

RÉDACTION N° 150

COTE : NBR 051

TITRE : **GROUPES DE LIE.** FONCTIONS ANALYTIQUES
PREMIÈRE PARTIE. DEUXIÈME PARTIE
CHAPITRES I ET II (STAT I)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI
ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 67

NOMBRE DE PAGES : 119

NOMBRE DE FEUILLES : 67

NOMBRE DE FEUILLES : 90

RAPPEL de FORMULES sur les ALGÈBRES de LIE.

e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) = base de \mathfrak{g}
 e^{*i} ($i = 1, 2, \dots, n$) = base duale dans \mathfrak{g}^* .

①
$$\begin{cases} [e_i, e_j] = \sum_k c_{i,j}^k e_k \\ \text{Si } X = \sum_i X^i e_i, Y = \sum_i Y^i e_i, [X, Y] = \sum_i Z^i e_i : \\ Z^k = \sum_{i,j} c_{i,j}^k X^i Y^j \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} De^{*k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{i,j}^k (e^{*i} \wedge e^{*j}) \\ \text{Si } \alpha = \sum_i \alpha_i e^{*i}, D\alpha = \beta, \beta = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_{i,j} (e^{*i} \wedge e^{*j}) \\ \beta_{i,j} = -\sum_k c_{i,j}^k \alpha_k \end{cases}$$

③ Constantes de structure. $c_{i,j}^k = -c_{j,i}^k$
$$\sum_i (c_{i,\alpha}^k c_{\beta,\gamma}^i + c_{i,\beta}^k c_{\gamma,\alpha}^i + c_{i,\gamma}^k c_{\alpha,\beta}^i) = 0$$

④ Opération $\overline{\text{Ad}}(A)$.
$$\begin{cases} \text{Si } A = \sum_i A^i e_i, X = \sum_i X^i e_i, \overline{\text{Ad}}(A).X = Y = \sum_i Y^i e_i \\ Y^i = \sum_j A_j^i X^j, A_j^i = \sum_\lambda c_{\lambda,j}^i A^\lambda \\ \overline{\text{Ad}}(e_i).e^{*k} = -\sum_j c_{i,j}^k e^{*j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } A = \sum_i A^i e_i, \alpha = \sum_i \alpha_i e^{*i}, \overline{\text{Ad}}(A).\alpha = \beta = \sum_i \beta_i e^{*i} \\ \beta_i = -\sum_j A_j^i \alpha_j, A_j^i = \sum_\lambda c_{\lambda,j}^i A^\lambda \end{cases}$$

⑤ Forme quadratique de Killing

$$\begin{cases} B(X, Y) = \text{Tr}(\overline{\text{Ad}}(X). \overline{\text{Ad}}(Y)) \\ \text{Si } X = \sum_i X^i e_i, Y = \sum_i Y^i e_i \\ B(X, Y) = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} X^i Y^j, \\ \epsilon_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} c_{i,\beta}^\alpha c_{j,\alpha}^\beta \end{cases}$$

GROUPES de LIE.

PREMIERE PARTIE : Passage du local ou du global au ponctuel :
Groupe de Lie \rightarrow algèbre de Lie.

§ 1. Définitions.

1° - Un groupe de Lie G est un groupe topologique muni d'une structure de variété indéfiniment différentiable telle que l'application $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ de $G \times G$ dans G soit indéf. diff.

(La composante connexe de e , engendrée par un voisinage de e , est dénombrable à l'infini ; mais G lui-même n'est pas nécessairement dénombrable à l'infini. (?)) .

On appellera toujours n la dimension de G .

2° - Un groupe de transformations de Lie est G est localement compact le système d'un groupe de Lie G , d'une variété indéf. diff. V , et d'une application indéf. diff. $(x, s) \rightarrow xs$ de $V \times G$ dans V telle que $(xs)t = x(st)$, et que $x e = x$. (Alors $(xs)s^{-1} = x$).

C'est une réalisation de G comme groupe de transformations ; une représentation de G dans le "groupe de Lie infini" des automorphismes indéf. diff. de V .

On appellera toujours p la dimension de V , n celle de G .

Un groupe de Lie définit des groupes de transformations sur $V = G$:

- A) Groupe des translations à droite. La translation à droite $td(a)$ s'écrit $x \rightarrow xa = td(a).x$.
- B) Groupe des translations à gauche, $tg(a)$. On définit alors le groupe opposé G^- comme groupe de transformations de Lie sur $V = G$.
- C) Groupe des automorphismes intérieurs, $int(a)$, définis par $x \rightarrow axa^{-1} = int(a).x$. C'est encore G^- qui opère sur $G = V$.

3° - Un germe de groupe de Lie G est un espace topologique ayant au voisinage de e une structure de variété indéf. diff., et muni d'une loi de composition $(x, y) \rightarrow xy$ non partout défini, avec les règles :

- A) Il existe un voisinage U de e qui est une variété indéf. diff., tel que pour $x, y, z \in U$, $(xy)s$ et $x(yz)$ soient définis et égaux.
- B) Pour $x \in U$, $ex = xe = x$.
(Aucun élément $f \in U$ et $f \neq e$ n'a cette propriété).
- C) Il existe un voisinage $V \subset U$ de e tel que tout $x \in V$ ait un inverse $x^{-1} \in U$ vérifiant $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.
(Un élément de U n'a qu'un inverse dans U).
- D) Les applications $(x, y) \rightarrow xy$ et $x \rightarrow x^{-1}$ de $V \times V$ dans U et V dans U sont indéf. diff.

(En remplaçant indéf. diff. par continue, et supprimant la restriction "U variété indéf. diff.", on a un germe de groupe topologique).

J'ai mis le laïus à peu près au complet. On ~~pourrait~~ peut abréger en ne spécifiant pas les voisinages U, V, \dots , ce sera toujours fait dans la suite.

2 germes de groupes de Lie sont dits équivalents si les espaces topologiques sous-jacents sont des parties d'un même espace topologique, si l'élément e est le même, la structure de variété indéf. diff. au voisinage de e la même, et si les lois de composition coïncident au voisinage de e . Définition analogue de l'isomorphisme local de deux germes.

Un groupe de Lie définit un germe de groupe de Lie.

4^o - Un germe de groupe de transformations de Lie est le système d'un germe de groupe de Lie G , d'une variété indéf. diff. V , et d'une application $(x, s) \rightarrow xs$ de $V \times G$ dans V , non partout définie, avec les règles :

- A) quel que soit le compact K de V , il existe un voisinage U de e dans G tel que, pour $x \in K$, $s, t \in U$, $(xs)t$ et $x(st)$ soient définis et égaux, et que $xe = x$ (Alors si s et s^{-1} sont dans U , $(xs)s^{-1} = x$).
- B) $(x, s) \rightarrow xs$ est une application indéf. diff. de $K \times U$ dans V .

Equivalence et isomorphisme évidents.

5° - On peut aussi définir un groupe ou un germe de groupe de transformations de Lie G sur un groupe de variété V . V est un espace topologique ayant au voisinage d'un point a une structure de variété indéf. diff. et $(x,s) \rightarrow xs$ est défini et vérifie les propriétés voulues pour s assez voisin de e et x assez voisin de a .

Un germe de groupe de Lie G définit G comme germe de groupe des translations à gauche sur $V = G$; mais les automorphismes de G forment un groupe de Lie opérant sur le germe de variété $V = G$.

Dans le cas des groupes de transformations, il pourra être utile d'appeler $\text{act}(s)$ l'application $x \rightarrow xs = \text{act}(s).x$ de V dans V , et pas (x) l'application $s \rightarrow xs = \text{pas}(x).s$ de G dans V . Horrible!

§ 2. Variété de transformations.

Une variété de transformations est le système d'une variété W et d'une variété V , toutes deux indéf. diff., et d'une loi de composition indéf. diff. $(x,s) \rightarrow xs$ de $V \times W$ dans V .

(Modifications évidentes pour des germes de variétés).

Nous supposerons toujours l'existence d'un point e de W tel que $xe = x$.

Alors, sur tout compact de V , toute $s \in W$ assez voisine de e définit un automorphisme indéf. diff. $\text{act}(s)$; de plus :

Proposition. L'application $(x,s) \rightarrow (\text{act}(s))^{-1}.x = xs^{-1}$ de $V \times W$ dans V est indéf. diff.

(C'est le théorème des fonctions implicites).

L'application tangente en $s=e$ à $\text{pas}(x)$ est une application linéaire $\overline{\text{pas}(x)}$ de l'espace vectoriel tangent $E(e; W)$ dans l'espace tangent $E(x; V)$; nous écrirons aussi $\overline{\text{pas}(x)}. S = \bar{x} S$.

Quant à l'application tangente à $\text{act}(e)$ c'est l'identité puisque $\text{act}(e)$ est l'identité. La formule des dérivées partielles donne alors :

Proposition. L'application tangente à $(x,s) \rightarrow xs$ au point (x,s) , au point (x,s) , application linéaire de $E((x,s); V \times W)$ dans $E(x,V)$, est

(2, 1) (X, S) -> X S + X

Corollaire. Soit G une variété indéf. diff. munie au voisinage de e d'une loi de composition (non nécessairement associative)

(x,y) -> xy, ayant e comme élément neutre. L'application tangente en e, application linéaire de E(a) x E(e) dans E(e), est (X,Y) -> X+Y.

Corollaire 1 du Corollaire. Tout élément x assez voisin de e a un inverse à droite x^-1 et un seul voisin de e; l'application x -> x^-1 est indéf. différ., l'application tangente en e à x^-1 -> x est X -> -X.

En effet l'équation tangente en e à l'équation xy = e est X+Y = 0, donc d'après le théorème des fonctions implicites, elle a une solution et une seule, et l'application tangente à x -> y = x^-1 est bien

X -> Y = -X.

Corollaire 2 du Corollaire. Si la loi (x,y) -> xy est associative, x a un inverse à gauche et un inverse à droite qui sont donc égaux. Les 2 premiers axiomes de germe de groupe entraînent donc le 3e.

(Est-ce vrai globalement si G est connexe?). L'ensemble des éléments inversibles est ouvert, mais ne semble pas fermé.

Corollaire 3 du Corollaire. Soit G une variété indéf. différ. analogue à celle de la proposition. Si V et W sont deux sous-variétés indéf. différ. se coupant en e, de telle sorte que les espaces vectoriels tangents E(e,V), E(e,W), soient supplémentaires, tout x assez voisin de e admet une décomposition z = xy, x in V, y in W unique si on impose à x,y d'être assez voisins de e; x = pr_y z et y = pr_V z sont fonctions indéf. différ. de z. (ou encore: l'application (x,y) -> xy de V x W dans G est un isomorphisme de variétés indéf. différ. au voisinage de e).

En effet, l'application tangente (X,Y) -> X+Y de E(e,V) x E(e,W) dans E(e,G) est un isomorphisme, il suffit donc d'appliquer le théorème des fonctions implicites.

§ 2. Champ de tenseurs généralisé.

Supposons que sur toute variété indéf. diff. V on définisse en chaque point x un espace vectoriel topologique $\mathcal{E}(x; V)$ ayant les propriétés suivantes :

1^o - Si H est un homéomorphisme indéf. diff. d'un voisinage de a d'une variété U sur un voisinage de b d'une variété V , il lui est associé un isomorphisme \bar{H} de $\mathcal{E}(a, U)$ sur $\mathcal{E}(b, V)$. \bar{H} ne dépend que de la restriction de H à un voisinage arbitraire de a (ce qui permet d'identifier les $\mathcal{E}(a)$ des différents voisinages de a dans U), et il y a transitivité de cette association : $(\bar{H} \circ \bar{K}) = \bar{H} \circ \bar{K}$.

2^o - Si H dépend d'un paramètre réel λ , de façon que $H(a; \lambda) \equiv b$, et que $H(x, \lambda)$ soit fonction indéf. diff. de x (au voisinage de a) et λ , alors l'application $(z, \lambda) \rightarrow \bar{H}(z; \lambda)$ de $\mathcal{E}(a, U) \times \mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}(b, V)$ est continue, ainsi que toutes ses dérivées partielles en λ .

Un élément Z de $\mathcal{E}(x, V)$ sera appelé un tenseur généralisé au point x , de l'espace \mathcal{E} . Une application $x \rightarrow \xi(x)$, $\xi(x) \in \mathcal{E}(x, V)$, sera un champ de tenseurs généralisés de l'espace \mathcal{E} .

Soit O une carte de V ; cette carte définit canoniquement des isomorphismes $\bar{H}_{b,a}$, les translations \vec{ab} , donc des isomorphismes canoniques $\bar{H}_{b,a}$ de $\mathcal{E}(a, V)$ sur $\mathcal{E}(b, V)$, de sorte que tous les $\mathcal{E}(x, V)$ des points x de O sont canoniquement isomorphes à l'un d'eux, $\mathcal{E}(a, V)$.

Si alors un champ de tenseurs $x \rightarrow \xi(x)$ est tel que le champ $x \rightarrow \bar{H}_{a,x}(\xi(x)) \in \mathcal{E}(a, V)$ soit indéf. différentiable, cette propriété sera indépendante de la carte choisie et on dira que le champ de tenseurs ξ est indéf. différentiable.

Exemples. Champ de tenseurs ordinaires, champ de dérivations (ou opérateur différentiel) d'ordre $\leq m$, etc...

ξ désignera aussi l'espace vectoriel des champs de tenseurs généralisés d'espèce ξ . Topologisé par ex. par la convergence compacte pour le champ ξ et toutes ses dérivées partielles en x .

§ 3. Champs invariants à gauche sur un groupe de Lie.

Un champ de tenseurs ξ d'espèce ξ est invariant à gauche sur un germe de groupe de Lie G s'il est invariant par les translations à gauche

$$(3,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{tg(a)} \cdot \xi = \xi \quad \text{ou} \quad \bar{a} \xi = \xi \\ \xi(b) = \overline{ba^{-1}} \xi(a) \end{array} \right.$$

Comme $tg(a)$ dépend de a de manière indéf. diff., un champ invariant à gauche est indéf. diff.

Un tel champ est défini par sa valeur en e , qui peut être choisie arbitrairement, et que nous appellerons trace du champ :

$$(3,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi(e) = \text{Tr } \xi = Z \in \xi(e, G) \\ \xi(a) = \bar{a} Z = \overline{tg(a)} \cdot Z \end{array} \right.$$

Le champ ainsi défini est bien invariant à gauche, car

$$(3,3) \quad \overline{tg(b a^{-1})} = \overline{tg(b)} \circ \overline{tg(a)}^{-1}$$

Ainsi les champs invariants à gauche d'espèce ξ forment un espace vectoriel ξ_g canoniquement isomorphe à $\xi(e)$ par $\xi \rightarrow \text{Tr } \xi$. Nous appellerons $\text{Tr } g^{-1}$ l'isomorphisme de $\xi(e)$ sur ξ_g réciproque de Tr .

On a donc

$$(3,4) \quad \text{Tr } g^{-1} \xi(x) = \overline{tg(x)} \cdot Z = \bar{x} Z$$

§ 4. Algèbre de Lie.

Prenons pour $\xi(x)$, sur un germe groupe de Lie G , l'espace vectoriel tangent $E(x)$. Un champ de vecteurs subordonné est alors un champ de vecteurs usuels. Comme $E(x)$ est de dimension n , les champs de vecteurs invariants à gauche ξ forment un espace vectoriel de dimension n , E_g canoniquement isomorphe à $E(e)$.

Définition. L'opération crochet $(\xi, \eta) \rightarrow [\xi, \eta]$ applique évidemment $Eg \times Eg$ dans Eg , et en vertu des propriétés du crochet (bilinearité, antisymétrie, Jacobi), elle définit sur Eg une structure d'algèbre de Lie.

Donc l'opération, que nous noterons crochet à gauche (ou crochet tout court)

$$(4, 1) \quad (X, Y) \rightarrow [X, Y]_g \text{ (ou } [X, Y]) = \text{Tr} [\text{Tr}_g^{-1} X, \text{Tr}_g^{-1} Y]$$

définit sur $E(a)$ une structure d'algèbre de Lie \mathcal{L}_g (ou \mathcal{L}) qui est l'algèbre de Lie à gauche (ou algèbre de Lie tout court) de G .

Remarque. Comme $[X, Y]$ est antisymétrique, c'est alors une application linéaire de $\Lambda^2 \mathcal{L}$ dans \mathcal{L} .

Comme $x \rightarrow \bar{x}$ est un isomorphisme local appelé sym, de G sur le groupe opposé et que cet isomorphisme transforme une translation à gauche $\text{tg}(a)$ de G en une opération sur V qui n'est autre que la translation à droite $\text{td}(a^{-1})$, $\overline{\text{sym}}$ transforme l'algèbre de Lie Eg en l'algèbre de Lie E_d , donc définit un isomorphisme

$$(4, 2) \quad X \rightarrow \overline{\text{sym}}(X) = \text{Tr} \overline{\text{sym}}^{-1}(\text{Tr}_g X)$$

de l'algèbre de Lie à gauche \mathcal{L}_g sur l'algèbre de Lie à droite \mathcal{L}_d .

La prop. montre que

$$(4, 3) \quad \overline{\text{sym}}(X) = -X,$$

de sorte que

$$(4, 4) \quad [X, Y]_d = \overline{\text{sym}} [\overline{\text{sym}}^{-1} X, \overline{\text{sym}}^{-1} Y]_g = -[X, Y]_g$$

§ 5. Champ de vecteurs liés à un groupe de transformations de Lie.

Soit W un germe de variétés de transformations sur un germe de variété V . Un vecteur tangent S en s à W définit en chaque point x un vecteur \overline{S} ; alors $(\overline{S}) s^{-1}$ est un vecteur tangent en x à V , de sorte que l'application $x \rightarrow (\overline{S}) s^{-1}$ est un champ de vecteurs V associé au vecteur S ; nous l'appellerons champ associé à droite et le noterons $\{S\}_d$. Il est indéf. diff. De même le champ de vecteurs $x \rightarrow x s^{-1} S$

est le champ associé à gauche et sera noté $\{S\}_G$. En général lorsque S varie ces champs forment une famille de rang infini.

Proposition. Si G est un ^{germe} groupe de transformations de Lie opérant sur V , on a

$$(5, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\bar{x} S) s^{-1} = \bar{x} (S s^{-1}) \\ \overline{x s^{-1}} S = \bar{x} (\overline{s^{-1}} S) \end{array} \right.$$

Le champ $\{S\}_G$ (resp. $\{S\}_d$) est donc le même pour tous les vecteurs S constituant sur G un champ invariant à gauche (resp. droite).

La démonstration est immédiate : on écrit $(xs)t = x(st)$, on passe à l'application tangente, dérivée partielle en s :

$$(5, 2) \quad (\bar{x} S) \bar{t} = \bar{x} (S \bar{t})$$

d'où (5,1) en posant $t = s^{-1}$.

On a donc $\{S\}_G = \{\bar{t} S\}_G$ et l'ensemble des champs $\{S\}_G$ est un espace vectoriel de dimension $\leq n$, image de $\mathbb{E}(e, G)$ par l'application $S \rightarrow \{S\}_G$. De même pour l'ensemble des $\{S\}_d$ et l'espace vectoriel est le même, car pour $S \in \mathbb{E}(e, G)$, $\{S\}_G = \{S\}_d$ qui est le champ $x \rightarrow \bar{x} S$. Nous appellerons dans ce cas ce champ $\{S\}$ ou $T(S)$.

Proposition. Dans le cas d'un groupe de transformations de Lie, le transformé du champ $\{S\}$, $S \in \mathbb{E}(e, G)$, par l'opération $\overline{\text{act}(t)}$, est $\{t^{-1} S \bar{t}\}$.

En effet d'après (5,2) le champ $\{S\}$ a pour valeur en a le vecteur à S , son transformé par $\overline{\text{act}(t)}$ est $(\bar{a} S) \bar{t} = \bar{a} \bar{t} (t^{-1} S \bar{t})$, valeur du champ $\{t^{-1} S \bar{t}\}$ au point $a t$, C.Q.F.D.

Ainsi les champs $\{S\}$ ne sont pas invariants par le groupe G , mais leur espace vectoriel est globalement invariant.

Remarque. Soit G un groupe de Lie, considéré comme opérant à droite sur $V = G$. Alors si $X \in \mathbb{E}(e, G)$, $\{X\}$ est le champ invariant à gauche $\text{Tr}_G^{-1} X$.

Démontrons maintenant la réciproque de prop.

Proposition. Soit W une variété de transformations sur V . Supposons que pour tout $s \in W$ il existe un isomorphisme $T \rightarrow \tau(s).T$ de $E(e, W)$ sur $E(s, W)$, dépendant de s de manière indéf. diff., tel que les champs $\{T\}_g$ et $\{\tau(s).T\}_g$ soient toujours identiques, il existe sur W une structure de groupe de transformations de Lie opérant à droite sur V .

(Ce théorème est biscornu, sa démonstration complète est rasoire, je propose de la supprimer ou amender).

Démonstration, par étapes.

1° - Nous allons d'abord montrer que si $s, t \in W$, il existe $r \in W$ tel que $\text{act}(r) = \text{act}(t) \circ \text{act}(s)$ ou $xr = (xs)t$.

Considérons une courbe indéf. diff. quelconque allant de e à t , paramétrisée par λ . Nous appellerons $u(\lambda)$ un point de cette courbe, $u(0)=e$, $u(1)=t$.

Sur W on peut considérer l'équation différentielle en $v \in W$, fonction de λ :

$$(5, 3) \quad \frac{dv}{d\lambda} = (\tau(v) \circ \tau^{-1}(u(\lambda))) \frac{du}{d\lambda}$$

qui exprime que, pour tout λ , $\left\{ \frac{dv}{d\lambda} \right\}_g = \left\{ \frac{dv}{d\lambda} \right\}_g = \xi(\lambda)$.

Considérons la solution de cette équation diff. correspondant à la condition initiale $v(0)=s$, et soit $v(1) = r$.

Maintenant sur V on peut considérer l'équation différentielle

$$(5, 4) \quad \frac{dy}{d\lambda} = \xi(\lambda)(y),$$

elle admet une solution unique telle que $y(0)=xs$. Or elle a les deux telles solutions

$$(5, 5) \quad \begin{cases} y(\lambda) = (xs)u(\lambda) \\ y(\lambda) = xv(\lambda) \end{cases}$$

Donc on a, pour tout λ ,

$$(5, 6) \quad \begin{cases} (x s) u(\lambda) = x v(\lambda), & \text{et pour } \lambda = 1, \\ (x s)t = x r, & \text{O.Q.F.D.} \end{cases}$$

2°- Supposons d'abord qu'au voisinage d'au moins un point $a \in V$, $S \rightarrow$ à S soit un isomorphisme. Cela exige $n \leq p$. Dans ce cas, l'équation tangente à $ax_1 = ax_2$, au point $x_1 = x_2 = e$, est $\bar{a}R_1 = \bar{a}R_2$ qui n'a d'autre solution que $R_1 = R_2$. D'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $ax_1 = ax_2$ n'a donc que la solution $x_1 = x_2$ voisine de e , et $r \rightarrow \text{act}(r)$ est une réalisation fidèle de W .

Alors l'élément r défini par (5,6) est unique, on posera $r = st$ ($\text{act}(r) = \text{act}(t) \circ \text{act}(s)$). Ce produit est associatif puisque W est réalisée fidèlement comme ensemble de transformations. e est un élément neutre de ce produit. Alors d'après la prop. W est un groupe de Lie G .

3°- Faisons maintenant une hypothèse moins restrictive :

$$T \rightarrow \{T\}, \text{ pour } T \in E(e, W), \text{ est biunivoque.}$$

Remarquons alors que W opère aussi sur $V^n = V \times V \dots \times V$, par

$$(5, 7) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n)s = (x_1s, x_2s, \dots, x_ns).$$

Nous sommes alors ramenés à l'hypothèse 2°. Car si T_1, T_2, \dots, T_n sont indépendants dans $E(e, W)$, comme on ne peut pas avoir de relation

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \{T_i\} = 0, \text{ il existe au moins un système de } n \text{ points}$$

a_1, a_2, \dots, a_n , tel que les vecteurs $(\bar{a}_1 T_1, \bar{a}_2 T_1, \dots, \bar{a}_n T_1)$, pour $i=1, 2, \dots, n$, soient indépendants, et alors

$$T \rightarrow (\bar{a}_1 T, \bar{a}_2 T, \dots, \bar{a}_n T) \text{ est biunivoque. Donc } W \text{ opère fidèlement sur}$$

V^n , par suite aussi fidèlement sur V : $x'r_1 = x'r_2$ pour tout x , entraîne $r_1 = r_2$. D'où la même conclusion.

4° - Cas général.

Soit \mathcal{L}_e le noyau de l'application $T \rightarrow \{T\}$, pour $T \in E(e, V)$. Les $\mathcal{L}(s)$, \mathcal{L}_e forment un système de sous-espaces tangents aux différents points de W . Tout point d'une variété intégrale du système différentiel correspondant issue de e , est tel qu'il opère comme identité sur V . En effet sur une telle courbe intégrale $u(\lambda)$,

$$(5, 8) \quad \frac{d}{d\lambda} (x u(\lambda)) = \overline{x u(\lambda)} \frac{du}{d\lambda} = 0.$$

Mais si le système n'était pas complètement intégrable, il existerait un sous-espace $\mathcal{L}_2 \supset \mathcal{L}_e$ tel que tout point d'une sous-variété de W tangente en e à \mathcal{L}_2 soit atteint par une telle courbe, alors $\{\mathcal{L}_2\}$ devrait être nul. Donc $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_e$ et le système est complètement intégrable. Il définit une sous-variété $H \subset W$ passant en e , tangente à \mathcal{L}_e , dont tout point opère identiquement sur V .

Soit K une sous-variété passant en e dont l'espace vectoriel tangent K soit supplémentaire de \mathcal{L}_e . Alors la fibration de W par les variétés intégrales du système complètement intégrable, la représente, comme variété, par le W est isomorphe, en tant produit $H \times K$. Remarquons une variété de transformations sur V ; mais $T \rightarrow \{T\}$, restreinte à $E(e, K)$, est biunivoque, donc K opère fidèlement sur V . La partie 3^e de la démonstration montre qu'on peut mettre sur K une structure de groupe de Lie bien déterminée. Mettons sur H une structure de groupe de Lie arbitraire, et sur W la structure produit W est bien un groupe de Lie, et si $s = (s_1, s_2)$ et $t = (t_1, t_2)$ sont dans $W = H \times K$, on a $\text{act}(s) = \text{act}(s_2)$, $\text{act}(t) = \text{act}(t_2)$, donc $\text{act}(s) \circ \text{act}(t) = \text{act}(s_2) \circ \text{act}(t_2) = \text{act}(t_2 \circ s_2) = \text{act}(t_1 s_1, t_2 s_2) = \text{act}(t s)$, et W est bien un groupe opérant à droite sur V . Ouf !

Remarque. Dans les hyp. 2^o, 3^o, la loi de groupe sur W est unique, et ce groupe est tel que

$$\tau(s).T = \overline{sT} \quad (\tau(s) = \overline{tg(s)}) .$$

Il n'en est plus ainsi dans le cas général.

Ex : W opère par $xs = x$, quel que soit s . Alors $\mathcal{L} = E(e, W)$, $K=0$. $\tau(s)$ est un isomorphisme arbitraire sur W , et il n'existe pas alors en général de loi de groupe sur W telle que $\tau(s) = \overline{tg(s)}$.

Remarque. Si on supposait que c'est le champ $\{\tau(s).T\}_a$ qui est indépendant de T , on se ramènerait au cas précédent en définissant une nouvelle opération $(x, s) \rightarrow xs^{-1}$.

§ 6. Représentations de groupes de Lie.

Définition. Soient G, G' , deux groupes de Lie. Une représentation de G dans G' sera par définition une application Φ de G dans G' , indéf. différ., qui soit une représentation de la structure de groupe de G dans celle de G' . Une représentation d'un germe de groupe de Lie dans un autre est analogue, mais n'est définie, indéf. différ., et représentation de la structure multiplicative, qu'au voisinage de e .

Proposition 1. L'application tangente $\overline{\Phi}$ à une représentation Φ de l'algèbre G dans G' est une représentation de l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G dans l'algèbre de Lie \mathcal{G}' de G' , dite représentation tangente à Φ . $\overline{\Phi}$ définit en effet une application linéaire de $E(e, G)$ dans $E(e', G')$. Mais comme Φ est une représentation de groupe.

$$(6, 1) \quad \begin{cases} \overline{\Phi}(ax) = \overline{\Phi}(a)\overline{\Phi}(x) & \text{ou} \\ \overline{\Phi} \circ tg(a) = tg(\overline{\Phi}(a)) \circ \overline{\Phi} \end{cases}$$

Par dérivation partielle en x , on a pour les applications tangentes :

$$(6, 2) \quad \begin{cases} \overline{\Phi}(\overline{a} X) = \overline{\Phi}(\overline{a}) (\overline{\Phi}(X)) & \text{ou} \\ \overline{\Phi} \circ tg(a) = tg(\overline{\Phi}(a)) \circ \overline{\Phi} \end{cases}$$

Si alors $\xi = \text{Tr}^{-1} g X$, $\xi' = \text{Tr}^{-1} g (\bar{\Phi}(X))$, (6,2) donne

$$(6, 3) \quad \bar{\Phi}(\xi(a)) = \xi'(\bar{\Phi}(a))$$

Si donc X, Y sont des éléments de $E(e)$, les champs $\text{Tr}^{-1} g \bar{\Phi}(X)$, $\text{Tr}^{-1} g \bar{\Phi}(Y)$, sont des images de $\text{Tr}^{-1} g (X)$, $\text{Tr}^{-1} g (Y)$, et par suite leur crochet est une image du crochet, donc

$$(6, 4) \quad [\bar{\Phi}(X), \bar{\Phi}(Y)] = \bar{\Phi}[X, Y], \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarquons que $\overline{tg(a)}$ et $\overline{tg(\bar{\Phi}(a))}$ sont des isomorphismes, donc l'application $\bar{\Phi}_{(a)} = \overline{tg(\bar{\Phi}(a))} \circ \bar{\Phi}_{(e)} \circ \overline{tg(a)}^{-1}$ a le même rang en tous les points a de G ; on l'appellera le rang de la représentation $\bar{\Phi}$. C'est donc le rang de la représentation $\bar{\Phi}$ de \mathcal{G} dans \mathcal{G}' .

§ 7. Germe de groupe de transformations de Lie comme représentation d'un germe de groupe de Lie.

Proposition. Si G est un groupe de transformations de Lie opérant à droite sur une variété V , l'application $S \rightarrow \{S\}$ est une représentation de l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G dans l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales de V . Autrement dit

$$[\{S\}, \{T\}] = \{[S, T]\}$$

Cette prop. serait un cas particulier de la précédente si celle-ci avait été démontrée pour des groupes de Lie infinis. En effet G est représentée dans le groupe de Lie infini G' des automorphismes de V , donc son algèbre de Lie est représentée dans l'algèbre de Lie \mathcal{G}' de G' , qui est l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales.

Mais cette prop. admet aussi la précédente comme cas particulier, car si $\bar{\Phi}$ est une représentation d'un groupe de Lie G dans un groupe de Lie G' , l'appliquant $(x, s) \rightarrow x \bar{\Phi}(s)$ de $G' \times G$ dans G' définit G comme

groupe de transformations de Lie opérant à droite sur G' ; si $S \in \mathcal{G}$,

$$\{S\} = \bar{x} \bar{\Phi}(S) = \text{Tr}^{-1}_g \bar{\Phi}(S) .$$

De toute façon cette proposition se démontre comme la précédente : le champ $\{S\}$ de V est une image du champ invariant à gauche

$\sigma = \text{Tr}^{-1}_g S$ de G par l'application par (a) de G dans V ($a \in V$ quelconque)

En effet, si $r \in G$:

$$(7, 1) \quad \overline{\text{pas}(a)} \cdot \sigma(r) = \bar{a}(\bar{r} S) = \bar{a} \bar{r} S = \{S\} (ar) .$$

D'où la conclusion.

Corollaire. Les transformations infinitésimales $\{S\}$, $S \in \mathcal{G}$, forment sur V une algèbre de Lie de dimension finie $\leq n$.

§ 8. Application : algèbre de Lie du groupe linéaire.

Le groupe linéaire $GL(R^n)$ est un sous-espace ouvert de l'algèbre $\mathcal{L}(R^n)$ des endomorphismes de R^n . Donc son algèbre de Lie est, en tant qu'espace vectoriel, l'espace $\mathcal{L}(R^n)$. Soit $s(\lambda)$ un point de $GL(R^n)$, dépendant d'un paramètre λ , tel que, pour $\lambda = 0$, $s(0) = e$, $\frac{ds}{d\lambda} = S$. Alors, si $x \in R^n$, puisque $GL(R^n)$ est un groupe de transformations de Lie opérant à gauche sur R^n .

$$(8, 1) \quad S \bar{x} = \frac{d}{d\lambda} (s x) = \frac{d}{d\lambda} (s \cdot x) = \frac{ds}{d\lambda} \cdot x = S \cdot x ,$$

le champ $\{S\}$ est le champ linéaire défini par

$$(8, 2) \quad \{S\} (x) = S \cdot x$$

Soient x_1 les coordonnées de x , S_{1j} les éléments de la matrice

$S \cdot \theta(\{S\})$ est défini par

$$(8, 3) \quad \theta(\{S\}) \cdot \varphi = \sum_{i, \alpha} S_{i\alpha} x_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$(8, 4) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\theta(\{S\}) \circ \theta(\{T\})) \cdot \varphi \\ & = \sum_{i, \alpha, j, \beta} S_{i\alpha} T_{j\beta} x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \\ & + \sum_{i, \alpha, j} T_{ji} S_{i\alpha} x_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \end{aligned} \right.$$

Le dernier terme n'est autre que $\theta(\{TS\}) \cdot \varphi$. Alors

$$(8, 5) \quad [\{S\}, \{T\}] = \{TS - ST\} = \{[T, S]_{\mathcal{L}}\}.$$

$[T, S]_{\mathcal{L}}$ étant le crochet des éléments T, S de l'algèbre $\mathcal{L}(R^n)$.

Mais comme $GL(R^n)$ opère à gauche sur R^n , la prop. montre que

$$(8, 6) \quad [\{S\}, \{T\}] = -\{[S, T]_{gl}\}.$$

$[S, T]_{gl}$ étant le crochet dans l'algèbre de Lie $gl(R^n)$ de $GL(R^n)$. Alors

$$(8, 7) \quad [S, T]_{gl} = [S, T]_{\mathcal{L}}. \quad \text{D'où}$$

Proposition. L'algèbre de Lie $gl(R^n)$ du groupe linéaire $GL(R^n)$ est l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre $\mathcal{L}(R^n)$ des endomorphismes de R^n , le crochet étant le crochet usuel $[S, T] = ST - TS$ dans $\mathcal{L}(R^n)$.

Proposition. Soit \mathcal{A} une algèbre associative sur R , de dim. finie, G une sous-variété indéf. diff. qui, pour la multiplication, soit un groupe de Lie. L'algèbre de Lie \mathcal{G} de G est le sous-espace tangent en e à G dans \mathcal{A} , muni de la loi de composition définie par le crochet usuel dans \mathcal{A} .

Cette proposition admet la précédente comme cas particulier

($\mathcal{A} = \mathcal{L}(R^n)$, $G = GL(R^n)$), elle en est aussi un cas particulier, car par la représentation régulière G est un sous-groupe de $GL(\mathcal{A})$. Même démonstration en tout cas.

§ 9. Sous-groupe de Lie.

Un sous-groupe de Lie H d'un groupe de Lie G est une sous-variété indéf. diff. qui est un sous-groupe. H admet une structure de groupe de Lie dite induite. C'est un sous-groupe fermé.

Tout sous-groupe ouvert d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie.

Un sous-germe de groupe de Lie H d'un germe de groupe de Lie G est une partie de G qui est au voisinage de e , une sous-variété indéf. diff.

et qui, si elle contient x et y assez voisins de e , contient x, y et x^{-1} . Tout voisinage de e d'un germe G est un sous-germe équivalent.

Proposition. Si H est un germe de sous-groupe de Lie d'un germe de groupe de Lie G , le sous-espace vectoriel de \mathcal{G} tangent en e à H est une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} , canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie \mathcal{L} de H .

Comme $H \subset G$, l'injection Φ de H dans G définit canoniquement une injection $\overline{\Phi}_{(e)}$ de $E(e, H) = \mathcal{L}$ dans $E(e, G) = \mathcal{G}$; d'après la prop., $\overline{\Phi}_{(e)}$ est une représentation de \mathcal{L} dans \mathcal{G} . C.Q.F.D.

§ 10. Image et noyau d'une représentation.

Proposition. Soit Φ une représentation de rang r d'un germe de groupe de Lie G , de dim. n , dans un germe de groupe de Lie G' , de dim. n' . L'image $\Phi(U)$ d'un voisinage U assez petit de $e \in G$ est un germe de sous-groupe de Lie de G' , que nous noterons $\overline{\Phi}(G)$; sa dim. est r et son algèbre de Lie est $\overline{\Phi}(\mathcal{G})$. Le noyau N de Φ est un germe de sous-groupe de Lie de G , dont l'algèbre de Lie est le noyau \mathcal{N} de la représentation $\overline{\Phi}$ de \mathcal{G} dans \mathcal{G}' .

Φ a en effet partout le même rang r , donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de e dans G tel que $\overline{\Phi}(U)$ soit une sous-variété indéf. différ. de dimension r de G' , et comme e est un germe de sous-groupe, e est un germe de sous-groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie, est l'espace vectoriel tangent $\overline{\Phi}(E(e, G)) = \overline{\Phi}(\mathcal{G})$. $\overline{\Phi}$ est alors une représentation de U sur $\overline{\Phi}(U)$, dont la représentation tangente est la représentation $\overline{\Phi}$ de \mathcal{G} sur $\overline{\Phi}(\mathcal{G})$, et toujours d'après le théorème des fonctions implicites le noyau N est une sous-variété indéf. différ. de dimension $n-r$ de G et comme e est un germe de sous-groupe (distingué), N est un germe de sous-groupe de Lie; son algèbre de Lie est le sous-espace vectoriel

tangent $E(e, \mathbb{N}) = \mathcal{N}$ noyau de la représentation $\overline{\Phi}$ de \mathcal{G} sur $\overline{\Phi}(\mathcal{G})$.

Corollaire 1. Pour que $\overline{\Phi}$ représente tout voisinage de e de G sur un voisinage de e' dans G' , il faut et il suffit que $\overline{\Phi}$ soit une représentation de \mathcal{G} sur \mathcal{G}' .

Corollaire 2. Pour que $\overline{\Phi}$ soit une représentation localement biunivoque de G dans G' , il faut et il suffit que $\overline{\Phi}$ soit une représentation biunivoque de \mathcal{G} dans \mathcal{G}' . La prop. se généralise aux groupes de transform. de Lie. L'image se généralise par les classes d'intransitivité, le noyau par le sous-groupe normalisateur et le sous-groupe des opérateurs identiques.

§ 1. Groupes de transformation de Lie ; classes d'intransitivité.

Proposition. Soit G un germe de groupe de transform. de Lie opérant sur un germe de variété V . Les classes d'intransitivité de V pour G sont des variétés indéf. diff.

Une classe d'intransitivité est l'ensemble $V_{(a)}$ des as , $s \in G$. L'application tangente $\overline{\text{pas}}(a)$ a toujours le même rang $r_{(a)} = \dim. \text{à } \mathcal{G}$ en tout point s de G . Cela résulte de ce que, si S est tangent en s à G :

$$(11, 1) \quad \overline{a} S = \overline{a} S \quad \overline{s}^{-1} \quad \overline{s} = (\overline{a} (S \quad \overline{s}^{-1})) \overline{s} \quad \text{ou}$$

$$(11, 2) \quad \overline{\text{pas}}(a)_{(s)} = (\overline{\text{act}}(s))_{(a)} \circ (\overline{\text{pas}}(a))_{(e)} \circ (\overline{\text{td}}(s)^{-1})_s$$

et de ce que $(\overline{\text{act}}(s))_{(a)}$ et $(\overline{\text{td}}(s)^{-1})_s$ sont des isomorphismes. Alors (fonctions implicites). $V_{(a)}$ est une sous-variété indéf. diff. de dim. $r_{(a)}$. Si et seulement si $r_{(a)} = p = \dim V$, G opère transitivement sur V au voisinage de a . Remarquons que $\{S\}$ est, en chaque point x , tangent à la classe d'intransitivité $V_{(x)}$, et que, sur cette classe, $\{S\}$ est le champ associé à $S \in \mathcal{G}$ lorsqu'on considère G comme opérant sur cette classe.

$$(11, 3) \quad \frac{d}{d\lambda} (x s(\lambda)) = \bar{x} \frac{ds}{d\lambda} \in \bar{x}(s(\lambda)) \mathcal{N} = \bar{x} s(\lambda) \mathcal{N} = \{0\}$$

donc $x s = x s(\lambda) = x s(0) = x$. Donc $\text{act}(s)$ est l'identité sur V ,
 et $\mathbb{N} = G(a')$ C.Q.F.D.

§ 12. Sous-groupe normalisateur. Groupe de transformations de Lie transitif. Espace homogène de Lie.

Proposition. Si G est un germe de groupe de transform. de Lie, le germe de sous-groupe normalisateur \mathbb{N}_a d'un élément a de V (éléments s tels que $as = a$) est un germe de sous-groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie est le noyau \mathcal{N}_a de l'application $S \rightarrow \bar{a} S$ de \mathcal{G} dans $E(a, V)$.

Cela résulte de ce que l'application $(\text{pas } (a))_s$ a partout le même rang $r(a)$ pour $s \in G$, et du théorème des fonctions implicites : \mathbb{N}_a est une variété indéf. diff. tangente en e à \mathcal{N}_a , donc, comme c'est un germe de sous-groupe, c'est un germe de sous-groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{N}_a .

Proposition. Soit G un germe de groupe de Lie, H un germe de sous-groupe de Lie. Il est possible de définir canoniquement un espace homogène de Lie quotient $V = G/H$, qui est un germe de variété indéf. diff. sur lequel G opère à droite transitivement. Le tout est défini à un isomorphisme local près. Sur V , H est le sous-groupe normalisateur de e .

Soit en effet K une sous-variété de G , passant en e , telle que son sous-espace vectoriel tangent $\mathcal{K} = E(e, K)$ soit supplémentaire de \mathcal{H} dans \mathcal{G} . Nous nous restreindrons à des voisinages de e assez petit dans G, H, K pour que $(x, y) \rightarrow xy$ soit un isomorphisme de $H \times K$ sur G (prop.). Nous poserons

$$(12, 1) \quad x = (\text{pr}_H x) (\text{pr}_K x)$$

Nous définirons d'abord $V = G/H$ comme étant la variété indéf. diff. K (espace des classes à gauche Hx). Nous définirons alors l'application

$\langle x, s \rangle \rightarrow x \perp s$ de $K \times G$ dans K par

$$(12, 2) \quad x \perp s = \text{pr}_K x s$$

qui est indéf. diff. Remarquons que si x et s sont quelconques dans G , assez voisins de e ,

$$(12, 3) \quad \text{pr}_K(x s) = \text{pr}_K((\text{pr}_K x)s) = (\text{pr}_K x) \perp s \quad \text{d'où, si } x \in K :$$

$$(12, 4) \quad (x \perp s) \perp t = \text{pr}_K(x \perp s)t = \text{pr}_K((\text{pr}_K x s)t) = \text{pr}_K x s t = x \perp s t .$$

Ainsi G opère à droite sur V ; e opère comme l'identité, et bien évidemment $e \perp s = e$ signifie $\text{pr}_K s = e$ ou $s \in H$; H est bien le sous-groupe normalisateur de $e \in V$. Enfin G opère transitivement sur V , car si $x \in K$, $x = e \perp x$.

Il reste à démontrer qu'à un isomorphisme local près tout est indépendant du choix de la variété K . Si en effet K' en est une autre, une même classe à gauche suivant H coupe K et K' en 2 points qui vont être mis en correspondance isomorphique sur K et K' ;

$$(12, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \xrightarrow{\text{pr}'_{K'}} x \quad \text{de } K \text{ sur } K' \\ x' \xrightarrow{\text{pr}_K} x' \quad \text{de } K' \text{ sur } K \end{array} \right.$$

Ce sont bien 2 automorphismes réciproques car, pour $x \in G$.

$$(12, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \text{pr}'_H x \quad \text{pr}'_{K'} x \quad \text{donc} \\ \text{pr}_K x = \text{pr}_K(\text{pr}'_{K'} x) \quad \text{ou } \text{pr}_K = \text{pr}_K \circ \text{pr}'_{K'} . \end{array} \right.$$

Sur K et sur K' , pr_K est l'identité.

Comme ces automorphismes sont indéf. diff. la structure indéf. diff. de G/H est indépendante de K . D'autre part pour $x \in K$, $s \in G$

$$(12, 7) \quad \text{pr}'_{K'}(x \perp s) = \text{pr}'_{K'}(\text{pr}_K(x s)) = \text{pr}'_{K'}(x s) = (\text{pr}'_{K'} x) \perp s$$

donc les structures opératoires de G sur K et K' sont isomorphes. C.Q.F.D.

Réciproquement :

Proposition . Si G est un groupe de transform. de Lie opérant transitivement sur V , et si N_a est le normalisateur de a , le système (V, G) est canoniquement isomorphe à l'espace homogène de Lie G/N_a .

Soit en effet dans G , K une sous-variété supplémentaire de N_a . L'application $x \rightarrow ax = \bar{\Phi}(x)$, restreinte à K , est alors un isomorphisme indéf. diff. de K sur V (théorèmes des fonctions implicites ; autrement dit, K opère simplement et transitivement sur V), donc définit un isomorphisme de variété de G/N_a sur V . Quel que soit $s \in G$, on a d'ailleurs

$$(12, 8) \quad a s = (a \operatorname{pr}_H s) \operatorname{pr}_K s = a(\operatorname{pr}_K s)$$

puisque N_a est le normalisateur de a . On a pour

$$x \in K, \quad s \in G :$$

$$(12, 9) \quad \bar{\Phi}(x s) = \bar{\Phi}(\operatorname{pr}_K x s) = a(\operatorname{pr}_K x s) = a x s = \bar{\Phi}(x) s.$$

Donc $\bar{\Phi}$ applique la structure opératoire $(G, G/N_a)$, sur la structure opératoire (G, V) .

Enfin $\bar{\Phi}$, comme correspondance entre G/N_a et V , est indépendant du choix de K , car, si $x \in K$:

$$\bar{\Phi}(x) = ax = a(\operatorname{pr}'_K x) = \bar{\Phi}'(\operatorname{pr}'_K x) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

§ 13. Sous-groupe de Lie distingué, groupe quotient.

Opérateurs identiques d'un groupe de transformations de Lie.

Proposition. Soit G un germe de groupe de Lie, H un germe de sous-groupe de Lie distingué. L'algèbre de Lie \mathfrak{h} de H est un idéal de \mathfrak{g} . On peut définir canoniquement à un isomorphisme local près, un germe de groupe de Lie quotient G/H , dont l'algèbre de Lie est isomorphe à l'algèbre quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

On dit que H est distingué si tout automorphisme intérieur $\text{int}(a)$, a assez voisin de e , transforme H en un germe de sous-groupe équivalent.

Un germe de groupe quotient G' , est un germe de groupe de Lie, accompagné d'une représentation canonique $\bar{\Phi}$ de G sur G' , de noyau H . Un tel G' est défini à un isomorphisme local près. Car si G_1 en est un autre,

Φ_1 la représentation canonique de G dans G_1 , on voit que $x \longrightarrow \Phi_1(\Phi^{-1}\{x\})$ est un isomorphisme algébrique de G sur G_1 ; soit K une sous-variété de G supplémentaire de H ; Φ , restreint à K , est un isomorphisme, d'inverse Φ_K^{-1} , et l'isomorphisme précédent est $\Phi_1 \circ \Phi_K^{-1}$ indéf. diff. Pour démontrer la proposition précédente, on considère

alors l'espace homogène $V = G/H$, G opérant à droite. H est le normalisateur de e , mais il est distingué, donc il est le normalisateur de tout élément, donc identique à l'ensemble de $s \in G$ qui opèrent identiquement, sur V ; (réciproquement, un normalisateur ne peut être égal à l'ensemble des opérateurs identiques que s'il est distingué). Alors si on pose, sur V , $x \perp y = e \perp x' y'$, où x' et y' sont tels que $x = e \perp x'$, $y = e \perp y'$, on a sur V une structure de germe de groupe G' .

Alors $x' \longrightarrow x = \Phi(x') = e \perp x'$ est une représentation de G sur G' , de noyau H , et c'est une application indéf. diff., si dans G , K est une sous-variété supplémentaire de H , Φ , restreint à K est un isomorphisme de variété Φ_K , donc $x \perp y = \Phi((\Phi_K^{-1} x)(\Phi_K^{-1} y))$, donc G' est un germe de groupe de Lie, donc un germe de groupe de Lie quotient.

Quel que soit le procédé de définition de G' , il existe un isomorphisme canonique $\bar{\Phi}$ de G sur G' , donc $\bar{\Phi}$ de \mathcal{G} sur \mathcal{G}' . Comme le noyau de $\bar{\Phi}$ est H , le noyau de $\bar{\Phi}$ est \mathcal{H} , donc $\mathcal{G}' \cong \mathcal{G}/\mathcal{H}$ et $\bar{\Phi} = \pi$, application canonique de \mathcal{G} sur \mathcal{G}/\mathcal{H} .

Mais alors le crochet défini sur \mathcal{G}' doit être tel que $\bar{\Phi}$ soit un homomorphisme d'algèbre de Lie; donc

$$(13, 1) \quad \pi[A, X] = 0 \quad \text{si} \quad A \in \mathcal{H}, \quad X \in \mathcal{G},$$

autrement dit \mathfrak{h} est un idéal de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , et alors

$$(13, 2) \quad \pi[x, y] = [\pi(x), \pi(y)]'$$

en désignant par $[]'$ le crochet dans \mathfrak{g}' , ce qui prouve que

$\mathfrak{g}' \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ comme algèbre de Lie.

Remarque : On aurait pu agir autrement, en définissant intrinsèquement le germe de groupe topologique G/H , puis la structure différentiable en disant que φ , fonction numérique sur G/H , est diff. si son image réciproque $\tilde{\varphi}$ sur G est différ. Le caractère intrinsèque de tout cela ne nécessite nullement l'intervention de K mais c'est un peu long, il faut beaucoup de voisinages emboîtés. De toute façon l'intervention de K est nécessaire pour montrer que ce qu'on a défini est bien une structure différ., avec la bonne dimension et que l'opération de groupe est différ.

Proposition . Si G est un groupe de transformations de Lie opérant sur une variété V , l'ensemble N des $s \in G$ qui opèrent identiquement sur V , est un germe de sous-groupe de Lie distingué, et son algèbre de Lie tangente est \mathcal{N} , noyau de l'application $S \rightarrow \{S\}$. Si G' est le germe quotient G/N , $\tilde{\Phi}$ la représentation canonique de G sur G' , G' opère sur V par

$$(13, 3) \quad x \cdot \tilde{\Phi}(s) = x \cdot s .$$

Cela résulte de la prop. , mais celle-ci fait en réalité intervenir un système complètement intégrable, c.à.d. des propriétés de la 2^e partie du rapport, et j'ai proposé de la rejeter. Voici une démonstration indépendante.

Soit \dot{S} la classe de $S \in \mathfrak{g}$, modulo \mathcal{N} . Alors $\dot{S} \rightarrow \{S\}$ est un isomorphisme. Remplaçant V par $V' = V \times \dots \times V = V^n$, on montre qu'il existe un point $a' = (a_1, \dots, a_n) \in V'$ tel que l'application $\dot{S} \rightarrow \bar{a}'S$ soit un isomorphisme. Le noyau de l'application $S \rightarrow \bar{a}'S$ est alors \mathcal{N} .

Comme l'application $s \rightarrow a's$ de G dans V' a partout le même rang, le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe une variété indéf. diff. $N_{(a')} \subset G$, tangente en e à \mathcal{N} , qui est l'ensemble des éléments $s \in G$ dont l'image par $\text{pas}(a')$ est a' . $N_{(a')}$ est évidemment un germe de sous-groupe (normalisateur de $a' \in V'$) donc c'est un germe de sous-groupe de Lie.

Nous avons donc trouvé un germe de sous-groupe de Lie $N_{(a')}$, d'algèbre de Lie \mathcal{N} qui est le normalisateur de $a' \in V'$. Bien évidemment $N \subset N_{(a')}$. Montrons que $N \supset N_{(a')}$ du seul fait que $N_{(a')}$ est tangent à \mathcal{N} . Soit en effet $s \in N_{(a')}$. Soit $s(\lambda)$ une courbe indéf. diff. de $N_{(a')}$, $s(0)=e$, $s(1)=s$. Chaque vecteur tangent $\frac{ds}{d\lambda}$ est dans $\overline{s(\lambda)} \mathcal{N}$.

Si alors $x \in V$, on aura

$$\frac{d}{d\lambda} (x s(\lambda)) = x \frac{ds}{d\lambda} \in \overline{s(\lambda)} \mathcal{N} = \overline{x s(\lambda)} \mathcal{N} = \{0\}$$

Donc $xs = xs(\lambda) = xs(0) = x$, C.Q.F.D.

§ 14. Formes différentielles invariantes à gauche.

Suivant les notations du § 2, prenons pour $\xi(x)$, l'espace vectoriel $\Lambda^p E^*(x, G)$. Un champ de vecteurs subordonné est une forme différentielle de degré p . L'espace des formes différentielles de degré p invariantes à gauche est alors canoniquement isomorphe à $\Lambda^p E^*(e)$, par les deux opérateurs ¹⁰¹¹¹ réciproques Tr et Tr^{-1}_g .

On peut alors définir une opération linéaire d_g (que nous noterons encore d , quand aucune confusion ne sera possible) de $\Lambda^p E^*(e)$ dans $\Lambda^{p+1} E^*(e)$:

$$(14, 1) \quad d_g \cdot \alpha = (\text{Tr} \circ d \circ \text{Tr}^{-1}_g) \cdot \alpha$$

Dg a les propriétés de l'opérateur d :

$$(14, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_g.(\alpha \wedge \beta) = (d_g \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d_g \beta) \\ \text{si } \alpha \text{ est de degré } p ; \\ d_g.d_g.\alpha = 0 \\ d_g.\alpha = 0 \quad \text{si } \alpha \text{ est de degré } 0 . \end{array} \right.$$

De même les formes différentielles invariantes à droite définissent une opération d_d , et (3, 4) montre que $\overline{\text{sym}}$ est un automorphisme de $\Lambda \mathcal{Y}^*$ sur lui-même qui échange d_g et d_d . Comme $\overline{\text{sym}}(\alpha) = (-1)^p \alpha$ si α est de degré p , on a

$$(14, 3) \quad d_d \alpha = \overline{\text{sym}}(d_g(\overline{\text{sym}}(\alpha))) = -d_g \alpha$$

Les formules (3,5) et les formules connues sur les variétés

$$(14, 4) \quad \langle X \wedge Y, d\alpha \rangle = -\langle [X, Y], \alpha \rangle$$

[Cette formule peut aussi se voir de la façon suivante. La formule classique de dualité sur les variétés est

$$(14, 5) \quad \langle \xi \wedge \eta, d\omega \rangle = \langle [\xi, \eta], \omega \rangle + \langle \eta, \theta(\xi).\omega \rangle - \langle \xi, \theta(\eta).\omega \rangle$$

Mais on a aussi

$$(14, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle [\xi, \eta], \omega \rangle + \langle \eta, \theta(\xi).\omega \rangle = \theta(\xi).(\langle \eta, \omega \rangle) = 0 \\ \langle [\xi, \eta], \omega \rangle - \langle \xi, \theta(\eta).\omega \rangle = -\theta(\eta).(\langle \xi, \omega \rangle) = 0 \end{array} \right.$$

$$(14, 7) \quad 2\langle [\xi, \eta], \omega \rangle + \langle \eta, \theta(\xi).\omega \rangle - \langle \xi, \theta(\eta).\omega \rangle = 0$$

En ajoutant (14, 6) et (14, 5), on a (13, 7).

On peut enfin obtenir immédiatement (13, 5) avec une méthode qui ne sera possible que plus tard, comme conséquence de la propos. (2^e partie)

Soient $\xi = \text{Tr}^{-1} g X$, $\eta = \text{Tr}^{-1} g Y$, $\omega = \text{Tr}^{-1} d\alpha$. Appliquons à ξ, η, ω , la formule de dualité (14, 5). Dans cette formule,

$\theta(\xi).\omega = \theta(\eta).\omega = 0$, car ξ et η sont des transformations infinitésimales de translations à droite et ω est invariante à droite. Il reste

$$(14, 8) \quad \langle \xi \wedge \eta, d\omega \rangle = \langle [\xi, \eta], \omega \rangle$$

En prenant les traces, on a $\text{Tr } d\omega = d_d \alpha = -d_g \alpha$,

$$\text{Tr } [\xi, \eta] = [X, Y]_g, \text{ d'où (13, 5).}$$

On voit que $[\]$ et $-d$ sont transposées.

§ 15. Mesure de Haar.

Un germe de groupe de Lie est orientable au voisinage de e et son orientation est invariante par les translations à gauche et à droite et les automorphismes intérieurs assez voisins de l'unité. Supposons-le orienté. Soit alors $\alpha \in \Lambda^n \mathfrak{g}^*$; $\omega = \text{Tr } g^{-1} \alpha$ est à un facteur près l'unique forme différentielle de degré n invariante à gauche, donc

$$(15, 1) \quad \mu(\varphi) = \int_G \omega \varphi$$

est une mesure de Haar sur G .

L'unicité de la mesure de Haar résulte d'un théorème général. Mais ici on a plus : une distribution invariante à gauche est proportionnelle à ω , car elle est proportionnelle à ses régularisées à gauche qui sont des formes indéf. diff. de degré n .

Ce n'est pas ici le lieu ...

§ 16. Opérateurs différentiels invariants à gauche et algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie.

Une dérivation D d'ordre $\leq m$, en un point a , d'une variété indéf. diff. est une forme linéaire $D.\varphi$ sur les fonctions φ indéf. diff., telle que $D.\varphi = 0$ si φ a toutes ses dérivées d'ordre $\leq m$ nulles en a sur une carte (propriété indépendante de la carte). Sur une carte, D se décompose canoniquement en somme de dérivations homogènes d'ordres $1, 2, \dots, m$, mais cette décomposition et cette structure dépendant de la carte et l'espace des dérivations en un point acquiert une structure

d'algèbre isomorphe à l'algèbre des polynomes, si Φ est une application indéf. diff. de U dans V , nous appellerons encore $\overline{\Phi}$ l'application prolongée $D \rightarrow \overline{\Phi}(D)$ aux dérivations d'ordre quelconque.

Un champ \mathcal{V} indéf. diff. de dérivations d'ordre $\leq m$ est un opérateur de dérivation (ou opérateur différentiel) d'ordre $\leq m$. Un tel opérateur opère sur les fonctions φ indéf. diff.

Les opérateurs différentiels \mathcal{V} forment une algèbre car si \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont deux opérateurs différentiels, l'opération $\varphi \rightarrow (\mathcal{V}_1 \circ \mathcal{V}_2) \cdot \varphi$ est aussi un opérateur différentiel. Par contre les dérivations D en un point ne forment pas une algèbre. Les opérateurs de dérivation \mathcal{V} forment un espace \mathcal{E} du type indiqué au § 2. On peut donc parler d'opérateur de dérivation invariant à gauche sur un germe de groupe de Lie d'ordre $\leq m$; les opérateurs de dérivation invariants à gauche forment un espace vectoriel de dimension finie isomorphe à l'espace vectoriel des dérivations d'ordre $\leq m$ en e . Comme les opérateurs de dérivation invariants à gauche forment une algèbre, ils définissent sur l'espace vectoriel des dérivations en e une structure intrinsèque d'algèbre par la formule

$$(16, 1) \quad D_1 D_2 = \text{Tr} \left(\text{Tr}_G^{-1} D_1 \circ \text{Tr}_G^{-1} D_2 \right)$$

Nous appellerons $\tilde{\mathcal{G}}$ cette algèbre.

Proposition : Si Φ est une représentation d'un germe de groupe de Lie G dans un germe de groupe de Lie G' , l'application $\overline{\Phi}$ de l'algèbre $\tilde{\mathcal{G}}$ dans l'algèbre $\tilde{\mathcal{G}}'$ est une représentation.

Toujours pareil : l'opérateur différentiel

$\text{Tr}_G^{-1} D$, $D \in \mathcal{V}$, a une image par $\overline{\Phi}$, qui est l'opérateur $\text{Tr}_{G'}^{-1} (\overline{\Phi} D)$.

Proposition . L'algèbre $\tilde{\mathcal{G}}$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie \mathcal{G} .

Rappelons que l'algèbre enveloppante est l'algèbre tensorielle $\otimes \mathcal{A}$ modulo l'idéal bilatère \mathcal{J} engendré par les

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y].$$

Nous montrerons cette proposition par étapes.

Lemme 1. Soient $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, n champs de vecteurs sur une variété V , formant en chaque point une base de l'espace tangent.

Tout opérateur différentiel d'ordre $\leq m$ admet au moins une décomposition finie en somme

$$(16, 2) \quad \mathcal{D} = \sum \lambda_{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \theta(\eta_{i_1}) \circ \theta(\eta_{i_2}) \dots \circ \theta(\eta_{i_p})$$

avec $i_1 \leq i_2 \dots \leq i_p$, et $p \leq m$.

En effet, une carte montre que \mathcal{D} , champ de dérivation, admet une décomposition du type

$$(16, 3) \quad \mathcal{D} = \sum \mu_{j_1 j_2 \dots j_p} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \circ \frac{\partial}{\partial x_{j_2}} \dots \circ \frac{\partial}{\partial x_{j_p}}$$

$j_1 \leq j_2 \dots \leq j_p$, $p \leq m$.

Supposons le théorème montré pour $m-1$, montrons-le pour m , ce qui revient à ne nous occuper que des termes de (16, 3) où $p = m$.

On a

$$(16, 4) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum \theta(\nu_{jk} \eta_k)$$

Mais d'autre part

$$(16, 5) \quad \theta(\nu \eta) \circ \theta(\nu' \eta') = \nu \nu' \theta(\eta) \circ \theta(\eta') + \nu(\theta(\eta) \cdot \nu') \theta(\eta') = \\ = \nu \nu' \theta(\eta) \circ \theta(\eta') + \text{opérateur différentiel d'ordre } \leq 1$$

On ramène immédiatement (16, 3) à la somme d'un opérateur de dérivation d'ordre $\leq m-1$ et d'un opérateur de la forme (16, 2) mais avec des i_k rangés n'importe comment. Mais on a

$$(16, 6) \quad \theta(\eta_j) \circ \theta(\eta_k) = \theta(\eta_k) \circ \theta(\eta_j)$$

+ opération de dérivation $\theta[\eta_j, \eta_k]$ d'ordre ≤ 1 ; on ramène la décomposition à la somme de (16, 2) par simple permutation des indices, à une dérivation près d'ordre $\leq m-1$, C.Q.F.D.

Lemme 2. La décomposition (16, 2) est unique. En effet, on a, pour la dérivation $D = \mathcal{D}(a)$

$$D\varphi = \mathcal{D}(a) \cdot \varphi = \sum \lambda_{i_1 \dots i_p} (a) ((\theta(\eta_{i_1}) \circ \dots \circ \theta(\eta_{i_p})) \circ \varphi)(a)$$

ce qui montre que les $\theta(\eta_{i_1}) \circ \theta(\eta_{i_2}) \dots \circ \theta(\eta_{i_p})$ forment en a un système de générateurs de l'espace des dérivations d'ordre $\leq m$ ayant juste la bonne dimension, donc une base.

Lemme 3. Il existe un isomorphisme canonique entre l'espace $\bigotimes_m E$ des tenseurs symétriques d'ordre m sur $E(a, V)$ et l'espace quotient E^m/E^{m-1} de l'espace $E^m(a)$ des dérivations d'ordre $\leq m$ en a par l'espace $E^{m-1}(a)$ des dérivations d'ordre $\leq m-1$.

Soient en effet X_1, X_2, \dots, X_m , m vecteurs tangents en a à V . Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, un champ de vecteurs tels que $\xi_1(a) = X_1$. D'après la démonstration du lemme 1, l'opérateur différentiel $\theta(\xi_1) \circ \theta(\xi_2) \circ \dots \circ \theta(\xi_m)$ a une valeur en a qui est déterminée par la seule connaissance de X_1, X_2, \dots, X_m , modulo les dérivations d'ordre $\leq m-1$. Cette valeur ne change pas par permutation des X_i , donc (Scholie) application linéaire canonique de $\bigotimes_m E$ dans E^m/E^{m-1} . Application sur d'après lemme 1 ; biunivoque d'après dimension, donc isomorphisme.

Corollaire du lemme 3. La classification des dérivations d'ordre 2 est celle des formes quadratiques.

Lemme 4. Tout opérateur de dérivation, invariant à gauche, sur un germe de groupe de Lie G , admet une décomposition unique (16, 2), où les η_i sont les $\text{Tr}_{\mathfrak{g}}^{-1}(e_i)$ d'une base e_i de \mathfrak{g} et où les λ sont des constantes ; et réciproquement.

Immédiat par comparaison des dimensions pour les opérateurs de dérivation d'ordre $\leq m$. Ou encore : une translation à gauche devant laisser invariant \mathcal{D} et les η_i , laisse invariants les coefficients λ .

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition. Les applications multilinéaires

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \longrightarrow \theta(\xi_1) \circ \theta(\xi_2) \circ \dots \circ \theta(\xi_n) \quad (\text{où } X_i \in \mathcal{G}, \xi_i = \text{Tr}^{-1} \mathcal{G} X_i)$$

définit une application linéaire $\ell : Z \rightarrow \xi$ de l'espace vectoriel $\otimes \mathcal{G}$ des tenseurs sur \mathcal{G} dans l'espace vectoriel des opérateurs de dérivation invariants à gauche. C'est une représentation d'algèbre. C'est une représentation sur (lemme 3). Cherchons le noyau \mathcal{N} de cette représentation, qui est nécessairement un idéal bilatère.

On a

$$(16, 7) \quad \ell(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]) = \theta(\xi) \circ \theta(\eta) - \theta(\eta) \circ \theta(\xi) - \theta[\xi, \eta] = 0$$

donc \mathcal{N} contient l'idéal bilatère \mathcal{J} engendré par les $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$.

Montrons que $\mathcal{N} \subset \mathcal{J}$. Soit Z un tenseur quelconque, son image $\xi = \ell(Z)$. En fonction d'une base e_i de \mathcal{G} (avec $\eta_i = \text{Tr}^{-1} \mathcal{G} e_i$), on a

$$(15, 8) \quad \begin{cases} Z = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p} \lambda_{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_p} \\ \xi = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p} \lambda_{j_1 j_2 \dots j_p} \theta(\eta_{j_1}) \circ \theta(\eta_{j_2}) \circ \dots \circ \theta(\eta_{j_p}) \end{cases}$$

Pour ramener ξ à sa forme canonique (16, 2) avec des indices rangés

$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p$, on doit remplacer un certain nombre de fois une expression

$$\theta(\eta_j) \circ \theta(\eta_k) \quad \text{par} \quad \theta(\eta_k) \circ \theta(\eta_j) + \theta[\eta_j, \eta_k]$$

ce qui revient à remplacer Z par un tenseur $Z_1 = Z \pmod{\mathcal{J}}$. Autrement dit

$$(15, 8) \quad \ell(Z) = \ell(Z_1) \quad \text{et} \quad Z \equiv Z_1 \pmod{\mathcal{J}}.$$

Lorsque ξ a sa forme canonique, il ne peut être nul que si tous ses coefficients sont nuls. Alors

$$(15, 9) \quad \begin{cases} \xi \text{ ou } \ell(Z) = 0 & \iff & Z_1 = 0 & \text{donc} \\ Z \in \mathcal{N} & \iff & Z_1 = 0 & \longrightarrow Z \in \mathcal{J} \end{cases}$$

et par suite $\mathcal{N} \subset \mathcal{J}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{J}$.

Alors l'application ℓ est un isomorphisme de $\otimes \mathcal{G} / \mathcal{J}$, algèbre enveloppante de \mathcal{G} , sur l'algèbre des opérateurs de dérivation invariants à gauche ou l'algèbre correspondante $\tilde{\mathcal{G}}$ des dérivations en e .

Corollaire. Tout élément de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} a une décomposition unique sous la forme

$$(16, 10) \quad \dot{z} = \sum \lambda_{i_1 \dots i_p} \dot{z}_{i_1} \dot{z}_{i_2} \dots \dot{z}_{i_p}, \quad i_1 \leq i_2 \dots \leq i_p.$$

Le nombre $m = \text{sup.} p$ est l'ordre de \dot{z} . L'application canonique $z \rightarrow \dot{z}$ de \mathfrak{g} dans $\otimes \mathfrak{g} / \mathfrak{I}$ est un isomorphisme.

Ces propriétés sont vraies dans une algèbre de Lie quelconque, mais plus enquiquinantes à montrer.

Remarque. Supposons comme la variété indéf. diff. G , et la structure d'algèbre de Lie \mathfrak{g} de l'espace tangent $E(e, G)$. L'algèbre enveloppante $\otimes \mathfrak{g} / \mathfrak{I}$ est alors connue. L'espace $\tilde{\mathfrak{g}}$ des dérivations en e est connu, mais sa structure d'algèbre n'est pas connue. Son isomorphisme avec l'algèbre enveloppante n'est pas connu sauf sur \mathfrak{g} . Enfin les opérateurs de dérivation invariants, même d'ordre 1, ne sont pas connus.

Remarque. La structure d'algèbre sur l'espace $\tilde{\mathfrak{g}}$ des dérivations en e , définie par les opérateurs de dérivation invariants à gauche, doit s'appeler $\tilde{\mathfrak{g}}_g$. Il existe une autre structure $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ définie par les opérateurs de dérivation invariants à droite. L'application linéaire $\overline{\text{sym}}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur lui-même (qui n'est pas déterminée par le fait que pour $X \in \mathfrak{g}$, $\overline{\text{sym}}(X) = -X$, mais nécessite la connaissance de G) transforme la structure $\tilde{\mathfrak{g}}_g$ en la structure $\tilde{\mathfrak{g}}_d$.

DEUXIEME PARTIE.

PASSAGE du PONCTUEL au LOCAL : ALGEBRE de LIE → GERME de GROUPE de LIE.

§ 1 . Espaces vectoriels attachés à une variété.

Supposons attachée à toute variété V un espace vectoriel topologique \mathcal{E} , avec les propriétés suivantes :

1° - si la variété V_1 est un ouvert de la variété V , il existe une application linéaire continue canonique \bar{H} de $\mathcal{E}(V)$ sur $\mathcal{E}(V_1)$ (induction). De plus on a transitivité.

Si H est un isomorphisme d'une variété U sur une variété V , H définit alors un isomorphisme canonique \bar{H} de $\mathcal{E}(U)$ sur $\mathcal{E}(V)$. Mais H définit un isomorphisme d'un tout ouvert U_1 de U sur un ouvert V_1 de V , et on doit avoir le diagramme de compatibilité

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}(U) & \longrightarrow & \mathcal{E}(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E}(U_1) & \longrightarrow & \mathcal{E}(V_1)
 \end{array}$$

D'où une application linéaire continue canonique de $\mathcal{E}(U)$ sur $\mathcal{E}(V)$.

2° - Soit H un automorphisme d'une variété U sur un ouvert variable d'une variété V , contenant toujours un même ouvert V_1 . On suppose que H dépende d'un paramètre réel λ de manière indéf. diff. Alors l'application \bar{H} de $\mathcal{E}(U)$ sur $\mathcal{E}(V_1)$ dépend de λ ; \bar{H} doit être tel que l'application $(\xi, \lambda) \rightarrow \bar{H}(\xi; \lambda)$ soit une application continue de $\mathcal{E}(U) \times \mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}(V_1)$, ainsi que chacune de ses dérivées partielles en λ .

3° - $\mathcal{E}(U)$ doit encore vérifier d'autres propriétés que nous verrons ultérieurement.

Exemples. \mathcal{E} est l'espace des champs de tenseurs généralisés indéf. diff. à support quelconque, d'espèce (\mathcal{E}) , avec la topologie de la convergence compacte de chaque dérivée.

Ou l'espace des distributions à support quelconque, etc...

A côté de ces espaces \mathcal{E} du type "inductif" on pourra en considérer du type "injectif" ; dans le 1^o, \mathbb{H} applique biunivoquement $\mathcal{E}(V_1)$ dans $\mathcal{E}(V)$.

Ex : espaces de champs de tenseurs ou de distributions à support compact. Modifications évidentes.

§ 2. Transformations infinitésimales et germes de groupes de transformations de Lie à un paramètre.

Une transformation infinitésimale σ sur V définit, par une équation différentielle, un germe de groupe à un paramètre $\lambda \rightarrow S(\lambda)$ de transformations sur tout compact de V , avec

$$(2, 1) \quad \frac{d}{d\lambda} (S(\lambda).x) = \sigma(S(\lambda).x).$$

Rappelons que $S(\lambda)$ ne dépend que du champ $\lambda \sigma$.

Proposition . Soit T un automorphisme de V . Pour que T commute avec les $S(\lambda)$, il faut et il suffit que T laisse invariant le champ σ .

Simple transport de structure.

On pourra alors définir l'opération $\theta(\sigma)$ sur un espace \mathcal{E} par :

$$(2, 2) \quad \theta(\sigma). \xi = - \left(\frac{d}{d\lambda} (S(\lambda). \xi) \right)_{\lambda=0}$$

Nous ferons alors sur \mathcal{E} les hypothèses suivantes ; peut-être toujours vérifiées :

A) $\theta(\sigma). \xi$ dépend linéairement de σ .

B) Si le champ σ dépend d'un paramètre réel λ , de manière que σ et toutes ses dérivées soient fonctions indéf. diff. de λ ,

$(\xi, \lambda) \rightarrow \theta(\sigma). \xi$ est fonction continue sur $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ ainsi que toutes ses dérivées en λ .

On en déduit que $\theta(\sigma). (\theta(\tau). \xi)$ se calcule comme dérivation d'une fonction bilinéaire, et que par suite

$$(2, 3) \quad (\theta(\sigma). \theta(\tau) - \theta(\tau). \theta(\sigma)). \xi = \theta[\sigma, \tau]. \xi.$$

Dans la suite, lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, nous remplacerons parfois $\theta(\sigma) \cdot \xi$ par $\sigma \cdot \xi$.

Proposition . Si $S(\lambda)$ est un groupe à un paramètre de transformation infinitésimale σ , on a, en tant qu'opérateurs sur ξ :

$$(2, 4) \quad \frac{d}{d\lambda} (S(\lambda)) = -S(\lambda) \circ \theta(\sigma) = -\theta(\sigma) \circ S(\lambda).$$

En effet, $S(\lambda + \Delta\lambda) \cdot \xi = S(\Delta\lambda) \cdot S(\lambda) \cdot \xi = \sqrt{S(\Delta\lambda)} \cdot \xi$
d'où (2,4) par définition de l'opération $\theta(\sigma)$ sur ξ .

Corollaire 1. $S(\lambda)$ et σ , comme opérateurs sur ξ , commutent.

Corollaire 2. Pour que $\xi \in \xi$ soit invariant par les $S(\lambda)$, il faut et il suffit que $\sigma \cdot \xi = 0$.

Proposition . Si L est un opérateur continu sur ξ ,

$$(2, 5) \quad \frac{d}{d\lambda} (S(\lambda) \circ L \circ S(-\lambda)) = S(\lambda) \circ [L, \theta(\sigma)] \circ S(-\lambda)$$

Corollaire 1. Pour que L commute avec tous les $S(\lambda)$, il faut et il suffit que L commute avec σ .

Corollaire 2. Soit τ une transformation infinitésimale. Pour que les $S(\lambda)$, opérant sur la variété, laisse τ invariante, il faut et il suffit que $[\sigma, \tau] = 0$.

Car cela revient à dire que la transformée de $\theta(\tau)$ opérateur sur ξ par $S(\lambda)$, soit $S(\lambda) \circ \theta(\tau) \circ S(-\lambda)$, est $\theta(\tau)$; d'où la conclusion.

Mais on peut aussi dire que, pour que $S(\lambda)$ laisse invariant τ considéré comme élément de l'espace des champs de vecteurs, il faut et il suffit (corollaire 2 de la prop.) que $\theta(\sigma) \cdot \tau = 0$, et $\theta(\sigma) \cdot \tau = [\sigma, \tau]$.

Corollaire 3. Pour que deux groupes à 1 paramètre $S(\lambda)$, $T(\mu)$, commutent, il faut et il suffit que $[\sigma, \tau] = 0$. En effet $[S(\lambda), T(\mu)] = 0 \iff [\sigma, T(\mu)] = 0 \iff [\sigma, \tau] = 0$ en considérant tout comme opérant sur ξ .

Définition . L'opération $\xi \rightarrow S(\lambda) \cdot \xi$, en vertu des propriétés qu'elle possède

$$(2, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} S(s) \circ S(t) = S(s+t) \\ \frac{d}{d\lambda} S(\lambda) = -\theta(\sigma) \circ S(\lambda) = -S(\lambda) \circ \theta(\sigma) \end{array} \right.$$

sera appelée exponentielle : $S(\lambda) = \exp(-\lambda\theta(\sigma))$ ou $\exp(-\lambda\sigma)$ par abus de langage. Elle ne dépend que du champ $\lambda\sigma$.

Par extension l'opération $S(\lambda)$ sur V sera aussi appelée $\exp(-\lambda\sigma)$.

Proposition . $\exp(-\lambda\sigma)$ est le seul opérateur sur ξ , continument diff. en λ , qui vérifie l'équation diff. (2, 2) et soit l'identité pour $\lambda = 0$.

En effet si $\Sigma(\lambda)$ est une telle solution de l'équat. diff., on considèrera l'opérateur $\exp(\lambda\sigma) \circ \Sigma(\lambda)$, sa dérivée en λ est nulle, donc il est constant, donc l'identité.

Proposition . En tant qu'opérateur sur ξ , $\exp(-\lambda\sigma)$ dépend de λ de manière indéf. diff. et a le développement de Taylor limité

$$(2, 7) \quad \exp(-\lambda\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\theta(\sigma))^k}{k!}$$

§ 3. L'application exponentielle sur un germe de groupe de Lie.

Proposition . Pour qu'une transformation infinitésimale ξ sur un germe de groupe de Lie G soit invariante à gauche, il faut et il suffit que le germe de groupe des $\exp(-\lambda\xi)$ soit un germe de groupe de translations à droite sur G .

En effet dire que ξ est invariante à gauche, c'est dire que si $tg(a)$ est une translation à gauche, $\overline{tg(a)}$ laisse invariant le champ ξ , donc (corollaire 2 de la prop.) que $tg a$ commute avec les $S(\lambda) = \exp(-\lambda\xi)$. Mais une opération sur G qui commute avec les translations à gauche est une translation à droite. Si donc $S(\lambda) \cdot e = z(\lambda)$, on a

$$(3, 1) \quad S(\lambda) = \text{td}(x(\lambda)) .$$

L'application $\lambda \rightarrow x(\lambda)$ est une représentation indéf. diff. de \mathbb{R} dans \mathfrak{G} , car

$$(3, 2) \quad x(s) x(t) = S(t) \cdot x(s) = S(t) \cdot (S(s) \cdot e) = S(t+s) \cdot e = x(s+t) .$$

Alors les $x(\lambda)$ forment un germe de sous-groupe de Lie à 1 paramètre. Le vecteur tangent à l'origine est

$$\left(\frac{d}{d\lambda} x(\lambda) \right)_{\lambda=0} = \text{Tr } \xi = X .$$

Réciproquement si $\lambda \rightarrow \bar{\Phi}(\lambda)$ est une représentation indéf. diff. de \mathbb{R} dans \mathfrak{G} telle que $\left(\frac{d}{d\lambda} \bar{\Phi}(\lambda) \right)_{\lambda=0} = X$, les $\text{td}(\bar{\Phi}(\lambda))$ forment un groupe à un paramètre de translations à droite, donc leur transformation infinitésimale ξ est invariante à gauche, et comme $\text{Tr } \xi = X$, on a $\xi = \text{Tr}^{-1} X$, et $\bar{\Phi}(\lambda) = x(\lambda)$. Donc

Proposition . Il existe une représentation indéf. diff. et une seule du groupe \mathbb{R} dans \mathfrak{G} telle que $\left(\frac{d}{d\lambda} \bar{\Phi}(\lambda) \right)_{\lambda=0} = X \in \mathbb{E}(e, \mathfrak{G})$; elle est définie par

$$(3, 3) \quad \bar{\Phi}(\lambda) = \exp(-\lambda \text{Tr}^{-1} X) \cdot e .$$

Le sous-groupe des $\bar{\Phi}(\lambda)$ est le seul germe de sous-groupe de Lie à 1 paramètre tangent en e au vecteur X .

Corollaire ;. Si $X \in \mathbb{E}(e, \mathfrak{G})$, on a

$$(3, 4) \quad \exp(-\lambda \text{Tr}^{-1} X) \cdot e = \exp(-\lambda \text{Tr}^{-1} X) \cdot e .$$

En effet la valeur commune des 2 membres est le seul point $\bar{\Phi}(\lambda)$ tel que $\lambda \rightarrow \bar{\Phi}(\lambda)$ soit une représentation de \mathbb{R} dans \mathfrak{G} vérifiant $\left(\frac{d}{d\lambda} \bar{\Phi}(\lambda) \right)_{\lambda=0} = X$.

Définition. On appellera $\exp(-\lambda X)$ la valeur commune des 2 membres de (3, 4); pour tout X , elle est bien définie pour λ assez faible. Elle ne dépend que de λX . On peut donc aussi définir $\exp X$ pour X assez petit, par

$$(3, 5) \quad \exp X = \exp (\text{Tr}^{-1} g X).e = \exp (\text{Tr}^{-1} d X).e .$$

Si $\xi = \text{Tr}^{-1} g X$, la prop. montre que, pour $X \rightarrow 0$, on a le développement asymptotique

$$(3, 6) \quad \text{td} (\exp X) = \sum \frac{(\theta \xi)^k}{k!}$$

(θ étant considéré comme opérateurs sur ξ).

Proposition . L'application exponentielle $X \rightarrow x = \exp(X)$ est un isomorphisme indéf. diff. d'un voisinage de 0 de \mathcal{G} sur un voisinage de e de G .

Elle est évidemment indéf. diff. car $\xi = \text{Tr}^{-1} g X$ dépend indéf. diff. de X , $S(\lambda) = \exp(-\lambda \xi)$ indéf. diff. de ξ , et $S(\lambda).e$ indéf. diff. de $S(\lambda)$.

C'est un isomorphisme, car l'application tangente en e est l'identité $X \rightarrow X$ de \mathcal{G} .

Nous appellerons $\exp^{-1} x$ l'application réciproque, d'un voisinage de $e \in G$ dans \mathcal{G} .

Définition . La carte locale définie par l'application $x \rightarrow -x = -\exp^{-1} x$ est appelée carte canonique de G . Si $(F_i)_{i=1,2,\dots,n}$ est un système de coordonnées dans \mathcal{G} défini par une base (e_i) , les coordonnées locales $x \rightarrow -F_i(\exp^{-1} x) = x_i(x)$ sont les coordonnées canoniques correspondantes. La carte canonique permet de représenter le germe de groupe comme l'espace vectoriel \mathcal{G} , muni d'une loi de composition de groupe indéf. diff., que nous noterons $(X, Y) \rightarrow XY$, au voisinage de 0.

Dans cette loi l'inverse X^{-1} est $-X$, les droites issues de l'origine sont les sous-groupes de Lie à 1 paramètre, $\lambda \rightarrow \lambda X$ les représentations indéf. diff. de \mathbb{R} dans le groupe, et $(\lambda X)(\mu X) = (\lambda + \mu)X$.

Proposition (formule de Taylor) -

Si $x = \exp(-X)$, $\xi = \text{Tr}^{-1} g X$, on a, si g est une fonction numérique ou vectorielle indéf. diff., le développement asymptotique, au voisinage de $X = 0$:

$$(3, 7) \quad g(ax) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta(\xi))^k \cdot g}{k!}(a)$$

Il suffit de considérer $\theta(\xi)$ et $tg a$ comme opérant sur l'espace ξ des fonctions indéf. diff. et d'appliquer (3, 6), en remarquant que

$$(3, 8) \quad g(ax) = (td(x^{-1}) \cdot g)(a).$$

Remarque. L'opérateur $(\theta(\xi))^k$ est un polynôme homogène de degré k en X . Donc aussi $\frac{(\theta(\xi))^k \cdot g}{k!}(a)$, et (3, 7) est le développement de Taylor de $g(ax)$ suivant les puissances de X .

Cas particulier :

$$(3, 9) \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(\theta(\xi))^k}{k!} \cdot g \right)(e).$$

Remarque. On peut en particulier appliquer cette formule au cas où $g = f_1$ est une coordonnée canonique ou $g = f = -\exp$, fonction vectorielle $\overset{\text{sur}}{G}$ à valeurs dans \mathcal{O} et $a = e$. Alors $f(x) = X$; $(\xi \cdot f)(e)$ est bien égal à X , et on aura alors

$$(3, 10) \quad (\xi^k \cdot f)(e) = 0 \quad \text{pour } k > 1.$$

Corollaire. Si de même $y = \exp(-Y)$, $\eta = \text{Tr}^{-1} g Y$,

$$(3, 11) \quad g(ax y) = \sum_{k, l} \frac{((\xi)^k \circ (\eta)^l) \cdot g}{k! l!}(a).$$

En général on appliquera (voir remarque ci-dessus) soit à f_1 soit à f , avec $a = e$, d'où

Corollaire. Pour X et Y voisins de 0, on a le développement asymptotique:

$$(3, 12) \quad f(x y) = \sum_{k, l} \left(\left(\frac{(+\xi)^k}{k!} \circ \frac{(+\eta)^l}{l!} \right) \cdot f \right)(e).$$

Développement asymptotique veut dire que si $|X|$, et $|Y| \leq r$, le reste après les termes de degré $\leq k$ en ξ, η , est $O(r^{k+1})$.

D'autre part ce développement asymptotique est dérivable terme à terme.

Comme $((\xi^k \circ \eta^l) \cdot f)(e)$ est un polynome de degré k en X et l en Y , on a le développement de Taylor du produit $X Y$ (pour $g = f$) ou des coordonnées canoniques de $x y$ (pour $g = f_1$) en fonction de X et Y .

Proposition.

$$(3, 13) \quad -\exp^{-1}(x y) X Y = X + Y + ((\xi \circ \eta) \cdot f)(e) + O(x^3)$$

Il suffit en effet d'appliquer (3, 12) compte-tenu de (3, 10).

Le fait que le terme linéaire soit $X+Y$ est la proposition.

Proposition . Pour $X, Y \rightarrow 0$

$$(3, 14) \quad -\exp^{-1}(x y \ x^{-1} y^{-1}) = [X, Y] + O(x^3) .$$

Il suffit en effet d'appliquer la formule (3, 11) à 4 termes, x, y, x^{-1}, y^{-1} , avec $g = f = -\exp^{-1}$:

$$(3, 15) \quad -\exp^{-1}(x y \ x^{-1} y^{-1}) = \sum_{k,l,m,n} \left(\left(\frac{\xi^k}{k!} \circ \frac{\eta^l}{l!} \circ \frac{(-f)^m}{m!} \circ \frac{(-\eta)^n}{n!} \right) \cdot f \right) (e)$$

et de chercher les termes de degré 1, 2, en X, Y .

Cette formule a ceci d'intéressant qu'elle s'obtient dès qu'on connaît l'algèbre de Lie \mathcal{G} et non le groupe lui-même G .

Corollaire. Si G est abélien, \mathcal{G} est abélienne.

Proposition . Pour $X_1, Y_1 \rightarrow 0$

$$(3, 16) \quad -\exp^{-1}(x y \ x) = Y + [X, Y] + O(x^3) .$$

Il suffit ici encore d'appliquer (3, 11) en tenant compte de (3, 10)

Proposition . Sur la carte canonique, le champ $\xi = \text{Tr } g X$ est représenté en $Y = \exp^{-1} y$, pour $X_1, Y_1 \rightarrow 0$ par le développement de Taylor

$$(3, 17) \quad \bar{F}(\xi(y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\eta^k \circ \xi}{k!} \right) \cdot f \right) (e)$$

En effet $\bar{F}(\xi(y)) = (\xi \cdot f)(y)$, et il suffit d'appliquer la formule (3, 10)

Corollaire. Pour $X_1, Y_1 \rightarrow 0$

$$(3, 18) \quad \bar{F}(\xi(y)) = X + ((\eta \circ \xi) \cdot f)(e) + O(x^3) .$$

Remarque. On a aussi la formule pour les transformations définies sur une variété V par des transformations infinitésimales ξ, η :

$$(3, 19) \quad (\exp(-\xi) \circ \exp(-\eta) \circ \exp(\xi) \circ \exp(\eta)) = \\ = \theta[\xi, \eta] + O(r^3), \text{ d'où, sur le groupe } G :$$

$$(3, 20) \quad \text{td}(xy \overset{-1}{x} \overset{-1}{y}) = \theta[\xi, \eta] + O(r^3),$$

tout étant considéré comme opérateur sur \mathcal{E} .

Proposition . L'application $S \rightarrow \exp(-S)$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ du groupe linéaire dans $GL(\mathbb{R}^n)$, coïncide avec l'application $S \rightarrow \text{Exp } S$, où $\text{Exp } S$ est l'exponentielle ordinaire de l'endomorphisme S .

En effet, soit $s(\lambda)$ le sous-groupe à un paramètre engendré par s . On a, sur $GL(\mathbb{R}^n)$, donc dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ des endomorphismes,

$$(3, 21) \quad \begin{cases} \frac{ds(\lambda)}{d\lambda} = S s(\lambda), & s(0) = e, \quad s(1) = s, \text{ donc} \\ s = \text{Exp } S, & \text{exponentielle d'endomorphisme.} \end{cases}$$

§ 4. Action des transformations infinitésimales sur les champs de tenseurs généralisés.

Une transformation infinitésimale ξ invariante à gauche opère sur tout espace \mathcal{E} de champ de tenseurs généralisés.

Rappelons que :

1° - Si η est un champ de vecteurs quelconques,

$$(4, 1) \quad \theta(\xi) \cdot \eta = [\xi, \eta]$$

Alors l'isomorphisme défini par Tr et Tr^{-1} entre \mathcal{V} et l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche transforme l'opérateur $\overline{\text{Ad}}(X)$ de \mathcal{V} en l'opérateur $\theta(\xi)$ les champs de vecteurs invariants à gauche.

Conséquence. Si G est abélien, ξ invariant à gauche est aussi invariant à droite, donc transformation infinitésimales de translations à gauche, alors, η étant invariant à gauche, $[\xi, \eta] = 0$: l'algèbre de Lie \mathcal{V} est abélienne.

2° - $\theta(\xi)$ opère comme une dérivation sur tous les champs de tenseurs ordinaires ; mais $\overline{\text{Ad}}(X)$ se prolonge d'une manière unique en une dérivation sur les tenseurs sur \mathcal{G} , de sorte que Tr et Tr^{-1} transforment encore $\overline{\text{Ad}} X$ opérant comme dérivation sur les tenseurs de \mathcal{G} en $\theta(\xi)$ opérant sur les champs de tenseurs invariants à gauche. Ou encore : si Z est un tenseur quelconque sur \mathcal{G} , on a

$$(4, 2) \quad \theta(\xi) \cdot \text{Tr}^{-1} Z = \text{Tr}^{-1} (\overline{\text{Ad}} X \cdot Z) .$$

3° - $\theta(\xi)$ opère comme dérivation sur toute opération multilinéaire entre champs de tenseurs généralisés. En particulier $\theta(\xi)$ opère sur les opérateurs différentiels \mathcal{D} et comme dérivation pour la composition de ces opérateurs différentiels :

$$(4, 3) \quad \theta(\xi) \cdot (\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2) = (\theta(\xi) \cdot \mathcal{D}_1) \circ \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_1 \circ (\theta(\xi) \cdot \mathcal{D}_2)$$

Mais $\overline{\text{Ad}}(X)$ se prolongeant d'une manière unique en dérivation sur l'algèbre tensorielle $\otimes(\mathcal{G})$, et vérifiant (Jacobi)

$$(4, 4) \quad \overline{\text{Ad}}(X) \cdot (Y \otimes Z - Z \otimes Y - [Y, Z]) \equiv 0 \quad (\text{mod } \mathcal{I})$$

se prolonge d'une manière unique en dérivation sur l'algèbre enveloppante $\otimes(\mathcal{G})/\mathcal{I}$.

Comme $\otimes(\mathcal{G})/\mathcal{I}$ est algébriquement engendrée par \mathcal{G} et que l'algèbre des opérateurs de dérivation invariants à gauche est engendrée par les opérateurs de dérivation d'ordre 1 l'isomorphisme défini par Tr et Tr^{-1} transforme encore $\overline{\text{Ad}}(X)$ comme dérivation sur l'algèbre enveloppante $\otimes(\mathcal{G})/\mathcal{I}$ en $\theta(\xi)$ comme opérateur de dérivation sur l'algèbre des opérations différentiels invariants à gauche.

4° - Si ξ est un champ de tenseurs généralisé, $\xi(e)$ l'espace des tenseurs correspondants en e , on définira l'opération $\overline{\text{Ad}}(X)$ sur $\xi(e)$

$$(4, 5) \quad \overline{\text{Ad}}(X) \cdot Z = \text{Tr}(\theta(\xi) \cdot \text{Tr}^{-1} Z) .$$

§ 5. Champs de tenseurs bi-invariants.

Proposition . Soit G un germe de groupe de Lie, \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Pour qu'un tenseur généralisé Z en e soit trace d'un champ de tenseurs bi-invariant, il faut et il suffit que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$,

$$\overline{\text{Ad}}(X) \cdot Z = 0 .$$

En effet, le champ $\zeta = \text{Tr} \mathfrak{g}^{-1} Z$ est invariant à gauche. Mais d'après (4, 5) dire qu'il est annulé par toutes les transformations infinitésimales $\theta(\xi)$ de translations à droite, c'est dire que ζ est invariant par toutes les translations à droite assez voisines de e (prop. et)

Corollaire 1. Soit $B^*(X, Y)$ la forme bilinéaire symétrique sur \mathfrak{g} (forme de Killing) :

$$(5, 1) \quad B^*(X, Y) = \text{Tr} (\overline{\text{Ad}} X \circ \overline{\text{Ad}} Y)$$

B est invariante par les dérivations intérieures, donc la forme $\text{Tr} \mathfrak{g}^{-1} B^*$ est bi-invariante.

Corollaire 2. Si \mathfrak{g} est semi-simple (ou G), il existe sur G une forme quadratique non dégénérée bi-invariante.

Corollaire 3. Si \mathfrak{g} est semi-simple, il existe sur G un opérateur différentiel du 2^è ordre non dégénéré, bi-invariant (opérateur de Casimir)

Si en effet Γ est l'opérateur de Casimir de \mathfrak{g} , c'est un tenseur symétrique du 2^è ordre non dégénéré, donc son image $\tilde{\Gamma}$ dans $\otimes \mathfrak{g}/\mathcal{I} \approx \tilde{\mathfrak{g}}$ est une dérivation du 2^è ordre non dégénérée, invariante par les dérivations intérieures, donc $\text{Tr} \mathfrak{g}^{-1} \Gamma$ est un opérateur différentiel bi-invariant du 2^è ordre non dégénéré.

Remarque. Plus généralement si sur une variété V existe une forme quadratique non dégénérée invariante par un ensemble G de transformations, il existe aussi un opérateur différentiel invariant du 2^è ordre non dégénéré, le laplacien.

§ 6. Sous-germes de groupes de Lie de G et sous-algèbres de Lie de \mathcal{G} .

Soit G un germe de groupe de Lie, H un germe de sous-groupe de Lie, \mathcal{G} , \mathfrak{g} leurs algèbres de Lie. Remarquons que si X et Y sont dans \mathfrak{g} , $a = \exp(-tX)$ et $b = \exp(-tY)$ sont dans H. Alors $a^{-1}b^{-1}ab \in H$, donc, en faisant tendre t vers 0 et appliquant (3, 13), $[X, Y] \in \mathfrak{g}$: ce qui montre à nouveau que \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} (prop. de la 1^{ère} partie).

Le sous-groupe de Lie engendré par X sur H est un sous-groupe de Lie de H donc de G donc est l'unique sous-groupe de Lie engendré par X sur G : l'application exp, restreinte à \mathfrak{g} , est identique à l'application exp, définie intrinsèquement sur H et son algèbre de Lie \mathfrak{g} . H est donc défini au voisinage de e par $H = \exp \mathfrak{g}$, ce qui prouve qu'il peut exister au plus un germe de sous-groupe de Lie tangent à une sous-algèbre de Lie donnée.

Soit alors réciproquement \mathfrak{g} une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} , et cherchons s'il existe un germe de sous-groupe de Lie H tangent à \mathfrak{g} . Si H existe en un point $a \in H$, le sous-espace tangent à H est $\overline{tg(a)}$. \mathfrak{g} . Mais le système différentiel sur G défini par les sous-espaces tangents $a \rightarrow \overline{tg(a)}$. \mathfrak{g} est invariant à gauche et complètement intégrable. En effet si $(e_i)_{i=1,2,\dots,m}$ est une base de \mathfrak{g} , $\eta_i = \text{Tr}^{-1} \mathfrak{g} e_i$, les $\eta_i(a)$ forment une base de $\overline{tg(a)}$. \mathfrak{g} , et comme $[\eta_i, \eta_j] = \text{Tr}^{-1} \mathfrak{g} [e_i, e_j]$, et que \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie, $[e_i, e_j] \in \mathfrak{g}$, et $[\eta_i, \eta_j](a) \in \overline{tg(a)}$. \mathfrak{g} .

Cela prouve qu'il existe une variété et une seule H, solution de ce système différentiel passant en e, et précisément $H = \exp \mathfrak{g}$ c'est une variété indéf. diff.

Mais alors, la solution unique du système différentiel passant en a, assez voisin de e est $tg(a).H$. Si $a \in H$, cette solution passe en a

donc c'est H elle-même, et, au voisinage de a , $\text{tg}(a)^H$ est confondu avec H , donc H est un germe de sous-groupe de Lie. D'où

Proposition . Pour que le sous-espace vectoriel \mathfrak{h} de \mathcal{G} soit l'espace tangent à un germe de sous-groupe de Lie H , il faut et il suffit que \mathfrak{h} soit une sous-algèbre de Lie ; alors H est défini d'une manière unique à une équivalence près par $H = \exp \mathfrak{h}$.

Remarque . Cela revient à dire que sur la carte canonique, les germes de sous-groupes de Lie sont représentés par les sous-algèbres de Lie \mathfrak{h} ; si X et $Y \in \mathfrak{h}$, non seulement $X + Y \in \mathfrak{h}$, mais aussi $X Y \in \mathfrak{h}$.

Proposition . Toute intersection de germes de groupes de Lie est une intersection finie et est un germe de sous-groupe de Lie.

En effet si $H = \bigcap_i H_i$ (nous entendons par là que $H \subset H_i$ à une équivalence près, pour tout i , et que si H' a la même propriété, $H' \subset H$ à une équivalence près). Alors soit $\mathfrak{h} = \bigcap_i \mathfrak{h}_i$. Evidemment $\exp \mathfrak{h} \subset H$. Montrons que $H \subset \exp \mathfrak{h}$. \mathfrak{h} est une intersection finie $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \dots \cap \mathfrak{h}_m$. Alors H_1, H_2, \dots, H_m , se coupent sous des angles non nuls, donc leur intersection, qui est un sous-groupe, est une variété, donc un sous-groupe de Lie, qui est tangent à \mathfrak{h} donc est $\exp \mathfrak{h}$. Alors $H = \exp \mathfrak{h}$.

Application. Soit G un groupe de transform. de Lie sur V . L'ensemble N des opérateurs identiques de G est un germe de sous-groupe de Lie (prop. 1^{ère} partie) car intersection des normalisateurs. Nous l'avons d'ailleurs bien représenté comme normalisateur de $a' \in V' = V^n$, donc intersection de n normalisateurs.

§ 7. Représentations.

Proposition . Si G, G' sont deux germes de groupes de Lie, ψ une application linéaire de \mathcal{G} dans \mathcal{G}' , pour qu'il existe, au voisinage de e , une représentation indéf. diff. Φ de G dans G' telle que $\Phi = \Psi$,

il faut et il suffit que ψ soit une représentation d'algèbres de Lie ; alors $\bar{\Phi}$ est unique au voisinage de e et définie par

$$(7, 1) \quad \bar{\Phi} \circ \exp = \exp \circ \psi = \exp \circ \overline{\bar{\Phi}} .$$

En effet, si $\bar{\Phi}$ existe, elle ne peut être définie que par cette formule, car $t \rightarrow \bar{\Phi}(\exp(-\lambda X))$ est une représentation de \mathbb{R} dans G' , donc de la forme $t \rightarrow \exp(-\lambda X')$, mais alors $X' = \psi(X)$, on a donc bien $\bar{\Phi}(\exp(-\lambda X)) = \exp(-\lambda \overline{\bar{\Phi}}(X))$.

Reste à montrer que l'application $\bar{\Phi}$ ainsi définie, qui est indéf. diff. est une représentation de groupes. Mais les $(X, \psi(X))$ forment un sous-espace vectoriel \mathfrak{h} de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, qui est une sous-algèbre de Lie du fait que ψ est une représentation. Cela prouve que $H = \exp \mathfrak{h}$, ensemble des $(x, \bar{\Phi}(x))$, est un germe de sous-groupe de Lie de $G \times G'$ d'après la propos. précédente ; donc si $(x, \bar{\Phi}(x)) \in H$, et $(y, \bar{\Phi}(y)) \in H$, on a aussi $(xy, \bar{\Phi}(x) \bar{\Phi}(y)) \in H$, mais alors $\bar{\Phi}(x) \bar{\Phi}(y) = \bar{\Phi}(xy)$, C.Q.F.D.

On peut donc écrire $\bar{\Phi} = \exp \circ \overline{\bar{\Phi}} \circ \exp^{-1}$.

Remarque. Supposons G et G' représentés par leurs cartes canoniques.

La représentation $\bar{\Phi}$ est alors représentée par $Y' = \overline{\bar{\Phi}}(X)$, et on a $\bar{\Phi}(XY) = \bar{\Phi}(X) \bar{\Phi}(Y)$. Mais $\overline{\bar{\Phi}}(\lambda X) = \lambda \overline{\bar{\Phi}}(X)$ d'après la structure linéaire des sous-groupes à un paramètre sur la carte canonique, donc $\overline{\bar{\Phi}}(X) = \left(\frac{d}{d\lambda} \overline{\bar{\Phi}}(\lambda X) \right)_{\lambda=0} = \overline{\bar{\Phi}}(X)$. Cela prouve que $\bar{\Phi}$ est linéaire, $\bar{\Phi}(X + X') = \bar{\Phi}(X) + \bar{\Phi}(X')$.

Sur les cartes canoniques il y a identité entre les représentations $\bar{\Phi}$ de G dans G' et les représentations $\overline{\bar{\Phi}}$ de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}' .

Proposition . Soit G un germe de groupe de transformations de Lie sur une variété V . On a $\text{act}(\exp(-S)) = \exp(-\{S\})$.

En effet l'image par act d'un sous-groupe à un paramètre de G , engendré par S , est un groupe de transformations à un par. sur V , engendré par la transformation infinitésimale $\{S\}$.

On voit donc que les $\{S\}$ sont les transform. infinit. du groupe de transformations G .

Corollaire. Soit T un tenseur (contravariant) sur \mathcal{G} . Pour que le champ de tenseurs $\{T\}$ soit invariant par G , il faut et il suffit que $\mathfrak{O}\{S\} \cdot \{T\} = 0$ or c'est $\{\overline{\text{Ad}}(S).T\}$, donc il faut et il suffit que $\overline{\text{Ad}} S. T = 0$.

Proposition. Pour qu'un germe de groupe de Lie G soit abélien, il faut et il suffit que son algèbre de Lie \mathcal{G} soit abélienne. Alors $G \approx \mathbb{R}^n$.

Nécessaire déjà vu.

Suffisant : si \mathcal{G} est abélienne, \mathcal{G} est \mathbb{R}^n avec le crochet $[X, Y] = 0$ donc isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe additif \mathbb{R}^n , donc $G \approx \mathbb{R}^n$.

§ 8. La représentation adjointe.

La représentation $\text{Int}(a) : x \rightarrow ax a^{-1}$ est un automorphisme local de G ; donc $\overline{\text{Int}}(a)$ est un automorphisme de \mathcal{G} (prop. de 1^{ère} partie). Comme de plus $a \rightarrow \text{Int}(a)$ est une représentation de G dans le groupe de ses automorphismes, $a \rightarrow \overline{\text{Int}}(a)$ est une représentation de G dans le groupe des automorphismes de \mathcal{G} , donc en particulier une représentation de G dans le groupe linéaire $GL(\mathcal{G})$. De plus $\overline{\text{Int}}(a)$ est un automorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{G} dont les coefficients dépendent de a de manière indéf. diff., puisqu'il en est ainsi de $\text{int}(a)$; $a \rightarrow \overline{\text{Int}}(a)$ est donc une représentation indéf. diff. du groupe de Lie G dans le groupe de Lie $GL(\mathcal{G})$.

Définition $a \rightarrow \overline{\text{Int}}(a)$ est la représentation adjointe de G . On la note aussi $a \rightarrow \text{Ad}(a)$. On peut d'ailleurs écrire $\text{Ad}(a).X = \bar{a} X \bar{a}^{-1}$.

Remarque. Sur la carte canonique de G , $\text{Int}(a)$ est exactement l'automorphisme $\text{Ad}(a)$ de \mathcal{G} .

Proposition . La représentation Ad de G dans $GL(\mathcal{G})$ a pour représentation tangente la représentation \overline{Ad} de l'algèbre de Lie \mathcal{G} dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire, $gl(\mathcal{G})$ définie comme représentation adjointe de \mathcal{G} :

$$(8, 1) \quad A \rightarrow \overline{Ad}(A) \quad ; \quad \overline{Ad}(A) \cdot X = [A, X].$$

Soient en effet $x = \exp(-X)$, $a = \exp(-A)$; et définissons \overline{Ad} comme la représentation tangente à Ad .

L'application $(a, x) \rightarrow \text{int}(a) \cdot x = ax^{-1}$ est indéf. diff. au voisinage de (e, e) et a pour développement de Taylor (2, 15) ($r = \max(X, (A))$):

$$(8, 2) \quad f(\text{int}(a) \cdot x) = X + [A, X] + O(r^3).$$

Donc l'application tangente en e à l'application partielle $x \rightarrow \text{int}(a) \cdot x$, qui est $X \rightarrow Ad(a) \cdot X$, $a \rightarrow 0$, le développement de Taylor

$$(8, 3) \quad Ad(a) \cdot X = X + [A, X] + O(p^2) \quad (p = (A)).$$

Mais puisque \overline{Ad} est la représentation tangente à Ad , on a

$$(8, 4) \quad Ad(a) = \exp(-\overline{Ad}(A)),$$

d'où, d'après la proposition

$$(8, 5) \quad Ad(a) \cdot X = \text{Exp}(\overline{Ad}(A)) \cdot X = X + \overline{Ad}(A) \cdot X + O(r^2), \text{ d'où}$$

$$(8, 6) \quad \overline{Ad}(A) \cdot X = [A, X] \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque. La formule (8, 3) ne donne que le début du développement de Taylor de l'automorphisme $Ad(a)$ lorsque $A \rightarrow 0$, mais (8, 5) montre que ce développement complet est

$$(8, 7) \quad Ad(a) \cdot X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{Ad}(A))^k}{k!} \cdot X$$

Proposition . Pour que le sous-groupe $H = \exp \mathfrak{h}$ associé à la sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de \mathcal{G} soit localement distingué il faut et il suffit que \mathfrak{h} soit un idéal de \mathcal{G} .

C'est nécessaire d'après la propos. de la 1^{ère} partie.

On peut le revoir par les propriétés de l'application exp. Soient $A \in \mathfrak{G}$, $X \in \mathfrak{h}$, $a = \exp(-\lambda A)$, $x = \exp(-\lambda X)$. H étant distingué, $ax^{-1} \in H$, donc aussi $ax^{-1-1} \in H$. Alors, d'après (2, 13), en faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, $[A, X] \in \mathfrak{h}$, et \mathfrak{h}' est un idéal.

Réciproquement, supposons que \mathfrak{h} soit un idéal. Alors l'endomorphisme $\overline{\text{Ad}}(A)$ de \mathfrak{G} laisse \mathfrak{h} invariant, donc, il en est de même de l'endomorphisme $\text{Exp}(\overline{\text{Ad}} A) = \text{Ad}(a)$. Mais alors $\text{Ad}(a)$ est un automorphisme de l'algèbre de Lie \mathfrak{G} laissant \mathfrak{h} invariant, donc $\text{Int}(a)$, qui l'admet comme représentation tangente, est un automorphisme de G laissant H invariant, donc H est localement distingué.

§ 9. Centre d'un germe de groupe de Lie.

Un point a voisin de e appartient au centre si $\text{Int}(a)$ est l'identité au voisinage de e . Cela revient à dire que $\overline{\text{Int}(a)} = \text{Ad}(a)$ est l'identité dans \mathfrak{G} ; le centre C est le noyau de la représentation adjointe Ad . Mais alors, d'après la propos. 1^{ère} partie, C est un germe de sous-groupe de Lie distingué de G . Son algèbre de Lie \mathfrak{C} est un idéal de \mathfrak{G} noyau de la représentation $\overline{\text{Ad}}$, représentation adjointe de \mathfrak{G} . C'est donc le centre de \mathfrak{G} . D'où

Proposition. Le centre C de G est un germe de sous-groupe de Lie distingué de G , dont l'idéal tangent dans l'algèbre de Lie est le centre \mathfrak{C} de \mathfrak{G} .

Remarque. G/C est un germe de groupe de Lie isomorphe, au groupe des automorphismes intérieurs de G ; son algèbre de Lie est $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$, isomorphe à l'algèbre de Lie des dérivations intérieures de \mathfrak{G} .

§ 10. Le germe de groupe dérivé.

Soit U un voisinage assez petit de $e \in G$, tel que \exp^{-1} soit un isomorphisme sur U , et soit U_p un voisinage de e dans lequel tous les produits de l éléments aient un sens et $\underbrace{U U \dots U}_e \subset U$.

Un commutateur de G est un élément

$$(x_1, y_1 \begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ x_1 & y_1 \end{smallmatrix}) (x_2, y_2 \begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix}) \dots (x_N, y_N \begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ x_N & y_N \end{smallmatrix}) ,$$

où tous les x_i et y_i sont dans U_{4N} .

Il n'est pas évident que l'ensemble K des commutateurs ait une structure simple ; nous allons montrer que c'est un germe de sous-groupe de Lie distingué de G . Soit \mathfrak{h} l'algèbre dérivée de \mathfrak{g} , ou idéal engendré (linéairement) par les $[X, Y]$, de dimension m . Alors $H = \exp \mathfrak{h}$ est un germe de sous-groupe de Lie distingué ; nous allons montrer que $H = K$, au voisinage de e .

Le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est abélien ; alors G/H est lui-même abélien. Alors si x est un commutateur, on a $\dot{x} \pmod{H} = \dot{e}$, donc $K \subset H$. Montrons que réciproquement tout point x de H est un commutateur correspondant à une valeur de N bornée une fois pour toutes, $N \leq m$.

Soit en effet Z_1, Z_2, \dots, Z_m une base linéaire de \mathfrak{h} . Soit $Z_1 = [X_1, Y_1]$.

Sur la carte canonique, l'application $(u, v) \rightarrow (uX) (vY) (-uX) (-vY)$ de \mathbb{R}^2 dans H admet, au voisinage de $(u, v) = (0, 0)$ le développement

$$(10, 1) \quad (u, v) \rightarrow uv [X, Y] + O(r^3) \quad (r = \max(u), (v))$$

Donc, par dérivation, l'application tangente en e , $\overline{\Phi}_\varepsilon$, à l'application de \mathbb{R} dans H , $\Phi_\varepsilon : t \rightarrow (\varepsilon X) (tY) (-\varepsilon X) (-tY)$, a le développement

$$(10, 2) \quad \overline{\Phi}_\varepsilon(t) = \varepsilon t [X, Y] + O((\varepsilon)^2) .$$

L'application $\overline{\Phi}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m}$ de \mathbb{R}^m dans H définie par

$$(10, 3) \quad (t_1, t_2, \dots, t_m) \rightarrow \prod_{i=1, 2, \dots, m} (\varepsilon_i X_i) (t_i Y_i) (-\varepsilon_i X_i) (-t_i Y_i)$$

a pour application tangente en e l'application $\overline{\Phi}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ de \mathbb{R}^m dans \mathfrak{h} définie par

$$(10, 4) \quad \overline{\Phi}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m} (t_1 \dots t_m) = \sum_{i=1, \dots, m} \varepsilon_i v_i [x_i, y_i] + O(r^2) = \\ = \sum_i (\varepsilon_i z_i) t_i + O(r^2), \quad r = \max(|\varepsilon_1|, \dots, |\varepsilon_m|).$$

Quels que soient les $\varepsilon_i \neq 0$, $\overline{\Phi}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m}$ est un isomorphisme (linéaire) de \mathbb{R}^m sur \mathfrak{h} , donc, d'après le théorème des fonctions implicites,

$\Phi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m}$ est un isomorphisme indéf. diff. d'un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^m sur un voisinage de e dans H . Donc tout élément de H est un commutateur à $N \leq m$ facteurs élémentaires. D'où

Proposition . Les commutateurs de G forment un germe de sous-groupe de Lie distingué H , dont l'algèbre de Lie \mathfrak{h} est l'idéal des commutateurs de \mathcal{G} .

§ 11. Le groupe des automorphismes locaux.

Si on identifie 2 automorphismes locaux (indéf. diff.) de G dès qu'ils coïncident au voisinage de e , ces automorphismes locaux forment un groupe $AUT(G)$. D'après la prop. de la 1^{ère} partie, il peut être canoniquement identifié au groupe $AUT(\mathcal{G})$ des automorphismes de l'algèbre de Lie \mathcal{G} . Mais, $AUT(\mathcal{G})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(\mathcal{G})$, donc est muni d'une topologie induite. Dire que $U \in AUT(\mathcal{G})$ converge vers l'identité, c'est dire qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 dans \mathcal{G} tel que $\overline{U} \cdot \mathcal{V}$ converge vers 0, c'est donc dire qu'il existe un voisinage $\mathcal{V} = \exp \mathcal{V}$ de e dans G tel que $U \cdot \mathcal{V} = \exp(\overline{U} \cdot \mathcal{V})$ converge vers e dans G .

$AUT(\mathcal{G})$ est défini dans $GL(\mathcal{G})$ par un nombre fini d'équations algébriques : $\overline{u} \cdot [e_i, e_j] = [\overline{u} e_i, \overline{u} e_j]$, où les e_i forment une base de \mathcal{G} . Donc $AUT(\mathcal{G})$ est fermé dans $GL(\mathcal{G})$. C'est une variété algébrique de l'espace des matrices ; elle n'a pas de points singuliers, car si elle en avait un, tous le seraient par translation à gauche ; donc $AUT(\mathcal{G})$ est un groupe de Lie. Si cette démonstration n'est pas satisfaisante, il faut rejeter le § 9 à plus loin, quand on saura qu'un sous-groupe fermé d'un Lie est un Lie.

Au voisinage de l'unité de $GL(\mathcal{G})$, $AUT(\mathcal{G}) = \exp \mathcal{S}$ où \mathcal{S} est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{GL}(\mathcal{G})$.

Soit donc \bar{u} voisin de l'identité dans $AUT(\mathcal{G})$ donc dans $GL(\mathcal{G})$, $\bar{u} = \exp(-U) = \text{Exp } U$ (voir propos. 1^{ère} partie), $U \in \mathcal{GL}(\mathcal{G})$.

Lemme. Soit $(X, Y) \rightarrow B(X, Y)$ une application bilinéaire d'un espace vectoriel \mathcal{G} dans lui-même. Un endomorphisme U de \mathcal{G} est appelé dérivation pour B si

$$(11, 1) \quad U(B(X, Y)) = B(U(X), Y) + B(X, U(Y)) .$$

Un endomorphisme \bar{u} de \mathcal{G} est appelé automorphisme pour B si

$$(11, 2) \quad \bar{u}(B(X, Y)) = B(\bar{u}(X), \bar{u}(Y))$$

Si alors U est un endomorphisme de \mathcal{G} , $\bar{u} = \text{Exp}(\lambda U)$, pour que \bar{u} soit un automorphisme pour B quelque soit λ , il faut et il suffit que U soit une dérivation pour B .

Supposons en effet (11, 1) et posant $\bar{u} = \sum_k \frac{(\lambda U)^k}{k!}$ et appliquant la formule du binôme :

$$(11, 3) \quad \frac{(\lambda U)^k}{k!} (B(X, Y)) = \sum_{\ell+m=k} B\left(\frac{(\lambda U)^\ell}{\ell!}(X), \frac{(\lambda U)^m}{m!}(Y)\right)$$

d'où (9, 2).

De (9, 2) on déduit (9, 1) par dérivation en λ pour $\lambda = 0$.

Alors l'algèbre de Lie \mathcal{S} de $AUT(\mathcal{G})$ est l'algèbre des dérivations de \mathcal{G} , dont on sait qu'elles forment bien une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{GL}(\mathcal{G})$. Nous avons démontré la

Proposition . Le groupe $AUT(G)$ des automorphismes locaux d'un germe de groupe de Lie G , isomorphe au groupe $AUT(\mathcal{G})$ des automorphismes de l'algèbre de Lie \mathcal{G} , est un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie \mathcal{S} est l'algèbre de Lie des dérivations de \mathcal{G} .

Nous allons développer d'autres conséquences du lemme. On le généralise d'abord :

Proposition . Soit U un endomorphisme d'un espace vectoriel E ;

$$u = \text{Exp} (\lambda U) .$$

Soit Z un tenseur sur E (de n'importe quelle nature). Pour que, quel que soit λ , on ait

$$(11, 4) \quad u(Z) = Z$$

u étant prolongé aux tenseurs comme indiqué dans l'algèbre multilinéaire (chap. III) de notre Maître, il faut et il suffit que

$$(11, 5) \quad U(Z) = 0$$

U étant prolongé aux tenseurs comme dérivation. Même démonstration.

Corollaire 1. Algèbres de Lie des groupes classiques.

L'algèbre de Lie du sous-groupe de $GL(R^n)$ formé des automorphismes conservant une forme bilinéaire $B(X, Y)$, est l'algèbre de Lie (pour le crochet usuel) des endomorphismes A de R^n qui, comme dérivations, annulent cette forme quadratique :

$$B (AX, Y) + B(X, AY) = 0$$

Autre forme : si B est symétrique non dégénérée, elle définit un produit scalaire $(X, Y) = B(X, Y)$, et A doit être anti-symétrique :

$$(AX, Y) + (X, AY) = 0 .$$

Corollaire 2. - Soit G un groupe de transform. de Lie opérant transitivement sur V . Le normalisateur N_a conserve a , donc pour $\mathcal{S} \in N_a$.

$\overline{\text{act}(\mathcal{S})}$ est une application linéaire de $E(a, V)$ dans lui-même

$X \rightarrow X \overline{\mathcal{S}}$. Alors on peut attacher à $\overline{\text{act}(\mathcal{S})}$ un élément de $GL(E(a, V))$.

$\mathcal{S} \rightarrow \overline{\text{act}(\mathcal{S})}$ est une représentation $\overline{\Phi}$ de N_a dans $GL(E(a, V))$; soit

$\overline{\Phi}$ la représentation tangente ; $\overline{\Phi}(S)$, pour $S \in \mathcal{N}_a$ (algèbre de Lie

de N_a) est un endomorphisme de $E(a, V)$, et $\overline{\Phi}$ est une représentation

de \mathcal{N}_a dans $\mathcal{L}(E(a, V))$. De plus, si $\mathcal{S} = \exp(-S)$,

$$\overline{\Phi}(\mathcal{S}) = \overline{\text{act}(\mathcal{S})} = \exp(-\overline{\Phi}(S)) = \text{Exp}(\overline{\Phi}(S)) .$$

Cherchons alors sur V les tenseurs ordinaires ξ d'une espèce déterminée, invariants par G . Un tel tenseur est connu si l'on connaît $\xi(a) = Z$, puisque G est transitif; pour que Z soit la valeur en e d'un tenseur invariant, il faut et il suffit que Z soit invariant par les opérations $\overline{\text{act}(s)}$, $s \in N_a$. La proposition montre que, pour que $\overline{\text{act}(s)}.Z = Z$ ($s \in N_a$), il faut et il suffit que $\overline{\Phi}(s).Z = 0$, $\overline{\Phi}(s)$ étant prolongée aux tenseurs comme dérivation.

Dans ce cas, une sous-variété K supplémentaire de N_a dans G montre que ξ est indéf. diff., donc :

Pour qu'il existe un tenseur ξ invariant par G tel que $\xi(a) = Z$, il faut et il suffit que Z soit annulé par les dérivations $\overline{\Phi}(s)$, $s \in N_a$, alors ξ est unique et indéf. diff.

§ 12. Détermination de la loi de composition d'un groupe de Lie par les formes différentielles invariantes. Equations différentielles de Maurer-Cartan.

Soit e_i une base de \mathcal{G} , e^{*i} la base duale de \mathcal{G}^* , $\omega^i = \text{Tr } g^{-1} e^{*i}$. Dans tout ce paragraphe nous supposerons G identifié à sa carte canonique : donc $x = \exp(-X)$ sera identifié à X .

Rappelons que si U et V sont deux variétés, (Ω^k) des formes différentielles de degré k sur $U \times V$, une application $y = f(x)$ de U dans V est solutions des équations diff. $\Omega^k = 0$ si les images réciproques $F^* \Omega^k$ des Ω^k par l'application $F : x \rightarrow (x, f(x))$ de U dans $U \times V$ sont nulles.

Alors, les ω^k étant invariantes à gauche G , on a

$$(12, 1) \quad \omega^k = \overline{\text{tg}(a)}^* \omega^k,$$

donc l'application $\text{tg}(a)$ de G dans G est solution des n équations différentielles indépendantes de Maurer-Cartan

$$(12, 2) \quad \overline{pr}_1^* \omega^k = \overline{pr}_2^* \omega^k$$

pr_1 et pr_2 étant les applications $(x,y) \rightarrow x$ et $(x,y) \rightarrow y$ de $G \times G$ dans G .

Réciproquement, supposons que V soit une variété indéf. diff. au voisinage de e , et que les (ω^i) ($i=1,2,\dots,n$) soient n formes diff. de degré 1 données sur V et indépendantes en chaque point de V . A quelle condition existe-t-il sur V une structure de germe de groupe de Lie d'unité e dont les ω^k soient une base des formes diff. invariantes à gauche ?

Pour qu'une application f indéf. diff. conserve les ω^i , il faut et il suffit qu'elle soit solution de (12, 2). Par ailleurs l'ensemble \mathcal{F} de ces f est stable pour le produit et contient l'identité. Il doit donc exister une solution f de (12, 2) vérifiant n'importe quelle condition initiale $f(b)=e$, à savoir $tg(a)$, $a = cb^{-1}$. Donc (12, 2) doit être complètement intégrable.

Soit \mathcal{A} l'idéal des $\overline{pr}_1^* \omega^k - \overline{pr}_2^* \omega^k$. On a

$$(12, 3) \quad \overline{pr}_1^* \omega^k = \overline{pr}_2^* \omega^k \pmod{\mathcal{A}}$$

et on doit avoir, d'après Frobenius,

$$(12, 4) \quad d \overline{pr}_1^* \omega^k = d \overline{pr}_2^* \omega^k \pmod{\mathcal{A}}$$

Soit $c_{i,j}^k(x)$ les fonctions indéf. diff. (antisymétriques en i,j) définies par

$$(12, 5) \quad d\omega^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{i,j}^k \omega^i \wedge \omega^j$$

Alors

$$(12, 6) \quad d \overline{pr}_1^* \omega^k = \overline{pr}_1^* d\omega^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \overline{pr}_1^* c_{i,j}^k \overline{pr}_1^* \omega^i \wedge \overline{pr}_1^* \omega^j = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{i,j}^k(x) \overline{pr}_2^* \omega^i \wedge \overline{pr}_2^* \omega^j \pmod{\mathcal{A}}$$

de sorte que (12, 4) s'écrit

$$(12, 7) \quad \sum_{i,j} c_{i,j}^k(x) \overline{pr}_2^* \omega^i \wedge \overline{pr}_2^* \omega^j = \\ = \sum_{i,j} c_{i,j}^k(y) \overline{pr}_2^* \omega^i \wedge \overline{pr}_2^* \omega^j$$

d'où $c_{i,j}^k(x) = c_{i,j}^k(y) = \text{constante } c_{i,j}^k$

et réciproquement.

Donc (12, 2) est complètement intégrable si et seulement si les $c_{i,j}^k$ sont des constantes ; nous savions déjà d'ailleurs que cette condition était nécessaire.

Supposons là donc vérifiée. L'unique solution $f_{b,a}(x)$ définie par les conditions initiales $f_{b,a}(a) = b$ est une fonction indéf. diff. de a, b, x . On a, puisque \mathcal{F} est stable pour le produit et qu'il y a unicité de la solution pour des conditions initiales données :

$$(12, 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{a,a} = \text{identité} \\ f_{c,b} \circ f_{b,a} = f_{c,a} \\ f_{b,a} \circ f_{a,b} = \text{identité.} \end{array} \right.$$

ce qui prouve en particulier que les $f_{b,a}$ sont inversibles donc que \mathcal{F} est un groupe, opérant simplement et transitivement sur V .

Alors l'application $tg(a)$ est nécessairement celle qui est définie par $tg(a) = f_{a,e}$: tg est une application biunivoque V sur \mathcal{F} , et $tg^{-1}(f) = f(e)$. (12, 8) donne

$$(12, 9) \quad (tg(a) \circ tg(b)) \cdot e = f_{a,e}(b)$$

donc sur G la loi de composition est définie par

$$(12, 10) \quad a \cdot b = tg(a) \cdot b = f_{a,e}(b) = tg^{-1}(tg(a) \circ tg(b))$$

C'est une loi indéf. diff. et c'est la transformée de la loi de groupe de \mathcal{F} par td^{-1} .

De même

$$(12, 11) \quad (tg(a)^{-1}) \cdot e = f_{e,a}(e)$$

donc sur G on aura

$$(12, 12) \quad a^{-1} = f_{e,a}(e)$$

qui est une loi indéf. diff. Alors G est un ~~germe~~ germe de groupe de Lie. Et les translations à gauche, qui sont bien les $tg(a) \in \mathcal{F}$, conservent les ω^i . Donc

Proposition. Pour que n formes diff. de degré 1, ω^i , indépendantes, indéf. diff., sur une variété V indéf. diff. au voisinage de e , soient une base des formes invariantes pour une structure de germe de groupe de Lie G d'unité e , il faut et il suffit qu'on ait la relation

$$(12, 13) \quad d\omega^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{i,j}^k \omega^i \wedge \omega^j ;$$

où les $c_{i,j}^k$ sont des constantes. G est déterminé d'une manière unique.

Corollaire. M^{me} proposition avec les champs de vecteurs invariants à gauche η_i , et la relation

$$(12, 14) \quad [\eta_i, \eta_j] = \sum_k c_{i,j}^k \eta_k .$$

(Directement ou par dualité).

Remarque. Les équat. diff. de Maurer-Cartan restent les mêmes si l'on veut que les ω_i soient les formes diff. invariantes à droite de G .

Le groupe \mathcal{F} est le même, de même que la correspondance biunivoque entre \mathcal{F} et V , $td(a) = f_{a,e}$ et $td^{-1} f = f(a)$. Mais on doit prendre sur V la loi de composition définie par td^{-1} à partir de la loi de composition du groupe opposé \mathcal{F} :

$$(12, 15) \quad a \perp b = td(b).a = f_{b,e}(a) = td^{-1}(td(td(b)) \circ td(a))$$

Supposons données les ω^i (ou les η_i) mais non e . Alors le groupe \mathcal{F} reste bien déterminé. On choisira e arbitrairement, alors l'application $f \rightarrow f(e)$ définira sur \mathcal{F} une structure de groupe de Lie (opérant à gauche). Cette structure est indépendante du choix de e , car si e' est un autre point, on passe de $x = f(e)$ à $x' = f(e')$ par l'automorphisme $x \rightarrow x' = f(e')$, indéf. diff.

§ 13. Détermination d'un groupe de transformations de Lie par ses transformations infinitésimales.

Soit, sur une variété V , une algèbre de Lie de dimension n , \mathcal{G}_0 , de transformations infinitésimales ξ . Existe-t-il un germe de groupe de Lie G , opérant à droite sur V , tel que $\{\mathcal{G}\}$ soit l'algèbre de Lie donnée \mathcal{G}_0 ?

G est connu en tant que variété W de transformations sur V . W est en effet l'ensemble des points d'un espace vectoriel isomorphe à \mathcal{G}_0 , de façon que, si cet isomorphisme Φ associe $s = \Phi(\sigma) \in W$ à $\sigma \in \mathcal{G}_0$, on ait $\text{act}(s) = \exp(-\sigma)$. Comme $\exp(-\sigma).x$ est fonction indéf. diff. de x et σ , W opère différentiablement sur V . Si par ailleurs $S \in W$ est un vecteur tangent en e , $\{S\} = \Phi^{-1}(S)$. Il reste à montrer qu'on peut mettre sur W une loi de germe de groupe de Lie G , telle que $(x s)t = x(st)$.

Il existe au moins un système de n points a_1, a_2, \dots, a_n de V , tels que sur la variété $V' = V^n$, les vecteurs $\xi'(a') = (\xi(a_1), \xi(a_2), \dots, \xi(a_n))$, $\xi \in \mathcal{G}_0$, forment un système de rang n . Considérant W comme opérant sur V' . Au voisinage de a' , W opère simplement. Le système des vecteurs ξ' définit sur V' , au voisinage de a' , un système différentiel complètement intégrable ; soit V'_a , la variété intégrale passant en a' , classe d'intransitivité de a' . Sur V'_a , les ξ' forment une algèbre de Lie à n dimensions et sont indépendants en chaque point voisin de a' et V'_a , a aussi n dimensions ; d'après la prop. , il existe sur W une loi de germe de groupe de Lie G unique telle que $(x'a)t = x'(st)$, pour s et t voisins de e , x' voisin de a' .

Soit maintenant a un point quelconque de V . Sur la variété $V'' = V^{n+1}$, considérons le voisinage du point $a'' = (a, a_1, \dots, a_n)$. A fortiori les ξ'' sont indépendants sur V'' au voisinage de a'' , donc on peut répéter

le même raisonnement, et trouver une loi de composition de groupe G sur W telle que $(x^n s)t = x^n(st)$. Mais cette loi est la même que ci-dessus car la seule façon dont elle opère sur V' la détermine. Donc, G étant déterminé par la méthode ci-dessus, on a, quel que soit x sur V , pour s et t assez voisins de e , $(x s)t = x(st)$, ce qui prouve que G répond bien à la question. Il est évidemment unique d'après la façon dont il a été trouvé. D'où la réciproque de la prop.

Proposition . Toute algèbre de Lie de rang fini n de transformations infinitésimales sur une variété V engendre d'une manière unique, à une équivalence près, un germe du groupe de transformations de Lie de dimension n .

§ 14. Germe de groupe de Lie ayant une algèbre de Lie donnée.

Supposons maintenant donnée une algèbre de Lie \mathcal{G} . D'après ce que nous avons vu (§ 12), pour qu'il existe une structure de germe de groupe de Lie G dont \mathcal{G} soit la carte canonique, il faut et il suffit que, e_1 étant la base de \mathcal{G} et $c_{i,j}^k$ les constantes de structure, il existe des formes diff. de degré 1, ω^1 , indéf. diff. au voisinage de $0 = e$, vérifiant (13, 13), et telles que $\omega^1(e) = e^{*1}$. Nous savons d'ailleurs que, dans ce cas, d'après la prop., ω^1 doit induire, sur toute droite issue de l'origine, la même forme différentielle que dx^1 .

Au lieu de déterminer ces ω^1 , nous chercherons l'opération $\overline{\text{Tr } \bar{g}^{-1}}$, qui applique \mathcal{G}^* dans l'espace des formes diff. indéf. diff. sur \mathcal{G} . Pour $\alpha \in \mathcal{G}$, $\omega = \overline{\text{Tr } \bar{g}^{-1}}(\alpha)$ est une forme différentielle, donc une fonction de x à valeurs dans \mathcal{G}^* que nous noterons encore

(14, 1) $\omega(x) = \overline{\text{tg}(x)} \cdot \alpha \in \mathcal{G}^*$

Pour éviter toute confusion, nous appellerons D au lieu de d l'opération $\alpha \rightarrow D_\alpha$ de \mathcal{G}^* dans $\Lambda^2 \mathcal{G}^*$ qui définit la structure d'algèbre de Lie.

Soit H l'application $(t, u) \rightarrow tu$ de $R \times \mathcal{Y}$ dans \mathcal{Y} . Comme $\omega(x)$ induit sur la droite $(0, x)$ la même forme que α , on aura

$$(14, 2) \quad H^* \omega = H^* \text{Tr}^{-1} g (\alpha) = \langle \alpha, u \rangle dt + \Pi(\alpha)$$

où $\Pi(\alpha)$ ne contient pas dt . Ainsi $H^* \omega$ est de la forme $L(\alpha)$, où L applique \mathcal{Y}^* sur l'espace des formes diff. de $R \times \mathcal{Y}$; ou encore $L(\alpha) = L(t, u)(\alpha)$, où $L(t, u)$ est pour t et u fixés une application linéaire de \mathcal{Y}^* dans $R \times \mathcal{Y}^*$; elle est décomposée en somme de l'application $\alpha \rightarrow \langle \alpha, u \rangle$ de \mathcal{Y}^* dans $R \times 0$ et $\alpha \rightarrow \Pi(t, u)(\alpha)$ de \mathcal{Y}^* dans $0 \times \mathcal{Y}^*$.

La relation fondamentale (13, 13) s'écrit ici

$$(14, 3) \quad d\omega = \text{Tr}^{-1} g (D\alpha)$$

d'où

$$(14, 4) \quad dH^* \omega = H^* \text{Tr}^{-1} g (D\alpha)$$

Il nous faut définir correctement ces 2 membres.

1° D'après (13, 17),

$$(14, 5) \quad \begin{aligned} dH^* \omega &= d\langle \alpha, u \rangle \wedge dt + d(\Pi(\alpha)) = \\ &= d\langle \alpha, u \rangle \wedge dt - \frac{\partial}{\partial t} \Pi(t, u)(\alpha) \wedge dt \\ &+ \text{termes ne contenant pas } dt. \end{aligned}$$

Le coefficient de dt dans $dH^* \omega$ est donc

$$(14, 6) \quad -\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \Pi(t, u)(\alpha)$$

2° Pour définir $H^* \text{Tr}^{-1} g (D\alpha)$, on doit étendre cette opération à $\Lambda^2 \mathcal{Y}^*$.

Pour α et β dans \mathcal{Y}^* :

$$(14, 7) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Tr}^{-1} g (\alpha \wedge \beta) &= (\text{Tr}^{-1} g \alpha) \wedge \text{Tr}^{-1} g \beta \\ H^* \text{Tr}^{-1} g (\alpha \wedge \beta) &= H^* \text{Tr}^{-1} g \alpha \wedge H^* \text{Tr}^{-1} g \beta \\ &= (\langle \alpha, u \rangle dt + \Pi(\alpha)) \wedge (\langle \beta, u \rangle dt + \Pi(\beta)) \\ &= -dt (\langle u, \beta \rangle \Pi(\alpha) - \langle u, \alpha \rangle \Pi(\beta)) \\ &+ \text{termes ne contenant pas } dt. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient de dt dans $H^* \text{Tr}_g^{-1} (\alpha \wedge \beta)$ est donc

$$(14, 8) \quad -\overline{\Pi} (\langle u, \beta \rangle \alpha - \langle u, \alpha \rangle \beta) = -\overline{\Pi} (u \lrcorner (\alpha \wedge \beta))$$

Le coefficient de dt dans $H^* \text{Tr}_g^{-1} D\alpha$ est alors

$$(14, 9) \quad -\overline{\Pi} (u \lrcorner D\alpha)$$

Mais $-u \lrcorner D\alpha = \overline{\text{Ad}}(u) \cdot \alpha$ (formule fondamentale de l'homotopie)

(Attention, on peut définir sur \mathcal{G}^* l'opération ${}^t \overline{\text{Ad}}(u)$, transposée de $\overline{\text{Ad}}(u)$, et $\overline{\text{Ad}}(u)$ comme dérivation ; $\overline{\text{Ad}}(u)$ et ${}^t \overline{\text{Ad}}(u)$ sont opposées).

Finalement le coef. de dt dans $H^* \text{Tr}_g^{-1} D\alpha$ est

$$(14, 10) \quad +(\overline{\Pi} \circ \overline{\text{Ad}} u) \cdot \alpha$$

de sorte qu'en égalant (14, 8) et (14, 10), on voit que l'opération

$\overline{\Pi}(t, u)$ de \mathcal{G}^* dans \mathcal{G}^* vérifie pour u fixé l'équation diff.

$$(14, 11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \overline{\Pi}(t, u) = I + \overline{\Pi}(t, u) \circ \overline{\text{Ad}}(u)$$

Comme $\omega(0) = \alpha$, on doit avoir $H^* \text{Tr}_g^{-1} \alpha = \langle \alpha, u \rangle dt$ pour $t=0$, donc $\overline{\Pi}(0, u) = 0$. L'opération linéaire de \mathcal{G}^* dans \mathcal{G}^* $\overline{\Pi}(t, u)$, est donc entièrement déterminée par l'équation différentielle (14, 11).

$$(14, 12) \quad \overline{\Pi}(t, u) = \frac{\text{Exp}(t \overline{\text{Ad}}(u)) - I}{\overline{\text{Ad}}(u)}$$

Mais $\omega(x)$ n'est autre que $\overline{\Pi}(1, x)(\alpha)$, d'où

$$(14, 13) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega(x) &= \frac{\text{Exp}(\overline{\text{Ad}}(x)) - I}{\overline{\text{Ad}}(x)} \cdot \alpha \\ &= \frac{\text{Exp}(\overline{\text{Ad}}(x)) - I}{\overline{\text{Ad}} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{\text{Ad}}(x))^k}{(k+1)!} \end{aligned} \right.$$

J'espère ne pas m'être trompé de signe quelque part. Nous trouvons là le seul système possible de formes diff. invariantes défini par l'algèbre de Lie \mathcal{G} , donc le seul germe de groupe de Lie G qu'on puisse lui associer. Il reste à montrer que ces formes $\omega(x)$ répondent bien à la question, c.à.d. vérifient (14, 3). Il suffit pour cela de vérifier qu'elles satisfont à (14, 4).

Or elles satisfont à (14, 11) sous la forme

$$(14, 14) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Pi(t, u) \cdot \alpha) = \alpha + \overline{\text{Ad}}(u) \cdot \Pi(t, u) \cdot \alpha$$

Zut ! Malgré mon horreur pour les coordonnées, je reviens aux coordonnées. Posons $\Pi(t, u) \cdot e^{*i} = \Pi^i(t, u)$. Compte-tenu des coefficients de la matrice $\overline{\text{Ad}}(u)$, (14, 14) s'écrit :

$$(14, 15) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Pi^i = du^i - \sum_{j, k} c_{j, k}^i u^j \Pi^k$$

Différons partiellement en u , et posons $d_u \Pi^i(t, u) = \varphi^i$:

$$(14, 16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^i = - \sum_{j, k} c_{j, k}^i du^j \wedge \Pi^k \\ \quad \quad \quad - \sum_{j, k} c_{j, k}^i u^j \wedge \varphi^k \end{array} \right.$$

Ceci est un système différentiel relatif aux φ^i , avec 2^0 membre.

Condition initiale pour $t=0$: $\varphi^i=0$. Or ce système admet la solution $\varphi^i = -\frac{1}{2} \sum_{j, k} c_{j, k}^i \Pi^j \wedge \Pi^k$, compte-tenu des relations de Jacobi entre les $c_{j, k}^i$ (pénible !).

C'est la seule solution possible. Il suffit alors de faire $t=1$, $u^i=x^i$, $du^i=dx^i$, pour voir que l'on a donc (13, 13). C.Q.F.D. !!!

On peut donc énoncer :

Proposition . Toute algèbre de Lie est l'algèbre de Lie d'un germe de groupe de Lie, déterminé sur la carte canonique à une équivalence près.

Corollaire . L'application $\overline{\text{tg}}(x)$ pour les vecteurs est la contra-grédiente de $\overline{\text{tg}}(x)$ pour les formes, donc c'est, sur la carte canonique, l'automorphisme

$$(14, 17) \quad \overline{\text{tg}}(x) = \frac{-\overline{\text{Ad}}(x)}{\text{Exp}(-\overline{\text{Ad}}(x)) - 1}$$

Corollaire. Idem pour $\overline{\text{td}}(x)$, il suffit de changer $\overline{\text{Ad}}(x)$ en $-\overline{\text{Ad}}(x)$.

§ 15. Analyticité d'un groupe de Lie.

Les formules qui donnent $\overline{tg(x)}$ sur la carte canonique \mathcal{C} montrent que $\overline{tg(x)}$ dépend analytiquement de x ; donc les formes différentielles invariantes sont analytiques, et par suite sur la carte canonique, la loi de groupe est analytique. Donc :

Proposition . Tout germe de groupe de Lie admet une structure unique de germe de groupe analytique subordonnée, celle de la loi de groupe sur la carte canonique.

Corollaire 1. Tout germe de sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie est analytique.

Corollaire 2. Toute représentation indéf. diff. d'un germe de groupe de Lie dans un autre est analytique.

Corollaire 3. Si G est un germe de groupe de transformations de Lie sur une variété V , opérant transitivement, il existe sur V une structure analytique unique, subordonnée à sa structure différentiable, telle que G opère analytiquement sur V .

Car $V \cong G/N_a$, (N_a = normalisateur de a) ; la structure différentiable de V est définie par une variété K de G , supplémentaire de N_a en e , il suffit de choisir K analytique pour définir la seule structure analytique de V possible.

§ 16. Germe de groupe de Lie réel et germe de groupe de Lie complexe.

Tout ce qui a été dit jusqu'ici sur les groupes de Lie réels est valable pour un germe de groupe de Lie analytique sur un corps valué complet, donc pour un germe de groupe de Lie complexe.

Soit V une variété holomorphe à n dim. complexes. Pour cette structure complexe, elle possède en chaque point un espace tangent E_c , à n dim. complexes. En tant que variété réelle, elle a un espace tangent réel E . A chaque $X \in E$ on peut associer la dérivation complexe $X_c \in E_c$ telle que, pour toute fonction φ holomorphe complexe,

$$(16, 1) \quad X(\varphi) = X_c(\varphi) .$$

Une carte holomorphe complexe montre que l'application $X \rightarrow X_c$ est un isomorphisme de E sur E_c considérés comme espaces vectoriels sur R , car sur une telle carte C^n , X et X_c sont identifiés à un même vecteur de C^n . Alors le transport de l'automorphisme i de E_c définit un automorphisme J de E , vérifiant $J^2 = -1$, avec

$$(16, 2) \quad (JX)(\varphi) = iX(\varphi)$$

pour toute φ holom. complexe.

Soit ξ, η , deux champs de vecteurs sur V , tels que ξ_c, η_c , soient deux champs holom. complexes; cela veut dire que $\xi_c \cdot \varphi$ et $\eta_c \cdot \varphi$ ou $\xi \cdot \varphi$ et $\eta \cdot \varphi$, sont des fonctions hol. si φ est hol. Alors

$$(16, 3) \quad [\xi, \eta]_c = [\xi_c, \eta_c], \text{ qui est holomorphe.}$$

Comme $(\xi_c, \eta_c) \rightarrow [\xi_c, \eta_c]$ est bilinéaire pour la structure complexe, on aura, si ξ_c et η_c sont deux champs holomorphes :

$$(16, 4) \quad [J\xi, \eta] = [\xi, J\eta] = J[\xi, \eta]$$

Soit alors G_c un germe groupe de Lie holomorphe complexe. En tant que groupe complexe, il a une algèbre de Lie \mathcal{G}_c sur le corps C , en tant que groupe de Lie analytique réel une algèbre de Lie \mathcal{G} sur R . L'application $X \rightarrow X_c$ de \mathcal{G} sur \mathcal{G}_c est un isomorphisme d'espace vectoriel réel, définissant sur \mathcal{G} l'opérateur J et la structure complexe correspondante (16, 3) montre que c'est un isomorphisme des structures d'algèbres de Lie réelles de \mathcal{G} et \mathcal{G}_c . Comme tout champ complexe invariant à gauche est hol., (16, 4) montre que dans \mathcal{G} :

$$(16, 5) \quad [JX, Y] = [X, JY] = J[X, Y]$$

ou encore que, pour la structure complexe définie par J sur \mathcal{G} , \mathcal{G} est une algèbre de Lie complexe isomorphe à \mathcal{G}_c . Réciproquement soit G un groupe de Lie réel. Sur la carte canonique \mathcal{G} l'opérateur J en chaque point est le même, c'est toujours l'opérateur J de \mathcal{G} et supposons

qu'il existe un automorphisme J de l'espace vectoriel \mathcal{G} vérifiant (16, 5) ; autrement dit J commute avec les dérivations intérieures de \mathcal{G} . Alors J définit sur \mathcal{G} une structure d'algèbre de Lie complexe. D'après la prop. relative aux groupes de Lie complexes, il existe un germe de groupe de Lie complexe G'_c dont l'algèbre de Lie \mathcal{G}'_c (avec l'opérateur i) est isomorphe à l'algèbre de Lie complexe \mathcal{G} (avec l'opérateur J). A \mathcal{G}'_c est associée l'algèbre de Lie réelle \mathcal{G}' et son opérateur J' , en isomorphisme avec \mathcal{G} et J .

Alors G' et G ont des algèbres de Lie réelles isomorphes, donc sont isomorphes, en tant que groupe de Lie réels. Le transport de la structure complexe de G'_c définit alors sur G une structure complexe subordonnée G_c , définissant précisément dans G l'opérateur J . D'où

Proposition. Pour qu'il existe sur un germe groupe de Lie réel G une structure subordonnée de germe de groupe de Lie complexe G_c , il faut et il suffit qu'il existe un automorphisme J de l'esp. vect. \mathcal{G} , vérifiant $J^2 = -1$, et permutant avec les dérivations intérieures de \mathcal{G} . A un tout opérateur J de cette sorte est associée une structure holomorphe complexe unique.

Pour déterminer cette structure, on remarque que, en un point $a \in G$, $J(a)$ est défini par transport de $J(e)$ par $\overline{tg(a)}$ ou $\overline{td(a)}$. Ou encore : si on munit la carte canonique \mathcal{G} de G de la structure d'espace vectoriel complexe définie par J , l'opération de groupe de G devient holomorphe complexe et définit ainsi G_c .

On peut raisonner autrement. J permute avec les $\overline{Ad}(u)$ des formules (14, 14) montrent alors que J permute avec les translations à gauche : $J(\text{Tr } g^{-1} X) = \text{Tr } g^{-1} (JX)$. Donc sur la carte canonique, l'opérateur J est toujours le même, ce qui montre que la structure presque complexe

invariante à gauche définie par J est hol. compl. J est alors aussi invariante à droite, les translations sont des opérations hol. et G est hol. compl.

Proposition . Soit J un automorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{V} vérifiant $J^2 = -1$. Pour que la structure presque complexe invariante à gauche définie par J soit complexe, il faut et il suffit qu'elle soit bi-invariante.

Considérons en effet J et les transformations finies ou infinitésimales comme opérant sur l'espace \mathcal{E} des champs de vecteurs ξ . Pour que J soit aussi invariante à droite, il faut et il suffit d'après prop. que

$$(16, 6) \quad J [\xi, \zeta] = [\xi, J \zeta]$$

pour tout champ ξ invariant à gauche et tout champ ζ . Mais si c'est vrai pour ζ on voit que c'est vrai pour $\lambda \zeta$, où λ est une fonction indéf. diff., il reste donc à écrire que c'est vrai pour des champs de vecteurs ζ en nombre fini définissant en chaque point une base de l'espace tangent, en particulier pour les champs ζ invariants à gauche. Mais alors (16, 6) est équivalent à (16, 5), ce qui exprime que G a une structure hol. compl. définie par J .

Proposition . Soit G_c un groupe de Lie complexe, H un sous-groupe de Lie de la structure complexe, e.à.d. pour qu'il soit une sous-variété hol. complexe, il faut et il suffit que son algèbre de Lie tangente $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, soit stable pour J .

Soit L une variété analytique réelle de dim. n . Une carte A de L plongée dans \mathbb{R}^n peut être prolongée par une carte $A + iA$ plongée dans \mathbb{C}^n . Si A' est une autre carte de la même région, il existe un isomorphisme analytique réel entre A et A' , qui peut donc être prolongé en un isomorphisme hol. complexe entre $A + iA$ et $A' + iA'$, au voisinage de A et A' .

On peut donc définir, à une équivalence près, un germe de variété hol. complexe Λ prolongeant L à n dim. complexes.

Si $L = G$ est un germe de groupe de Lie réel, $\Lambda = \Gamma$ est muni d'une loi de composition hol. prolongeant la loi analytique de G , de sorte que Γ est un germe de groupe de Lie complexe, appelé prolongement complexe de G ; il est unique à une équivalence près. Une carte A montre que l'algèbre de Lie de Γ , isomorphe à $A + iA$, est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie complexe $\mathcal{G} + i\mathcal{G}$ prolongeant \mathcal{G} , définie par la loi de crochet

$$\begin{aligned}
 (16, 6) \quad & \left. \begin{aligned} [X, iY] &= [iX, Y] = i[X, Y] \\ [iX, iY] &= -[X, Y] \end{aligned} \right\} \text{ pour } X, Y \in \mathcal{G}. \\
 & \text{Donc}
 \end{aligned}$$

Proposition . Le germe de groupe de Lie complexe Γ prolongeant un germe de groupe de Lie réel G a pour algèbre de Lie l'algèbre de Lie complexe $\mathcal{G} + i\mathcal{G}$ prolongeant l'algèbre de Lie \mathcal{G} .

Remarque. Γ n'est pas un groupe de Lie complexe à n dim. arbitraire. Il a un sous-groupe de Lie G réel à n dim.

Pour qu'un groupe de Lie Γ hol. compl. soit le prolongement compl. d'un groupe de Lie réel G , il faut et il suffit que son algèbre de Lie complexe admette une sous-algèbre de Lie réelle \mathcal{G} telle que $\mathcal{G} \cap i\mathcal{G} = 0$.