\sum_{k=1}^{p} f_k(u_1,\dots,u_p)w_k+$$
$$+\sum_{(n_j)(m_j)} b(n_1,\dots,n_p,m_1,\dots,m_p)u_1^{n_1}\dots u_p^{n_p}w_1^{m_1}\dots w_p^{m_p}$$

où les séries entières (absolument sommables) f_k n'ont pas de terme constant et où, dans la dernière série (absolument sommable) on a $\sum_{k=1}^{p} m_k \geqslant 2$ pour tous les termes. Supposons les séries absolument sommables pour $|u_k|=|w_k|=r$ $(1\leqslant k\leqslant p)$, et soit M la borne supérieure des termes $\|b(n_1,\dots,n_p,m_1,\dots,m_p)\| r^{\sum_k (n_k+m_k)}$. Alors pour $|u_k|\leqslant \frac{1}{2} r$ et $|w_k|\leqslant \frac{1}{2} r$ $(1\leqslant k\leqslant p)$ on a, en posant $t=\sup_k |w_k|$

$$\sum_{(n_j)(m_j)} \|b(n_1,\dots,n_p,m_1,\dots,m_p)\| \, |u_1^{n_1}\dots u_p^{n_p}w_1^{m_1}\dots w_p^{m_p}| \leqslant$$
$$\leqslant Mt^2 \sum_{(n_j)(m_j)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_k n_k} \left(\frac{t}{r}\right)^{(\sum_k m_k)-2}$$

Comme la série qui figure au second membre de cette inégalité est convergente pour $|t|\leqslant \frac{1}{2} r$, on voit que la formule (6) résulte aussitôt de la continuité des séries entières.

COROLLAIRE.- Toute fonction holomorphe dans A est indéfiniment différentiable dans A.

En effet, la prop.8 montre que toute fonction holomorphe f est différentiable en tout point, et que sa différentielle est l'application

$$(u_1,\dots,u_p) \longrightarrow \sum_{k=1}^{p} D_k f \cdot u_k$$

qu'on peut identifier à l'élément $(D_k f(z_1,\dots,z_p))_{1\leqslant k\leqslant p}$ de l'espace produit E^p en tout point. Or, il résulte de la prop.7 que cet élément est fonction holomorphe dans A, ce qui prouve que f est indéfiniment différentiable dans A.

00?

Pour $p=1$, on dit qu'un point $a\in K$ est un zéro d'ordre h d'une fonction f holomorphe au voisinage de a si, dans le développement de f en série entière suivant les puissances de $z-a$, le premier terme non nul a un exposant égal à h. Si K est de caractéristique 0, il est

Exercice : inversibles à la Jacobson si pas d'élém. unité il est clair que pour que a soit zéro d'ordre h de f , il faut et il suffit que l'on ait les relations $D^k f(a)=0$ pour $0 \leq k \leq h-1$ et $D^h f(a) \neq 0$.

Remarque.- On étend aisément les résultats des n^{os} précédents (à l'exception de ce qui concerne la différentiabilité) aux "séries entières" de la forme $c_{n_1 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$, où les coefficients $c_{n_1 \dots n_p}$ et les variables z_i appartiennent à une algèbre normée complète commutative E sur le corps valué K , ayant un élément unité . Nous aurons besoin de cette extension dans le n^o suivant .

5. Application : puissances négatives et puissances fractionnaires de fonctions holomorphes.

Dans ce n^o, nous supposerons que E est une algèbre normée complète sur K , admettant un élément unité e .

PROPOSITION 9.- Soit f une fonction à valeurs dans E , holomorphe dans un ensemble ouvert $A \subset K^p$. Alors l'ensemble B des points de A tels que $f(z_1,\dots,z_p)$ soit inversible est un ensemble ouvert, et $(f(z_1,\dots,z_p))^{-1}$ est une fonction holomorphe dans B . Ouvert : car f continue

Tout revient à montrer que si une série entière $(c_{n_1 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p})$ a son terme constant $c = c_{00 \dots 0}$ inversible, et est sommable dans un polycylindre ouvert P de centre l'origine, il existe une série entière sommable dans un polycylindre ouvert $Q \subset P$ et dont le produit avec la série donnée (à gauche et à droite) est égal à e . En multipliant la série entière donnée par c^{-1}, on peut se ramener au cas où $c = e$. On sait (Top. gén., chap. IX, § 3, n^o) que l'on a $(e - u)^{-1} = e + u + u^2 + \dots + u^n + \dots$, la série du second membre étant absolument convergente dans un voisinage de 0 dans E .

Prop. 10 : en exer.

Exer : th. d'Eisenstein ($f(x,y)=0$ à coeff. entiers)
(cf. Polya-Szegö)

Or (remarque finale du n°5), dans cette série en substituant à u la série entière obtenue en supprimant le terme consta-nt de la série entière donnée, on obtient (en raison du cor. du th.1) une série entière sommable dans un polycylindre ouvert $Q \subset P$ de centre l'origine. Comme on a identiquement $(e+u)(e-u+u^2-\dots+(-1)^{n-1}u^n+\dots) = (e-u+u^2-\dots+(-1)^{n-1}u^n+\dots)(e+u) = e$, la série entière ainsi obtenue répond bien à la question.

PROPOSITION 10 - On suppose que le corps K n'est pas de caractéristique 2 et que E soit commutative. Soit $f(z_1,\dots,z_p)$ la somme d'une série entière sommable dans un polycylindre ouvert P, et dont le terme constant est e. Alors il existe une série entière de terme constant e sommable dans ~~polycylindre ouvert~~ voisinage $Q \subset P$, et dont la somme $g(z_1,\dots,z_p)$ est telle que $(g(z_1,\dots,z_p))^2 = f(z_1,\dots,z_p)$ dans Q. En outre, si g_1 est une fonction continue au voisinage de l'origine, à valeurs dans E, telle que $g_1(0,0,\dots,0) = e$ et $(g_1(z_1,\dots,z_p))^2 = f(z_1,\dots,z_p)$ dans ce voisinage, on a $g_1(z_1,\dots,z_p) = g(z_1,\dots,z_p)$ dans un voisinage convenable de l'origine.

Considérons dans E la série $h(u) = e + \frac{1}{2}u + \dots + \binom{\frac{1}{2}}{n}u^n + \dots$; nous allons montrer qu'elle est absolument convergente dans un voisinage de 0 dans E, et qu'on a $(h(u))^2 = e+u$; le même raisonnement que dans la prop.8 montrera alors l'existence et la sommabilité de la série entière g. Or, si on pose $\left|\frac{1}{2}\right| = a$ (valeur absolue dans K), on peut écrire

$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| = \left|\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right| \leqslant \binom{2n}{n} a^{2n}$$

puisque $\binom{2n}{n}$ est un entier. D'ailleurs, la formule de Stirling montre que $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, par suite, on a la relation

$$\left\|\binom{\frac{1}{2}}{n}u^n\right\| = O((5a\|u\|)^n)$$

ce qui prouve que la série considérée est absolument convergente pour $\|u\| < 1/5a$. Le fait que $(h(u))^2 = e + u$ résulte de ce que la formule $(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n)^2 = 1-4x$ est vraie lorsque $E=K=\mathbb{R}$ (Fonct.var.réelle, chap.III, § 2) (cf.n°2, remarque suivant la prop.2) .

Reste à montrer que la fonction g est la seule fonction continue et égale à e à l'origine, dont le carré soit f . Or, la relation $g^2 - g_1^2 = 0$ s'écrit $(g - g_1)(g + g_1) = 0$ puisque E est commutative ; mais comme $g(0) + g_1(0) = 2e$, $g + g_1$ est inversible dans un voisinage de l'origine, donc on a $g - g_1 = 0$ dans ce voisinage, ce qui achève la démonstration.

§ 2. La méthode des majorantes.

1. Majorantes d'une série entière.

DEFINITION 1.- Etant donnée une série entière $(e_{n_1 n_2 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p})$ à coefficients dans E , par rapport aux variables $z_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, on dit qu'une série entière $(c_{n_1 n_2 \ldots n_p} x_1^{n_1} \ldots x_p^{n_p})$ à coefficients positifs par rapport aux variables réelles positives x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, est une majorante de la série entière donnée, si pour tout système d'exposants $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$, on a $\|e_{n_1 n_2 \ldots n_p}\| \leqslant c_{n_1 n_2 \ldots n_p}$.

Il est clair que la somme (resp. le produit) de majorantes de deux séries entières est une majorante de la somme (resp. du produit) de ces deux séries.

Si une majorante d'une série entière est sommable pour $x_1 = r_1 > 0, \ldots, x_p = r_p > 0$, il est clair que la série entière donnée est absolument sommable dans le polycylindre fermé défini par $|z_i| \leqslant r_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Inversement, supposons qu'une série entière $(e_{n_1 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p})$ soit absolument sommable dans le polycylindre fermé

$|z_i| \leqslant r_i$; soit M la borne supérieure des normes des termes de la série pour $|z_i| = r_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$; on a donc

$$\| c_{n_1 n_2 \ldots n_p} \| \leqslant M/r_1^{n_1} \ldots r_p^{n_p}$$

ce qui montre que la série entière $(M(\frac{x_1}{r_1})^{n_1} \ldots (\frac{x_p}{r_p})^{n_p})$ est une majorante de la série donnée ; on observera que la somme de cette majorante est $M/(1-\frac{x_1}{r_1})(1-\frac{x_2}{r_2})\ldots(1-\frac{x_p}{r_p})$ pour $|x_i| < r_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Une autre majorante est la série obtenue par substitution de $\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{r_i}$ à u dans la série géométrique (Mu^n) ; en effet, il est immédiat que le coefficient de $x_1^{n_1} \ldots x_p^{n_p}$ dans cette série est le produit d'un entier $\geqslant 1$ et de $M/r_1^{n_1} \ldots r_p^{n_p}$; cette nouvelle majorante à pour somme $M/(1-\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{r_i})$ dans un voisinage assez petit de l'origine.

2. Résolution des équations analytiques.

THEOREME 1 .- Soient $f_i(x_1,\ldots,x_p ; y_1,y_2,\ldots,y_p)$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$ q fonctions holomorphes scalaires définies dans une partie ouverte A de K^{p+q} . Soit $(a_1,\ldots,a_p ; b_1,\ldots,b_q)$ un point de A tel que $f_i(a_1,\ldots a_p ; b_1,\ldots,b_q)=0$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$, et que le déterminant fonctionnel $\Delta = \det(\partial f_i/\partial y_j)$ soit $\neq 0$ en ce point . Alors il existe un voisinage V de $(a_1,\ldots,a_p)$ dans K^p et un système de q fonctions scalaires $u_i(x_1,\ldots,x_p)$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$ holomorphes dans V , satisfaisant aux conditions $u_i(a_1,\ldots,a_p)=b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$ et

$$(1) \qquad f_i(x_1,\ldots,x_p ; u_1(x_1,\ldots,x_p),\ldots u_q(x_1,\ldots,x_p)) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant q)$$

en tout point de V . En outre, si v_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ est un système de q fonctions continues au point $(a_1,\ldots,a_p)$, définies dans un voisinage de ce point, et satisfaisant aux conditions $v_i(a_1,\ldots,a_p)=b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$ et

131

Pas trop de formules

Ex. $y = x - g(x)$

$x = y + g(y) + g(g(y)) + g(\cdots) + \cdots$

même truc sur la majorante.

Utiliser le lemme : add., mult., subst. ne font pas sortir les coeff. d'une partie stable (ici : entiers ≥ 0)

NBR 082 30

151

(2) $$f_i(x_1,\dots,x_p\,;\,v_1(x_1,\dots,x_p),\dots,v_q(x_1,\dots,x_p))=0 \quad (1\leqslant i\leqslant q)$$

dans un voisinage de $(a_1,\dots,a_p)$, on a $u_i=v_i$ $(1\leqslant i\leqslant q)$ dans un voisinage de $(a_1,\dots,a_p)$.

Par translation, on peut se ramener au cas où $a_j=0$ pour $1\leqslant j\leqslant p$ et $b_i=0$ pour $1\leqslant i\leqslant q$. Posons pour $1\leqslant i\leqslant q$

(3) $$f_i(x_1,\dots,x_p;y_1,\dots,y_q)=f_{i0}+\sum_{j=1}^{q} f_{ij}y_j+\sum_{(n_j)} f_{i;n_1\dots n_q}y_1^{n_1}\dots y_q^{n_q}$$

les f_{i0}, f_{ij} et $f_{i;n_1\dots n_q}$ étant des séries entières par rapport aux x_k $(1\leqslant k\leqslant p)$ sommables dans un polycylindre ouvert P de centre l'origine dans K^p, f_{i0} n'ayant pas de terme constant ; en outre, f_i est sommable dans $P\times Q$, où Q est un polycylindre de centre l'origine dans K^q, et dans la seconde sommation des seconds membres de (3), on a toujours $\sum_{j=1}^{q} n_j\geqslant 2$. Par hypothèse, la matrice $\underline{F}=(f_{ij})$ est holomorphe dans P et inversible à l'origine donc elle est inversible dans un polycylindre ouvert contenu dans P, et son inverse $\underline{G}=(g_{ij})$ est holomorphe dans ce polycylindre ; nous supposerons donc chacune des g_{ij} développées en série entière sommable dans un polycylindre ouvert $P_1\subset P$ de centre l'origine ; si on pose alors $g_i=\sum_{j=1}^{q} g_{ij}f_j$, on aura

(4) $$g_i(x_1,\dots,x_p;y_1,\dots,y_q)=-h_{i0}+y_i-\sum_{(n_j)} h_{i;n_1\dots n_q}y_1^{n_1}\dots y_q^{n_q}$$

où h_{i0} et les $h_{i;n_1\dots n_q}$ sont des séries entières par rapport aux x_k, sommables dans P_1, h_{i0} n'ayant pas de terme constant, et la somme étant étendue aux (n_j) tels que $\sum_{j=1}^{q} n_j\geqslant 2$. La première partie du théorème revient à prouver qu'il existe q séries entières sans terme constant u_i $(1\leqslant i\leqslant q)$ par rapport aux x_k, sommables dans un voisinage de l'origine et telles que l'on ait

(5) $$u_i=h_{i0}+\sum_{(n_j)} h_{i;n_1\dots n_q}u_1^{n_1}\dots u_q^{n_q} \qquad \text{pour } 1\leqslant i\leqslant q.$$

Chère Madame,

Nous vous félicitons de tout cœur de la naissance de votre fils, et nous vous envoyons à tous deux salut et bénédiction

N B

Salaud
Vipère lubrique
Intuitionniste

Non content de ne pas ~~venir~~ à ~~ce~~ Notre Congrès, tu as le front de rappeler ta méprisable existence à Notre Auguste carrure – Et tu as l'audace de lourdement insister sur ~~la grave faute que tu as commise~~ car ton manquement grave à ~~...~~ nos ~~commandements~~ et nos ~~principes~~ tabous généraux : Nos congrès sont ~~...~~ sacrés, leurs dates ~~sont décidées~~ fixées depuis le commencement des ~~temps~~ ~~et tu les connais~~ ~~pas~~ – ~~ne pouvais tu pas~~ Muni de Mon chapitre sur les entiers ~~et des conseils de tes anciens~~, ~~calculer~~ tu devais déterminer une date convenable pour l'évènement qui t'a tenu éloigné de Moi – ~~Ton crime est d'autant plus noir que, avec Ma bonté sans bornes~~, J'avais choisi ~~un lieu de congrès conforme à tes goûts montagnards~~.

Pour te punir le Congrès, ayant envoyé une délégation de membres fondateurs, membre du milieu, membres inférieurs et cobaye interroger la Sybille du Glacier Blanc, (et trouver Weil mort au milieu des crevasses) – a décidé que tu accomplirais les travaux suivants :

a) Calcul explicite de la mesure de Haar sur le 5ème groupe exceptionnel.

b) Détermination ~~explicite~~ des caractères du groupe de Poincaré du plan percé en chacun de ses points.

c) Épure de la fibration de S^{15} par S^7 sur S^8.

d) Rédaction d'un rapport sur le Livre de "Calcul Numérique"

e) Rédaction de plaquettes ~~élogieuses...~~ à la louange des mérites mathématiques et des vertus morales des augustes membres fondateurs, plaquettes à publier à tes frais sur grand papier.

f) Bourbachisation de la démonstration, donnée par le Sieur Egrand, de l'hypothèse du continu.

g) Fabrication ~~d'~~ d'un contre exemple à ladite hypothèse (explicite et catalogisable)

h) Calcul effectif ~~...~~ à 17 décimales du premier ~~...~~ zéro de la fonction ζ situé sur $\mathcal{R}(s) = 0{,}518$, et démonstration du fait que tous les autres se trouvent ailleurs.

En Notre bonne ville de Pelvoux-le-Poet, le 7 juillet de l'an XVII

N B.

Samuel

151

NBR 052 32

On notera que tout système de q séries entières u_i sans terme constant $(1 \leqslant i \leqslant q)$ sommables dans un voisinage de l'origine, est substituable dans chacune des séries entières $\sum_{(n_j)} h_{i;n_1..n_q} y_1^{n_1}..y_q^{n_q}$ (cor. du th.2) ; si le problème a une solution, les séries entières (par rapport aux x_i) des deux membres de (5) sont donc sommables au voisinage de l'origine, et par suite doivent avoir leurs coefficients <u>identiques</u> .

Supposons donc le problème résolu, et désignons par $c_i(n_1,\dots,_q;r_1,\dots,r_p)$ le coefficient de $x_1^{r_1}\dots x_p^{r_p}$ dans la série $h_{i;n_1..n_q}$, par $c_i(r_1,\dots,r_p)$ le coefficient du même terme dans h_{io} par $d_i(m_1,\dots,m_p)$ le coefficient de $x_1^{m_1}..x_p^{m_p}$ dans u_i . L'identification des séries des deux membres de (5) donne les conditions

$$(6)\left\{\begin{array}{l} d_i(0,0,\dots,0) = 0 \\ d_i(m_1,\dots,m_p) = c_i(m_1,\dots,m_p) + \\ + \sum_{(n_j)(r_i)} (c_i(n_1,\dots,n_q;r_1,\dots,r_p) \prod_{j=1}^{q} \prod_{k=1}^{n_j} d_j(t_{kj1},t_{kj2},\dots,t_{kjp})) \end{array}\right.$$

la sommation du second membre étant étendue à tous les systèmes d'entiers $\geqslant 0$, n_j, r_i et t_{kji} satisfaisant aux conditions $\sum_{i=1}^{p} t_{kji} \geqslant 1$, $\sum_{j=1}^{q} n_j \geqslant 2$ et

$$(7) \qquad m_i = r_i + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{n_j} t_{kji} \qquad (1 \leqslant i \leqslant p) .$$

On tire de ces conditions que

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = \sum_{i=1}^{p} r_i + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{i=1}^{p} t_{kji}$$

Si on tient compte de ce que $\sum_{i=1}^{p} t_{kji} \geqslant 1$ et $\sum_{j=1}^{q} n_j \geqslant 2$, on voit que pour tout système $(t_{kji})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ qui figure au second membre de (7), on a $\sum_{i=1}^{p} t_{kji} < \sum_{i=1}^{p} m_i$, en d'autres termes, les relations (6) déterminent les coefficients des termes de degré <u>total</u> s dans u_i en fonction de ceux des termes de degré total $< s$ dans les u_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$; par récurrence sur s , on voit donc que les équations (6) déterminent les coefficients

$d_i(m_1,..m_p)$ de facon unique ; inversement, si les $d_i(m_1,\dots,m_q)$ sont déterminés par récurrence à l'aide des relations (6), les séries entières ayant ces coefficients seront solutions de (5) pourvu qu'elles soient sommables au voisinage de l'origine.

Pour prouver qu'il en est bien ainsi, considérons pour chacune des séries $h_{i0}, h_{i;n_1..n_q}$ une série majorante dont nous désignerons les coefficients par $C_i(m_1,\dots,m_p)$ et $C_i(n_1,\dots,n_q;r_1,\dots,r_p)$ respectivement ; déterminons alors les coefficients $D_i(m_1,\dots,m_p)$ par les équations

$$
(8)\left\{\begin{array}{l}
D_i(0,0,\dots,0)=0 \\
D_i(m_1,\dots,m_p) = C_i(m_1,\dots,m_p) + \\
+\sum_{(n_j)(r_i)} \left(C_i(n_1,\dots,n_q;r_1,\dots,r_p)\prod_{j=1}^{q}\prod_{k=1}^{n_j} D_j(t_{jk1},t_{kj2},\dots,t_{kjq})\right)
\end{array}\right.
$$

la sommation étant étendue aux indices satisfaisant aux mêmes conditions que dans (6). La comparaison de (6) et (8) montre aussitôt par récurrence sur le degré total que l'on a

$$\left|d_i(m_1,\dots,m_p)\right| \leqslant D_i(m_1,\dots,m_p)$$

pour tout système d'indices ; en d'autres termes, les séries $(D_i(m_1,\dots,m_p)t_1^{m_1}\dots t_p^{m_p})$ sont des majorantes pour les séries $(d_i(m_1,\dots,m_p)x_1^{m_1}\dots x_p^{m_p})$ respectivement $(1\leqslant i\leqslant q)$. Tout revient donc à prouver qu'on peut choisir les $C_i(m_1,\dots,m_p)$ et $C_i(n_1,\dots,r_p)$ de sorte que les séries majorantes $(D_i(m_1,\dots,m_p)t_1^{m_1}\dots t_p^{m_p})$ soient sommables dans un voisinage de 0 .

Or, d'après ce qu'on a vu au n°1 , la série entière dont la somme est la fonction des $p+q$ variables réelles t_j $(1\leqslant j\leqslant p)$ et v_i $(1\leqslant i\leqslant q)$

$$\frac{M}{(1-\mu\sum_{j=1}^{p} t_j)(1-\mu\sum_{i=1}^{q} v_i)} - M - M_\mu \sum_{i=1}^{q} v_i$$

est une majorante de chacune des séries des seconds membres de (4) par rapport aux x_j et y_i) dès que M est assez grand et μ assez petit .

Tout revient donc à prouver qu'il existe q séries entières absolument sommables par rapport aux t_i et sans terme constant, qui satisfont aux équations

$$(9) \qquad v_k = \frac{M}{(1-\mu \sum_{j=1}^{p} t_j)(1-\mu \sum_{i=1}^{q} v_i)} - M - M\mu \sum_{i=1}^{q} v_i \qquad (1 \leqslant k \leqslant q)$$

Or, on déduit aussitôt ~~que~~ de (9) que si ce système a une solution, tous les v_i sont égaux à $v_1 = v$ satisfaisant à

$$(10) \qquad (1-q\mu v)(1+qM\mu)v = \frac{M}{1-\mu \sum_{j=1}^{p} t_j} - M(1-q\mu v)$$

et réciproquement ; or, la fonction $v(t_1,\ldots,t_p)$ qui s'annule pour les t_j nuls et satisfait à (10) est donnée par

$$v(t_1,\ldots,t_p) = \frac{1}{2q\mu(1+qM\mu)}\left[1 - \sqrt{1-4Mq\mu(1+qM\mu)\left(\frac{1}{1-\mu \sum_{j=1}^{p} t_j} - 1\right)}\right]$$

Comme la fonction $(1-w)^{\frac{1}{2}}$ est égale à la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} w^n$ pour $-1 < w < 1$, il résulte du th. de substitution (§1, th.2) que $v(t_1,\ldots,t_p)$ est égale à une série entière absolument sommable et sans terme constant dans un polycylindre de centre $(0,\ldots,0)$.

Reste à montrer que si w_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ sont q fonctions <u>continues</u> au voisinage de l'origine dans K^p, nulles en ce point et satisfaisant aux relations

$$(11) \qquad w_i = h_{i0} + \sum_{(n_j)} h_{i;n_1\ldots n_q} w_1^{n_1} \ldots w_q^{n_q} \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant q$$

dans un voisinage de l'origine dans K^p, on a nécessairement $u_i = w_i$ dans un voisinage de l'origine pour $1 \leqslant i \leqslant q$. Or, compte-tenu de la prop.8 du §1, on tire de (5) et (11) que

$$u_i - w_i = \underline{o}\left(\sup_{1 \leqslant k \leqslant q} |u_k - w_k|\right) \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant q$$

dans un voisinage de 0, ce qui entraîne $u_i = w_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$ dans un voisinage de 0 (<u>Fonct.var.réelle</u>, chap.V, §2). Le th.1 est ainsi complètement démontré.

Faire Kowalewska aussi.

D'ailleurs ça donne tout | fonctions implicites
équa. diffé.

COROLLAIRE.- Soit $u(z_1,\ldots,z_p)$ une fonction holomorphe dans une partie ouverte A de K^p , à valeurs dans K^p . Pour tout point $a=(a_1,\ldots,a_p)$ de A tel que la différenticlle $du(a)$ soit inversible il existe un voisinage ouvert U de a tel que la restriction de u à U soit un homéomorphisme de U sur un voisinage ouvert V de $u(a)$, et que l'homéomorphisme réciproque soit holomorphe dans V .

Lorsque $K=\mathbf{R}$ et que A est un intervalle ouvert dans $\mathbf{R}$, le fait que $u'(x)\neq 0$ dans A entraîne que u est un homéomorphisme de A tout entier sur u(A) puisque u est monotone dans A (Fonct.var.réelle, chap.I, § 2 et Top.gén. chap.IV, § 2) . Mais lorsque $K=\mathbf{C}$, $u'(x)$ peut être $\neq 0$ en tout point d'un domaine $A\subset\mathbf{C}$ sans que u soit un homéomorphisme de A sur u(A). Par exemple, si $u(x)=x^n$, on a $u'(x)\neq 0$ pour $x\neq 0$, mais si A est le disque $|x-1|<\frac{1}{2}$, u n'est pas un homéomorphisme de A sur u(A) dès que n est assez grand, car il existe des points $x\neq 1$ dans A tels que $x^n=1$.

Il faudrait faire ici également le théorème de dépendance des fonctions holomorphes à jacobien identiquement nul.

3. Intégration des équations différentielles.

THEOREME 2.- Soit K un corps valué complet de caractéristique 0 . Soient $f_i(x;y_1,\ldots,y_p;z_1,\ldots,z_q)$ $(1\leq i\leq p)$ p fonctions holomorphes scalaires définies dans une partie ouverte A de K^{p+q+1} . Pour tout point $(a;b_1,\ldots,b_p;c_1,\ldots,c_q)$ de A , il existe un voisinage U de a dans K , un voisinage V de $(b_1,\ldots,b_p)$ et un voisinage W de $(c_1,\ldots,c_q)$ tels que $U\times V\times W\subset A$, et un système et un seul de p fonctions scalaires $u_i(x;z_1,\ldots,z_q)$, holomorphes dans $U\times W$, telles que l'image de $U\times W$ par l'application $(x;z_1,\ldots,z_q)\to(u_i(x;z_1,\ldots,z_q))$ soit contenue dans V et qui satisfont dans $U\times W$ aux conditions

(12) $Du_i(x;z_1,\dots,z_q)=f_i(x;u_1(x;z_1,\dots,z_q),\dots,u_p(x;z_1,\dots,z_q);z_1,\dots,z_q)$

(D dérivation par rapport à x , $1\leqslant i\leqslant p$) et

(13) $u_i(a;z_1,\dots,z_q)=b_i$ $(1\leqslant i\leqslant p)$ pour tout $(z_1,\dots,z_q)\in W$

Par translation, on peut se ramener au cas où $a=b_j=c_k=0$ pour $1\leqslant j\leqslant p$ et $1\leqslant k\leqslant q$; chacune des fonctions f_i est alors égale à la somme d'une série entière sommable dans un polycylindre ouvert $B\times P\times Q$, où $B\subset K$; $P\subset K^p$ et $Q\subset K^q$

(14) $f_i(x;y_1,\dots,y_p;z_1,\dots,z_q)=\sum g_i(n;r_1,\dots,r_p;\lambda_1,\dots,\lambda_q)\,.$

$$.x^n y_1^{r_1}\dots y_p^{r_p} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2}\dots z_q^{\lambda_q}\ .$$

Pour établir l'existence des fonctions u_i , nous devons prouver qu'il existe p séries entières sans terme indépendant de x

$$u_i(x;z_1,\dots,z_q)=\sum h_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)x^m z_1^{\mu_1}\dots z_q^{\mu_q}$$

sommables dans un polydylindre $U\times W$ de K^{q+1} , substituables dans les séries entières (14) et satisfaisant à (12). Si le problème est possible, les séries entières par rapport à x et aux z_ℓ $(1\leqslant \ell\leqslant q)$ obtenues par cette substitution dans les deux membres de (12) doivent avoir mêmes coefficients, ce qui donne les conditions

$$\left.\begin{aligned} &h_i(0;\mu_1,\dots,\mu_q)=0\\ &mh_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)=\sum_{n,(r_j),(\lambda_\ell)} g_i(n;r_1,\dots,r_p;\lambda_1,\dots,\lambda_q)\,.\\ &\quad .\prod_{j=1}^{p}\prod_{k=1}^{r_j} h_i(s_{kj};\nu_{kj1},\dots,\nu_{kjq}) \end{aligned}\right\}\quad(15)$$

pour tout entier $m>0$ et tout système d'entiers $\mu_\ell\geqslant 0$ $(1\leqslant \ell\leqslant q)$; la sommation du second membre des relations (15) doit être étendue à tous les systèmes d'entiers $\geqslant 0$, n, r_j, λ_ℓ , s_{kj} et $\nu_{kj\ell}$ satisfaisa-nt aux conditions

$$(16)\qquad \begin{cases} m-1=n+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r_j} s_{kj} \\ \mu_\ell=\lambda_\ell+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r_j}\nu_{kj\ell} \qquad (1\leqslant \ell\leqslant q)\end{cases}$$

On tire de ces conditions que

$$m+\sum_{\ell=1}^{q}\mu_\ell = 1+n+\sum_{\ell=1}^{q}\lambda_\ell+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r_j}(s_{kj}+\sum_{\ell=1}^{q}\nu_{kj\ell})$$

et par suite, pour tout système d'exposants $(s_{kj},\nu_{kj1},\dots,\nu_{kjq})$ qui figure aux seconds membres de (16), on a $s_{kj}+\sum_{\ell=1}^{q}\nu_{kj\ell}< m+\sum_{\ell=1}^{q}\mu_\ell$; en d'autres termes, et comme K est de caractéristique 0 , les relations (15) déterminent les coefficients des termes de degré <u>total</u> t dans u_i en fonction de ceux des termes de degré total $< t$ dans les u_j $(1\leqslant j\leqslant p)$; par récurrence sur t , on voit donc que les équations (15) déterminent les coefficients $h_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)$ de façon <u>unique</u>, ce qui montre déjà que si le problème est possible, il n'a qu'une seule solution. En outre, si les $h_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)$ sont déterminés par récurrence à partir des relations (15), les séries entières ayant ces coefficients seront solutions du problème <u>pourvu qu'elles soient sommables dans un voisinage de l'origine</u> dans K^{q+1} ; . En effet, s'il en est ainsi, ces séries sont fonctions continues dans un voisinage de l'origine, donc on peut trouver un tel voisinage $U\times W$ dont l'image par $(x;z_1,\dots,z_q)\longrightarrow(u_i(x;z_1,\dots,z_q))$ soit contenue dans P , et tel que les séries u_i soient substituables dans (14) pour $x\in U$, $(z_1,\dots,z_q)\in W$ (§ 1, th. 2) ; l'expression de la dérivée d'une série entière et les relations (15) montreront alors que les u_i sont bien solutions du système (12) dans $U\in W$.

Pour prouver la sommabilité des séries u_i , considérons pour chacune des séries (14), une série <u>majorante</u>, dont nous désignerons les coefficients par $G_i(n;r_1,\dots,r_p;\lambda_1,\dots,\lambda_q)$; déterminons alors les coefficients $H_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)$ par les conditions

$$\left.\begin{array}{l} H_i(0;\mu_1,\dots,\mu_q)=0 \\ mH_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)=\sum\limits_{n,(r_j),(\lambda_\ell)} G_i(n;r_1,\dots,r_p;\lambda_1,\dots,\lambda_q)\,. \\ \qquad\qquad .\prod\limits_{j=1}^{p}\prod\limits_{k=1}^{r_j} H_i(s_{kj};\nu_{kj1},\dots,\nu_{kjq}) \end{array}\right\} \begin{array}{l}(17)\\ \\ \text{pour } m>0\end{array}$$

la sommation étant étendue aux indices satisfaisant aux mêmes conditions (16) que dans (15). La comparaison de (15) et (17) montre par récurrence sur le degré total que l'on a

$$\left| h_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)\right| \leqslant H_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)$$

pour tout système d'indices ; en d'autres termes, les séries $(H_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)t^m w_1^{\mu_1}\dots w_q^{\mu_q})$ sont des <u>majorantes</u> pour les séries $(h_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)x^m z_1^{\mu_1}\dots z_q^{\mu_q})$ respectivement $(1\leqslant i\leqslant p)$. Tout revient encore à prouver qu'on peut choisir les $G_i(n;r_1,\dots,r_p;\lambda_1,\dots,\lambda_q)$ de sorte que les séries majorantes $(H_i(m;\mu_1,\dots,\mu_q)t^m w_1^{\mu_1}\dots w_q^{\mu_q})$ soient sommables dans un voisinage de 0 .

Or, la série entière dont la somme est fonction des $p+q+1$ variables réelles t, v_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ et w_ℓ $(1\leqslant \ell\leqslant q)$

$$\frac{M}{(1-\alpha t)(1-\alpha \sum\limits_{i=1}^{p} v_i)(1-\alpha\sum\limits_{\ell=1}^{q} w_\ell)}$$

est une majorante de chacune des séries (14) dès que M est assez grand et α assez petit. Tout revient à prouver qu'il existe p séries entières sans terme indépendant de t , qui satisfont aux équations

$$(18)\qquad \frac{dv_k}{dt} = \frac{M}{(1-\alpha t)(1-\alpha \sum\limits_{i=1}^{p} v_i)(1-\alpha\sum\limits_{\ell=1}^{q} w_\ell)} \qquad (1\leqslant k\leqslant p)$$

On déduit aussitôt de (18) que si ce système admet une solution, tous les v_k sont égaux à $v_1=v$ satisfaisant à l'équation différentielle

(19) $$\frac{dv}{dt} = \frac{M}{(1-\alpha t)(1-p\alpha v)(1-\alpha \sum_{\ell=1}^{q} w_\ell)}$$

et réciproquement ; or l'intégrale de cette équation qui s'annule pour $t=0$ satisfait à l'équation

$$v-\frac{1}{2}p\alpha v^2 = -\frac{M}{\alpha(1-\alpha\sum_{\ell=1}^{q} w_\ell)}\log(1-\alpha t)$$

d'où on tire

$$v(t) = p\alpha\left[1-\sqrt{1+\frac{2\,pM}{1-\alpha\sum_{\ell=1}^{q} w_\ell}\log(1-\alpha t)}\right]$$

Comme $\log(1-\alpha t)$ est égale à la somme d'une série entière convergente et sans terme constant pour $|t|<\frac{1}{\alpha}$, il résulte encore du théorème de substitution (§ 1, th. 2) que $v(t)$ est égal à une série entière en $t, w_1, \ldots, w_q$ sans terme indépendant de t, et sommable dans un polycylindre de centre l'origine. Le th. 2 est ainsi complètement démontré.

<u>Remarque</u>.- Lorsque $K=\mathbb{R}$, les f_i sont des fonctions <u>localement lipschitziennes</u> dans A par rapport aux y_j (§ 1, prop. 8) ; on sait alors que dans un voisinage de a (pour chaque système de valeurs de $z_1, \ldots, z_q$) le système d'équations différentielles (12) n'a qu'<u>une seule</u> solution satisfaisant à (13) (<u>Fonct. var. réelle</u>, chap. IV, § 1) ; le th. 2 montre que cette solution est holomorphe au voisinage de a.

<u>4. Applications</u> : <u>I. Dépendance des conditions initiales</u>.

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> K <u>un corps valué complet de caractéristique</u> 0. <u>Soient</u> $f_i(x;y_1,\ldots,y_p)$ $(1\leqslant i\leqslant p)$ p <u>fonctions holomorphes scalaires définies dans une partie ouverte</u> $A=B\times C$ <u>de</u> K^{p+1} (B ouvert dans K, C ouvert dans K^p). <u>Pour tout point</u> $(a, \mathfrak{b})$ <u>de</u> A, <u>il existe un voisinage</u> $U\subset B$ <u>de</u> a <u>dans</u> K <u>et un voisinage</u> $V\subset C$ <u>de</u> $\mathfrak{b}$ <u>dans</u> K^p, <u>et une fonction</u> $u(x,x_0,y_0)=(u_i(x,x_0,y_0))$ <u>à valeurs dans</u> C, <u>et holomorphe dans</u> $U\times U\times V$, <u>telle que pour tout point</u> $(x_0,y_0)\in U\times V$, <u>la fonction</u> $x\to u(x,x_0,y_0)$ <u>soit la seule fonction holomorphe dans un voisinage de</u> x_0, <u>vérifiant l'équation différentielle</u>

(20) $$D\,u(x,x_0,y_0)=f(x,u(x,x_0,y_0))$$

(D dérivation par rapport à x , $f=(f_i)$), et la condition

(21) $$u(x_0,x_0,y_0)=y_0 \quad .$$

En outre, il existe un voisinage $V_1 \subset V$ de b tel que, pour tout $y_0 \in V_1$ et tout couple de points x, x_0 de U , l'équation $y_0 = u(x_0,x,y)$ ait dans V une seule racine $y=u(x,x_0,y_0)$.

Posons en effet $x-x_0=t$, $y-y_0=z$; l'équation différentielle $y'=f(x,y)$ devient $z'=f(x_0+t, y_0+z)$, et le second membre est holomorphe pour (t,z) dans un voisinage de 0 dans K^{p+1} et (x_0,y_0) dans un voisinage de (a,b) ; la condition (21), pour une intégrale v de cette équation, s'écrit $v(0;x_0,y_0)=0$. On est donc dans les conditions d'application du th.2, d'où la première partie de la proposition. D'autre part, si U a été pris assez petit, il existe un voisinage $V_1 \subset V$ de b tel que, pour tout $x_0 \in U$ et tout $y_0 \in V_1$, l'image de U par l'application $x \to u(x,x_0,y_0)$ est contenue dans V car si M est le maximum de $\|f(x,y)\|$ dans $U \times C$, on a en vertu du th. des accroissements finis, $\|u(x,x_0,y_0)-y_0\| = \|u(x,x_0,y_0)-u(x_0,x_0,y_0)\| \leq M|x-x_0|$ quels que soient x et x_0 dans U . Si $y=u(x,x_0,y_0) \in V$, la fonction $s \to u(s,x,y)$ est donc définie dans U et prend la valeur y au point x ; elle est donc égale à $u(s,x_0,y_0)$ en raison du th.2 , et on a donc $u(x_0,x,y)=u(x_0,x_0,y_0)=y_0$. D'ailleurs, si $w \in V$ est tel que $y_0=u(x_0,x,w)$, l'intégrale $s \longrightarrow u(s,x,w)$ qui est définie dans U , prend la valeur y_0 au point x_0 , donc est égale à $u(s,x_0,y_0)$; en particulier, elle prend la valeur y au point x , ce qui montre que $y=w$ et achève la démonstration.

5. Applications : II. Equations complètement intégra-bles.

THÉORÈME 3 (Frobenius).- Soit K un corps valué complet de caractéristique 0. Soient $U_{ij}(x\,;y)=U_{ij}(x_1,\ldots,x_p;y_1,\ldots,y_q)$ $(1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q)$ pq fonctions holomorphes scalaires définies dans une partie ouverte $A=B\times C$ de K^{p+q} (B ouvert dans K^p, C ouvert dans K^q). Afin que pour tout point (x_0,y_0) de A, il existe, dans un voisinage assez petit de ce point, une fonction $x\longrightarrow u(x)$, holomorphe dans ce voisinage, à valeurs dans C, et satisfaisant, d'une part aux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=U_{ij}(x\,;u(x)) \qquad (1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q) \tag{22}$$

et d'autre part à la condition

$$u(x_0)=y_0\ , \tag{23}$$

il faut et il suffit que l'on ait identiquement dans A les relations

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k}+\sum_{h=1}^{q}\frac{\partial U_{ij}}{\partial y_h}U_{kh}=\frac{\partial U_{kj}}{\partial x_i}+\sum_{h=1}^{q}\frac{\partial U_{kj}}{\partial y_h}U_{ih} \tag{24}$$

$$(1\leqslant i\leqslant p\ ,\ 1\leqslant j\leqslant q\ ,\ 1\leqslant k\leqslant p)\ .$$

Lorsqu'il en est ainsi, pour tout point (a,b) de A, il existe un voisinage U de (contenu dans B), un voisinage V de b (contenu dans C) et une fonction $u(x,x_0,y_0)$ holomorphe dans $U\times U\times V$ et à valeurs dans C telle que, pour tout point $(x_0,y_0)\in U\times V$, la fonction $x\longrightarrow u(x,x_0,y_0)$ soit la seule fonction holomorphe dans un voisinage de x_0, satisfaisant à (22) et (23).

1° Les conditions sont nécessaires. En effet, si les équations (22) sont vérifiées dans un voisina ge de x_0, on a, dans ce voisinage

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k}(x\,;u(x)) + \sum_{h=1}^{q} \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_h}(x\,;u(x)).\frac{\partial u_h}{\partial x_k} \qquad (1\leq i\leq p\,,\ 1\leq k\leq p\,,\ 1\leq j\leq q)$$

$$= \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k}(x\,;u(x)) + \sum_{h=1}^{q} \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_h}(x\,;u(x))U_{kh}(x\,;u(x))\,.$$

Ecriva-nt que les expressions ainsi obtenues pour $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$ sont égales au point x , puis faisant $x = x_0$ et tenant compte de (23) il vient

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k}(x_0;y_0) + \sum_{h=1}^{q} \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_h}(x_0;y_0)U_{kh}(x_0;y_0) =$$

$$= \frac{\partial U_{kj}}{\partial x_i}(x_0;y_0) + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial U_{kj}}{\partial y_h}(x_0;y_0)U_{ih}(x_0;y_0)$$

Mais comme par hypothèse, (x_0, y_0) est un point arbitraire de A , on obtient bien (24) .

2° Les conditions sont <u>suffisantes</u>. Considérons l'équation différentielle

$$(25) \qquad y' = \underline{U}(x_0+t(x-x_0);\,y).(x-x_0)$$

où $\underline{U}$ est la matrice (U_{ij}), x_0 et x sont fixes dans B , et $y'=dy/dt$, t variant dans un voisina ge de 0 dans K . Il résulte de la formation de la série majorante dans la démonstration du th.2 que, dès que $x - x_0$ est assez petit, l'équation (25) admet une solution et une seule $v(t;x_0,x,y_0)$ holomorphe pour $|t|<2$ et pour x et x_0 dans un voisinage assez petit U de a , y_0 dans un voisina-ge assez petit V de b et telle que $v(0;x_0,x,y_0)=y_0$. Si $v=(v_j)$, on a donc

$$(26) \qquad \frac{dv_j}{dt} = \sum_{i=1}^{p} U_{ij}(x_0+t(x-x_0);\,v(t))(x_i-x_{i0}) \qquad (1\leq j\leq q)$$

On déduit de là que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{dv_j}{dt}\right) = U_{kj}(x_0+t(x-x_0);\,v(t)) +$$

$$+t\sum_i (x_i-x_{i0})\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k}(x_0+t(x-x_0);\,v(t)) \qquad (1\leq j\leq q,\ 1\leq k\leq p)$$

$$+\sum_{i,h}(x_i-x_{i0})\frac{\partial U_{ij}}{\partial y_h}(x_0+t(x-x_0);\,v(t))\frac{\partial v_h}{\partial x_k}$$

D'autre part, on a, en tenant compte de (26)

$$\frac{d}{dt}(tU_{kj}(x_0+t(x-x_0);\ v(t)))=U_{kj}(x_0+t(x-x_0);\ v(t)) +$$
$$+t\sum_i (x_i-x_{io})\frac{\partial U_{kj}}{\partial x_i}(x_0+t(x-x_0);\ v(t))$$
$$+t\sum_{i,h}(x_i-x_{io})\frac{\partial U_{kj}}{\partial y_h}(x_0+t(x-x_0);\ v(t))U_{ih}(x_0+t(x-x_0);\ v(t))$$

d'où, en faisant intervenir (24), on voit que les fonctions

$$w_{kj}(t)=\frac{\partial v_j}{\partial x_k}-tU_{kj}(x_0+t(x-x_0);\ v(t)) \qquad (1\leqslant j\leqslant q,\ 1\leqslant k\leqslant p)$$

vérifient le système linéaire et homogène des pq équations différentielles

$$(27) \qquad \frac{dw_{kj}}{dt}=\sum_{i,h}(x_i-x_{io})\frac{\partial U_{ij}}{\partial y_h}w_{kh}$$

Or $w_{kj}(0)=0$, car pour $t=0$, $v(0;\ x_0,x,y_0)=y_0$, donc $\frac{\partial v_j}{\partial x_k}(0)=0$; comme 0 est la seule solution de (27) qui s'annule pour $t=0$, on a identiquement $w_{kj}(t)=0$ pour $|t|<2$,et en particulier pour $t=1$; mais si on pose $u(x,x_0,y_0)=v(1;\ x_0,x,y_0)$, cela signifie que l'on a

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=U_{ij}(x\ ;u(x)) \qquad (1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q)$$

pour $x\in U$. De ces relations on déduit que si $z(t)=u(x_0+t(x-x_0))$, on a

$$z'(t)=\underline{U}(x_0+t(x-x_0);\ z(t)).(x-x_0)$$

pour $|t|<2$, et $z(1)=v(1)$; donc $z(t)=v(t)$ pour $|t|\leqslant 1$, et en particulier $u(x_0)=z(0)=v(0)=y_0$; ce qui achève la démonstration.

On pourrait évidemment ici passer de la forme non homogène à la forme homogène du th. de Frobenius, avec l'algèbre extérieure, parler de la primitive (locale) d'une forme extérieure holomorphe, etc..; est-ce le lieu, ou,vaut-il mieux attendre les variétés analytiques pour le faire ?

Tuè par Cartan (coeff. fonctions continues du pt ⟹ endroit où elles coïncident est ouvert fermé

CHAPITRE II (Etat 1)

FONCTIONS HOLOMORPHES D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

§ 1. Le principe du prolongement analytique.

1. Prolongement analytique d'une fonction holomorphe.

Dans ce § , K désignera le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes, E un espace normé complet sur K .

PROPOSITION 1.- Dans l'espace K^p , soient P et Q deux polycylindres ouverts, de centres a et b , tels que $P \cap Q$ ne soit pas vide . Soient $f(x) = \sum c_{n_1 n_2 \dots n_p} (x_1-a_1)^{n_1} \dots (x_p-a_p)^{n_p}$ la somme d'une série entière par rapport aux $x_i - a_i$, sommable dans P , et $g(x) =$
$= \sum d_{n_1 n_2 \dots n_p} (x_1-b_1)^{n_1} \dots (x_p-b_p)^{n_p}$ la somme d'une série entière par rapport aux $x_i - b_i$, sommable dans Q . S'il existe un ensemble ouvert non vide $U \subset P \cap Q$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in U$, on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in P \cap Q$.

Soit en effet x un point de U et y un point quelconque de $P \cap Q$; le segment fermé d'extrémités x et y appartient tout entier à $P \cap Q$, qui est convexe ; la fonction $h(t) = f(x + t(y-x)) - g(x + t(y-x))$ est donc une fonction holomorphe de la variable réelle t dans un intervalle ouvert I contenant $[0,1]$. Désignons par ρ la borne supérieure de l'ensemble A des t tels que $0 \leqslant t \leqslant 1$ et que $h(s) = 0$ pour $0 \leqslant s \leqslant t$; on a par hypothèse $\rho > 0$, et il est clair par continuité que $\rho \in A$; nous allons montrer que $\rho = 1$ ce qui démontrera la proposition. Dans le cas contraire, la fonction $h(t)$ serait égale à la somme d'une série entière en $t - \rho$, convergente dans un intervalle ouvert de centre ρ ; mais on a $h(t) = 0$ pour tout t tel que $0 \leqslant t \leqslant \rho$, donc d'après le principe des zéros isolés, les coefficients de cette série en $t - \rho$ sont tous nuls on a donc aussi $h(t) = 0$ pour $\rho < t < \rho + \alpha$, où $\alpha > 0$; mais cela est contraire à la définition de ρ , d'où la proposition.

THEOREME 1 (principe du prolongement analytique).- *Soient* A *et* B *deux domaines* (*ensembles ouverts connexes*) *dans* K^p , *tels que* $A \cap B$ *soit* connexe *et non vide. Soient* f *et* g *deux fonctions à valeurs dans* E , *définies et holomorphes dans* A *et* B *respectivement. S'il existe un ensemble ouvert non vide* $U \subset A \cap B$ *tel que* $f(x)=g(x)$ *pour tout* $x \in U$, *alors* $f(x)=g(x)$ *pour tout* $x \in A \cap B$.

Il suffit de prouver que l'intérieur C de l'ensemble des points de $A \cap B$ où la fonction holomorphe $h(x)=f(x)-g(x)$ s'annule, est à la fois ouvert et fermé dans $A \cap B$, puisqu'il est non vide et contenu dans l'ensemble connexe $A \cap B$. Il est clair que C est ouvert ; tout revient à montrer qu'un point $z \in A \cap B$ adhérent à C appartient à C . Par hypothèse, il existe un polycylindre ouvert P de centre z tel que $C \cap P$ ne soit pas vide, et que dans P , h soit égal à la somme d'une série entière par rapport aux x_i-z_i , sommable dans P . Or, $P \cap C$ contient un polycylindre ouvert Q dans lequel $h(x)=0$. En appliquant la prop.1 aux fonctions h et 0 , dont chacune est égale dans P à la somme d'une série entière sommable (par rapport aux x_i-z_i) on voit que $h(x)=0$ en tout point $x \in P$, autrement dit $P \subset C$, et par suite C est fermé.

Inverser ouvert et fermé?

Remarques.- 1) Lorsque $A \cap B$ n'est pas connexe, le raisonnement précédent montre que $f(x)=g(x)$ en tout point de la *composante connexe* de l'ensemble ouvert $A \cap B$ qui contient l'ensemble U (supposé connexe) ; mais on peut avoir $f(x) \neq g(x)$ dans les autres composantes connexes de $A \cap B$.

Par exemple, pour $K=\mathbb{C}$ et $p=1$, considérons dans $\mathbb{C}$ les deux ensembles ouverts A,B définis comme suit : en désignant par θ l'amplitude de z comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, A est l'ensemble des $z \neq 0$ dans $\mathbb{C}$ tels que $-\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$; en désignant par θ'

Y a qq chose de + général à dire (Red. dem.)

(~~Variétés assez de trop gg~~ dimension ; possibilité de calculer les dérivées avec ~~le~~ l'ensemble donné

mieux : ensemble ayant en ~~un pt~~ chaque pt ~~variété contenant~~ $\geq n$ vecteurs tgts lint indep. sur le corps complexe l'amplitude de z comprise entre 0 et 2π , B est l'ensemble des $z\neq 0$ tels que $\frac{\pi}{3}<\theta'<\frac{5\pi}{3}$. L'ensemble ouvert $A\cap B$ est non connexe, ses deux composantes connexes H et H' étant respectivement définies par $-\frac{2\pi}{3}<\theta<-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$. Soit $f(z)=\sqrt{|z|}\,e^{i\theta/2}$ dans A , $g(z)=\sqrt{|z|}\,e^{i(\theta'-2\pi)/2}$ dans B ; on a $(f(z))^2=z$ dans A et $(g(z))^2=z$ dans B , et par suite, comme f et g sont continues, ce sont des fonctions holomorphes dans A et B respectivement (chap.I, § 2, th.1). Mais dans H , on a $\theta'=2\pi+\theta$, d'où $f(z)=g(z)$ et dans H , $\theta'=\theta$, d'où $f(z)=-g(z)$.

2) Lorsque $K=\mathbb{C}$, au lieu de supposer que $f(x)=g(x)$ dans un ensemble ouvert non vide $U\subset A\cap B$, il suffit de supposer que $f(x)=g(x)$ dans l'intersection d'un tel ensemble U et d'une variété linéaire réelle V définie par p équations de la forme $\mathcal{I}(z_k)=\beta_k$ $(1\leqslant k\leqslant p)$, $U\cap V$ étant supposé non vide. En effet, si $a\in U\cap V$, les dérivées partielles de h au point a sont égales respectivement aux dérivées partielles de mêmes indices de la restriction de h à $U\cap V$; comme par hypothèse ces dernières sont toutes nulles, la série entière (par rapport aux x_i-a_i) égale à $h(x)$ dans un polycylindre assez petit de centre a , a tous ses coefficients nuls, ce qui montre que $f(x)=g(x)$ dans un voisina-ge de a par rapport à $A\cap B$.

Si $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$, et p=1, il suffit de supposer que $f(x)=g(x)$ dans une partie M de $A\cap B$ telle que l'intersection de M et d'un voisina-ge compact $U\subset A\cap B$ d'un point de $A\cap B$ soit un ensemble <u>infini</u> . En effet, il existe alors un point $b\in U$ adhérent à une suite de points distincts (z_n) de U tels que $h(z_n)=0$ pour tout n ; d'après le principe des zéros isolés, on a $h(x)=0$ dans un voisinage de b contenu dans $A\cap B$, et on conclut comme précédemment .

La fonction égale à f dans A , à g dans B , est alors holomorphe dans $A \cup B$; on dit que c'est un prolongement analytique de f (ou de g) à $A \cup B$.

Le th.1 entraîne le résultat plus général suivant :

PROPOSITION 1.- Soit (A_α) une famille de domaines dans K^p , ~~tels que~~, pour tout couple d'indices α, β, $A_\alpha \cap A_\beta$ soit vide ou soit un domaine. Pour tout indice α , soit f_α une fonction à valeurs dans E , définie et holomorphe dans A_α ; on suppose que pour tout couple d'indices α,β tel que $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, il existe un ensemble ouvert non vide contenu dans $A_\alpha \cap A_\beta$ et dans lequel $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$. Dans ces conditions, il existe une fonction f , holomorphe dans $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$, et telle que $f(x) = f_\alpha(x)$ pour tout $x \in A_\alpha$ et tout α .   vidée

En effet, pour tout $x \in A$, les valeurs de $f_\alpha(x)$ sont les mêmes pour tout α tel que $x \in A_\alpha$, en vertu du th.1 .

2. Domaines d'existence maximaux. Points singuliers.   c'est un cumular.

Soit A un domaine dans K^p , et f une fonction holomorphe dans A . Considérons l'ensemble $\mathfrak{M}$ des fonctions holomorphes définies dans un domaine contenant A , et prolongeant f ; il est immédiat que $\mathfrak{M}$, ordonné par la relation " g est une restriction de h " est inductif ; en vertu du th. de Zorn, il admet donc au moins un élément maximal f_0 ; on dit que f_0 est un prolongement analytique maximal de f , et que le domaine A_0 où est définie f_0 est un domaine d'existence maximal pour un prolongement analytique de f (ou par abus de langage, pour f elle-même) .

Si A_0 est un domaine d'existence maximal pour f , il résulte aussitôt du th.1 que le prolongement maximal de f dans A_0 est unique . Si $A_0 = K^p$ il n'y a qu'un seul domaine d'existence maximal pour f , égal à K^p l'unique prolongement maximal de f est alors holomorphe dans K^p, on dit que c'est une <u>fonction entière</u> (et par abus de langage, que f elle-même est une fonction entière). Dans le cas contraire, soit a un <u>point frontière</u> de A_o ; il peut se produire deux cas :

1° ou bien il n'existe aucune fonction holomorphe dans un voisinage U de a, et égale à f_o dans une composante connexe de $A_o \cap U$; on dit alors que a est un <u>point singulier</u> pour f_o ;

2° ou bien il existe une telle fonction ; a est alors appelé un point frontière <u>adventice</u> de A_o.

Il convient de remarquer que <u>tous</u> les points frontières de A_o peuvent être adventices. Par exemple, soit S la courbe $t \rightarrow (1+\frac{1}{t})e^{it}$ dans $\mathbb{C}$, où t parcourt $]0,+\infty[$; et soit A_o le complémentaire, dans $\mathbb{C}$, de la réunion de S et du disque fermé $|z| \leqslant 1$. Il est facile de voir que A_o est un domaine d'existence maximal pour un prolongement d'une fonction holomorphe de carré égal à z dans un voisinage du point $z=2$; mais les points frontières de A_o, qui sont les points de S et ceux du cercle $|z|=1$, sont tous adventices.

Un point peut être singulier pour certains prolongements maximaux d'une fonction f, et non pour d'autres ; on en a un exemple en considérant la fonction $f(z)=\log(1+\sqrt{1-z})$ (définie par exemple au voisinage d'un point réel $\neq 1$) et le point $z=0$.

Si f_o est un prolongement maximal de f, et si on restreint f_o à un domaine $B \subset A_o$, f_o est un prolongement maximal de cette restriction, mais il peut y en avoir d'autres, qui admettent par exemple des points singuliers dans le domaine A où f est holomorphe (voir le dernier exemple). La relation " g est un prolongement d'une restriction de f " <u>n'est donc pas transitive</u>. On est ainsi amené à considérer la relation transitive : " g est telle qu'il existe une suite $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ telle que $f_1 = f$,

$f_n = g$, et que pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, f_{i+1} soit un prolongement d'une restriction de f_i" . Nous ferons plus tard l'étude de l'ensemble $\mathcal{P}(f)$ des fonctions holomorphes g équivalentes à une fonction holomorphe donnée $\bar{f}$, au sens de cette relation, à l'aide des notions de <u>variété analytique</u> et de <u>revêtement</u>.

On peut donner des exemples (pour $K = \mathbb{C}$ et $p=1$) de fonctions f holomorphes dans un domaine $A \subset \mathbb{C}$ et qui sont telles que <u>tout point</u> de $\mathbb{C}$ soit point singulier pour un prolongement $g \in \mathcal{P}(f)$ au moins.

Remarquons enfin que si a est un point adventice pour un prolongement maximal f_0 de f , il existe par définition un prolongement $g \in \mathcal{P}(f)$ holomorphe au point a .

3. Fonctions ~~holomorphes~~ analytiques de variables réelles.

Il est clair que si $f(z_1,\ldots,z_p)$ est une fonction holomorphe dans un domaine $A \subset \mathbb{C}^p$, la fonction $f(x_1+iy_1,\ldots,x_p+iy_p)$ est holomorphe pour $(x_1,y_1,\ldots,x_p,y_p) \in A$, A étant considéré comme un domaine dans $\mathbb{R}^{2p}$. En fait, cette fonction peut être prolongée en une fonction holomorphe des 2p variables <u>complexes</u> $x_1,y_1,\ldots,x_p,y_p$. En effet, en général, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- <u>Soit</u> $f(x_1,\ldots,x_m)$ <u>une fonction définie dans un domaine</u> $A \subset \mathbb{R}^m$ <u>et holomorphe dans A</u> . <u>Si on considère</u> $\mathbb{R}^m$ <u>comme plongé canoniquement dans</u> $\mathbb{C}^m$, <u>il existe dans</u> $\mathbb{C}^m$ <u>un domaine</u> B <u>et une fonction</u> $g(z_1,\ldots,z_m)$ <u>holomorphe dans</u> B , <u>tels que</u> $B \cap \mathbb{R}^m = A$ <u>et que</u> $g(x_1,\ldots,x_m) = f(x_1,\ldots,x_m)$ <u>dans</u> A .

En effet, pour tout point $a = (a_1,\ldots,a_m) \in A$, il existe un polycylindre ouvert $P_a \subset \mathbb{R}^m$, défini par $|x_i - a_i| < r_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ tel que f soit égale dans P_a à la somme de la série entière sommable

$$c_{n_1 \ldots n_m}(x_1-a_1)^{n_1} \ldots (x_m-a_m)^{n_m}$$

$z_k = x_k + i\, y_k$

<u>Formule Cartan</u> :

$P(x_k, y_k)$: fon. anal. réelle

est la partie réelle de

$$2P\left(\frac{z_k}{2}, \frac{z_k}{2i}\right) - P(0,0)$$

(si c'est une partie réelle de fon. anal.)

Soit Q_a le polycylindre ouvert de centre a et de rayons r_i <u>dans</u> $\mathbb{C}^m$; il est clair que dans Q_a, la série entière

$$c_{n_1 \dots n_m}(z_1-a_1)^{n_1}\dots(z_m-a_m)^{n_m}$$

est sommable ; soit $g_a(z_1,\dots,z_m)$ sa somme. Si a et b sont deux points de A tels que $Q_a \cap Q_b \neq \emptyset$, alors $P_a \cap P_b \neq \emptyset$, et g_a et g_b sont égales dans $P_a \cap P_b$, donc aussi dans $Q_a \cap Q_b$ en vertu de la remarque 2 suivant le th.1. La prop.1 montre alors que dans le domaine $B=\bigcup_{a \in A} Q_a$, il existe une fonction holomorphe g qui coïncide avec g_a dans chaque Q_a, d'où la proposition. redonner ici la petite démonstration de la prop. 1.

Si $f(x_1,y_1,\dots,x_p,y_p)$ est une fonction holomorphe de 2p variables réelles dans un domaine $A \subset \mathbb{R}^{2p}$, il n'existe pas en général de fonction holomorphe $h(z_1,\dots,z_p)$ dans $A \subset \mathbb{C}^p$ telle que $f(x_1,y_1,\dots,x_p,y_p)= h(x_1+iy_1,\dots,x_p+iy_p)$. Prolongeons en effet f à un domaine $B \subset \mathbb{C}^{2p}$ en une fonction holomorphe des 2p variables complexes x_k,y_k. Si on pose $u_k=\frac{1}{2}(x_k+iy_k)$, $v_k=\frac{1}{2}(x_k-iy_k)$, la condition envisagée signifie que la fonction $f_1(u_1,v_1,\dots,u_p,v_p) =$ $= f(u_1+v_1,-i(u_1-v_1),\dots,u_p+v_p,-i(u_p-v_p))$ ne dépend pas des varia bles (complexes) v_k, ce qui équivaut aux relations

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k} + i\,\frac{\partial f}{\partial y_k} = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant p)$$

c'est $\dfrac{df}{d\bar{z}_k}=0$

dans B ; mais (remarque 2 suivant le th.1), il suffit que ces conditions soient vérifiées <u>dans</u> A pour qu'elles le soient aussi <u>dans</u> B , et par suite, elles sont nécessaires et suffisantes.

§ 2. Primitive d'une fonction holomorphe d'une variable complexe.

1 . Intégration le long d'une route.

DÉFINITION 1.- On appelle chemin dans un espace $\mathbb{R}^n$ (faut-il ici donner plus généralement la définition dans un espace topologique quelconque ?) toute application continue d'un intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Un chemin γ est dit achevé, inachevé ou semi-achevé suivant que l'intervalle I où est définie γ est fermé, ouvert ou semi-ouvert. Si I est un intervalle fermé $[a,b]$, les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont appelés l'origine et l'extrémité du chemin (achevé) γ ; on dit encore que ce sont les extrémités de γ ; si $\gamma(a)=\gamma(b)$, on dit que γ est un lacet . Si l'application γ est constante, on dit que le chemin γ est réduit à un point .

Si $I=[a,b]$, l'opposé γ^o d'un chemin γ défini dans I est le chemin tel que $\gamma^o(t)=\gamma(a+b)-t)$. Notation γ^-

Soient γ et γ' deux chemins a chevés, définis respectivement dans I et I' tels que l'origine de I' soit l'extrémité de I , et qu'en ce point les valeurs de γ et γ' coïncident. On définit alors un chemin γ'' dans $I''=I\cup I'$ en posant $\gamma''=\gamma$ dans I et $\gamma''=\gamma'$ dans I' ; on dit que ce chemin est la juxtaposition de γ et γ' , et on le note $\gamma\vee\gamma'$.

On aura soin, dans tout ce qui suit, de distinguer soigneusement l'image $\gamma(I)$ de l'intervalle I par γ , du chemin γ qui est l'application γ elle-même . On dit que $\gamma(I)$ est l'ensemble des points du chemin γ ; on notera que si un chemin est achevé, l'ensemble de ses points est compact .

DÉFINITION 2.- On dit qu'un chemin γ dans $\mathbb{R}^n$ est carrossable (ou est une route) si l'application γ est la primitive d'une fonction réglée dans I (on ne se promène pas sur la courbe de Peano !) .

Deux routes γ, γ' sont dites <u>équivalentes</u> s'il existe une application biunivoque et bicontinue φ de l'intervalle I où est définie γ, sur l'intervalle I' où est définie γ', telle que φ et l'application réciproque ψ soient toutes deux des primitives de fonctions règlées, et qu'on ait $\gamma = \gamma' \circ \varphi$ (d'où $\gamma' = \gamma \circ \psi$). Inutile.

On vérifie immédiatement que cette relation est bien une relation d'équivalence (en raison du théorème donnant la dérivée d'une fonction composée).

On notera que si I et I' sont deux intervalles de même espèce dans $\mathbb{R}$, et γ une route définie dans I, il existe toujours une route équivalente à γ et définie dans I' : il suffit de prendre $\gamma' = \gamma \circ \psi$, où ψ est une application linéaire affine de I' sur I.

L'<u>opposée</u> d'une route est une route ; la <u>juxtaposition</u> de deux routes est évidemment encore une route.

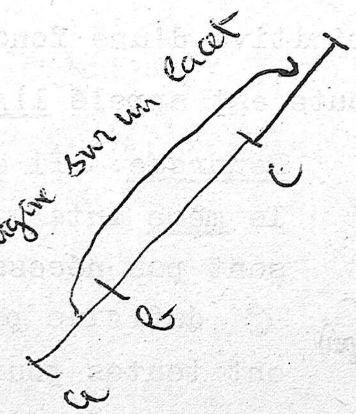
Un lacet carrossable (c'est-à-dire une route achevée dont les deux extrémités coincident) est encore appelé un <u>circuit</u>.

Une route est dite <u>linéaire par morceaux</u> (ou, <u>polygonale</u>) si c'est la primitive d'une fonction en escalier ; l'ensemble des points d'une telle route est appelé <u>ligne brisée</u>.

<u>Remarque</u>.- Il est essentiel de noter que deux routes définies dans le <u>même</u> intervalle I et ayant <u>même</u> ensemble de points $L \subset \mathbb{R}^n$, ne sont pas nécessairement équivalentes ; par exemple les routes dans $\mathbb{C}$ définies par les applications $\theta \to e^{2n\pi i\theta}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ ont toutes pour ensemble de points le cercle $|z|=1$, mais pour des valeurs distinctes de l'entier $n > 0$, elles ne sont pas équivalentes.

$e(n\theta)$

On notera que si γ est une route définie dans I, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), on peut écrire $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ où les γ_i $(1 \leq i \leq n)$ sont des primitives de fonctions règlées dans I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).


Chgt d'origine sur un lacet
a
b
c

57

Si on se sert de l'intégration, il faut prendre $d\mu(t)$

NBR 052

DÉFINITION 3.- Soit γ une route définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans K^n (K étant l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient $f_k(x_1,\dots,x_n)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ n applications de $\gamma(I)$ dans un espace de Banach E sur K. On dit que l'expression différentielle $\sum_{k=1}^{n} f_k dx_k$ est intégrable le long de γ si chacune des n fonctions $f_k(\gamma_1(t),\dots\gamma_n(t))\gamma_k'(t)$ est intégrable dans I (pour la mesure de Lebesgue) (γ_k' $(1 \leqslant k \leqslant n)$ désignant une fonction dont γ_k est la primitive); on appelle intégrale de $\sum_{k=1}^{n} f_k dx_k$ le long de γ et on note $\int_\gamma (\sum_{k=1}^{n} f_k dx_k)$ l'élément $\sum_{k=1}^{n} \int_I f_k(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))\gamma_k'(t)dt$ de E.

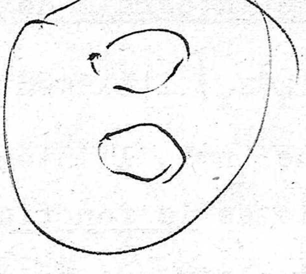
Lorsque $n=1$, l'intégrale de $f\,dx$ le long de γ s'appelle aussi intégrale de la fonction f le long de γ et se note encore $\int_\gamma f$.

Il est clair que toute expression différentielle dont les coefficients f_k sont continus dans un ensemble contenant $\gamma(I)$ est intégrable pour tout chemin achevé.

Si γ et γ' sont deux routes équivalentes, on a $\int_\gamma (\sum_k f_k dx_k) = \int_{\gamma'} (\sum_k f_k dx_k)$; cela résulte de la formule du changement de variables dans les intégrales (Intégr., chap.VI, § 2). Plus généralement, si ψ est une application continue d'un intervalle $I' \subset \mathbb{R}$ dans I, primitive d'une fonction règlée, la formule du changement de variables montre que si $\gamma' = \gamma \circ \psi$, et si $\sum_k f_k dx_k$ est intégrable le long de γ, cette expression différentielle est intégrable le long de γ' et a même intégrale.

Si $\gamma \vee \gamma'$ est la juxtaposition de deux routes, il résulte aussitôt des définitions que, pour que l'expression $\sum_k f_k dx_k$ soit intégrable le long de $\gamma \vee \gamma'$, il faut et il suffit qu'elle le soit le long de γ et de γ', et on a alors

$$\int_{\gamma \vee \gamma'} (\sum_k f_k dx_k) = \int_\gamma (\sum_k f_k dx_k) + \int_{\gamma'} (\sum_k f_k dx_k) .$$



Cartan veut déformer un gd cercle en deux

$\Longrightarrow$ homologie.

Fautus

a revoir

Ceci est bon et donne $H_1(X)$

(et non Π_1)

Pour les cercles : garder des lacets, mais on peut bien changer le pt fixe.

Enfin, si $\sum_k f_k dx_k$ est intégrable le long d'une route γ, elle l'est aussi le long de la route opposée γ^o, et ses intégrales le long de γ et de γ^o sont opposées.

2. Déformation d'un chemin.

DÉFINITION 4.- Soit A un domaine dans $\mathbb{R}^n$, et soient γ_0 et γ_1 deux chemins définis dans le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et prenant leurs valeurs dans A. On appelle déformation de γ_0 en γ_1 dans A une application continue de $I \times J$ dans A ($J = [\alpha, \beta]$ étant un intervalle compact de $\mathbb{R}$) telle que l'on ait ~~identiquement~~ $\varphi(t,\alpha) = \gamma_0(t)$ et $\varphi(t,\beta) = \gamma_1(t)$ qq soit t ∈ ~~dans~~ I ; on dit que, γ_1 est déformé de γ_0 par φ. On dit que γ_0 est déformable en γ_1 dans A s'il existe une déformation de γ_0 en γ_1 dans A.

1 seule classe. Fixer les extrém.

Il est clair que pour tout $s \in J$, $t \to \varphi(t,s)$ est un chemin, et que chacun de ces chemins est déformé de γ_0. Mais, lorsque γ_0 et γ_1 sont tous deux des lacets, la définition 4 n'exclut pas le cas où pour certaines valeurs de s, le chemin $t \to \varphi(t,s)$ ne serait pas un lacet. Dans ce qui suit, il sera toujours sous-entendu, sauf mention expresse du contraire, que lorsque nous parlerons d'une déformation φ d'un lacet et un lacet, il ne sera jamais question que de déformations φ telles que $t \to \varphi(t,s)$ soit un lacet pour toutes les valeurs de $s \in J$.

Il est immédiat que si γ_0 est déformable en γ_1 dans A, γ_1 est déformable en γ_0 dans A ; il suffit de considérer la déformation $\varphi'(t,s) = \varphi(t, \alpha+\beta-s)$. De même, si γ_0 est déformable en γ_1 dans A et γ_1 déformable en γ_2 dans A, γ_0 est déformable en γ_2 dans A : car si φ_1, définie dans $I \times J_1$, est une déformation de γ_0 en γ_1, et φ_2, définie dans $I \times J_2$, une déformation de γ_1 en γ_2, on peut toujours supposer que l'origine de J_2 est l'extrémité de J_1, en considérant une translation convenable $s \to s+a$ et la déformation $(t,s) \to \varphi_2(t,s+a)$ de γ_1 en γ_2 ; alors si φ est la fonction égale à φ_1 dans $I \times J_1$ et à φ_2 dans $I \times J_2$ (ce qui a un sens, puisque les deux fonctions coïncident sur $I \times (J_1 \cap J_2)$), il est clair que φ est continue dans $I \times (J_1 \cup J_2)$ et est une déformation de γ_0 en γ_2 dans A . Comme en outre tout chemin est déformable en lui-même (en prenant $\varphi(t,s)=\gamma(t)$ pour tout $s \in J$) , la relation "γ est déformable en γ' dans A" est une <u>relation d'équivalence</u> entre les chemins définis dans I et à valeurs dans A .

<u>Exemple</u>.- On dit qu'un domaine $A \subset \mathbb{R}^n$ est <u>étoilé</u> par rapport à un point $a \in A$ si pour tout $x \in A$, le segment fermé d'extrémités a et x est contenu dans A . Dans un domaine étoilé par rapport à A , <u>tout chemin</u> (resp. <u>tout lacet</u>) γ <u>est déformable en le point</u> a par la déformation $\varphi(t,s)= a+(1-s)(\gamma(t)-a)$ (pour $0 \leqslant s \leqslant 1$). Deux chemins (resp. lacets) quelconques sont donc déformables l'un en l'autre dans A .

<u>Remarque</u>.- Si γ est une juxta-position de deux chemins γ_1 , γ_2 , et φ une déformation de γ en γ' dans A , γ' est juxtaposition des deux chemins γ'_1, γ'_2 déformés de γ_1,γ_2 par φ . Mais on aura soin d'observer que si γ_1 et γ_2 peuvent être <u>chacun</u> déformés dans A en deux nouveaux chemins γ'_1,γ'_2 , tels que l'extrémité de γ'_1 soit l'origine de γ'_2 , il ne s'ensuit nullement que γ puisse être déformé dans A en la juxtaposition de γ'_1 et de γ'_2 .

PROPOSITION 1.- <u>Tout chemin achevé dans</u> A <u>peut être déformé dans</u> A <u>en une route linéaire par morceaux ayant mêmes extrémités</u>.

En effet, soit γ un chemin achevé à valeurs dans A , défini dans l'intervalle compact $I=[a,b]$. L'ensemble $\gamma(I)$ est compact et contenu dans A ; la distance ρ de cet ensemble à $\complement A$ est donc >0

Vaut pour les
Benz. contenant diffé.
Le faire ainsi.

NBR052 62

Samuele (151)

Comme γ est uniformément continue dans I , il existe une suite croissante $(t_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ de points de I telle que $t_0=a$, $t_p=b$ et que l'oscillation de γ dans chacun des intervalles $[t_i,t_{i+1}]$ $(1\leqslant i\leqslant p-1)$ soit $<\rho$. Définissons la fonction γ' dans I en posant, pour $t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}$, $\gamma'(t)=\gamma(t_i)+\dfrac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}(\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i))$ $(1\leqslant i\leqslant p-1)$; il est clair que γ' est une route linéaire par morceaux à valeurs dans A , puisque l'image par γ' de l'intervalle $[t_i,t_{i+1}]$ est contenue dans la boule ouverte de centre t_i et de rayon ρ ; en outre, on a $\gamma'(t_i)=\gamma(t_i)$ pour $1\leqslant i\leqslant p$. Posons alors, pour $t\in I$ et pour $0\leqslant s\leqslant 1$, $\varphi(t,s)=s\gamma'(t)+(1-s)\gamma(t)$; comme la boule ouverte B_i de centre t_i et de rayon ρ est convexe, on a $\varphi(t,s)\in B_i$ pour $t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}$ et $0\leqslant s\leqslant 1$; φ est donc bien une déformation de γ en γ' ayant les propriétés voulues. On voit même qu'on a $\|\varphi(t,s)-\gamma(t)\|\leqslant\rho$ pour tout $t\in I$ et pour $0\leqslant s\leqslant 1$.

THEOREME 1.- <u>Soit</u> A <u>un domaine dans</u> K^n ($K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$), <u>et soient</u> f_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ <u>n applications holomorphes de</u> A <u>dans un espace de Banach</u> F <u>sur</u> K , <u>et satisfaisant aux conditions</u>

Différentielle locale

$$(1)\qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\qquad (1\leqslant j\leqslant n\ ,\ 1\leqslant k\leqslant n)$$

<u>dans</u> A . <u>Si</u> γ <u>et</u> γ' <u>sont deux circuits dans</u> A <u>tels que</u> γ <u>soit déformable en</u> γ' <u>dans</u> A , <u>on a</u> $\int_\gamma(\sum_{k=1}^{n} f_k dx_k)=\int_{\gamma'}(\sum_{k=1}^{n} f_k dx_k)$.

Supposons que γ et γ' soient définies dans $I=[a,b]$, et soit φ une déformation de γ en γ' dans A , définie dans $I\times J$, où $J=[c,d]$. Comme φ est continue, l'ensemble $\varphi(I\times J)$ est compact dans A ; il existe donc un nombre fini de points a_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ de $\varphi(I\times J)$ et pour chaque i un polycylindre ouvert P_i de centre a_i contenu dans A tel que les P_i forment un recouvrement de $\varphi(I\times J)$ et que dans chaque P_i , chacune des fonctions f_k soit égale à une série entière sommable par rapport aux $x_j - a_{ij}$. Il existe un nombre $\rho > 0$ tel que, pour tout $x \in \varphi(I \times J)$, le polycylindre ouvert de centre x et de rayons ρ soit contenu dans un P_i au moins : car si $\delta(x)$ désigne la plus grande distance de x aux frontières de ceux des P_i qui contiennent x, on vérifie aussitôt que $\delta(x)$ est continue dans $\varphi(I \times J)$ et est > 0 en tout point, donc atteint son minimum ρ en un point de $\varphi(I \times J)$, ce qui implique $\delta(x) \geqslant \rho > 0$ pour tout $x \in \varphi(I \times J)$. Par suite, pour tout $x \in \varphi(I \times J)$, chacune des fonctions f_k est égale à une série entière sommable (par rapport aux $z_j - x_j$) dans le polycylindre ouvert de centre x et de rayon ρ (chap. I, §1, prop. 4). En vertu de la continuité uniforme de φ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les relations $|t-t'| \leqslant \varepsilon$, $|s-s'| \leqslant \varepsilon$ entraînent $\|\varphi(t,s) - \varphi(t',s')\| \leqslant \frac{\rho}{4}$. Soit (t_α) $(0 \leqslant \alpha \leqslant p)$ une suite croissante de points de I tels que $t_0 = a$, $t_p = b$ et $t_{\alpha+1} - t_\alpha \leqslant \varepsilon$ pour $0 \leqslant \alpha \leqslant p-1$; soit de même (s_β) $(0 \leqslant \beta \leqslant q)$ une suite croissante de points de J tels que $s_0 = c$, $s_q = d$ et $s_{\beta+1} - s_\beta \leqslant \varepsilon$ pour $0 \leqslant \beta \leqslant q-1$. Désignons par γ_β le circuit défini par

$$\gamma_\beta(t) = \varphi(t_\alpha, s_\beta) + \frac{t - t_\alpha}{t_{\alpha+1} - t}\left(\varphi(t_{\alpha+1}, s_\beta) - \varphi(t_\alpha, s_\beta)\right) \quad \text{pour} \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$$

$0 \leqslant \alpha \leqslant p-1$, $1 \leqslant \beta \leqslant q-1$; on posera en outre $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_q = \gamma'$. Tout revient à prouver que l'on a, pour $0 \leqslant \beta \leqslant q-1$, $\int_{\gamma_\beta} (\sum_k f_k dx_k) = \int_{\gamma_{\beta+1}} (\sum_k f_k dx_k)$. Or, pour chaque indice α tel que $0 \leqslant \alpha \leqslant p-1$, les points $\gamma_\beta(t)$ et $\gamma_{\beta+1}(t)$ pour $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$ appartiennent tous à un même polycylindre ouvert $Q_{\alpha,\beta}$ de centre un point de $\varphi(I \times J)$ et de rayons ρ (fig. 1) ; on sait d'autre part qu'il existe dans $Q_{\alpha\beta}$

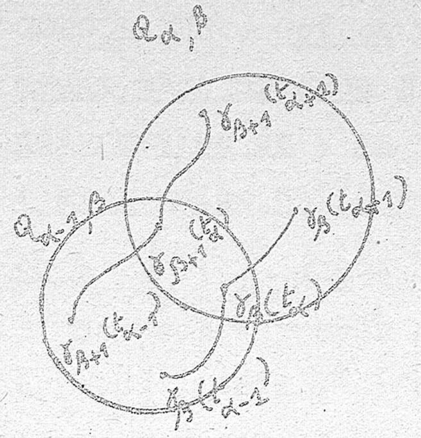


fig 1

une fonction holomorphe $u_{\alpha\beta}$ telle que $\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial x_k} = f_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ dans $Q_{\alpha\beta}$ (chap. I, § 1, cor. de la prop. 7) ; d'autre part, dans $Q_{\alpha-1,\beta} \cap Q_{\alpha\beta}$, la différence $u_{\alpha-1,\beta} - u_{\alpha\beta}$ a toutes ses dérivées nulles, donc est une fonction holomorphe <u>constante</u>. Cela étant, on a par définition

$$\int_{\gamma_\beta} (\sum_k f_k dx_k) = \sum_{\alpha=0}^{p-1} \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} (\sum_k f_k(\gamma_\beta(t)) \frac{d\gamma_{\beta k}(t)}{dt})dt$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{p-1} \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{d}{dt}(u_{\alpha\beta}(\gamma_\beta(t))dt = \sum_{\alpha=0}^{p-1} (u_{\alpha\beta}(\gamma_\beta(t_{\alpha+1})) - u_{\alpha\beta}(\gamma_\beta(t_\alpha)))$$

Tout revient donc à démontrer l'égalité

$$\sum_{\alpha=0}^{p-1} (u_{\alpha\beta}(\gamma_\beta(t_{\alpha+1})) - u_{\alpha\beta}(\gamma_\beta(t_\alpha))) = \sum_{\alpha=0}^{p-1} (u_{\alpha\beta}(\gamma_{\beta+1}(t_{\alpha+1})) - u_{\alpha\beta}(\gamma_{\beta+1}(t_\alpha)))$$

qui s'écrit encore

$$\sum_{\alpha=0}^{p-1} (u_{\alpha\beta}(\gamma_\beta(t_{\alpha+1})) - u_{\alpha\beta}(\gamma_{\beta+1}(t_{\alpha+1}))) = \sum_{\alpha=0}^{p-1} (u_{\alpha\beta}(\gamma_\beta(t_\alpha)) - u_{\alpha\beta}(\gamma_{\beta+1}(t_\alpha)))$$

Or, comme $\gamma_\beta(t_\alpha)$ et $\gamma_{\beta+1}(t_\alpha)$ appartiennent tous deux à $Q_{\alpha-1,\beta} \cap Q_{\alpha\beta}$ on a

$$u_{\alpha\beta}(\gamma_\beta(t_\alpha)) - u_{\alpha\beta}(\gamma_{\beta+1}(t_\alpha)) = u_{\alpha-1,\beta}(\gamma_\beta(t_\alpha)) - u_{\alpha-1,\beta}(\gamma_{\beta+1}(t_\alpha))$$

pour $1 \leqslant \alpha \leqslant p$. D'autre part, comme γ_β et $\gamma_{\beta+1}$ sont des <u>circuits</u>, on a $\alpha_\beta(t_o) = \gamma_\beta(t_p)$ et $\gamma_{\beta+1}(t_o) = \gamma_{\beta+1}(t_p)$, et ces deux points appartiennent à $Q_{0,\beta} \cap Q_{p-1,\beta}$, donc on a

$$u_{p-1,\beta}(\gamma_\beta(t_p)) - u_{p-1,\beta}(\gamma_{\beta+1}(t_p)) = u_{o,\beta}(\gamma_\beta(t_o)) - u_{o,\beta}(\gamma_{\beta+1}(t_o))$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Soient γ et γ' deux routes achevées à valeurs dans A , ayant même origine a et même extrémité b , et telles qu'il existe une déformation de γ en γ' dans A qui laisse fixes a et b . Alors, si l'expression différentielle $\sum_k f_k dx_k$ satisfait aux conditions (1), on a $\int_\gamma (\sum_k f_k dx_k) = \int_{\gamma'} (\sum_k f_k dx_k)$.

On peut supposer que γ et γ' sont définies dans le même intervalle $I=[\alpha,\beta]$; soit γ^0 l'opposé de γ , et $\gamma_1(t)=\gamma_0(t-\beta+\alpha)$ un chemin équivalent à γ^0 défini dans $I+(\beta-\alpha)$. Les routes $\gamma \vee \gamma_1$ et $\gamma' \vee \gamma_1$ sont des circuits dans A et peuvent évidemment être déformés l'un en l'autre dans A en vertu des hypothèses ; en leur appliquant le th.1, on a aussitôt le corollaire .

DÉFINITION 5.- On dit qu'un domaine $A \subset K^n$ est simplt connexe ~~contractile~~ si tout lacet dans A peut être déformé dans A en un point de A .

Par exemple, tout domaine étoilé par rapport à un point est contractile.

Une expression différentielle $\sum_{k=1}^{n} f_k dx_k$ à coefficients holomorphes dans un domaine A est dite fermée si elle satisfait aux conditions (1). On voit donc que :

THÉORÈME 2 (Cauchy).- Dans un domaine simplt connexe ~~contractile~~ l'intégrale d'une expression différentielle fermée ~~(à coefficients holomorphes)~~ inutile le long d'un circuit quelconque est nulle .

> On peut évidemment, pour le cas des variables réelles, généraliser le th.1 au cas où les f_k sont seulement supposées continument différentiables ; est-ce que cela en vaut la peine ?

3. Primitives d'une fonction holomorphe.

Soit $A \subset K^n$ un domaine quelconque, g une fonction holomorphe dans A ; si on pose $dg = \sum_{k=1}^{n} f_k dx_k$, il est immédiat que cette expression différentielle est fermée ; en outre, en vertu des définitions, le long d'une route γ définie dans $I=[\alpha,\beta]$, on a $\int_\gamma dg = \int_\gamma (\sum_k f_k dx_k) = g(\gamma(\beta)) - g(\gamma(\alpha))$;

en particulier $\int_\gamma dg = 0$ le long de tout circuit dans A .

PROPOSITION 2.- Soit $A \subset K^n$ un domaine ~~contractile~~ simpl^t connexe, et soit $\sum_{k=1}^{n} f_k dx_k$ une expression différentielle fermée à coefficients holomorphes dans A . Il existe alors une fonction g holomorphe dans A et telle que $dg = \sum_{k=1}^{n} f_k dx_k$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1.- Quels que soient les points a, b d'un domaine $A \subset K^n$, il existe une route a-chevée linéaire par morceaux, contenue dans A et ayant pour extrémités a et b .

Il suffit de prouver que l'ensemble B des extrémités des routes linéaires par morceaux contenues dans A et d'origine A , est à la fois ouvert et fermé. Or, si $c \in \bar{B}$, il existe une boule S de centre c contenue dans A et contenant une extrémité b d'une route γ d'origine a contenue dans A . Comme le segment d'extrémités b et c est contenu dans S , donc dans A , c est l'extrémité d'une route linéaire par morceaux, juxta-position de γ et d'une route linéaire. De même, tout point $x \in S$ est extrémité d'une route linéaire par morceaux, juxtaposition de γ et d'une route linéaire, donc $S \subset C$, ce qui prouve que C est ouvert et fermé. Ce lemme étant démontré, soit a un point quelconque de A , z un point quelconque de A , γ et γ' deux routes contenues dans A d'origine a et d'extrémité z (il en existe en vertu du lemme). On a $\int_\gamma (\sum_k f_k dx_k) = \int_{\gamma'} (\sum_k f_k dx_k)$. En effet, si γ est définie dans un intervalle $[b,c]$, on peut, en remplacant γ' par une route équivalente, supposer que γ' est définie dans un intervalle de la forme $[c,d]$; on a $\gamma(c) = \gamma'(d) = z$; on peut donc définir γ'' dans $[b,d]$, en posant $\gamma''(t) = \gamma(t)$ dans $[b,c]$ et $\gamma''(t) = \gamma'(c+d-t)$ dans $[c,d]$; comme $\gamma''(d) = \gamma'(c) = a = \gamma''(b)$, γ'' est un circuit, et notre assertion résulte du th. 2

L'élément $\int_\gamma (\sum_k f_k dx_k)$ de E ne dépend donc que de a et z et non de la route γ ; a restant fixe, posons $g(z) = \int_\gamma (\sum_k f_k dx_k)$. Or, pour tout $z_0 \in A$, il existe un polycylindre P de centre z_0 , contenu dans A , et une fonction holomorphe u dans P telle que $u(z_0) = g(z_0)$ et $du = \sum_k f_k dx_k$ dans P ; si pour $z \in P$, σ est la route linéaire $t \to z_0 + t(z - z_0)$ $(t \in [0,1])$, on a donc
$u(z) - u(z_0) = \int_\sigma (\sum_k f_k dx_k) = g(z) - g(z_0)$, d'où $g(z) = u(z)$ dans P , ce qui démontre la proposition.

En particulier, si n=1, on voit que toute fonction holomorphe f dans un domaine <u>contractile</u> $A \subset K$ admet une primitive g holomorphe dans A , c'est-à-dire une fonction dont la dérivée $g' = f$ dans A ; en outre, si g_1 et g_2 sont deux primitives de f dans A , leur différence est ~~xxxxx~~ constante dans un voisinage d'un point quelconque de A , donc constante dans A puisque A est connexe.

Une variante de la démonstration du th.1 et de la prop.2 consiste à établir d'abord un principe général de prolongement analytique, de la façon suivante :

<u>Etant donné un domaine</u> $A \subset K^n$, <u>on suppose donnée en chaque point</u> $z \in A$, <u>une famille</u> $\Phi(z)$ <u>de polycylindres ouverts contenus dans A et de centre</u> z , <u>et pour tout</u> $P \in \Phi(z)$, <u>une fonction holomorphe</u> u_P <u>définie dans</u> P ; <u>on suppose que pour tout</u> $x \in P \in \Phi(z)$ <u>il existe</u> $Q \in \Phi(x)$ <u>tel que</u> $u_Q(x) = u_P(x)$; <u>on suppose en outre que si</u> $P \in \Phi(z)$, $Q \in \Phi(z')$ <u>ont une intersection non vide et si</u> $u_P(x) = u_Q(x)$ <u>en un point de</u> $P \cap Q$, <u>alors</u> u_P <u>et</u> u_Q <u>sont identiques dans</u> $P \cap Q$; <u>enfin, si</u>

$\rho(z)$ <u>désigne la borne inférieure des rayons des polycylindres</u> $P \in \Phi(z)$, $\rho(z)$ <u>est</u> $\neq 0$ <u>et semi-continue inférieurement</u>.

Soit alors a un point fixe de A, γ un chemin achevé d'origine a et d'extrémité z, contenu dans A. On montre d'abord qu'il existe une fonction continue $v_\gamma(t)$ et une seule, définie dans l'intervalle de définition $I=[a,b]$ de γ, telle que $v_\gamma(a)$ soit égale à une des valeurs $u_{P_0}(a)$ pour un $P_0 \in \Phi(a)$, et que, en chaque point $t_0 \in I$, $v_\gamma(t)$ soit égale à une des valeurs $u_P(\gamma(t))$ pour un $P \in \Phi(\gamma(t_0))$ et pour tout t dans un voisinage assez petit de t_0 (on raisonne comme dans le chapitre des équations différentielles réelles pour démontrer l'existence d'un plus grand intervalle de définition d'une intégrale). On prouve ensuite, par un raisonnement presque identique à celui du th.1, que si γ' est déformé de γ dans A, avec mêmes extrémités a et z (conservées dans la déformation), on a $v_{\gamma'}(b) = v_\gamma(b)$ si $v_{\gamma'}(a) = v_\gamma(a)$. Si alors A est <u>contractile</u>, cela permet de définir une fonction holomorphe v dans A et une seule telle que pour tout $z \in A$, v soit égale à un des u_P (pour un $P \in \Phi(z)$) dans le voisinage P de z, et que $v(a)$ soit égal à $u_{P_0}(a)$. Ce procédé s'applique, non seulement aux intégrales d'une forme différentielle fermée, mais aussi (pour $n=1$) aux intégrales d'une équation différentielle linéaire, ou aux solutions d'une équation implicite holomorphe $f(z,u)=0$ qui n'a qu'un nombre <u>fini</u> de solutions en u pour tout $z \in A$. En outre, il a l'avantage de ne pas faire intervenir d'intégration "le long du chemin", qui n'a pas grand chose à voir avec la question du prolongement. Mais d'autre part, ce n'est pas encore là le principe le plus général de prolongement analytique, à cause de la restriction sur $\rho(z)$; comme il faudra de toutes façons faire ce dernier quand on parlera des variétés analytiques et de la "surface de Riemann" d'un élément de fonction, peut-être vaut-il mieux se contenter ici de quelque chose de moins général, et adapté aux §§ suivants.

§ 3. L'intégrale de Cauchy.

1. Indice d'un circuit par rapport à un point.

PROPOSITION 1.- Pour tout point $a \in \mathbb{C}$ et tout circuit γ contenu dans $\complement\{a\}$, l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ est de la forme $2n\pi i$, où n est un entier (positif ou négatif).

Par translation, on peut évidemment se borner au cas où $a=0$. Considérons la fonction $\varphi(t,s) = s\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} + (1-s)\gamma(t)$, qui est définie et continue dans $I \times J$, où I est l'intervalle de définition de γ et $J = [0,1]$ (on observera que $\gamma(t) \neq 0$ dans I) ; elle déforme le circuit γ (pour $s=0$) en un circuit γ' (pour $s=1$) dont l'ensemble des points est contenu dans le cercle unité $\mathcal{U}$. Comme la fonction $1/z$ est holomorphe dans $\complement\{0\}$, le th.1 du § 2 montre que l'on a $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z}$, et qu'on peut donc se borner au cas où $\gamma(I) \subset \mathcal{U}$. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1.- Tout chemin achevé défini dans $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{U}$ est de la forme $t \to e^{i\psi(t)}$, où ψ est une application continue de I dans $\mathbb{R}$.

En effet, soit γ un chemin achevé défini dans $I=[a,b]$ et à valeurs dans $\mathcal{U}$; on peut donc trouver une suite croissante $(t_i)_{0 \leq i \leq p}$ de points de I telle que $t_0=a$, $t_p=b$ et que l'oscillation de γ dans chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ soit ≤ 1. L'image $\gamma(I_k)$ de l'intervalle $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ est donc distincte de $\mathcal{U}$ tout entier, et par suite, si $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$ est un point de $\mathcal{U}$ n'appartenant pas à $\gamma(I_k)$, $x \to e^{i(x+\theta_0)}$ est un homéomorphisme de l'intervalle ouvert $]0,2\pi[$ sur le complémentaire de ζ_0 dans $\mathcal{U}$. Si φ_k est l'homéomorphisme réciproque de cet

cet homéomorphisme, on peut donc écrire $\gamma(t)=e^{i\psi_k(t)}$ dans I_k, où $\psi_k(t)=\varphi_k(\gamma(t))+\theta_0$ est continue dans I_k. Il est clair que $\psi_k(t_{k+1})\equiv\psi_{k+1}(t_{k+1})\pmod{2\pi}$ pour $0\leqslant k\leqslant p-1$. Définissons alors ψ dans I en posant, $\psi(t)=\psi_0(t)$ pour $t\in I_0$, et (par récurrence sur k) $\psi(t)=\psi_k(t)+(\psi(t_k)-\psi_k(t_k))$ pour $t_k<t\leqslant t_{k+1}$; on montre que la récurrence peut se poursuivre en prouvant (par récurrence) que $\psi(t_{k+1})-\psi_{k+1}(t_{k+1})$ est un multiple entier de 2π. Il est clair alors que ψ est continue dans I et que l'on a $\gamma(t)=e^{i\psi(t)}$ dans I.

Comme $x\to e^{ix}$ est un homéomorphisme local différentiable de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$, $\psi(t)$ est la primitive d'une fonction règlée en même temps que $\gamma(t)$. Par suite, on a $\int_\gamma \frac{dz}{z}=\int_a^b i\psi'(t)dt=i(\psi(b)-\psi(a))$. Mais si γ est un circuit, $\psi(b)-\psi(a)$ est un multiple entier de 2π, d'où la proposition.

~~PREMIE~~ DÉFINITION 1.- <u>Si</u> γ <u>est un circuit contenu dans</u> $\complement\{a\}$, <u>et si</u> $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=2n\pi i$, <u>le nombre entier</u> n <u>est appelé l'indice de</u> γ <u>par rapport à</u> a (<u>ou l'indice de</u> a <u>par rapport à</u> γ).

Il résulte aussitôt du th.1 du § 2 que si γ et γ' sont deux circuits déformables l'un en l'autre dans $\complement\{a\}$, l'indice de γ et l'indice de γ' par rapport à a sont égaux. De même, pour un circuit donné γ dans $\mathbb{C}$, l'indice d'un point z par rapport à γ est fonction <u>continue</u> de z dans le complémentaire (ouvert) de l'ensemble $\gamma(I)$ des points de γ, comme on le voit, soit directement, soit en remarquant que l'indice de z+h par rapport à γ est égal à celui de z par rapport à $\gamma-h$, et que l'on passe de γ à $\gamma-h$ par une déformation dans $\complement\{z\}$, si h est en valeur absolue inférieur à la distance de z à $\gamma(I)$. Comme l'indice prend ses valeurs dans l'espace discret $\mathbb{Z}$, on conclut de ce qui précède que l'indice d'un point par rapport à γ est <u>constant dans toute composante connexe (ouverte) du complémentaire de l'ensemble des points de</u> γ.

<u>Exemples</u>.- Considérons le circuit γ_n défini par $t \to e^{nit}$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ dont l'ensemble des points est le cercle $\mathcal{U}$ ("cercle unité parcouru n fois dans le sens direct", n entier positif ou négatif). Comme le complémentaire de $\mathcal{U}$ a deux composantes connexes, le disque ouvert $|z| < 1$, et l'extérieur $|z| > 1$ de ce disque, l'indice d'un point par rapport à γ_n ne peut prendre que deux valeurs distinctes au plus. On vérifie aussitôt quel indice de 0 est n , donc aussi l'indice de tout point du disque ouvert $|z| < 1$; d'autre part, pour $|z| > 1$, on a $\left| \int_{\gamma_n} \frac{dx}{x-z} \right| \leqslant \frac{2n\pi}{|z|-1}$ expression qui tend vers 0 avec $1/|z|$; donc l'indice de z par rapport à γ_n est 0 dans l'extérieur $|z| > 1$ du disque unité. Le même raisonnement prouverait d'ailleurs que si l'ensemble des points d'un circuit γ est contenu dans un disque D , l'indice par rapport à γ de tout point <u>extérieur à</u> D est 0 .

Si $n = \pm 1$, on notera que la relation $e^{nit} = e^{nit'}$ entraîne $t = t'$ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$; on dit que le circuit γ_n est alors un <u>circuit simple</u> . On peut montrer que pour un circuit γ ayant cette propriété, le complémentaire de l'ensemble des points du circuit a exactement deux composantes connexes, dans l'une desquelles l'indice par rapport à γ est 0 , et dans l'autre ± 1 (v. Appendice) .

On notera encore que, dans $\complement \{0\}$, tout circuit γ d'indice n par rapport à 0 peut être déformé en le circuit particulier γ_n . En effet, γ peut être d'abord déformé en un circuit dont l'ensemble des points est contenu dans $\mathcal{U}$; autrement dit (lemme 1), on peut supposer que $\gamma(t) = e^{i\psi(t)}$, et si ψ est définie dans $[0, 2\pi]$ (ce qu'on peut toujours supposer par équivalence) on a $\psi(2\pi) - \psi(0) = 2n\pi$. Si on pose $\omega(t,s) = \psi(t) + s(nt - \psi(t))$ $\varphi(t,s) = e^{i\omega(t,s)}$ est la déformation cherchée (pour $0 \leqslant s \leqslant 1$) .

Si une route γ est contenue dans le complémentaire P du demi-axe réel négatif par rapport à $\mathbb{C}$, comme la fonction log z est holomorphe dans P (comme fonction réciproque de e^z), on a $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log(\gamma(b)) - \log(\gamma(a))$, et par suite $\mathcal{I}(\int_\gamma \frac{dz}{z}) = \mathrm{Am}(\gamma(b)) - \mathrm{Am}(\gamma(a))$, en désignant par $\mathrm{Am}(z)$ la mesure de l'amplitude de z appartenant à l'intervalle $]-\pi, +\pi[$. Par abus de langage, on dit encore que $\mathcal{I}(\int_\gamma \frac{dz}{z})$ pour une route __quelconque__ γ contenue dans $\complement\{0\}$, est la __variation de l'amplitude de__ z __le long de__ γ . Si γ est un circuit d'indice n par rapport à 0 , la "variation de l'amplitude de z " le long de γ est donc $2n\pi$.

Les notions précédentes relatives aux chemins __carrossables__ peuvent s'étendre aux chemins __quelconques__ . Soit γ un chemin achevé quelconque défini dans un intervalle $I = [\alpha, \beta]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et soit a un point de $\mathbb{C}$ n'appartenant pas à $\gamma(I)$. Il existe une déformation de γ en un chemin carrossable γ' __dans__ $\complement\{a\}$ (§2, prop.1) conservant les extrémités de γ ; en outre, si γ' et γ'' sont deux chemins carrossables déformés de γ dans $\complement\{a\}$ par de telles déformations, γ' et γ'' peuvent être déformés l'un en l'autre dans $\complement\{a\}$ par une déformation de même type ; en raison du cor. du th.1 du §2 , la "variation de l'amplitude" de z-a le long de γ' et le long de γ'' sont égales. Cette variation ne dépend donc que du chemin γ initial, et on l'appelle encore la __variation de l'amplitude de__ z-a __le long de__ γ .

Il résulte aussitôt de ces définitions que les variations de l'amplitude de z-a le long de γ et le long de l'opposé de γ sont __opposées__ ; si γ_1 et γ_2 sont deux chemins dans $\complement\{a\}$ tels que la juxtaposition de ces chemins soit définie, la variation de l'amplitude de z-a le long de $\gamma_1 \vee \gamma_2$ est la __somme__ des variations de l'amplitude de z-a le long de γ_1 et le long de γ_2 .

Indice par groupe fondamental du cercle

Faire Cauchy par le principe de monodromie et les relèvements.

Faire les ∫ simples avec Stokes homologique, H_1^1 étant Π_1/comm. pour nous

Lemme

f définie dans un domaine D
lacets $C_1 \dots C_n$ dedans
t.q. à chaque pt extérieur le d° total est 0
Dem : 1 seul lacet d'abord (montrer qu'il est contractile par revêtement.
Puis induction en joignant par un segment.

$\Longrightarrow$ somme des intégrales de f est nulle

Rejoindre la théorie des distrib. analytiques

2. La formule de Cauchy.

THÉORÈME 1 (Cauchy).- *Soit $A \subset \mathbb{C}$ un domaine contractile, et soit f une fonction holomorphe dans A, à valeurs dans un espace de Banach complexe E. Pour tout circuit γ dans A, et tout point $x \in A$ n'appartenant pas à l'ensemble des points de γ, on a*

$$n f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-x}$$

où n est l'indice de x par rapport à γ.

Posons $g(z)=(f(z)-f(x))/(z-x)$ pour $z \neq x$ dans A ; g est évidemment holomorphe dans $A \cap \complement\{x\}$. D'autre part, en développant $f(z)$ en série entière au voisinage de x, on voit que pour tout $z \neq x$ et suffisamment voisin de x, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(z-x)^{n-1}$; en posant $g(x)= f'(x)$, on voit donc que la fonction g ainsi définie dans A tout entier est holomorphe dans ce domaine. En vertu du th.2 du §1, on a $\int_{\gamma} g(z)dz=0$, ce qui, par définition de l'indice de x par rapport à γ, démontre la formule (1).

Inversement, on a la proposition générale suivante :

PROPOSITION 2.- *Soit γ une route quelconque (achevée ou non) dans $\mathbb{C}$, et soit g une fonction définie dans l'ensemble $\gamma(I)$ des points de γ, et intégrable le long de γ. Alors la fonction $f(z)= \int_{\gamma} \frac{g(x)dx}{x-z}$ est holomorphe dans le complémentaire de $\gamma(I)$; de façon précise, pour tout point a de ce complémentaire, la série de Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ de f au voisinage de ce point a un rayon de convergence au moins égal à la distance de a à $\gamma(I)$, et on a*

$$c_k = \int_{\gamma} \frac{g(x)dx}{(x-a)^{k+1}} \tag{2}$$

En effet, on peut écrire, pour $|z-a|<|x-a|$

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{(x-a)(1-\frac{z-a}{x-a})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(x-a)^{k+1}}$$

Bloquer avec la prop. p. 59 : mettre un $d\mu(z)$ ou mieux une distribution $(T * \frac{1}{z})$

et en outre, si $\left|\frac{z-a}{x-a}\right| \leqslant q < 1$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(z-a)^k}{(x-a)^{k+1}}\right| \leqslant \frac{1}{(1-q)(x-a)}$$

Si δ est la distance de a à $\gamma(I)$, la série de terme général $g(\psi(t))\psi'(t)(z-a)^k/(\psi(t)-a)^{k+1}$ est donc convergentee et a pour somme $g(\psi(t))\psi'(t)/(\psi(t)-z)$ pour tout $t \in I$ et tout z tel que $|z-a| < \delta$. En outre, la somme des n premiers termes de cette série est en norme, au plus égale à $\|g(\psi(t))\psi'(t)/(1-q)(\psi(t)-a)\|$ si $|z-a| \leqslant \delta q$. Comme la fonction $1/(\psi(t)-a)$ est mesurable et bornée dans I , il résulte du th. de Lebesgue (<u>Intégr.</u>, chap. IV, § 4, th.) que l'on a $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ où c_k est donné par la formule (2), pour tout z tel que $|z-a| \leqslant q\delta$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> $A \subset \mathbb{C}$ <u>un domaine quelconque</u>, f <u>une fonction holomorphe dans</u> A . <u>Pour tout</u> $a \in A$, <u>le rayon de convergence de la série de Taylor de</u> f <u>au point a est au moins égal à la distance de a à la frontière de</u> A .

Il suffit d'appliquer le th.1 à un cercle γ de centre a contenu dans A et parcouru une fois dans le sens direct, puis d'appliquer la prop.2 à la formule (1) correspondante pour tout point x contenu dans le disque ouvert ayant pour frontière γ .

COROLLAIRE 2.- <u>Les hypothèses et les notations étant celles du th.1, on a, pour tout entier</u> $k > 0$

$$n f^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-x)^{k+1}} \tag{3}$$

n_x au lieu de n

<u>pour tout point x n'appartenant pas à l'ensemble des points de</u> γ .

On pourrait d'ailleurs aisément démontrer cette formule à partir de (1) par "dérivation sous le signe $\int$ ".

<u>Cartan</u> $\frac{1}{(2\pi i)^n} \iiint \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)\, dt_1 \dots dt_n}{(t_1 - 1) \dots (t_n - 1)}$

en intégrant sur un tore (les t_i décrivant des cercles de rayons un peu plus g^d que 1)

<u>adopté</u>

3. Extension aux fonctions de plusieurs variables complexes.

PROPOSITION 3.- *Soit* $A \subset \mathbb{C}^p$ *un domaine, et soit* f *une fonction continue dans* A , *à valeurs dans un espace de Banach complexe* E , *et telle que pour* $1 \leqslant k \leqslant p$ *et les* a_i *arbitraires, chacune des fonctions*
$z_k \to f(a_1,\ldots,a_{k-1},z_k,a_{k+1},\ldots,a_p)$ *soit holomorphe dans la coupe de* A *au point* $(a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_p)$ *pourvu que cette coupe ne soit pas vide. Dans ces conditions,* f *est holomorphe dans* A ; *en outre, pour tout polycylindre fermé* $P = \prod_{k=1}^{p} D_k$, *de centre* $\mathfrak{a} = (a_1,\ldots,a_p)$, *contenu dans* A , *on a , en tout point* $(z_1,\ldots,z_p)$ *intérieur à* P , *la formule*

$$(4) \qquad f(z_1,z_2,\ldots,z_p) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^p}\int_\Delta \frac{r_1 r_2\ldots r_p f(a_1+r_1e^{it_1},\ldots,a_p+r_pe^{it_p})e^{i\sum_{k=1}^{p} t_k}}{(a_1+r_1e^{it_1}-z_1)\ldots(a_p+r_pe^{it_p}-z_p)}\,dt_1\ldots dt_p$$

Se mettre à l'origine

r_k *désignant le rayon de* D_k , *et* Δ *le cube* $0 \leqslant t_k \leqslant 2\pi$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ *dans* $\mathbb{R}^p$. *Enfin, la série de Taylor* $\sum c_{n_1\ldots n_p}(z_1-a_1)^{n_1}\ldots(z_p-a_p)^{n_p}$ *de* f *au point* $\mathfrak{a}$ *est absolument sommable dans l'intérieur de* P , *et on a*

$$(5) \qquad c_{n_1\ldots n_p} = \frac{1}{(2\pi)^p}\int_\Delta \frac{f(a_1+r_1e^{it},\ldots a_p+r_pe^{it_p})\,dt_1\,dt_2\ldots dt_p}{(r_1e^{it_1})^{n_1}\ldots(r_pe^{it_p})^{n_p}}$$

mieux écrire

Soit γ_k le cercle de centre a_k et de rayon r_k , parcouru une fois dans le sens direct. En appliquant la formule (1) , par récurrence sur k , à chacune des γ_k , on obtient la formule

$$f(z_1,\ldots,z_p) = \frac{1}{(2\pi i)^p}\int_{\gamma_1}\frac{dx_1}{x_1-z_1}\int_{\gamma_2}\frac{dx_2}{x_2-z_2}\cdots\cdots\int_{\gamma_p}\frac{f(x_1,\ldots,x_p)\,dx_p}{x_p-z_p}$$

D'où aussitôt (4) en vertu du th. de Lebesgue-Fubini (la fonction qui est intégrée au second membre de (4) étant évidemment continue dans Δ).
D'autre part, pour $|z_k-a_k| \leqslant r_k$, on peut écrire

Faire le th. du maximum, etc avant le th. ξ

D'abord le cas simple du th. ξ (sans simple connexion)

Raffinements ensuite.

Il y a deux théorèmes $\Longrightarrow$ convergence sur tout compact intérieur

$\Longrightarrow$ convergence sur tout ~~[illegible]~~

TSVP

$$\frac{1}{(x_1-z_1)(x_2-z_2)\dots(x_p-z_p)} = \sum \frac{(z_1-a_1)^{n_1}}{(x_1-a_1)^{n_1+1}} \dots \frac{(z_p-a_p)^{n_p}}{(x_p-a_p)^{n_p+1}}$$

la série entière du second membre étant normalement sommable pour $|x_k-a_k|=r_k$ (les z_k fixes tels que $|z_k-a_k|\leq r_k$) . La série entière de terme général $f(x_1,\dots,x_p)\prod_{k=1}^{p}\frac{(z_k-a_k)^{n_k}}{(x_k-a_k)^{n_k+1}}$ est donc normalement sommable pour $|x_k-a_k|=r_k$ et a pour somme la fonction intégrée au second membre de (4), ce qui achève de démontrer la proposition.

<u>Remarques</u>.- 1) On peut démontrer que f est holomorphe dans A pourvu que chacune des applica-tions partielles $z_k \to f(a_1,\dots,a_{k-1},z_k,a_{k+1},\dots,a_p)$ soit holomorphe, <u>sans supposer que</u> f <u>soit continue dans</u> A (cf.   ) .

Sort du cadre (Baire, Hartogs)

2) Le cor. 1 de la prop. 2 et la prop. 3 ne sont plus valables lorsqu'il s'agit de fonctions holomorphes de variables <u>réelles</u>. Par exemple, la fonction $1/(1+x^2)$ est holomorphe dans $\mathbb{R}$ tout entier, mais sa série de Taylor au point $x=0$ a un rayon de convergence égal à 1 . De même, la fonction de deux variables $f(x,y)$ définie dans $\mathbb{R}^2$ par les conditions suivantes : $f(0,0)=0$, $f(x,y)=xy^2/(x^2+y^2)$ est holomorphe dans $\mathbb{R}$ pour chacune des deux variables x,y , mais n'est pas holomorphe au point $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ (car elle n'est même pas différentiable en ce point) .

<u>4. Convergence des suites de fonctions holomorphes.</u>

THÉORÈME 2 (Weierstrass).- <u>Soit</u> $A\subset \mathbb{C}$ <u>un domaine</u> ~~contractile~~ simplt connexe, <u>et soit</u> $\mathcal{H}(A)$ <u>l'ensemble des fonctions holomorphes dans</u> A , <u>à valeurs dans un espace de Banach complexe</u> E . <u>Soit</u> γ <u>un circuit dans</u> A , <u>et soit</u> B <u>une composante connexe du complémentaire</u> (<u>par rapport à</u> A) <u>de l'ensemble</u> $\gamma(I)$ <u>des points de</u> γ , <u>telle que tout point de</u> B <u>ait un indice</u> $\neq 0$ <u>par rapport à</u> γ . <u>Dans ces conditions, si</u> $\mathfrak{F}$ <u>est un filtre</u>

Schwartz : Si b_n converge dans un ouvert (au sens distrib.)
elle converge unif^t sur tout compact de l'ouvert.

Puis raffinant avec principe du max
et convergence unif. f entiers.

sur $\mathcal{H}(A)$ *qui converge uniformément dans* $\gamma(I)$, *il existe une fonction* f_0 *holomorphe dans* B , *telle que, pour tout entier* $k \geqslant 0$, *on ait* $\lim_{\mathfrak{F}} f^{(k)}(z) = f_0^{(k)}(z)$ *uniformément dans tout ensemble compact contenu dans* B .

En effet, si K est un ensemble compact contenu dans B , la fonction continue $|z-x|$ admet un minimum $\rho > 0$ pour $z \in K$ et $x \in \gamma(I)$. Soit $g(x)$ la fonction (définie sur $\gamma(I)$) limite uniforme de $f(x)$ suivant $\mathfrak{F}$; il est clair que g est continue dans $\gamma(I)$, et par suite (prop.2) la fonction $f_0(z) = \frac{1}{2\pi n i}\int_\gamma \frac{g(x)dx}{z-x}$ est holomorphe dans B (n désignant l'indice d'un point quelconque de B par rapport à γ). Comme, suivant le filtre $\mathfrak{F}$, $f(x)/(x-z)^{k+1}$ tend uniformément vers $g(x)/(x-z)^{k+1}$ pour $x \in \gamma(I)$ et $z \in K$, le théorème résulte aussitôt des formules (1) et (3) .

Nous verrons un peu plus loin qu'en réalité, la fonction f_0 est continue dans $\bar{B}$, et que f tend vers f_0 *uniformément dans* $\bar{B}$ *tout entier*.

Exemple.- La fonction $1/\Gamma(z)$ définie dans $\mathbb{C}$ tout entier, est une *fonction entière*, car elle est limite uniforme dans toute partie compacte de $\mathbb{C}$ d'une suite de fonctions entières en vertu de la formule de Weierstrass (*Fonct. var. réelle*, chap.VII, §2) .

Le th.2 s'étend aux fonctions de plusieurs variables complexes :

PROPOSITION 4.- *Soit* $A \subset \mathbb{C}^p$ *un domaine, et soit* $\mathcal{H}(A)$ *l'ensemble des fonctions holomorphes dans* A , *à valeurs dans* E . *Soit* $P = \prod_{k=1}^{p} D_k$ *un polycylindre fermé contenu dans* A , *et pour chaque* k , *soit* S_k *le cercle frontière de* D_k . *Dans ces conditions, si* $\mathfrak{F}$ *est un filtre sur* $\mathcal{H}(A)$ *qui converge uniformément dans* $\prod_{k=1}^{p} S_k$, *il existe une fonction* f_0 *holomorphe dans* P *telle que* f (resp. *une dérivée partielle quelconque de* f) *converge uniformément suivant le filtre* $\mathfrak{F}$

à distribuer

vers f_0 (resp. la dérivée partielle de mêmes ordres de f_0) dans toute partie compacte de l'intérieur de P.

Le raisonnement est tout à fait analogue à celui du th.2, en utilisant les formules (4) et (5) à la place de (1) et (3).

On remarquera que $\prod_{k=1}^{p} S_k$, pour $p > 1$, n'est nullement la frontière de P, mais seulement une partie "très petite" de cette frontière (comme nous le verrons plus tard, $\prod_{k=1}^{p} S_k$ est de "dimension p" alors que la frontière de P est de dimension $2p-1$").

Ici encore, le th.2 et la prop.4 ne sont pas valables pour les fonctions holomorphes de variables réelles, puisqu'on sait que toute fonction continue dans un domaine $A \subset \mathbb{R}^p$ peut être approchée uniformément par des polynomes dans toute partie compacte de A (Top.gén. chap.X, § 5).

5. Intégrales fonctions holomorphes de paramètres complexes. déjà fait

PROPOSITION 5.- Soient E un espace localement compact, μ une mesure positive sur E. Soit A un domaine contenu dans $\mathbb{C}$, et f une application de $E \times A$ dans un espace de Banach complexe F. On suppose que : 1° pour tout $s \in E$, $z \to f(s,z)$ est holomorphe dans A ; 2° pour tout circuit circulaire $t \to a+re^{it}$ dans A, la fonction $f(s,a+re^{it})$ est mesurable dans $E \times [0,2\pi]$; 3° pour tout point $a \in A$, il existe un voisinage V de a et une fonction intégrable $g \geqslant 0$ définie dans E, telle que $\|f(s,z)\| \leqslant g(s)$ dans $E \times V$. Dans ces conditions, la fonction $u(z) = \int f(s,z)d\mu(s)$ est holomorphe dans A.

En effet, pour tout $a \in A$, soit γ un circuit circulaire $t \to a+re^{it}$ contenu dans V. Pour tout $s \in E$ et tout z tel que $|z-a| < r$, on peut écrire, d'après la formule (1)

$$f(s,z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r f(s,a+re^{it})e^{it}dt}{a+re^{it} - z}$$

Comme $\| f(s,z)\| \leqslant g(s)$ dans $E \times V$ et que la fonction continue $e^{it}/(a+re^{it}-z)$ est bornée dans $[0,2\pi]$, la fonction $f(s,a+re^{it})e^{it}/(a+re^{it}-z)$ est intégrable dans $E\times[0,2\pi]$, et en vertu du th. de Lebesgue-Fubini, on peut écrire

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}dt}{a+re^{it}-z} \int f(s,a+re^{it})d\mu(s)$$

La prop.2 montre alors que $u(z)$ est holomorphe dans V, d'où la proposition.

Remarques.- 1) On généralise aisément la prop.5 aux fonctions de plusieurs variables complexes, en utilisant la formule (4) ; nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer cette extension.

2) Il peut se faire que f ne satisfasse pas aux conditions de la prop.5, mais qu'il existe une suite croissante (E_n) de sous-espaces localement compacts de E tels que chacune des fonctions $f(s,z)\varphi_{E_n}(s)$ satisfasse aux conditions de la prop.5 . Si alors la suite des fonctions $u_n(z)=\int f(s,z)\varphi_{E_n}\, d\mu(s)$ converge uniformément dans toute partie compacte de A (intégrale impropre !), la fonction limite $u(z)$ est encore holomorphe dans A en vertu du th.2 .

§ 4. Les inégalités de Cauchy.

1. Les inégalités de Cauchy.

PROPOSITION 1.- Soit $A\subset \mathbb{C}^p$ un domaine, et soit $f(z_1,\ldots,z_p)$ une fonction holomorphe dans A , à valeurs dans un espace de Banach complexe E . Soit P un polycylindre fermé contenu dans A , défini par les inégalités $|x_k-a_k|\leqslant r_k$ $(1\leqslant k\leqslant p)$, et soit S_k le cercle $|x_k-a_k|=r_k$ $(1\leqslant k\leqslant p)$. Soit $\sum c_{n_1n_2\ldots n_p}(z_1-a_1)^{n_1}\ldots(z_p-a_p)^{n_p}$ la série de Taylor de f au point $(a_1,\ldots,a_p)$. Si $\|f(x_1,\ldots,x_p)\|\leqslant M$ sur $\prod_k S_k$, on a (inégalités de Cauchy)

(1) $$\| c_{n_1n_2\ldots n_p}\| \leqslant M/r_1^{n_1}\ldots r_p^{n_p}$$ / avec un loc‹t› convexe et toute seminorme

pour tout système d'indices (n_k) .

C'est une conséquence immédiate de la formule (5), à laquelle on applique l'inégalité de la moyenne.

Remarque.- Pour une fonction holomorphe à valeurs complexes $f(z_1,\dots,z_p)$, on peut obtenir une inégalité plus précise. On a en effet

$$\left|f(a_1+r_1 e^{it_1},\dots a_p+r_p e^{it_p})\right|^2 =$$

$$= \sum_{(n_k)(m_k)} c_{n_1\dots n_p}\bar{c}_{m_1\dots m_p} r_1^{m_1+n_1}\dots r_p^{m_p+n_p} e^{i(n_1-m_1)t_1}\dots e^{i(n_p-m_p)}$$

La série étant normalement convergente pour $0 \leqslant t_k \leqslant 2\pi$ $(1\leqslant k\leqslant p)$ on a donc, en intégrant dans ce cube Δ :

$$\frac{1}{(2\pi)^p}\int_\Delta \left|f(a_1+r_1e^{it_1},\dots,a_p+r_pe^{it_p})\right|^2 dt_1\dots dt_p =$$

$$(2) \qquad = \sum_{(n_k)} \left|c_{n_1\dots n_p}\right|^2 r_1^{2n_1}\dots r_p^{2n_p}$$

d'où l'inégalité plus précise que (4)

$$(3) \qquad \sum_{(n_k)} \left|c_{n_1n_2\dots n_p} r_1^{n_1}\dots r_p^{n_p}\right|^2 \leqslant M^2 .$$

2. Le théorème de Liouville.

aussi pour les loc. convexes

THÉORÈME 1 (Liouville).- Soit f une fonction entière dans $\mathbb{C}^p$ (à valeurs dans un espace de Banach complexe E). S'il existe p entiers m_k $(1\leqslant k\leqslant p)$ et une constante a tels que l'on ait pour tout point ~~$z=(z_1,\dots,z_p)\in\mathbb{C}^p$~~ z assez grand de $\mathbb{C}^p$.

$$(2) \qquad \|f(z_1,z_2,\dots,z_p)\| \leqslant a.|z_1|^{m_1}|z_2|^{m_2}\dots|z_p|^{m_p}$$

f est un polynôme (à coefficients dans E) dont le degré par rapport à z_k est $\leqslant m_k$ $(1\leqslant k\leqslant p)$.

En effet, en vertu de l'hypothèse et de la prop.3 du § 3 , la série de Taylor de f au point $(0,\dots,0)$ est absolument sommable dans $\mathbb{C}^p$ tout entier . On peut donc appliquer les inégalités (1) à un polycylindre quelconque de centre l'origine, ce qui donne, en raison de (2)

Commutatif est inutile
Complet est inutile
le dev. en serie egalent
Marche pour un corps
topol. loct convexe
(utiliser H. B)

$$\| c_{n_1 n_2 \dots n_p} \| \leqslant a |z_1|^{m_1 - n_1} \dots |z_p|^{m_p - n_p}$$

pour les coefficients de la série de Taylor de f. Comme au second membre de cette inégalité les z_k sont arbitrairement grands, on voit que si $m_k < n_k$ pour un indice k au moins, on a nécessairement $c_{n_1 n_2 \dots n_p} = 0$, d'où le théorème.

COROLLAIRE.- Toute fonction entière bornée est une constante.

3. Applications : I. Le théorème de d'Alembert-Gauss.

On peut déduire du th. de Liouville une démonstration simple du th. de d'Alembert-Gauss (Top.gén.,chap.VIII, §1, th.1). Soit $f(z)= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ un polynôme de degré n ($a_0 \neq 0$) à coefficients complexes, et supposons $n \geqslant 1$. Si f n'avait pas de racine dans $\mathbb{C}$, la fonction $1/f$ serait holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier, donc une fonction entière. Or, on a $f(z) \sim a_0 z^n$ pour $|z|$ tendant vers $+\infty$, d'où $1/f(z) \sim 1/a_0 z^n$. Par ailleurs, ~~$1/f$ étant continue dans $\mathbb{C}$, est bornée dans toute partie compacte de $\mathbb{C}$~~, et $1/f$ est par suite bornée ~~dans $\mathbb{C}$ tout entier~~ à vois. de l'∞. Le th. de Liouville montre alors que $1/f$, et par suite f serait une constante, ce qui est contradictoire avec le fait que f n'est pas bornée.

4. Applications : II. Le théorème de Gelfand-Mazur.

THÉORÈME 2 (Gelfand-Mazur).- Soit K une algèbre normée complète sur $\mathbb{C}$. Si K est un corps commutatif, il est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ (et par suite identifiable à $\mathbb{C}$).

Soit e l'élément unité de K ; tout revient à montrer que $K = \mathbb{C}e$. Supposons le contraire, et soit a un élément de K n'appartenant pas à $\mathbb{C}e$; autrement dit, on a $a - ze \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. L'hypothèse que K est un corps entraîne que $a - ze$ est inversible dans K pour tout $z \in \mathbb{C}$; par suite (chap.I, §1,prop.9) la fonction $(a - ze)^{-1}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier. Or on peut écrire faire ça pour toutes valeurs des exposants (et non pas seul^t $n=0$)

$\|(a-ze)^{-1}\| = |z|^{-1}\|(e-z^{-1}a)^{-1}\|$. Dès que $|z|^{-1}\|a\|<1$, c'est-à-dire $|z|>\|a\|$, on peut écrire (Top.gén., chap.IX, §3,prop.13)

$$(e-z^{-1}a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} . a^n$$

d'où $\|(e-z^{-1}a)^{-1}\| \leqslant \|e\| + \sum_{n=1} |z|^{-1} . \|a\|^n \leqslant \|e\| + (1-|z|^{-1}\|a\|)^{-1}$

Par suite, la fonction $(a-ze)^{-1}$ tend vers 0 avec $1/z$; elle est donc bornée dans $\mathbb{C}$ puisqu'elle est partout continue. Mais en vertu du th. de Liouville, cette fonction serait constante, ce qui est absurde, puisque $(a-z_1e)-(a-z_2e)=(z_2-z_1)e \neq 0$ pour $z_1 \neq z_2$. Le théorème est ainsi démontré.

Conséquence : existence d'un pt du spectre

5. Le principe du maximum.

THÉORÈME 3 (principe du maximum).- Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $A \subset \mathbb{C}^p$, à valeurs complexes. Si la fonction $|f(z_1,\ldots,z_p)|$ admet un maximum relatif en un point de A, f est une constante.

Soit $a=(a_1,\ldots,a_p)$ un point de A où $|f|$ atteint un maximum relatif. En multipliant f par un facteur $e^{i\theta}$ convenable, on peut supposer que $f(a)=|f(a)|=M$. Par hypothèse, il existe un polycylindre fermé $P \subset A$, de centre a et de rayons r_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ tel que $|f(Z)| \leqslant M$ dans P. D'après la formule (5) du §3, on a

$$M=f(a)=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_\Delta f(a_1+r_1e^{it_1},\ldots,a_p+r_pe^{it_p})dt_1\ldots dt_p$$

d'où, en désignant par g la partie réelle de f

$$M=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_\Delta g(a_1+r_1e^{it_1},\ldots,a_p+r_pe^{it_p})\,dt_1,\ldots,dt_p$$

Comme $g(Z)$ est continue et $\leqslant M$ dans Δ, cette égalité n'est possible que si $g(Z)=M$ en tout point de Δ ; mais comme $|f(Z)| \leqslant M$, la relation $g(Z)=M$ entraîne $f(Z)=M$. Enfin, on peut remplacer P par tout polycylindre de centre a contenu dans P ; on a donc $f(Z)=M$ pour tout $Z \in P$, et par suite (§1,th.1) $f(Z)=M$ dans A tout entier.

NBR 052 90

Le théorème ne s'étend aux fonctions prenant leurs valeurs dans un espace de Banach E que moyennant certaines conditions sur la norme dans E (exerc.) .

On peut naturellement donner une démonstra-tion beaucoup plus élémentaire du th.3 : pour une seule variable complexe, on regarde le premier terme non constant de la série de Taylor et on donne à $z-a$ une amplitude convena-ble pour obtenir une contradiction ; puis on récure sur le nombre de variables. Mais il semble que la démonstration ci-dessus soit préfèrable, car c'est celle qui s'appliquera aussi aux fonctions sous-harmoniques et autres.

COROLLAIRE.- Soit f une fonction holomorphe dans $A \subset \mathbb{C}^p$, à valeur dans un espace de Banach complexe E . Soit B un domaine relativement compact dont l'adhérence $\overline{B}$ est contenue dans A . Si M est le maximum de $\|f(z_1,\dots,z_p)\|$ sur la frontière de B , M est aussi le maximum de $\|f(z_1,\dots,z_p)\|$ dans $\overline{B}$.

En effet, soit u une forme linéaire continue quelconque sur E , de norme $\|u\|=1$; $u\circ f$ est holomorphe dans A et on a $|u(f(z_1,\dots,z_p))| \leqslant M$ sur la frontière de B . Donc le maximum de $|u\circ f|$ dans $\overline{B}$ est au plus égal à M d'après le th.3 ; on a par suite $|u(f(z_1,\dots,z_p))| \leqslant M$ pour tout $z \in \overline{B}$ et pour toute forme linéaire u de norme 1 . Mais comme pour tout point $y \in E$, on a $\|y\| = \sup_{\|u\|=1} |u(y)|$, le corollaire en résulte aussitôt .

Comme application de ce corollaire, on a l'amélioration annoncée du th. de Weierstrass (§ 3,th.2) : avec les notations de ce théorème, la frontière de B est une partie de $\gamma(I)$, donc pour tout point $z \in B$, on a $\|f(z)-f_0(z)\| \leqslant \sup_{x\in\gamma(I)} \|f(x)-f_0(x)\|$ ce qui prouve que le filtre $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers f_0 dans $\overline{B}$, et que f_0 est continue dans $\overline{B}$.

Si B est plus particulièrement un polycylindre (ou plus généralement un produit), on peut naturellement remplacer la frontière de B par le produit des frontières des projections de B , comme on le voit par récurrence sur le nombre de variables.

PROPOSITION 2 (lemme de Schwarz).- Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $A \subset \mathbb{C}$ contenant le disque $|z| \leqslant 1$, et supposons que f ait un zéro d'ordre k au point $z=0$. Dans ces conditions, si M est le maximum de $\|f(z)\|$ pour $|z| = 1$, on a $\|f(z)\| \leqslant M|z|^k$ pour tout z tel que $|z| \leqslant 1$.

Il suffit de remarquer que $z^{-k}f(z)$ est holomorphe dans A et que le maximum de $\|z^{-k}f(z)\|$ pour $|z| = 1$ est égal à M.

6. Ensembles équicontinus de fonctions holomorphes.

PROPOSITION 3.- Soit $A \subset \mathbb{C}^p$ un domaine, Φ un ensemble de fonctions holomorphes dans A, à valeurs dans un espace de Banach E. Si les fonctions de Φ sont uniformément bornées dans toute partie compacte de A, Φ est un ensemble équicontinu dans A.

En effet, soit a un point de A, P un polycylindre fermé de centre a et de rayons ρ, contenu dans P. Par hypothèse, il existe un nombre M tel que $\|f(z)\| \leqslant M$ pour tout $z \in P$. Soit Q le polycylindre fermé de centre a et de rayons $\rho/2$; pour tout $x \in Q$, le polycylindre fermé de centre x et de rayons $\rho/2$ est contenu dans P, donc la formule (5) du § 3 donne en particulier les majora-tions

$$(3) \qquad \|\partial f/\partial x_k\| \leqslant 2M/\rho$$

valables pour tout $x \in Q$ et toute fonction $f \in \Phi$. Or, on peut écrire, pour tout $y \in Q$

$$f(y)-f(a) = \int_\sigma \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right)$$

l'intégrale étant prise le long du segment $\sigma : t \to a+t(y-a)$, avec $0 \leqslant t \leqslant 1$; on en déduit immédiatement, compte-tenu de (3), que

$$\|f(y)-f(a)\| \leqslant \frac{2pM}{\rho}\|y-a\|$$

pour toute fonction $f \in \Phi$ et tout $y \in Q$, d'où la proposition.

COROLLAIRE.- Tout ensemble Φ de fonctions holomorphes dans un domaine $A \subset \mathbb{C}^p$, à valeurs complexes, et qui sont uniformément bornées dans toute partie compacte de A, est relativement compact pour la topologie de la convergence compacte (Top.gén., chap.X, § 1) .

En effet, pour que $x \in A$, l'ensemble $\Phi(x)$ est borné dans $\mathbb{C}$, donc relativement compact ; d'autre part Φ est équicontinu dans A en raison de la prop.3 ; le corollaire résulte donc du th. d'Ascoli (Top.gén., chap.X, § 4,th.1) .

PROPOSITION 4 (Vitali).- Soit Φ un ensemble de fonctions holomorphes dans un domaine $A \subset \mathbb{C}$, à valeurs dans un espace de Banach E , et relativement compact pour la topologie de la convergence compacte. Soit B une partie infinie de A , relativement compacte dans A . Si un filtre $\mathfrak{F}$ sur Φ converge vers une limite en tout point de B , il converge uniformément dans toute partie compacte de A et a pour limite une fonction holomorphe dans A .

En effet, tout revient à montrer que $\mathfrak{F}$ n'a qu'un seul point adhérent (Top.gén.,chap.I, § 10, 2^{e} éd.,cor. du th.1). Soit f_0 un point adhérent à $\mathfrak{F}$ pour la topologie de la convergence compacte ; f_0 est la limite pour cette topologie d'un filtre $\mathfrak{G}$ plus fin que $\mathfrak{F}$, et par suite (§ 3,th.2), f_0 est holomorphe dans A . Si f_1 est un second point adhérent à $\mathfrak{F}$, f_1 est donc aussi holomorphe dans A , et l'hypothèse entraîne que $f_1(x)= f_0(x)$ en tout point $x \in B$. Or, il existe au moins un point de $\overline{B}$ dont tout voisinage contient une infinité de points de B (sans quoi on pourrait recouvrir $\overline{B}$ par un nombre fini de voisinages ne contenant qu'un nombre fini de points de B , et B serait fini) ; au voisinage d'un tel point x_0, la fonction $h(x)= f_1(x)- f_0(x)$ est holomorphe et une infinité de zéros distincts ; en vertu du principe des zéros isolés, h est nulle dans un voisinage de x_0, et par suite partout dans A (§ 1,th.1), ce qui démontre la proposition.

Samuel

(151)

NBR 052

93

§ 5. Points singuliers isolés. Résidus.

1. La série de Laurent.

PROPOSITION 1.- Soit $A \subset \mathbb{C}$ un domaine, r et r' deux nombres >0 tels que $0<r<r'$ et que l'ensemble $\overline{\Gamma}$ des points z tels que $r \leqslant |z| \leqslant r'$ ("couronne circulaire fermée") soit contenu dans A . ~~Pour toute fonction~~ Pour toute fonction f holomorphe dans A , à valeurs dans un espace de Banach complexe E , on a, en tout point z de l'ensemble Γ des points tels que $r < |z| < r'$ ("couronne circulaire ouverte"),

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(x)dx}{x-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{x-z}$$

où γ (resp. γ') est le circuit formé du cercle $|z| = r$ (resp. $|z| = r'$) parcouru une fois dans le sens direct.

En effet, la fonction $g(x)=(f(x)-f(z))/(x-z)$ est holomorphe dans A , en la prolongeant par continuité au point z par la valeur $f'(z)$. Les circuits γ et γ' sont déformables l'un en l'autre dans $\overline{\Gamma}$, par exemple par la déformation $\varphi(t,s)=sre^{it}+(1-s)r'e^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, 0 \leqslant s \leqslant 1)$. On a donc (§ 2, th. 1) $\int_\gamma g(x)dx = \int_{\gamma'} g(x)dx$. Mais on sait que pour $r < |z| < r'$, l'indice de γ par rapport à z est 0 et l'indice de γ' est 1 , d'où $\int_{\gamma'} \frac{f(z)dx}{x-z} - \int_\gamma \frac{f(z)dx}{x-z} = 2\pi i f(z)$, ce qui démontre (1) .

COROLLAIRE.- Sous les mêmes conditions que dans la prop. 1 il existe une série entière $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergente pour $|z| < r'$ et une série entière sans terme constant en $1/z$, $g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$ convergente pour $|z| > r$, et telles que $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ pour tout $z \in \Gamma$. En outre les séries entières ayant ces propriétés sont uniques, et on a

$$(2) \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(x)dx}{x^{n+1}} \ , \qquad d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma x^{n-1} f(x)dx$$

pour tout circuit σ contenu dans Γ et dont l'indice par rapport à 0 est égal à 1 (série de Laurent) .

En effet, on sait déjà que la fonction $g_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(x)dx}{x-z}$ est égale dans le disque $|z| < r'$ à la somme de sa série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, avec $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(x)dx}{x^{n+1}}$ (§ 3, prop. 2). D'autre part, pour tout z fixe dans Γ, on a $|z| > r$, donc on a

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{z^n}$$

la série du second membre étant normalement convergente pour $|x| = r$; en intégrant terme à terme, il vient donc

$$g_2(z) = \int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{z-x} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$$

avec $d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} x^{n-1} f(x)dx$. Inversement, supposons que l'on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

dans Γ, les deux séries étant convergentes pour $r < |z| < r'$; si r_0 est tel que $r < r_0 < r'$ les deux séries sont normalement convergentes pour $|z| = r_0$, et par suite, si γ_0 désigne le circuit formé du cercle $|z| = r_0$ parcouru une fois dans le sens direct, on a pour tout entier m (positif ou négatif)

$$\int_{\gamma_0} z^{m-1} f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma_0} z^{n+m-1}dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\gamma_0} z^{m-n-1}dz$$

Or, si $k \neq -1$, z^k admet pour primitive la fonction holomorphe $z^{k+1}/(k+1)$ dans le domaine $\complement\{0\}$, et d'autre part on a $\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ d'où $\int_{\gamma_0} z^{m-1} f(z)dz = 2\pi i\, b_m$, $\int_{\gamma_0} \frac{f(z)dz}{z^{m+1}} = 2\pi i\, a_m$ pour $m \geqslant 0$. Enfin, tout circuit σ contenu dans Γ et d'indice 1 par rapport à 0 peut être déformé en γ_0 dans Γ car la déformation $\varphi(t,s) = (1-s)\sigma(t) + s r_0 \frac{\sigma(t)}{|\sigma(t)|}$ déforme σ dans Γ en un circuit dont l'ensemble des points est $|z| = r_0$ et dont l'indice est évidemment encore 1 par rapport à 0 ; et on a vu qu'un tel circuit peut être déformé en γ_0 dans Γ (§ 3, n°1)).

2. Points singuliers isolés.

DÉFINITION 1.- <u>Soit</u> $A \subset \mathbb{C}$ <u>un domaine, et soit</u> f <u>une fonction holomorphe dans</u> A. <u>On dit qu'un point</u> $a \in \bar{A}$ <u>est un point singulier isolé de la fonction</u> f <u>si</u> a <u>est un point isolé de</u> $\complement A$ <u>et s'il n'existe aucune fonction holomorphe dans un voisinage de</u> a <u>et coïncidant avec</u> f <u>dans</u>

<u>dans l'intersection de</u> A <u>et de ce voisinage</u> .

Soit a un point isolé de $\complement A$; il existe donc un disque $|z-a| \leqslant r$ dont tous les points, à l'exception de a , appartiennent à A . Si γ est le circuit formé du cercle $|z-a| = r$ parcouru une fois dans le sens direct, on a, en posant

$$(3) \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x)dx}{(x-a)^{n+1}} , \qquad d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (x-a)^{n-1} f(x)dx$$

le développement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(z-a)^{-n}$$

où la première série converge pour $|z-a|<r$, et la seconde pour <u>tout</u> <u>$z\neq a$</u> : il suffit en effet d'appliquer le cor. de la prop.1 à la couronne circulaire $\rho \leqslant |z-a| \leqslant r$, où ρ est un nombre >0 arbitrairement petit. La fonction $u(t)= \sum_{n=1}^{\infty} d_n t^n$ est donc une <u>fonction entière</u> telle que $u(0)=0$; on dit que $u(1/(z-a))$ est la <u>partie singulière</u> de f au point a . Si u est identiquement nulle, f coïncide avec la fonction holomorphe $g(z)= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ en tout point z tel que $0<|z-a|<r$, donc on peut la prolonger par continuité au point a en lui donnant la valeur c_0 en ce point, et la fonction ainsi prolongée est holomorphe au point a , en d'autres termes a <u>n'est pas un point singulier</u> de f ; inversement d'ailleurs, s'il existe une fonction holomorphe g_1 coïncidant avec f dans l'intersection de A et d'un voisinage de a , les coefficients du développement de Taylor de g_1 sont égaux aux c_n d'après les formules (3), et par suite $g_1(z)= g(z)$ pour $z\neq a$ et assez voisin de a , ce qui prouve que $u(1/(z-a))=0$ pour tout $z\neq a$.

PROPOSITION 2.- <u>Pour qu'un point isolé a de</u> $\complement A$ <u>ne soit pas un point singulier de</u> f <u>, il faut et il suffit que</u> f <u>reste bornée dans l'intersection de A et d'un voisinage de a</u> .

La condition est évidemment nécessaire ; inversement, si $\|f(z)\| \leqslant M$ pour tout $z\neq a$ assez voisin de a , on déduit des secondes formules (3) sur $\|d_n\| \leqslant Mr^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$; comme r est arbitrairement petit, $d_n=0$ pour $n \geqslant 1$, ce qui prouve que la partie singulière de f est identiquement nulle.

Lorsque a est un point singulier isolé de f, on dit que a est <u>un pôle d'ordre n</u> de f si la partie singulière de f est un polynôme de degré n en $1/(z-a)$; cela signifie encore que $d_m=0$ pour $m > n$, et $d_n \neq 0$; il revient au même de dire que pour $z \in A$ et $z \neq a$, on a $f(z)=(z-a)^{-n} f_1(z)$, où f_1 est holomorphe dans A et $f_1(a) \neq 0$; on en déduit que $f(z) \sim (z-a)^{-n} f_1(a)$ au voisinage de a.

PROPOSITION 3.- <u>Pour qu'un point isolé</u> a <u>de</u> $\complement A$ <u>soit un pôle d'ordre</u> $\leqslant n$ <u>de</u> f, <u>il faut et il suffit que</u> $f(z)=\underline{O}((z-a)^{-n})$ <u>au voisinage de</u> a.

C'est ce qu'on déduit encore des secondes formules (3), car on a alors $\|d_m\| = \underline{O}(r^{m-n})$ pour z voisin de a, et par suite $d_m=0$ pour $m > n$.

On notera que si f est à valeurs complexes, dire que a est un pôle d'ordre n pour f équivaut à dire que a est un zéro d'ordre n pour $1/f$.

Lorsque la partie singulière de f au point a n'est pas un polynôme; on dit que a est <u>un point singulier essentiel</u> isolé de f.

PROPOSITION 4.- <u>Si</u> a <u>est un point singulier essentiel isolé d'une fonction</u> f <u>à valeurs complexes, l'ensemble des valeurs d'adhérence de</u> f(z), <u>lorsque</u> z <u>tend vers</u> a (<u>en restant</u> $\neq$a) <u>est identique à</u> $\tilde{\mathbb{C}}$ (droite projective complexe).

En effet, nous savons déjà (prop.2) que ∞ est valeur d'adhérence de f au point a. Pour tout nombre complexe fini c, ou bien f(z)-c a une infinité de zéros au voisinage de a, et dans ce cas c est valeur d'adhérence de f au point a ; ou bien $f(z)-c \neq 0$ pour $z \neq a$ et z assez voisin de a. Dans ce cas, $1/(f(z)-c)=g(z)$ est holomorphe pour $z \neq a$ et z assez voisin de a ; comme $f(z) = c+\frac{1}{g(z)}$, a est nécessairement un point singulier pour g, sans quoi a serait un pôle pour f (ou ne serait pas singulier pour f) ; de même a ne peut être un pôle pour g, sans quoi a ne serait pas singulier pour f ; a est donc point singulier essentiel pour g , et par suite ∞ est une valeur d'adhérence de g au point a , ce qui prouve que c est valeur d'adhérence de f au point a .

3. Résidus.

Soit A un domaine, a un point isolé de $\complement A$. Si f est holomorphe dans A , et si $f(z)= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(z-a)^{-n}$ est le développement de Laurent de f au voisinage de a , le coefficient d_1 de $1/(z-a)$ est appelé le *résidu* de f au point a . C'est aussi la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u(\frac{1}{z-a})dz$ de la partie singulière $u(\frac{1}{z-a})$ de f au point a , le long d'un circuit quelconque par rapport auquel a est d'indice 1 (puisque $u(\frac{1}{z-a})$ est holomorphe dans le complémentaire de a par rapport à $\mathbb{C}$).

THÉORÈME 1 (théorème des résidus).- *Soit* $A \subset \mathbb{C}$ *un domaine contractile, S une partie de A (nécessairement dénombrable) dont tous les points sont isolés ; soit* (a_n) *une suite formée en rangeant les points de S dans un certain ordre, et soit B le complémentaire de S par rapport à A . Soit* f *une fonction holomorphe dans B , et* γ *un circuit quelconque contenu dans B . On a*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i . \sum^{\infty} j_n R(a_n) \tag{4}$$

où j_n *désigne l'indice de* a_n *par rapport à* γ *et* $R(a_n)$ *le résidu de* f *au point* a_n .

L'hypothèse entraîne que toute partie compacte de A ne contient qu'un nombre fini de points a_n . D'autre part, si $|z| < r$ est un disque ouvert contenant l'ensemble $\gamma(I)$ des points de γ , on sait que l'indice de tout point z tel que $|z| \geqslant r$ par rapport à γ est 0 ; la composante connexe U du complémentaire de $\gamma(I)$ par rapport à $\mathbb{C}$ qui contient $|z| = r$ est donc un ensemble ouvert dont le complémentaire K est borné et fermé, c'est-à-dire compact. En outre tout point frontière de U (donc de K) appartient à $\gamma(I)$; toute composante connexe de la frontière de A (dans $\mathbb{C}$) est nécessairement contenue dans U , sans quoi elle rencontrerait $\gamma(I)$ contrairement à l'hypothèse ; il en résulte que toute composante connexe du complémentaire de $\gamma(I)$ distincte de U est contenue dans A , sans quoi elle rencontrerait la frontière de A ; en outre, l'adhérence de la réunion de ces composantes connexes étant K , on voit qu'il existe au plus un nombre <u>fini</u> de valeurs de n telles que $a_n \in K$ et par suite telles que $j_n \neq 0$. D'autre part, si φ est une déformation (définie dans $I \times J$) de γ en un point dans A , $\varphi(I \times J)$ est une partie compacte K' de A qui ne contient donc aussi qu'un nombre fini de points a_n . Soit $u_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ la partie singulière de f au point a_n , et considérons la fonction $g(z)=f(z)-\sum_n u_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$, la somme étant étendue aux indices n tels que $a_n \in K \cup K'$. La fonction g est donc holomorphe dans le complémentaire V de la réunion des points a_n tels que $a_n \notin K \cup K'$ par rapport à A ; et comme γ peut être déformé en un point dans V , on a $\int_\gamma g(z)dz = 0$ (§ 2, th. 1), d'où $\int_\gamma f(z)dz = \sum_n \int_\gamma u_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)dz$, ce qui démontre le théorème, d'après l'interprétation donnée ci-dessus du résidu de f en un point singulier.

Il faudrait naturellement donner ici au moins un des exemples classiques de calcul d'intégrale définie par le théorème des résidus ; devant l'embarras du choix, le rédacteur laisse ce dernier à son Maître !

On ne s'étonnera pas de ne pas trouver ici les développements usuels relatifs au "point à l'infini" (résidu en ce point, etc.) ; cela doit naturellement venir avec les variétés analytiques, comme premier exemple (S_2) .

4. <u>Application</u> : <u>principe de l'amplitude</u>.

DÉFINITION 2.- <u>Soit</u> $A \subset \mathbb{C}$ <u>un domaine</u> . <u>On dit</u> (<u>par abus de langage</u>) <u>qu'une fonction</u> f <u>est méromorphe dans</u> A <u>s'il existe une partie</u> S <u>de</u> A (<u>nécessairement dénombrable</u>) <u>dont tous les points sont isolés</u>, telle que f soit holomorphe dans $A \cap \complement S$ et que les points de S soient des pôles pour f.

Il est clair que la somme de deux fonctions f, g méromorphes dans A et à valeurs dans un même espace E est méromorphe dans A. De même si f et g sont méromorphes dans A, prennent leurs valeurs dans E et F, et si $[u.v]$ est une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G, $[f.g]$ est méromorphe dans A. En particulier, le produit de deux fonctions méromorphes complexes est méromorphe ; il en est de même de l'inverse d'une fonction méromorphe complexe, en raison du principe des zéros isolés. Corps

Soit f une fonction méromorphe dans un domaine A et à valeurs complexes ; alors la fonction $f'(z)/f(z)$, définie en tout point où f est définie et $\neq 0$, est méromorphe dans A. De facon précise, si a est un pôle d'ordre k de f, comme $f(z) \sim c(z-a)^{-k}$ $(c \neq 0)$ au voisinage de a, il n'existe pas de zéros ni de pôles de f distincts de a dans un voisinage de a ; en outre, si $f(z)=(z-a)^{-k}f_1(z)$, où f_1 est holomorphe au point a et $f_1(a) \neq 0$, on a $f'(z)=-k(z-a)^{k-1}f_1(z)+(z-a)^{-k}f_1'(z)$, donc, a est un pôle d'ordre 1 pour la fonction f'/f, avec pour résidu $-k$. On voit de la même facon que si b est un zéro d'ordre h (nécessairement isolé) pour f, c'est un pôle d'ordre 1 pour f'/f, avec pour résidu h. On en déduit, par application du th. des résidus, le résultat suivant :

THÉORÈME 5.- Soit $A \subset \mathbb{C}$ un domaine contractile, f une fonction méromorphe dans A, à valeurs complexes, g une fonction holomorphe dans A. Soit (a_m) la suite des zéros de f, (b_n) la suite des pôles de f dans A. Pour tout circuit γ contenu dans A et ne contenant aucun des points a_m, b_n, on a

$$\int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \Big(\sum_m g(a_m) j(a_m) s(a_m) - \sum_n g(b_n) j(b_n) s(b_n) \Big)$$

où $j(a_m)$ (resp. $j(b_n)$) est l'indice de a_m (resp. b_n) par rapport à γ, et $s(a_m)$ (resp. $s(b_n)$) sa multiplicité.

Il suffit de remarquer que le résidu de $g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ en un point c est égal au produit de $g(c)$ par le résidu de f'/f en ce point .

COROLLAIRE.- Avec les mêmes notations, le nombre

$$2\pi\left(\sum_m j(a_m)s(a_m) - \sum_n j(b_n)s(b_n)\right)$$

est égal à la variation de l'amplitude de $Z=f(z)$ le long du circuit $t \to f(\gamma(t))$ ("principe de l'amplitude") .

Il suffit de remarquer que si Γ est ce circuit, il résulte de la formule du changement de variables que $\int_\Gamma \frac{dZ}{Z} = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$.

Faut-il donner ici la formule de Jensen, qui est aussi un corollaire de la prop.5 ?

PROPOSITION 6 (théorème de Rouché).- Soient f, g deux fonctions holomorphes dans un domaine contractile $A \subset \mathbb{C}$, à valeurs complexes. Soit (a_n) la suite des zéros (distincts) de $f(z)$, (a'_m) la suite des zéros(distincts) de $f(z)+g(z)$. Soit γ un circuit dans A tel que $|g(z)|<|f(z)|$ en tout point de $\gamma(I)$; dans ces conditions, on a (avec les notations de la prop.5)

$$\sum_n j(a_n)s(a_n) = \sum_m j(a'_m)s(a'_m) .$$

Posons $h(z)=(f(z)+g(z))/f(z)$; c'est une fonction méromorphe dans A , et on a

$$\frac{(f(z)+g(z))'}{f(z)+g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{h'(z)}{h(z)} .$$

Tout revient à prouver que l'indice de 0 par rapport au circuit $t \to h(\gamma(t))$ est nul. Or si r est le maximum de $|g(z)/f(z)|$ sur l'ensemble $\gamma(I)$, l'hypothèse entraîne que $r<1$; par suite le circuit $t \to h(\gamma(t))$ est contenu dans le disque $|Z-1| \leq r$, et comme 0 est extérieur à ce disque, on sait que son indice par rapport à $t \to h(\alpha(t))$ est nul.

COROLLAIRE (continuité des racines d'une équation en fonction d'un paramètre).- Soit $A \subset \mathbb{C}$ un domaine, F un espace topologique, $f(z,\alpha)$ une fonction définie dans $A \times F$, à valeurs complexes, continue dans $A \times F$

et telle que pour tout $\alpha \in F$, $z \to f(z,\alpha)$ soit holomorphe dans A . Soit $B \subset A$ un domaine relativement compact par rapport à A . Pour tout $\alpha_0 \in F$, tel qu'aucun zéro de $f(z,\alpha_0)$ ne soit sur la frontière de B , il existe un voisinage W de α_0 dans F tel que pour tout $\alpha \in W$, $f(z,\alpha)$ n'ait aucun zéro sur la frontière de B et que la somme des multiplicités des zéros de $f(z,\alpha_0)$ appartenant à B soit égale à la somme des multiplicités des zéros de $f(z,\alpha)$ appartenant à B .

En effet, le nombre des zéros de $f(z,\alpha_0)$ dans B est fini ; soient a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ces zéros distincts ; il y a d'autre part un voisinage compact $U \subset A$ de $\overline{B}$ tel que $f(z,\alpha_0)$ n'ait pas de zéros dans $U \cap \complement \overline{B}$. Soit γ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ un cercle de centre a_i et de rayon r_i , tels que les disques $D_i : |z-a_i| < r_i$ soient contenus dans B et deux à deux sans point commun. Soit H le complémentaire dans U de la réunion des D_i ; soit m le minimum > 0 de $|f(z,\alpha_0)|$ dans l'ensemble compact H. Pour tout $x \in \overline{B}$, il existe un voisinage V_x de x dans A et un voisinage W_x de α_0 dans F tels que $|f(y,\alpha)-f(x,\alpha_0)| < \frac{1}{2} m$ pour $y \in V_x$ et $\alpha \in W_x$. Si on recouvre $\overline{B}$ par un nombre fini de V_{x_i} et qu'on désigne par W l'intersection des W_{x_i} , on voit que pour tout $\alpha \in W$ et tout $y \in \overline{B}$, on a $|f(y,\alpha)-f(y,\alpha_0)| < m$. Cela étant, on a $|f(z,\alpha)-f(z,\alpha_0)| < |f(z,\alpha_0)|$ pour tout $z \in \gamma_i$ et tout $\alpha \in W$; le th. de Rouché prouve par suite que la somme des multiplicités des zéros de $f(z,\alpha_0)$ dans D_i est la même que pour $f(z,\alpha)$ et que $f(z,\alpha)$ ne s'annule pas sur γ_i . Pour tout $x \in H \cap \overline{B}$ n'appartenant à aucun γ_i le même raisonnement prouve que si D_x est un disque fermé de centre x contenu dans H , $f(z,\alpha)$ n'a pas de zéro dans D_x pour $\alpha \in W$. On en conclut que $f(z,\alpha)$ ne s'annule pas dans $H \cap \overline{B}$, ce qui achève la démonstration.

102 NBR 052

et si (a_n) est finie?

5. Théorèmes d'existence pour les fonctions entières et méromorphes.

Nous allons montrer qu'il existe des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ tout entier, ayant des parties singulières données ; plus généralement :

THÉORÈME 2 (Mittag-Leffler).- Soit (a_n) une suite de points distincts de $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$; pour chaque indice n, soit $u_n(z)$ une fonction entière quelconque à valeurs dans un espace de Banach E. Il existe alors une fonction f à valeurs dans E, holomorphe en tout point z distinct des a_n, et dont la partie singulière en chacun des points a_n est $u_n(\frac{1}{z-a_n})$. En outre, si f_1 et f_2 sont deux fonctions ayant ces propriétés, f_1-f_2 est une fonction entière, et réciproquement.

Hyp

En effet, dans chacune des couronnes circulaires C_m définies par $m\leqslant|z|<m+1$, il n'existe qu'un nombre fini de points a_n ; soit g_m la somme des fonctions $u_n(\frac{1}{z-a_n})$ correspondant à ces points. La fonction g_m est holomorphe pour $|z|<m$, donc égale dans ce disque à la somme de sa série de Taylor ; par suite, il existe un polynôme (formé d'un nombre assez grand de termes de cette série) h_m tel que l'on ait $\|g_m(z)-h_m(z)\|\leqslant 2^{-m}$ pour $|z|\leqslant m-1$. On en déduit aussitôt que pour tout z distinct des a_n, la série de terme général $g_m(z)-h_m(z)$ est convergente ; montrons que sa somme $f(z)$ répond à la question. En effet, dans le disque $|z|\leqslant m-1$, les fonctions $g_{m+k}(z)-h_{m+k}(z)$ sont holomorphes pour tout $k>0$, et la série ayant pour terme général $g_{m+k}(z)-h_{m+k}(z)$ est uniformément convergente, donc sa somme est holomorphe dans $|z|<m-1$ (§ 3, th. 2) ; on en conclut que dans ce dernier disque, f est holomorphe en tout point distinct des a_n, et que pour tout a_n tel que $|a_n|<m-1$ la partie principale de f est $u_n(\frac{1}{z-a_n})$. Comme m est arbitraire, cela prouve la première partie du théorème ; la seconde est évidente.

Le th.2 entraîne la conséquence suivante :

THÉORÈME 3 (Weierstrass).- Soit (a_n) une suite de points distincts de $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, et soit (k_n) une suite arbitraire d'entiers $\geqslant 1$. Il existe une fonction entière f à valeurs complexes, ayant en chaque point a_n un zéro d'ordre k_n . En outre, si f_1 et f_2 sont deux telles fonctions, on a $f_2(z) = f_1(z)e^{u(z)}$, où u est une fonction entière.

En effet, pour chaque indice n , il existe d'après la démonstration du th.2 un polynôme $p_n(z)$ tel que la série formée des termes $\frac{k_n}{z-a_n} - p_n(z)$ qui correspondent aux a_n satisfaisant à la relation $|a_n| \geqslant m$ soit normalement convergente dans le disque $|z| \leqslant m-1$. Désignons par q_n la primitive du polynôme p_n qui s'annule pour $z=0$, et posons $g_n(z) = (1-\frac{z}{a_n})^{k_n} e^{-q_n(z)}$; pour tout z tel que $|z| \leqslant m-1$, on a, en intégrant le long du segment σ joignant 0 et z ,
$$\left|\mathcal{R}\left(\int_\sigma \left(\frac{k_n}{z-a_n} - p_n(z)\right)dz\right)\right| \leqslant m.\varepsilon_n \text{ , si } \left|\frac{k_n}{z-a_n} - p_n(z)\right| \leqslant \varepsilon_n \text{ pour}$$
$|z| \leqslant m-1$; mais $\mathcal{R}\left(\int_\sigma \left(\frac{k_n}{z-a_n} - p_n(z)\right)dz\right) = \log|g_n(z)|$, d'où $e^{-m\varepsilon_n} \leqslant |g_n(z)| \leqslant e^{m\varepsilon_n}$ dans le disque considéré. Cela prouve que le produit infini de terme général $g_n(z)$ est normalement convergent dans $|z| \leqslant m-1$; sa valeur est donc une fonction entière $f(z)$ (§3,th.2) qui répond à la question, car pour $|z| \leqslant m-1$ le produit des $g_n(z)$ correspondant aux $|a_n| \geqslant m$ est convergent dans $\mathbb{C}^*$, et par suite ne s'annule pas. Enfin, si f_1 et f_2 répondent toutes deux à la question, la fonction $v(z) = \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} - \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ est une fonction entière ; si u est une primitive de v , la fonction $f_2/(f_1 e^u)$ a une dérivée nulle et est donc constante, ce qui achève la démonstration

COROLLAIRE.- Pour toute fonction f méromorphe dans $\mathbb{C}$, il existe une fonction entière à valeurs complexes g telle que fg soit une fonction entière.

En effet, soit (a_n) la suite des pôles de f, et soit k_n la multiplicité de a_n ; d'après le th.3, il existe une fonction entière g ayant en chacun des points a_n un zéro d'ordre k_n ; il est clair que fg (prolongée par continuité en chacun des points a_n) est une fonction entière (prop. 2)

On pourrait naturellement donner le th. de Mittag-Leffler généralisé à un domaine quelconque au lieu du plan tout entier ; cela est-il utile ?

APPENDICE

Eléments de topologie plane.

Application aux fonctions holomorphes.

1. Applications essentielles dans $\mathcal{U}$.

DÉFINITION 1.- Soit E un espace topologique. On dit qu'une application continue f de E dans $\mathcal{U}$ est inessentielle s'il existe une application continue g de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=e^{ig(x)}$ pour tout $x \in E$. Une application continue de E dans $\mathcal{U}$ est dite essentielle si elle n'est pas inessentielle.

Il est clair que si f_1 et f_2 sont deux applications inessentielles de E dans $\mathcal{U}$, f_1f_2 et $1/f_1 = \bar{f}_1$ sont inessentielles; par suite, si f_1 est essentielle et f_2 inessentielle, f_1f_2 et f_1/f_2 sont essentielle.

Si f est une application inessentielle de E dans $\mathcal{U}$, et h une application continue d'un espace topologique F dans E, $f\circ h$ est inessentielle, puisque $f(h(y))=e^{ig(h(y))}$; en particulier, la restriction d'une application inessentielle f de E dans $\mathcal{U}$, à un sous-espace quelconque de E, est inessentielle.

PROPOSITION 1.- Soit E un espace topologique ; toute application continue f de E dans $\mathcal{U}$ telle que $f(E)\neq\mathcal{U}$ est inessentielle.

En effet, soit $\xi_0 \in \mathcal{U}$ un point n'appartenant pas à $f(E)$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\xi_0=e^{i\alpha}$; la restriction de $t \to e^{it}$ à l'intervalle ouvert $]\alpha,\alpha+2\pi[$ est un homéomorphisme de cet intervalle sur le le complémentaire de ξ_o dans $\mathcal{U}$; si ψ est l'homéomorphisme réciproque, on a évidemment $f(x)=e^{i\psi(f(x))}$ pour tout $x\in E$.

COROLLAIRE.- Soient f_1 et f_2 deux applications continues de E dans $\mathcal{U}$ telles que $f_1(x)\neq -f_2(x)$ pour tout $x\in E$. Alors, si f_1 est essentielle (resp. inessentielle) il en est de même de f_2 .

En effet, si $f_o=f_1/f_2$, $f_o(E)$ ne contient pas le point -1 , donc est inessentielle, ce qui prouve le corollaire.

PROPOSITION 2.- Soit E un espace compact, I l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et f une application continue de $E\times I$ dans $\mathcal{U}$. Si l'application $x\to f(x,0)$ est essentielle (resp. inessentielle), il en est de même de $x\to f(x,1)$.

En effet, f est uniformément continue dans l'espace compact $E\times I$. Il existe donc un entier $n>0$ tel que la relation $|t-t'|\leqslant\frac{1}{n}$ entraîne $|f(x,t)-f(x,t')|\leqslant 1$ pour tout $x\in E$. Posons $f_k(x)=f(x,\frac{k}{n})$ pour $0\leqslant k\leqslant n$; on a donc $|f_k(x)-f_{k+1}(x)|\leqslant 1$ pour tout $x\in E$ et pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, et comme $|f_k(x)|=|f_{k+1}(x)|=1$ pour tout $x\in E$, cela entraîne a fortiori $f_k(x)\neq -f_{k+1}(x)$ pour $x\in E$. Il résulte alors du cor. de la prop.1 que f_k et f_{k+1} sont à la fois essentielles ou inessentielles, d'où la proposition par récurrence sur k .

COROLLAIRE.- Toute application continue f dans $\mathcal{U}$ d'un pavé compact $P\subset\mathbb{R}^n$ est inessentielle.

On peut supposer que P est le pavé défini par les relations $0\leqslant x_i\leqslant a_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Posons, pour $x\in P$ et $t\in I=[0,1]$, $g(x,t)=f(t.x)$; on a $g(x,1)=f(x)$ et $g(x,0)=f(0)$, donc $g(x,0)$ est inessentielle (prop.1) ; mais comme g est continue dans $P\times I$, $g(x,1)=f(x)$ est aussi inessentielle .

PROPOSITION 3.- <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux parties fermées d'un espace topologique</u> E , <u>telles que</u> $E=A\cup B$ <u>et que</u> $A\cap B$ <u>soit connexe</u> . <u>Soit</u> f <u>une application continue de</u> E <u>dans</u> $\mathcal{U}$; <u>si les restrictions de</u> f <u>à</u> A <u>et à</u> B <u>sont inessentielles</u>, f <u>est inessentielle</u>.

En effet, il existe une application continue g de A dans $\mathbb{R}$ et une application continue h de B dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x)=e^{ig(x)}$ pour $x\in A$ et $f(x)=e^{ih(x)}$ pour $x\in B$. Pour $x\in A\cap B$ on a donc $e^{i(g(x)-h(x))}=1$, ce qui signifie que $g(x)-h(x)$ est un multiple entier de 2π ; mais comme $A\cap B$ est connexe, et $g-h$ continue dans $A\cap B$, cela n'est possible que si $g(x)-h(x)$ est égale à une <u>constante</u> de la forme $2n\pi$ (n entier) dans $A\cap B$; si alors $u(x)=g(x)$ dans A , $u(x)=h(x)+2n\pi$ dans B , u est une application continue de E dans $\mathbb{R}$; c'est évident en tout point appartenant à $\complement A$ ou $\complement B$, puisque ces ensembles sont ouverts dans E et qu'on a $u(x)=h(x)+2n\pi$ dans $\complement A$ et $u(x)=g(x)$ dans $\complement B$; d'autre part, si $x\in A\cap B$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage V de x tel que $|g(y)-g(x)|\leqslant\varepsilon$ pour tout $y\in V\cap A$ et $|h(z)-h(x)|\leqslant\varepsilon$ pour tout $z\in V\cap B$, d'où on tire aussitôt $|u(y)-u(x)|\leqslant\varepsilon$ pour $y\in V\cap A$ et $|u(z)-u(x)|\leqslant\varepsilon$ pour $z\in V\cap B$, et comme $V=(V\cap A)\cup(V\cap B)$ on a $|u(y)-u(x)|\leqslant\varepsilon$ pour tout $y\in V$. Comme on peut écrire $f(x)=e^{iu(x)}$ pour tout $x\in E$, la proposition est démontrée.

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> f <u>une application continue de</u> $\mathcal{U}$ <u>dans lui-même</u> ; <u>pour que</u> f <u>soit essentielle</u>, <u>il faut et il suffit que l'indice du lacet</u> $t\to f(e^{it})$ <u>par rapport à</u> 0 <u>soit</u> $\neq 0$.

On sait que l'on peut écrire $f(e^{it})=e^{i\psi(t)}$, où ψ est continue dans $[0,2\pi]$ et $\psi(2\pi)-\psi(0)=2n\pi$, si n est l'indice de 0 par rapport au lacet $t\to f(e^{it})$. Posons $\omega(t,s)=\psi(t)+s(nt-\psi(t))$; on vérifie aussitôt que l'application qui à tout point $\zeta=e^{it}$ $(0\leqslant t<2\pi)$ de $\mathcal{U}$ et à tout $s\in[0,1]$, fait correspondre $e^{i\omega(t,s)}$ est une fonction continue dans $\mathcal{U}\times[0,1]$; en raison de la prop. 2, on peut donc se ramener à prouver la proposition lorsque $f(\zeta)=\zeta^n$. Il est clair que si $n=0$ l'application est inessentielle ; supposons donc $n \neq 0$, et montrons que $\xi \to \xi^n$ ne peut être inessentielle. Dans le cas contraire, on aurait identiquement $\xi^n = e^{ig(\xi)}$, où g est une application continue non constante de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$; $g(\mathcal{U})$ est une partie compacte et connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle compact ; soit a son origine, et $\xi_o \in \mathcal{U}$ tel que $g(\xi_o)=a$. On a donc $\xi_o^n = e^{ia}$; il existe un voisinage assez petit V de ξ_o dans $\mathcal{U}$ tel que l'oscillation de g dans V soit $\leqslant \pi$; mais il existe des points $\xi \in V$ tels que $\xi^n = e^{i(a-\varepsilon)}$ où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit ; cela entraîne que $g(\xi)-(a-\varepsilon)$ est un multiple de 2π ; mais l'hypothèse entraîne que ce multiple devrait être nul, contrairement à la définition de a .

COROLLAIRE.- <u>L'application identique de $\mathcal{U}$ sur lui-même est essentielle.</u>

2. <u>Coupures du plan</u>.

DÉFINITION 2.- <u>Dans un espace topologique</u> E , <u>on dit qu'une partie</u> A <u>de</u> E <u>sépare deux points</u> x,y <u>si</u> x <u>et</u> y <u>appartiennent à des composantes connexes distinctes de</u> $\complement A$. <u>On dit que</u> A <u>est une coupure de</u> E <u>(ou coupe</u> E) <u>si</u> $\complement A$ <u>n'est pas connexe</u> .

Pour deux points distincts quelconques a,b de $\mathbb{C}$, soit $\xi_{a,b}(z)$ la fonction égale à $(z-a)/(z-b)$ pour tout $z \neq b$.

THÉORÈME 1.(Critère d'Eilenberg).- <u>Soit</u> K <u>une partie compacte de</u> $\mathbb{C}$, a <u>et</u> b <u>deux points de</u> $\complement K$. <u>Pour que</u> K <u>sépare</u> a <u>et</u> b , <u>il faut et il suffit que la restriction à</u> K <u>de l'application</u> $z \to \xi_{a;b}(z)/|\xi_{a,b}(z)|$ <u>soit essentielle</u>.

Montrons d'abord que la condition est <u>suffisante</u> . En effet, supposons que a et b appartiennent à la même composante connexe A de $\complement K$; comme $\mathbb{C}$ est localement connexe et $\complement K$ ouvert dans $\mathbb{C}$, A est un ensemble ouvert, et par suite (§ 2,lemme 1) il existe un chemin $t \to \gamma(t)$ défini dans $I=[0,1]$, à valeurs dans A et tel que $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)b$. La fonction $\xi_{a,\gamma(t)}(z)$ est continue et $\neq 0$ dans $K \times I$ puisque $\gamma(t)$ n'appartient jamais à K ; la fonction $f(z,t)=\xi_{a,\gamma(t)}(z)/|\xi_{a,\gamma(t)}(z)|$ est donc continue dans $K \times I$ et on a $f(z,0)=1$, $f(z,1)=\xi_{a,b}(z)/|\xi_{a,b}(z)|$;

cette dernière application est donc inessentielle en vertu de la prop.2 .

Montrons maintenant que la condition est <u>nécessaire</u>. Montrons donc que si K sépare a et b , l'application $z \to \xi_{a,b}(z)/|\xi_{a,b}(z)|$ de K dans U est essentielle . Soit A la composante connexe de $\complement K$ à laquelle appartient a ; comme $b \notin A$, l'application $z \to \xi_{a,b}(z)$ transforme K en un ensemble compact K', et A en une composante connexe <u>bornée</u> de $\complement K'$, contenant l'origine. Tout revient à prouver que dans ces conditions, l'application $u \to u/|u|$ de K' dans U ne peut pas être inessentielle. Supposons le contraire : il existerait donc une application continue $u \to f(u)$ de K' dans R telle que $u/|u| = e^{if(u)}$ pour tout $u \in K'$. Remarquons que tout point frontière de A' est contenu dans K' , donc $A' \cup K'$ est un ensemble compact (puisque A' est borné) ; la fonction f , définie dans K', peut donc être prolongée en une application continue g de $K' \cup A'$ dans R , en vertu du th. d'Urysohn. D'autre part, comme 0 appartient à A', la fonction $u \to u/|u|$ est continue dans $\complement A'$. Soit alors $h(u)$ la fonction égale à $u/|u|$ dans $\complement A'$, à $e^{ig(u)}$ dans A' ; les hypothèses entraînent que h est une application continue de C dans U ; en vertu du cor. de la prop.2, la restriction de h à tout pavé borné $P \subset C$ est inessentielle. Or, soit r un nombre > 0 assez ~~xxxxx~~ grand pour que le cercle $S : |z| = r$ soit contenu dans $\complement A'$; l'application identique de U sur lui-même peut être considérée comme composée de l'application $z \to rz$ de U sur S et de l'application $u \to u/|u|$ de S sur U ; mais cette dernière, restriction de h à S , serait inessentielle, donc aussi l'application identique de U , contrairement à la prop.4. Ceci achève la démonstration.

THÉORÈME 2 (Janiszewski).- <u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>deux points de</u> C , A <u>et</u> B <u>deux parties compactes de</u> C . <u>Si</u> a <u>et</u> b <u>ne sont séparés ni par</u> A <u>ni par</u> B , <u>et si</u> $A \cap B$ <u>est connexe, alors</u> $A \cup B$ <u>ne sépare pas</u> a <u>et</u> b .

En effet, en vertu de l'hypothèse et du th.1, les restrictions à A et à B de l'application $z \to \xi_{a,b}(z)/|\xi_{a,b}(z)|$ sont inessentielles ; la prop.3 montre qu'il en est de même de sa restriction à $A \cup B$, d'où le théorème, par application du th.1 .

3. Arcs simples et courbes closes simples.

DÉFINITION 3.- On dit qu'un chemin achevé $t \to \gamma(t)$ dans $\mathbb{C}$ est simple si γ est une application biunivoque de I dans $\mathbb{C}$; l'ensemble des points d'un chemin simple est appelé un arc simple. On dit qu'un lacet γ dans $\mathbb{C}$ est simple si la relation $\gamma(s)=\gamma(t)$ n'est possible que si s et t sont tous deux des extrémités de I . L'ensemble des points d''un lacet simple est appelé courbe close simple.

Il revient au même de dire qu'un arc simple est une partie de homéomorphe à un intervalle compact I de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) et une courbe close simple une partie de $\mathbb{C}$ homéomorphe au cercle unité $\mathbb{U}$.

THÉORÈME 3.- Le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de tout arc simple est connexe.

Soit A un arc simple ; par hypothèse, il existe un homéomorphisme f de A sur un intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$; soit g l'homéomorphisme réciproque. Soient a et b deux points quelconques de $\complement A$; tout revient, en vertu du th.1, à prouver que l'application $z \to \xi_{a,b}(z)/|\xi_{a,b}(z)| = \varphi(z)$ de A dans $\mathbb{U}$ est inessentielle ; or cette application peut s'écrire $\varphi = (\varphi \circ g) \circ f$, et comme $\varphi \circ g$ est une application continue de I dans $\mathbb{U}$, elle est inessentielle (cor. de la prop.2) ; il en est donc de même de φ .

THÉORÈME 4 (théorème de Jordan).- Si K est une courbe close simple dans $\mathbb{C}$, le complémentaire de K dans $\mathbb{C}$ a exactement deux composantes connexes, dont chacune aadmet K pour frontière.

Nous démontrerons ce théorème en plusieurs étapes.

1° <u>Toute composante connexe</u> A <u>de</u> $\complement K$ <u>a pour frontière</u> K . Il est clair que la frontière de A est contenue dans K , $\mathbb{C}$ étant localement connexe. Montrons que tout point $z \in K$ appartient à la frontière de A . Soit f un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ sur K et soit $\xi_0 \in \mathcal{U}$ tel que $f(\xi_0)=z$. Soit W un voisinage ouvert arbitraire de z dans $\mathbb{C}$, V un voisinage fermé de z contenu dans W ; il existe un voisinage ouvert J de ξ_0 dans $\mathcal{U}$ tel que $f(J) \subset V$; comme le complémentaire B de J dans $\mathcal{U}$ est un arc simple (comme il résulte par exemple d'une projection stéréographique de centre ξ_0), f(B) est un arc simple, et par suite le complémentaire H de f(B) dans $\mathbb{C}$ est <u>connexe</u> en vertu du th.3 . Soit alors x un point quelconque de $A \subset H$; comme $z \in H$, il existe un chemin $t \to \gamma(t)$ contenu dans H d'origine x et d'extrémité z (§ 2,lemme 1). L'intersection de $\gamma(I)$ et de $\overline{f(J)}$ est un ensemble compact contenu dans V , dont l'image réciproque par γ est une partie compacte L de I , ne contenant pas l'origine α de I ; soit $\tau \in L$ la borne inférieure de L . L'image par γ de l'intervalle $[\alpha, \tau[$ est connexe et ne rencontre pas f(J) ni f(B), donc ne rencontre pas K , et comme elle contient $x=\gamma(\alpha) \in A$, elle est tout entière contenue dans A ; mais lorsque $t < \tau$ tend vers τ , $\gamma(t)$ tend vers $\gamma(\tau) \in V$, donc $\gamma(t) \in W$ dès que t est assez voisin de τ ; ce qui prouve qu'il existe des points de A dans W .

2° Démontrons maintenant le th.4 dans le cas particulier suivant : <u>il existe un segment fermé</u> S (non réduit à un point) <u>contenu dans</u> K . Soit z un point de S , distinct des extrémités de S , et soit K_0 le complémentaire de S par rapport à K ; la distance ρ de z à K_0 est >0 . Soit D un disque ouvert de centre z et de rayon $r < \rho$; l'intersection de D et de $\complement K$ est identique à l'intersection de D et de $\complement S$; elle est par suite la réunion des intersections D_1 et D_2 de D et des demi-plans ouverts définis par la droite qui contient S . Or, D_1 et D_2 sont des ensembles ouverts convexes, donc connexes ; toute composante connexe de $\complement K$ rencontre $D \cap \complement K$ donc rencontre D_1 ou D_2 ; mais si deux composantes connexes de $\complement K$ rencontrent toutes deux D_1 (resp. D_2) elles sont nécessairement identiques, puisque D_1 (resp. D_2) est connexe et contenu dans $\complement K$. Donc il existe au plus deux composantes connexes distinctes de $\complement K$. Le théorème sera prouvé (dans le cas envisagé) si on montre que $\complement K$ n'est pas connexe. Supposons donc que $\complement K$ soit connexe, et soient a un point de D_1, b un point de D_2 ; comme D est connexe, a et b ne sont pas séparés par $\complement D$; l'hypothèse entraînerait qu'ils ne sont pas séparés par $\complement K$; or l'intersection $K \cap \complement D$ est le complémentaire dans K du segment ouvert intersection de E et de D, qui est par hypothèse un arc simple, donc connexe. En vertu du th.2, a et b ne seraient pas séparés par $K \cup (\complement D)$, ce qui est absurde car le complémentaire de $K \cup (\complement D)$ est $D_1 \cup D_2$, qui n'est pas connexe.

3° Démontrons enfin le th.4 lorsque K ne contient aucun segment fermé (non réduit à un point). Soient a et b deux points distincts de K, S le segment fermé d'extrémités a et b ; par hypothèse, il existe dans S un point $x \in \complement K$; soit J la composante connexe de $S \cap \complement K$ contenant x ; c'est un segment ouvert dont les extrémités y et z appartiennent à K. Soit g un homéomorphisme de K sur $\mathcal{U}$, et soient $\eta = g(y)$, $\xi = g(z)$; soient U_1 et U_2 les deux arcs (fermés) de $\mathcal{U}$ ayant comme extrémités η et ξ, K_1 et K_2 leurs images par l'homéomorphisme f réciproque de g. Il existe un homéomorphisme f_1 (resp. f_2) de U_1 (resp. U_2) sur le segment $\overline{J}$ d'extrémités y et z, tels que $f_1(\eta) = f_2(\eta) = y$, $f_1(\xi) = f_2(\xi) = z$; désignons par h_1 (resp. h_2) l'application égale à f dans U_1 (resp. U_2), à f_2 dans U_2 (resp. à f_1 dans U_1) ; l'hypothèse sur J entraîne que h_1 et h_2 sont des homéomorphismes de $\mathcal{U}$ sur deux courbes closes simples $G_1 = K_1 \cup J$, $G_2 = K_2 \cup J$, dont chacune contient le segment $\overline{J}$. Soit alors w un point de K_1 distinct de y et de z ; il existe un disque ouvert D de centre w, sans point commun avec G_2. Soient w', w" deux points d'une même composante connexe de $\complement G_1$, contenus dans D (on a vu au 1° qu'il existe de tels points) ; w' et w'' ne sont pas séparés par G_1 ; ils ne le sont pas non plus par G_2, puisque D est connexe ; mais $G_1 \cap G_2 = J$ est connexe, donc (th.2), w' et w'' ne sont pas séparés par $G_1 \cup G_2$, ni a fortiori par K ; cela signifie que w' et w'' appartiennent à la même composante connexe de $\complement K$. Comme $\complement G_1$ a deux composantes connexes, et que toute composante connexe de $\complement K$ a des points communs avec D, $\complement K$ a <u>au plus</u> deux composantes connexes. D'autre part, il résulte de 1° et 2° qu'il existe dans D deux points w', w'' séparés par G_1 ; montrons qu'ils sont nécessairement séparés par K. En effet, dans le cas contraire, comme ils ne sont pas séparés par G_2 et que $G_2 \cap K = G_2$ est connexe ils ne seraient pas séparés par $G_2 \cup K$ (th.2), ni a fortiori par G_1, ce qui est contraire à l'hypothès

Le th.4 est ainsi complètement démontré.

Comme K est compact, il est contenu dans un disque fermé, et l'extérieur de ce disque, étant connexe, est contenu dans une des deux composantes connexes de $\complement K$; par abus de langage, on dit que cette composante connexe est l'<u>extérieur</u> de la courbe close simple K, l'autre composante connexe de $\complement K$ étant appelée l'<u>intérieur</u> de K.

PROPOSITION 5.- <u>Si γ est un lacet simple dans $\mathbb{C}$, l'indice par rapport à $\gamma(I)=K$ d'un point quelconque de l'intérieur</u> (resp. <u>extérieur</u>) de K, <u>est égal à</u> 1 <u>ou à</u> -1 (resp. <u>à</u> 0).

On sait déjà que l'indice par rapport à un point de l'extérieur de K est égal à 0 (§ 3, n°1). Démontrons d'abord la proposition dans le cas particulier où K contient un segment fermé S non réduit à un point. Avec les notations de la démonstration du th.4 (2°), tout revient à prouver que la différence entre les indices d'un point de D_1 et d'un point de D_2 par rapport à K, est égale à ± 1. On peut toujours déformer K_0 dans $\complement D$ en un chemin carrossable ayant mêmes extrémités ; nous supposerons donc K_0 carrossable. On peut d'autre part, par un déplacement $x \to \alpha x + \beta$ supposer que S est contenu dans l'axe réel ; la différence

$\int_\gamma \frac{dx}{x-z-i\varepsilon} - \int_\gamma \frac{dx}{x-z+i\varepsilon}$ est alors arbitrairement voisine de

$$\int_\lambda^\mu \frac{dx}{x-z-i\varepsilon} - \int_\lambda^\mu \frac{dx}{x-z+i\varepsilon}$$

lorsque ε est un nombre >0 assez petit (λ et μ désignant l'origine et l'extrémité de S) ; posant $x-z=\varepsilon t$, on voit que cette différence est égale à $2i \int_{\frac{\lambda-z}{\varepsilon}}^{\frac{\mu-z}{\varepsilon}} \frac{dt}{t^2+1}$, et tend donc vers $2\pi i$ lorsque ε tend vers 0 (puisque $\lambda < z < \mu$), ce qui démontre la proposition dans ce cas.

Passant au cas général, on voit aussitôt (avec les notations de la démonstration du th.4, 3°, que l'on peut choisir des circuits simples γ_1, γ_2 dont les ensembles de points soient G_1 et G_2, de sorte que l'indice d'un point $z \notin G_1 \cup G_2$ par rapport à γ soit la somme de ses indices par rapport à γ_1 et γ_2 . Soit alors w un point de K_1 distinct de y et z, D un disque ouvert de centre w , ne rencontrant pas G_2 ; il existe dans D deux points w', w'' séparés par G_1 ; l'un de ces points a pour indice 0, l'autre ± 1 par rapport à γ_1 . D'autre part, w' et w'' ont même indice par rapport à γ_2, égal à 0 ou à ± 1 ; on en déduit aussitôt que l'un des points w', w'' a un indice ± 1 par rapport à γ , d'où la proposition.

4. Approximation des domaines contractiles par des domaines de Jordan.

L'ensemble des points "intérieurs" à une courbe close simple K dans $\mathbb{C}$ est appelé domaine de Jordan ; un domaine de Jordan est dit polygonal si K est une ligne brisée.

THÉORÈME 5.- Pour qu'un domaine $A \subset \mathbb{C}$ soit contractile, il faut et il suffit qu'il possède la propriété suivante : tout point frontière de A a un indice nul par rapport à tout circuit contenu dans A . De façon précise, si cette propriété est vérifiée, A est réunion des adhérences d'une suite croissante de domaines de Jordan polygonaux A_n .

La condition est évidemment nécessaire, car si γ est un circuit contenu dans A , et x un point frontière de A , γ peut être déformé dans A en un point, et l'indice de x par rapport à γ est donc égal à l'indice

NBK 052 114

de x par rapport à un circuit réduit à un point, c'est-à-dire 0 .

Pour montrer que la condition est suffisante, soit a un point de A , n_o un entier tel que le carré fermé de centre a et de côté $\frac{1}{2^{n_o-1}}$ soit contenu dans A . Pour tout entier $n > n_o$, soit B_n la réunion des carrés fermés, dont les sommets ont des coordonnées multiples de $\frac{1}{2^n}$, et qui sont contenus dans l'intersection de A et du carré fermé de centre a et de coté n ; ces carrés P_j sont évidemment en nombre fini $(1 \leqslant j \leqslant m)$ Il est clair que a est intérieur à B_n ; soit A_n la composante connexe de l'intérieur de B_n qui contient a . Nous allons prouver que A_n est un <u>domaine de Jordan polygonal</u>.

Il est évident que si un point intérieur à un carré P_j appartient à A_n, l'intérieur de P_j est contenu dans A_n ; en outre, pour qu'un coté (segment ouvert) de P_j soit contenu dans A_n , il faut et il suffit qu'il soit aussi le coté d'un carré $P_k \subset B_n$ distinct de P_j ; de même, pour qu'un sommet x de P_j appartienne à A_n , il faut et il suffit que les quatre carrés de sommet x soient contenus dans B_n ; si un sommet s d'un P_j est point frontière de A_n , il y a toujours exactement deux cotés distincts de deux carrés (distincts ou non) P_h, P_k , qui ont pour extrémité commune s et sont contenus dans la frontière de A_n .

Considérons alors un point frontière z de A_n ; il est nécessairement sur un côté d'un P_j ou en un sommet d'un P_j , donc il y a un sommet z_o d'un P_j qui appartient à la frontière de A_n . Partant de z_o , on définit par récurrence une suite $(z_k)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ de sommets de carrés P_j , telle que le segment d'extrémités z_k et z_{k+1} soit sur la frontière de A_n pour $0 \leqslant k \leqslant r-1$, que tous les z_k d'indice tel que $p \leqslant k \leqslant r-1$ soient distincts, et que $z_r = z_p$. Soit γ le circuit simple formé en parcourant les segments $z_k z_{k+1}$ dans le sens croissant pour $p \leqslant k \leqslant r-1$, et soit G l'ensemble des points de γ ; nous allons voir que A_n est l'<u>intérieur</u> de G .

En effet, soit D l'intérieur de G ; tout d'abord $D \subset A$. En effet, dans le cas contraire, comme D est connexe et contient des points de A , D rencontrerait la frontière de A ; or un point $y \in D$ a nécessairement un indice ± 1 par rapport à γ (prop.5) ; l'hypothèse montre donc que y ne peut appartenir à la frontière de A .

En second lieu, montrons que $a \in D$. En effet, soit S un des segments (ouverts) $z_k z_{k+1}$, b un point de S ; l'intérieur d'un des deux carrés P_j de côté S est contenu dans A_n ; soit c un point intérieur à ce carré Il existe un chemin linéaire par morceaux λ joignant a à c et tout entier dans A_n , et il résulte de la définition de G qu'aucun point de λ ne peut appartenir à G ; si on avait $a \notin D$, on aurait aussi $c \notin D$; mais alors le second carré de côté S est contenu dans D (th.4), et son adhérence est contenue dans $D \cup G \subset A$; ce carré est donc contenu dans B_n , et par suite b ne serait pas point frontière de A_n , contrairement à l'hypothèse. Le même raisonnement montre que tout point de A_n appartient à D , autrement dit $A_n \subset D$. D'autre part, si un point $x \in D$, le (ou les) carrés fermés contenant x et dont les sommets ont des coordonnées multiples de $1/2^n$ sont nécessairement contenus dans $D \cup G$, d'après la définition de G ; par suite $D \subset B_n$, et comme $a \in D$ et que D est connexe et contient A_n , on a $D = A_n$.

On a donc bien $\bar{A}_n = A_n \cup G \subset A$, et il est clair que $A_n \subset A_{n+1}$. Montrons que tout point $x \in A$ appartient à un A_n . Or, il existe un chemin linéaire par morceaux μ joignant a à x ; soit $\rho > 0$ la distance de l'ensemble M des points de μ à la frontière de A ; soit q un entier tel que $2^{-q} < \rho$. On vérifie aussitôt que $M \subset A_{q+2}$ en raisonnant par l'absurde et considérant le premier point z de μ qui serait sur la frontière de A_{q+2} : l'hypothèse entraîne que tous les carrés fermés de sommets ayant des coordonnées multiples de $1/2^{q+2}$ et contenant z sont contenus dans A , et comme l'intérieur de l'un d'eux est contenu dans A_{q+2} , on aboutit à une contradiction.

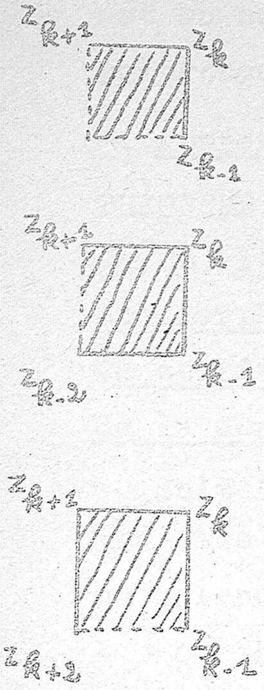


fig. 2

Le th.5 sera démontré si nous établissons enfin que chacun des A_n est contractile, car tout circuit contenu dans A est contenu dans un des A_n. Il suffit de prouver qu'il existe une application $(t,z) \to \varphi(t,z)$ de $\bar{A}_n \times I$ dans $\bar{A}_n$ ($I=[\alpha,\beta]$ intervalle compact de $\mathbb{R}$) telle que $\varphi(\gamma,z)=z$ identiquement et $\varphi(\beta,z)=c$ (point de A_n) identiquement. On raisonne par récurrence sur le nombre p des carrés de A_n, la proposition étant évidente pour $p=1$. Si $p>1$, on considère celui des points z_k qui est le plus grand dans l'ordre lexicographique de $\mathbb{R}^2$; les deux segments $z_{k-1}z_k$ et z_kz_{k+1} forment alors un angle droit, et on a les trois possibilités de la figure ci-contre (les côtés en pointillé étant intérieurs à A_n) ; on voit aussitôt qu'il existe dans chacun des cas une "déformation" du carré hachuré dans lui-même, qui le déforme finalement en la réunion des segments pointillés, d'où la possibilité de poursuivre la récurrence. C.Q.F.D.

COROLLAIRE.- <u>Tout domaine de Jordan D est contractile</u> ; <u>en outre, pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>il existe un domaine de Jordan polygonal</u> Δ <u>dont la frontière</u> K <u>est contenue dans</u> D <u>et est telle que la distance de tout point de</u> K <u>à la frontière de</u> D <u>soit</u> $<\varepsilon$.

Prouvons que D satisfait au critère du th.5. Si z est un point frontière de D, γ un circuit contenu dans D, U un disque ouvert de centre z ne rencontrant pas l'ensemble des points de γ, il existe des points x dans U n'appartenant pas à $\bar{D}$; l'indice de z et celui de x par rapport à γ sont évidemment égaux. Mais si S est un disque fermé contenant γ, il existe des points de $\complement\bar{D}$ dans $\complement S$; comme $\complement\bar{D}$ est connexe et ne rencontre pas γ, tous les points de $\complement\bar{D}$ ont même indice par rapport à γ, et cet indice est donc 0, ce qui montre que z a pour indice 0 par rapport à γ. La fin de la proposition est une conséquence de ce que l'ensemble des points de D dont la distance à la frontière de D est $\geq\varepsilon$

est un ensemble compact, donc contenu dans un des domaines de Jordan polygonaux dont la réunion est D .

5. Approximation des fonctions holomorphes par des polynômes.

THÉORÈME 6 (Runge).- Soit D un domaine contractile dans $\mathbb{C}$, et soit $\mathcal{H}(D)$ l'espace des fonctions (à valeurs dans un espace de Babach E) holomorphe dans D ; l'ensemble des restrictions à D des polynômes (à coefficients dans E) est partout dense dans $\mathcal{H}(D)$ pour la topologie de la convergence compacte.

Soit M un ensemble compact contenu dans D , f une fonction holomorphe dans D , $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire ; il faut prouver qu'il existe un polynôme g tel que $\| f(z) - g(z) \| \leqslant \varepsilon$ pour tout $z \in M$. Soit $\rho > 0$ la distance de M à la frontière de D , M_1 l'ensemble (compact) des points de D dont la distance à M est $\leqslant \rho/2$. En vertu du th.5 , il existe un circuit linéaire par morceaux et simple γ , défini dans $I = [0,1]$, contenu dans D et tel que l'intérieur A de la courbe close simple $K = \gamma(I)$ contiennt M_1 ; on peut en outre supposer (en remplacant au besoin γ par son opposé) que tout point de A a un indice 1 par rapport à γ (prop.5). Pour tout $z \in A$, on a donc (§ 3,th.1)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-z} .$$

Montrons qu'on peut décomposer I en un nombre fini d'intervalles I_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tel que, pour tout $z \in M$, l'oscillation de la fonction règlée $f(\gamma(t))\gamma'(t)/(\gamma(t)-z)$ dans chacun des I_k soit $\leqslant \varepsilon/2$. Par hypothèse, pour tout $t \in I$ et tout $z \in M$, on a $|\gamma(t)-z| \geqslant \frac{\rho}{2}$; on a d'autre part

$$\frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(s))\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} =$$

$$= \frac{1}{(\gamma(t)-z)(\gamma(s)-z)}\Big[z(f(\gamma(s))\gamma'(s)-f(\gamma(t))\gamma'(t))+$$
$$+f(\gamma(t))\gamma'(t)\gamma(z)-f(\gamma(s))\gamma'(s)\gamma(t)\Big]$$

d'où aussitôt la proposition, compte-tenu de ce que f et γ sont continues et γ' règlée dans I, et de ce que z est borné dans M. Si $t_k \in I_k$, $\gamma(t_k)=a_k$ et $f(a_k)\gamma'(t_k)=2\pi i = c_k$, on voit donc que l'on a, pour tout $z \in M$:

$$\left\| f(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{a_k - z} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Le problème est donc ramené au cas d'une fonction de la forme $1/(z-a)$, où $a \notin A$. Soit S un disque fermé de centre 0 contenant M, et soit c un point extérieur à S. Nous allons montrer qu'il existe un polynôme p tel que

$$(1) \qquad \left| \frac{1}{z-a} - p\left(\frac{1}{z-c}\right) \right| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $z \in M$. Le problème sera alors ramené au cas des fonctions $1/(z-c)^h$; mais une telle fonction est holomorphe dans un voisinage de S, donc peut être uniformément approchée dans S (et a fortiori dans M) par la somme d'un nombre suffisamment grand de termes de sa série de Taylor au point 0. Le théorème sera donc établi lorsque nous aurons prouvé la relation (1).

On peut évidemment supposer que S contient aussi $\bar{A}$, de sorte que c appartient à l'extérieur U de la courbe close simple K. Soit b_1 un point de U tel que $|b_1 - a| \leqslant \frac{\rho}{4}$; comme on peut joindre b_1 à c par un chemin linéaire par morceaux contenu dans U, et que la distance de tout point de U à M est $\geqslant \frac{\rho}{2}$, on voit qu'il existe une suite $(b_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ de points de $\complement A$, tels que $b_0 = a$, $b_m = c$, que $|b_j - b_{j+1}| \leqslant \frac{\rho}{4}$, et que la distance à M de tout point b_j soit $\geqslant \frac{\rho}{2}$.
La relation (1) sera démontrée si nous prouvons le lemme suivant :

<u>Lemme.- Quel que soit le polynôme</u> p_k , <u>il existe un polynôme</u> p_{k+1} <u>tel que</u>

(2) $$\left| p_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)-p_{k+1}\left(\frac{1}{z-b_{k+1}}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{m}$$

<u>pour tout</u> $z \in M$.

On peut se borner à démontrer ce lemme lorsque $p_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)=1/(z-b_k)^h$, en remplaçant au second membre de (2) ε par $\varepsilon/(q+1)$, où q est le degré de p_k . On peut alors écrire, pour tout $z \in M$

$$\frac{1}{(z-b_k)^h} = \frac{1}{(z-b_{k+1})^h} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-h}{r} \left(\frac{b_{k+1}-b_k}{z-b_{k+1}}\right)^r$$

la série du second membre étant normalement convergente dans M , puisque $\left|(b_{k+1}-b_k)/(z-b_{k+1})\right| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $z \in M$ en vertu des hypothèses.

En prenant un nombre assez grand de termes de cette série, on aura donc un polynôme $p_{k+1}\,(1/(z-b_{k+1}))$ répondant à la question.

C.Q.D.F.

La conclusion du th.6 n'est plus exacte si on ne suppose pas D contractile. Par exemple, soit D le domaine défini par $1<|z|<2$ la fonction $1/z$ ne peut être approchée uniformément par des polynômes dans D , car dans le cas contraire, il résulterait du th. de Weierstrass (§ 3,th.2) que ces polynômes convergeraient uniformément vers une fonction $g(z)$ holomorphe pour $|z|<2$, et coïncidant avec $1/z$ dans D . Mais en vertu du th.1 du § 1 , g et $1/z$ seraient égales pour $|z|<2$ et $z \neq 0$, ce qui est absurde puisque $1/z$ n'est pas bornée au voisinage de 0 .
