RAPPORT SUR LA MESURE DE HAAR

Rédaction n° 149

Nombre de pages : 37

Nombre de feuilles : 37

Intégration

Mesure de Haar

Rapport Dixmier

149

A 149

RAPPORT SUR LA MESURE DE HAAR

<u>Notations</u>: L_E (resp. L_E^+) ensembles des fonctions continues complexes (resp. positives) à support compact sur l'espace localement compact E; $\mathcal{M}_E$:ensemble des mesures sur E. On supprime l'indice E quand c'est possible.

G: groupe loc. compact; e élément unité; si f est une fonction sur G on pose

$$f_s(x) = f(xs^{-1}) \; ; \quad {}_sf(x) = f(s^{-1}x) \; , \quad \check{f}(x) = f(x^{-1}); \; f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

On a $(f_s)_t = f_{st}$, ${}_t({}_sf) = {}_{ts}f$.

Si m est une mesure sur G, on définit les mesures m_s ; ${}_sm$; $\check{m}$; m^* par

$$m_s(f) = m(f_s) \; ; \; {}_sm(f) = m({}_sf) \; ; \; \check{m}(f) = m(\check{f}) \; ; \; m^*(f) = m(f^*)$$

(la dactylo a des doutes sur la dernière définition).

Si G' est un sous-groupe de G, et H = G/G' l'espace homogène des classes à gauche suivant G', si f est une fonction sur H, on désigne encore par ${}_sf$, pour $s \in G$, la fonction sur H définie par ${}_sf(x) = f(sx)$.

Mesure de Haar.

1-<u>Mesures relativement invariantes</u>.

Une mesure positive m est dite <u>relativement invariante à gauche</u> si ${}_sm$ est proportionnelle à m pour tout s G, i.e. si ${}_sm = \chi(s)m$. Si $m \neq 0$, $\chi(s)$ est bien déterminé, soit $f \in L^+$ telle que $m(f) > 0$; on a $\chi(s) = m({}_sf)/m(f)$, donc χ est continue, > 0 ,et vérifie $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$. Si H est un ouvert tel que $m(H) = 0$, on a $m(sH) = 0$ pour tout $s \in G$, donc le support de m est vide et $m = 0$; si donc $m \neq 0$, le support de m est G tout entier.

On définit de même les mesures positives relativement invariantes à droite.

En particulier, m est <u>invariante à gauche</u>(resp. à droite)si $_sm = m$ (resp. $m_s = m$) pour tout s G. Une mesure positive invariante à gauche $\neq 0$ s'appelle <u>mesure de Haar</u>.

<u>Proposition 1 - Soient</u> m <u>et</u> m' <u>deux mesures positives telles que</u> $_sm = \chi(s)m$, $_sm' = \chi(s)m'$ <u>pour tout</u> s ; <u>alors</u> m <u>et</u> m' <u>sont proportionnelles</u>.

Démonstration- Soient A et B deux <u>compacts</u>. Si φ_E désigne la fonction caractéristique d'un ensemble E, remarquons que $\varphi_A(s)\varphi_B(s^{-1}t) \leq \varphi_{AB}(t)\varphi_B(s^{-1}t)$, car $s \in A$ et $s^{-1}t \in B$ entrainent $t \in AB$. On a alors

$$(1) \quad m(A)m'(B) = \int\varphi_A(s)dm(s)\int\varphi_B(t)dm'(t) = \iint\chi(s)^{-1}\varphi_A(s)\,\varphi_B(s^{-1}t)dm(s)dm'(t)$$

$$\leq \iint\chi(s)^{-1}\varphi_{AB}(t)\,\varphi_B(s^{-1}t)dm(s)dm'(t) = \int\chi(t)^{-1}\varphi_{AB}(t)dm'(t)\int\chi(t^{-1}s)^{-1}.$$

$$\varphi_{B^{-1}}(t^{-1}s)dm(s) = \int\varphi_{AB}(t)dm'(t)\int\chi(s)^{-1}\varphi_{B^{-1}}(s)dm(s) = m'(AB)m(\chi^{-1}\varphi_{B^{-1}})$$

En remplaçant A par A', B par B^{-1} et en echangeant m et m' :

$$(2) \qquad m'(A)m(B^{-1}) \leq m(A'B^{-1})m'(\chi^{-1}\varphi_B) .$$

Multiplions (1) et (2) membre à membre. On peut supposer m et m' $\neq 0$ d'où $m(B^{-1}) > 0$ et $m'(B) > 0$ si B a un intérieur non vide. Il vient

$$m(A)m'(A') \leq m'(AB)m(A'B^{-1}).\ m(\chi^{-1}\varphi_{B^{-1}})/m(B^{-1})\ .\ m'(\chi^{-1}\varphi_B)/m'(B).$$

Si B est un voisinage convenable de l'unité, on a

$$m(A'B^{-1}) \leq (1+\varepsilon)m(A') \quad ; \quad m'(AB) \leq (1+\varepsilon)m'(A) \ ;$$

$$m(\chi^{-1}\varphi_{B^{-1}}) \leq (1+\varepsilon)m(B^{-1}) \quad ; \quad m'(\chi^{-1}\varphi_B) \leq (1+\varepsilon)m'(B)$$

(car $\chi(e) = 1$, et χ est continue). D'ou $m'(A')m(A) \leq m'(A)m(A')$ et par symétrie $m'(A')m(A) = m'(A)m(A')$.

<u>Corollaire-Toute mesure relativement invariante à gauche l'est à droite et réciproquement</u>, vice-versa, etc...

Car si m est relativ. inv. à gauche il en est de même de ses transl. à droite, qui lui sont donc proportionnelles.

On parlera donc désormais de mesures relativement invariantes sans préciser. Pour une telle mesure m existent deux fonctions continues >0, χ_g^m et χ_d^m, telles que ${}_s m = \chi_g^m(s)m$, $m_s = \chi_d^m(s)m$. Remarquons que $\check{m}({}_s f) = m(\check{f}_{s^{-1}}) = \chi_d(s)^{-1} m(\check{f}) = \chi_d(s)^{-1}\check{m}(f)$, donc $\chi_g^{\check{m}} = (\chi_d^m)^{-1}$ et de même $\chi_d^{\check{m}} = \ldots$

2-<u>Existence de la mesure de Haar</u>. <u>Théorème</u> 1 - <u>Il existe une mesure de Haar et(à un facteur constant près) une seule</u>.

L'unicité résulte de la Prop. 1% . Prouvons l'existence. Si A est relativement compact et U d'intérieur non vide, la borne inférieure des entiers n tels que A soit recouvert par n translatés à gauche de U est un nombre fini qui sera désigné par $(A:U)$. Il est >0 si A est non vide. Fixons dans toute la démonstration un ouvert non vide relativepent compact A_0, et posons $\lambda_U(A) = (A:U)/(A_0:U)$. Les propriétés suivantes sont immédiates:

(1) $0 \leq \lambda_U(A) \leq (A:A_0)$

(2) Si $A \subset B$, $\lambda_U(A) \leq \lambda_U(B)$

(3) $\lambda_U(A \cup B) \leq \lambda_U(A) + \lambda_U(B)$

(4) Si $AU^{-1} \cap BU^{-1} = \emptyset$, $\lambda_U(A \cup B) = \lambda_U(A) + \lambda_U(B)$

(5) $\lambda_U(sA) = \lambda_U(A)$.

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des parties <u>ouvertes relativement compactes</u> de G, J le produit des intervalles $[0, (A:A_0)]$ quand A parcourt $\mathcal{O}$. J est compact. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble, ordonné par inclusion, des <u>voisinages ouverts</u> de e. Considérons l'application $U \to (\lambda_U(A))$ de $\mathcal{U}$ dans J. L'image du filtre des sections de $\mathcal{U}$ est une base de filtre dans J, qui a un point adhérent, soit $(\lambda(A))$. Quels que soient $A_1, \ldots, A_n$ dans $\mathcal{O}$, U dans $\mathcal{U}$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $V \in \mathcal{U}$, $V \subset U$, tel que $|\lambda_V(A_i) - \lambda(A_i)| < \varepsilon$ pour $i = 1, \ldots, n$. D'ou les propriétés suivantes de λ, où $A \in \mathcal{O}$:

(1') $0 \leqslant \lambda(A) < +\infty$

(2') Si $A \subset B$, $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$

(3') $\lambda(A \cup B) \leqslant \lambda(A) + \lambda(B)$

(4') Si $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$

(5') $\lambda(sA) = \lambda(A)$

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties compactes de G. Pour $A \in \mathcal{C}$, posons $\lambda'(A) = \inf \lambda(B)$ où B parcourt l'ensemble des parties de $\mathcal{O}$ contenant A. $\mathcal{C}$ est une semi-phratrie (ou semi-clan...), et on a, pour $A \in \mathcal{C}$:

(1") $0 \leqslant \lambda'(A) < +\infty$

(2") Si $A \subset B$, $\lambda'(A) \leqslant \lambda'(B)$

(3") $\lambda'(A \cup B) \leqslant \lambda'(A) + \lambda'(B)$

(4") Si $A \cup B = \emptyset$, $\lambda'(A \cup B) = \lambda'(A) + \lambda'(B)$

(6") $\lambda'(sA) = \lambda'(A)$.

(5") Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $A \in \mathcal{C}$, il existe un $B \in \mathcal{O}$, $B \supset A$, tel que pour tout $A' \in \mathcal{C}$ qui vérifie $A \subset A' \subset B$, on a

$$\lambda'(A') - \lambda'(A) \leqslant \varepsilon .$$

D'où l'existence d'une mesure positive μ telle que $\mu(A) = \lambda'(A)$ pour $A \in \mathcal{C}$. On a $\mu \neq 0$ parce que $\lambda_U(A_0) = 1$, donc $\lambda(A_0) = 1$, donc $\lambda'(\overline{A_0}) \geqslant 1$. Enfin, comme une mesure est déterminée par ses valeurs sur les compacts, (6") entraine que μ est invariante à gauche.

Dans tout ce qui suit, μ désigne une mesure de Haar, que la dactylo écrira m pour des raisons purement typographiques.

Le résultat évident suivant fournit, pour les groupes analytiques, une nouvelle preuve de l'existence de la mesure de Haar:

<u>Proposition 2- Si G est un groupe analytique et si $\omega_1, \ldots, \omega_n$ forment une base de l'espace des formes de Maurer-Cartan telle que $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$, qui ne s'nnule jamais, soit > 0, la mesure définie par $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ est de Haar.</u>

<u>Proposition</u> 3- a) <u>G est compact si et seulement si</u> $m(G) < +\infty$; b) <u>G est discret si et seulement si</u> $m(\{e\}) > 0$.

En effet, soit U un ouvert relativement compact, et $(s_i U)_{i \in I}$ une famille maximale d'ensembles sU deux à deux disjoints. Les $s_i UU^{-1}$ recouvrent G et sont relativement compacts. Ceci posé, si $m(G) < +\infty$, I est fini, donc G est compact; la réciproque est triviale.

Supposons $m(\{e\}) > 0$, et soit V un voisinage de e tel que $m(V) < 2m(\{e\})$. On a $V = \{e\}$, donc G est discret. Réciproquement, si G est discret, $\{e\}$ est ouvert donc $m(\{e\}) > 0$.

<u>Proposition 4- Il existe une correspondance biunivoque entre les mesures positives</u> $\neq 0$ <u>relativement invariantes</u> ν <u>et les fonctions numériques finies</u> > 0 <u>continues</u> χ <u>telles que</u> $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$. <u>Cette correspondance est définie par la formule</u> $\nu = \chi.m$. <u>Pour une telle mesure</u> ν , <u>on a</u> $_s\nu = \chi(s)\nu$.

Si $\nu = \chi.m$ où χ vérifie les conditions de la Prop.4, on a , pour $f \in L$, $_s\nu(f) = \nu(_s f) = \chi m(_s f) = \chi(s) m(_s\chi\, _s f) = \chi(s) m(\chi f) = \chi(s)\nu(f)$, donc $_s\nu = \chi(s)\nu$. Réciproquement, si $_s\nu = \chi(s)\nu$, la Prop.1 prouve que $\nu = \chi m$.

(la dactylo proteste; ce n'est vrai qu'à un facteur constant près si m est fixée à l'avance, ce qui n'est pas précisé).

<u>Corollaire 1- Si</u> ν <u>est relativement invariante, avec</u> $_s\nu = \chi_g(s)\nu$, $\nu_s = \chi_d(s)\nu$, <u>on a</u> $\check{\nu} = (\chi_g \chi_d)^{-1}\nu$.

En effet, on a $\nu = \chi_g . m$ et $\check{\nu} = c\check{\chi}_g . m = c(\chi_d)^{-1} m$, avec une constante $c > 0$; d'où , en posant $\chi_g \chi_d = \chi$, $\chi\check{\nu} = c\nu$, i.e. $\nu(\chi^{-1}\check{f}) = c\nu(f)$ pour $f \in L$; donc $c\nu(f) = \nu(\chi^{-1}f) = c^{-1}\nu(\chi^{-1}\chi f) = c^{-1}\nu(f)$, et par suite $c = 1$.

<u>Corollaire 2-Si G est compact, ou analytique semi-simple, toute mesure relativement invariante non nulle est de Haar.</u>

Car soit χ une fonction numérique finie > 0 continue telle que $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$. Si G est compact, $\chi(G)$ est un sous-groupe compact du groupe multiplicatif $(R^*)_+$, et est donc $\{1\}$. Si G est ana lytique semi-simple, on sait que G est identique à son groupe des commutateurs; or $\chi(sts^{-1}t^{-1}) = 1$.

Corollaire 3-Soient ν et ν' deux mesures positives relativement invariantes non nulles. Les ensembles négligeables (resp. localement négligeables, les ensembles mesurables, les fonctions mesurables) sont les mêmes pour ν et ν'. (la dactylo propose: ν et ν' sont des mesures équivalentes).

Quand une des notions précédentes sera utilisée sans référence à une mesure déterminée, il s'agira toujours d'une mesure relativement invariante quelconque.

Remarque - En réalité ces corollaires ne nécessitent pas l'existence de la mesure de Haar. Mais il serait ridicule d'étudier les mesures relativement invariantes avant de savoir qu'il en existe.

3-Module. Proposition 5-Soit ν une mesure positive relativement invariante $\neq 0$. La fonction $\chi_d^\nu(s)/\chi_g^\nu(s) = \Delta(s)$ est indépendante de ν et s'appelle le module de G.

En effet si $f \in L$ on a $\nu_s(f) = \nu(f_s) = m(\chi_g^\nu f_s) = \chi_g^\nu(s) m((\chi_g^\nu f)_s) = \chi_g^\nu(s)\chi_d^m(s)\nu(f)$, d'où

$$\chi_d^\nu(s)/\chi_g^\nu(s) = \chi_d^m(s) .$$

$\Delta(s)$ est une fonction continue, > 0, vérifiant $\Delta(st) = \Delta(s)\Delta(t)$. Soit $m_1 = \Delta^{-1}m$ (mesure de Cohaar), $m_2 = \Delta^{-\frac{1}{2}}m$ (mesure intermédiaire). D'après ce qui précède: ${}_s m = m$, $m_s = \Delta(s)m$, $\check{m} = \Delta^{-1}m$; ${}_s m_1 = \Delta(s)^{-1}m_1$, $m_{1s} = m_1$, $\check{m}_1 = \Delta m_1$; ${}_s m_2 = \Delta(s)^{-\frac{1}{2}}m_2$, $m_{2s} = \Delta(s)^{\frac{1}{2}}m_2$, $\check{m}_2 = m_2$.

Module d'un automorphisme. Soit u un automorphisme du groupe topologique G. Par transport de structure, l'application $f \to m(f \circ u)$, où $f \in L$, est une mesure invariante à gauche. Donc il existe un nombre $\Delta(u) > 0$ tel que $m(f \circ u) = \ldots$

$= \Delta(u)m(f)$. Ce nombre s'appelle le module de u. On a évidemment $\Delta(u\circ v) = \Delta(u)\Delta(v)$. Si u_s désigne l'automorphisme intérieur $x \to sxs^{-1}$ de G, on a $m(f\circ u_s) = m({}_{s^{-1}}f_s) = \Delta(s)m(f)$, donc $\Delta(u_s) = \Delta(s)$. En particulier $\Delta(s) = 1$ si s est dans le centre de G.

G étant analytique, soit du la différentielle de u en e, qui est un automorphisme de l'espace tangent g à G en e. Soient $y_i = u_i(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées de u(x) en fonction de celles de x (dans un voisinage de e). Soit a la valeur en e de $D(u_1,\dots,u_n)/D(x_1,\dots,x_n)$, qui est aussi le déterminant D(du) de du. Soit $f \in L^+$, nulle en dehors d'un voisinage V de e. Si V est assez petit on a $(|a| - \varepsilon)m(f) \leqslant m(f\circ u) \leqslant (|a| + \varepsilon)m(f)$. Ceci prouve que $|a| = \Delta(u)$, donc que $\Delta(u) = |D(du)|$.

<u>Définition-G est dit unimodulaire si son module est égal à un</u>.

<u>Proposition</u> 6 - <u>S'il existe un voisinage compact</u> V <u>de</u> e <u>invariant par les autom. intérieurs de</u> G, G <u>est unimodulaire</u>.

Car $m(V) = m(s^{-1}Vs) = \Delta(s)m(V)$ pour $s \in G$, et $0 < m(V) < +\infty$. D'où $\Delta(s) = 1$

<u>Proposition</u> 7-<u>Les groupes discrets, abéliens, compacts, analytiques semi-simples sont unimodulaires</u>.

Pour les groupes discrets, abéliens, compacts (resp. analytiques semi-simples, compacts) cela résulte de la Prop. 6 (resp. du Corollaire 2 de la Prop. 4).

<u>4-Mesures dans les espaces homogènes</u>.

Soit G' un sous-groupe fermé de G, m' sa mesure de Haar, Δ' son module. Soit H = G/G' l'espace homogène (localement compact) des classes à gauche suivant G'. On désigne par $\dot{x}$ la classe de $x \in G$ modulo G'. La formule $\hat{f}(x) = f(\dot{x})$ définit une application biunivoque de l'ensemble des fonctions continues dans H sur l'ensemble des fonctions continues dans G, constantes sur les classes suivant G'.

Pour $f \in L_G$, la fonction $\int f(xx')dm'(x')$ est continue et constante sur les classes suivant G'; soit $f^\natural$ la fonction continue correspondante sur H'. Le support de $f^\natural$ est contenu dans l'image canonique du support de f, donc $f \to f^\natural$ est une application de L_G dans L_H, qui possède les propriétés suivantes:

(1) Elle est linéaire

(2) L'image de L_G^+ est L_H^+ (donc l'image de L_G est L_H)

(3) Si $f \in L_G$ et si g est continue dans H, on a $(f\hat{g})^\natural = f^\natural g$

(4) Si $f \in L_G$ et si $s \in G$, on a $({}_sf)^\natural = {}_s(f^\natural)$

(5) Si $f \in L_G$ et si $s \in G'$ on a $(f_s)^\natural = \Delta'(s)f^\natural$.

(1) est immédiat. (3), (4) et (5) résultent des calculs suivants:

$(f\hat{g})^\natural(\dot{x}) = \int f(xx')\hat{g}(xx')dm'(x') = g(\dot{x}) \int f(xx')dm'(x') = g(\dot{x})f^\natural(\dot{x})$;

$({}_sf)^\natural(\dot{x}) = \int f(s^{-1}xx')dm'(x') = f^\natural(s^{-1}\dot{x}) = {}_s(f^\natural)(\dot{x})$;

$(f_s)^\natural(\dot{x}) = \int f(xx's^{-1})dm'(x') = \Delta'(s) \int f(xx')dm'(x') = \Delta'(s)f^\natural(\dot{x})$.

Soit alors $f \in L_G^+$, $f \neq 0$. On a $f^\natural \in L_H^+$, $f^\natural \neq 0$. Si $s_1, \dots, s_n$ sont des éléments de G et si $g \in L_H^+$ on a d'après (3) et (4)

$$g(\sum {}_{s_i}(f^\natural)) = (\hat{g}\sum {}_{s_i}f)^\natural .$$

Comme G est transitif dans H, il est immadiat que les $g\sum {}_{s_i}f^\natural$ constituent tout L_H^+, d'où la propriété (2).

La transposée de l'application $\natural$ est alors une application <u>biunivoque</u> $\nu \to \nu^\natural$ de l'ensemble des mesures sur H <u>dans</u> l'ensemble des mesures sur G. On a $\nu^\natural(f) = \nu(f^\natural)$. Les mesures $\nu^\natural$ ne sont pas des mesures quelconques sur G

<u>Proposition</u> 8.-<u>Soit</u> ρ <u>une mesure positive sur</u> G. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>:

(a): <u>il existe une mesure positive</u> ν <u>sur</u> H <u>telle que</u> $\rho = \nu^\natural$, <u>i.e. telle que, pour</u> $f \in L_G$, <u>on ait</u> $\int f(x)d\rho(x) = \int d\nu(\dot{x}) \int f(xx')dm'(x')$;

(b) : *Si* $f \in L_G$, *la relation* $f^\natural = 0$ *entraine* $\rho(f) = 0$;

(c) : *Si* $f \in L_G$ *et* $g \in L_G$, *on a* $\rho(f\widehat{g^\natural}) = \rho(\widehat{f^\natural}g)$

(d) : *Si* $s \in G'$, $\rho_s = \Delta'(s)\rho$.

(a) → (d) : Si $\rho = \nu^\natural$,et si $f \in L_G$, $s \in G'$, on a

$$\rho_s(f) = \rho(f_s) = \nu^\natural(f_s) = \nu((f_s)^\natural) = \nu(\Delta'(s)f^\natural) = \Delta'(s)\rho(f) .$$

(d) → (c) : supposons $\rho_s = \Delta'(s)\rho$ pour $s \in G'$; soient $f, g \in L_G$. On a

$$\rho(f\widehat{g^\natural}) = \int f(x)d\rho(x)\int g(xx')dm'(x') = \iint f(x)g(xx'^{-1})\Delta'(x'^{-1})d\rho(x)dm'(x')$$

$$= \int \Delta'(x'^{-1})dm'(x') \int f(xx')g(x)\Delta'(x')d\rho(x) =$$

$$= \int g(x)d\rho(x) \int f(xx')dm'(x') = \rho(g\widehat{f^\natural}).$$

(c) → (b) : Supposons $\rho(f\widehat{g^\natural}) = \rho(\widehat{f^\natural}g)$ pour $f, g \in L_G$. Si $f^\natural = 0$, on a $\rho(f\widehat{g^\natural}) = 0$ quelle que soit $g \in L_G$. Choisissons g de façon que $g^\natural = 1$ sur l'image canonique du support de f(propriété (2) ci-dessus). Alors $f\widehat{g^\natural} = f$, donc $\rho(f) = 0$.

(b) → (a) : Si les conditions $f \in L_G$, $f^\natural = 0$ entrainent $\rho(f) = 0$, on définit de manière univoque une forme linéaire ν sur L_H en posant $\nu(f^\natural) = \rho(f)$ Compte tenu de la propriété (2) ,cette forme est positive, donc est une mesure positive sur H, et on a $\rho = \nu^\natural$.

Une mesure positive ν sur H est dite *relativement invariante* s'il existe une fonction $\chi(s)$ sur G telle que $\nu({}_sf) = \chi(s)\nu(f)$ pour $f \in L_H$, $s \in G$. Si $\nu \neq 0$, χ est bien déterminée, continue, > 0, et vérifie $\chi(st) = \chi(s).\chi(t)$; et ν a pour support H.

Proposition 9-*Soit* ν *une mesure positive* $\neq 0$ *sur* H. *Si* $\nu({}_sf) = \chi(s)\nu(f)$ *pour* $f \in L_H$ *et* $s \in G$, *on a* $\nu^\natural = \chi m$, *et* $\Delta'(s) = \chi(s)\Delta(s)$ *pour* $s \in G'$.

Réciproquement, si ρ *est une mesure positive sur* G *telle que* $\rho({}_sf) = \chi(s).\rho(f)$ *pour* $f \in L_G$ *et* $s \in G$, *i.e. si* $\rho = \chi m$,*et si* $\Delta'(s) = \chi(s)\Delta(s)$ *pour* $s \in G'$, *alors il existe une mesure positive unique* ν *sur* H *telle que* $\rho = \nu^\natural$, *et* $\nu({}_sf) = \chi(s)\nu(f)$ *pour* $f \in L_H$ *et* $s \in G$.

Soit ν une mesure positive non nulle sur H telle que $\nu({}_sf) = \chi(s)\nu(f)$ pour $f \in L_H$, $s \in G$. Alors, si $g \in L_G$, on a

$$\nu^\natural({}_sg) = \nu(({}_sg)^\natural) = \nu({}_s(g^\natural)) = \chi(s)\,\nu(g^\natural) = \chi(s)\nu^\natural(g)$$

donc (Prop.4) $\nu^\natural = \chi m$, et par suite $(\nu^\natural)_s = \chi(s)\Delta(s)\nu^\natural$. Mais d'autre part pour $s \in G'$ on a

$$(\nu^\natural)_s(g) = \nu^\natural(g_s) = \nu((g_s)^\natural) = \nu(\Delta'(s)g^\natural) = \Delta'(s)\nu^\natural(g)$$

donc $\chi(s)\Delta(s) = \Delta'(s)$ pour $s \in G'$.

Réciproquement, soit ρ une mesure positive sur G telle que $\rho_s = \chi(s)\rho$ pour $s \in G$, avec $\chi(s)\Delta(s) = \Delta'(s)$ pour $s \in G'$? On a, pour $f \in L_G$ et $s \in G'$, $\rho_s = \Delta(s)\chi(s)\rho = \Delta'(s)\rho$, donc (prop.8) $\rho = \nu^\natural$, où ν est une mesure positive sur H. En outre, si $f \in L_G$ et $s \in G$, on a

$$\nu({}_s(f^\natural)) = \nu(({}_sf)^\natural) = \rho({}_sf) = \chi(s)\,\rho(f) = \chi(s)\,\nu(f^\natural)$$

donc ${}_s\nu = \chi(s)\nu$.

Corollaire 1-*Pour qu'il existe sur* H *une mesure invariante par* G, *il faut et il suffit que* $\Delta(s) = \Delta'(s)$ *pour* $s \in G'$.

Corollaire 2- *Pour qu'il existe sur* H *une mesure relativement invariante par* G, *il suffit que* G' *soit unimodulaire. Cette condition est aussi nécessaire si* G *est analytique semi-simple.*

Proposition 10-*Soit* G' *un sous-groupe distingué fermé de* G. *Soit* u *un automorphisme de* G *conservant* G', u' *sa restriction à* G', $\dot{u}$ *l'automorphisme correspondant de* G/G'. *On a* $\Delta(u) = \Delta(u')\,\Delta(\dot{u})$. *En particulier*, $\Delta(s) = \Delta'(s)$ *pour* $s \in G'$.

En effet, désignons par $\dot{m}$ la mesure de Haar sur G/G', choisie de telle sorte que $m(f) = \dot{m}(f^\natural)$ pour $f \in L_G$. On a

$$(f\circ u)^\natural(\dot{x}) = \int f(u(xx'))dm'(x') = \int f(u(x)u(x'))dm'(x')$$
$$= \Delta(u')\int f(u(x)x')dm'(x') = \Delta(u').(f^\natural\circ\dot{u})(\dot{x})$$

donc :

$$\Delta(u)\mu(f) = \mu(f\circ u) = \mathring{\mu}((f\circ u)^{\flat}) = \Delta(u')\mathring{\mu}(f^{\flat}\circ\dot{u}) = \Delta(u')\Delta(\dot{u})\mathring{\mu}(f^{\flat}) =$$

$$= \Delta(u')\Delta(\dot{u})\mu(f)$$

d'où $\Delta(u) = \Delta(u')\Delta(\dot{u})$.

Corollaire 1. Soit G' un sous-groupe distingué fermé de G. Si G et G/G' sont unimodulaires, les automorphismes intérieurs de G conservent la mesure de Haar sur G'.

Corollaire 2. Soit G' un sous-groupe distingué fermé unimodulaire de G. Si G/G' est compact, ou analytique semi-simple, G est unimodulaire.

En effet, $\Delta(s) = 1$ pour $s \in G'$, donc Δ définit par passage au quotient une fonction $\dot{\Delta}$ sur G/G', telle que $\dot{\Delta}(x)\,\dot{\Delta}(y) = \dot{\Delta}(xy)$.

Ce corollaire s'applique à $GL(n,R)$ et $GL(n,C)$ (prendre pour G' le sous-groupe des endomorphismes scalaires), ainsi qu'au groupe des déplacements dans R^n (prendre pour G' le sous-groupe des translations).

Soit maintenant G'' un sous-groupe fermé de G', Δ'' son module. Supposons $\Delta'(s) = \Delta''(s)$ pour $s \in G''$, ce qui entraîne (cor. 1 de la prop. 9) l'existence d'une mesure positive $\mu'_1 \neq 0$ sur G'/G'', invariante par G'. On peut généraliser à ce cas une partie des considérations précédentes, qui concernaient le cas où $G'' = \{e\}$, $\mu'_1 = \mu'$. Pour $f \in L_{G/G''}$ et $x \in G$, la fonction $\int_{G'/G''} f(xx')d\mu'_1(x')$ est continue et constante sur les classes suivant G', donc définit une fonction $f^{\flat}$ sur G/G', continue et à support compact. On a aussitôt, pour $s \in G$, $(sf)^{\flat} = s(f^{\flat})$.

Si ν est une mesure positive sur G/G', on définit une mesure positive $\nu^{\flat}$ sur G/G'' par $\nu^{\flat}(f) = \nu(f^{\flat})$, c'est-à-dire par :

$$\int_{G/G''} f(x)d\nu^{\flat}(x) = \int_{G/G'} d\nu(\dot{x}) \int_{G'/G''} f(xx')d\mu'_1(x')$$

où $f \in L_{G/G''}$.

Proposition 11.- Si $_s\nu = \chi(s)\nu$ pour $s \in G$ (ce qui exige $\chi(s)\Delta(s) = \Delta'(s)$ pour $s \in G'$), on a aussi $_s(\nu^\flat) = \chi(s)\nu^\flat$ (propriété qui caractérise $\nu^\flat$ à un facteur constant près). En particulier, si $\Delta(s) = \Delta'(s)$ pour $s \in G'$, et si ν est la mesure invariante sur G/G', $\nu^\flat$ est la mesure invariante sur G/G''.

En effet, si $f \in L_{G/G''}$ et $s \in G$, on a :

$$\nu^\flat(_sf) = \nu((_sf)^\flat) = \nu(_s(f^\flat)) = \chi(s)\nu(f^\flat) = \chi(s)\nu^\flat(f) .$$

5. Espaces fonctionnels remarquables. Représentations régulières.- Soit ν une mesure relativement invariante ; $_s\nu = \chi_g(s)\nu$, $\nu_s = \chi_d(s)\nu$. On désignera par L^p_ν (ou L^p quand aucune confusion n'est possible), pour $1 \leqslant p < +\infty$, l'espace de Banach des fonctions complexes de puissance $p^{ème}$ intégrable pour ν. La norme de $f \in L^p_\nu$ sera désignée par $\|f\|_{p,\nu}$, ou $\|f\|_p$, ou $\|f\|$.

Pour $s \in G$, on définit dans L^p_ν deux opérateurs linéaires U_s, V_s de la manière suivante :

$$U_sf(x) = \chi_g(s)^{-1/p} f(s^{-1}x) \qquad V_sf(x) = \chi_d(s)^{1/p} f(x\,s) .$$

Ces opérateurs sont isomètriques. Car :

$$\int|\chi_g(s)^{-1/p} f(s^{-1}x)|^p\, d\nu(x) = \chi_g(s)^{-1}\int|f(s^{-1}x)|^p\, d\nu(x) = \int|f(x)|^p d\nu(x)$$

donc $\|U_sf\| = \|f\|$; et de même pour V_s. Ils fournissent une représentation de G, car

$$U_sU_tf(x) = \chi_g(s)^{-1/p}(U_tf)(s^{-1}x) = \chi_g(s)^{-1/p}\chi_g(t)^{-1/p} f(t^{-1}s^{-1}x) =$$
$$= \chi(st)^{-1/p} f((st)^{-1}x)$$

et de même pour V_s. Ces représentations sont fortement continues, c'est-à-dire que U_sf et V_sf sont des fonctions fortement continues de s pour f fixé : comme les U_s et les V_s sont équicontinues, il suffit de le vérifier pour $f \in L$, ce qui est facile par l'uniforme continuité de f.

Soit S l'opérateur antilinéaire de L^p_g défini par

$$Sf(x) = \chi_g \chi_d(x)^{-1/p} \overline{f(x^{-1})}$$

On a :

$$\int \left| \chi_g \chi_d(x)^{-1/p} \overline{f(x^{-1})} \right|^p d\nu(x) = \int \left| \check{f}(x) \right|^p d\check{\nu}(x) = \int \left| f(x) \right|^p d\nu(x)$$

donc S est isométrique. De plus

$$S^2 f(x) = \chi_g \chi_d(x)^{-1/p} \overline{Sf(x^{-1})} = \chi_g \chi_d(x)^{-1/p} \chi_g \chi_d(x^{-1})^{-1/p} f(x) = f(x)$$

donc $S^2 = 1$. On a aussi :

$$U_s Sf(x) = \chi_g(s)^{-1/p} Sf(s^{-1}x) = \chi_g(s)^{-1/p} \chi_g \chi_d(s^{-1}x)^{-1/p} \overline{f(x^{-1}s)} =$$

$$= \chi_d(s)^{1/p} \chi_g \chi_d(x)^{-1/p} \overline{f(x^{-1}s)}$$

$$SV_s f(x) = \chi_g \chi_d(x)^{-1/p} \overline{V_s f(x^{-1})} = \chi_g \chi_d(x)^{-1/p} \chi_d(s)^{1/p} \overline{f(x^{-1}s)}$$

donc $U_s S = SV_s$, ou $V_s = SU_s S$, ou $U_s = SV_s S$. Autrement dit, S échange les représentations U_s et V_s. Enfin :

$$U_s V_t f(x) = \chi_g(s)^{-1/p} V_t f(s^{-1}x) = \chi_g(s)^{-1/p} \chi_d(t)^{1/p} f(s^{-1}xt)$$

$$V_t U_s f(x) = \chi_d(t)^{1/p} U_s f(xt) = \chi_d(t)^{1/p} \chi_g(s)^{-1/p} f(s^{-1}xt)$$

donc $U_s V_t = V_t U_s$.

On désignera par L^∞ l'espace de Banach des fonctions complexes mesurables essentiellement bornées (pour toute mesure relativement invariante) ; par L^c_∞ l'espace de Banach des fonctions complexes continues tendant vers 0 à l'infini ; par M_1 l'espace de Banach des mesures bornées. Si $f \in L^\infty$, on pose =: $U_s f = {}_s f$, $V_s f = f_{s^{-1}}$, $Sf = f^*$; U_s, V_s, S sont isométriques, $S^2 = 1$, $U_s S = SV_s$; les opérateurs U_s et V_s, permutables, fournissent deux représentations de G qui, on le verra dans un instant, sont faiblement continues (dans L^∞ considéré comme dual de L^1). L_∞ est stable pour tous ces opérateurs ; on peut donc définir dans L_∞ des représentations induites qui possèdent les mêmes propriétés (mais qui sont fortement continues) et une involution qui les échange.

Enfin, si $\nu \in M_1$, on pose $U_s\nu = {}_{s^{-1}}\nu$, $V_s\nu = \nu_s$; d'où des représentations permutables de G par des opérateurs isométriques, échangées par l'involution isométrique $S\nu = \nu^*$, représentations qui, on va le voir, sont faiblement continues (dans M_1 considéré comme dual de L_∞).

Revenons à L^p_ν, $1 < p < +\infty$, dont le dual est $L^{p'}_\nu$ $(p^{-1}+p'^{-1}=1)$. Désignons par U'_s, V'_s, S' les opérateurs définis dans $L^{p'}_\nu$ comme U_s, V_s, S dans L^p_ν. Si $f \in L^p_\nu$ et $g \in L^{p'}_\nu$, on a :

$$\langle U_s f, g\rangle = \int f(s^{-1}x)\overline{g(x)}\,\chi_g(s)^{-1/p}\,d\nu(x) = \chi_g(s)^{-1/p}\chi_g(s)\int f(x)\,\overline{g(sx)}\,d\nu(x)$$
$$= \int f(x)\,\chi_g(s^{-1})^{-1/p'}\,\overline{g(sx)}\,d\nu(x) = \langle f, U'_{s^{-1}}g\rangle$$

donc $U_s^* = U'_{s^{-1}}$, et de même $V_s^* = V'_{s^{-1}}$ (on a pris des produits scalaires hermitiens pour ne pas avoir à traiter à part le cas hilbertien). Ce résultat est valable aussi dans (L^1_ν, L^∞), et dans (L_∞, M_1), ce qui prouve les continuités faibles promises.

6. <u>Quelques bons trucs pour calculer explicitement des mesures invariantes.</u>

Soit H un sous-groupe fermé du groupe linéaire général $GL(n,C)$. Soit $\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r\}$ un système de coordonnées (réelles) dans un voisinage de $e = I$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\dots,\varepsilon_r)$ les coordonnées de I dans ce système. La méthode classique de recherche des formes de Maurer-Cartan $\omega_1, \omega_2,\dots,\omega_r$ se traduit par la formule suivante ; où $x \in H$:

$$I + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial x}{\partial \xi_i}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_r)\omega_i = x^{-1}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r)\Big[x(\xi_1,\dots,\xi_r) + \sum_{i=1}^{r}\frac{\partial x}{\partial \xi_i}(\xi_1,\dots,\xi_r)d\xi_i\Big]$$

soit, en posant

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_r) = m_i \in GL(n,C) \; :$$

$$\sum_{i=1}^{r} m_i\omega_i = x^{-1}dx = \delta x$$

Comme les m_i sont linéairement indépendants sur le corps R, le calcul de δx permet de calculer $\omega_1, \omega_2,\dots,\omega_n$, donc $\omega_1\wedge\omega_2\wedge\dots\wedge\omega_n$.

Remarques. 1.- Soit $a \in H$. L'application $x \to z = axa^{-1}$ est un automorphisme de H. Soient $\zeta_i(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r)$ $(i=1,\dots,r)$ les coordonnées de z. Par dérivation, on a :

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial \zeta_i}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_r)\,\frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_q}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) = a\,\frac{\partial x}{\partial \xi_q}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)a^{-1}$$

ou :

$$\sum_{i=1}^{r} m_i\,\frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_q}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) = am_qa^{-1}.$$

Donc $a\delta xa^{-1} = \sum_{q=1}^{r}(am_qa^{-1})\omega_q = \sum_{i=1}^{r} m_i\omega'_i$, avec $\omega'_i = \sum_{q=1}^{r}\omega_q\,\frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_q}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$

Donc, $\omega'_1 \wedge \omega'_2 \dots \wedge \omega'_n = \omega_1 \wedge \omega_2 \dots \wedge \omega_n \;\dfrac{\partial(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_r)}$.

Si H est unimodulaire, $\omega'_1 \wedge \omega'_2 \wedge \dots \wedge \omega'_r = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_r$.

2. Supposons $x = v\lambda v^{-1}$, où $v \in H$ et $\lambda \in H$ sont des fonctions des ξ_q. On a : $xv = v\lambda$, donc $dx.v + x.dv = dv.\lambda + v.d\lambda$, $dx = (dv.\lambda + v.d\lambda - x.dv)v^{-1}$, $\delta x = v\lambda^{-1}v^{-1}(dv.\lambda + v.d\lambda - x\,dv)v^{-1}$, et finalement :

$$v^{-1}\delta x\, v = \lambda^{-1}\delta v\lambda + \delta\lambda - \delta v$$

D'après la remarque 1, il suffit, si H est unimodulaire, d'exprimer $\lambda^{-1}\delta v\lambda + \delta\lambda - \delta v$ comme combinaison linéaire des m_i.

Si λ est diagonale $(\lambda_{ik} = \delta_{ik}\lambda_i)$, on remarquera de plus que :

1) Les éléments diagonaux de $\lambda^{-1}\delta v\lambda$ et de δv sont les mêmes ; donc les éléments diagonaux de $v^{-1}\delta xv$ sont ceux de $\delta\lambda$, à savoir $\delta(\lambda_i)$.

2) Les éléments non diagonaux de $\delta\lambda$ sont nuls ; donc les éléments non diagonaux de $v^{-1}\delta xv$ sont $(\lambda_j^{-1}\lambda_k - 1)(\delta v)_{jk}$.

Mesure de Haar (biinvariante) dans $G = GL(n,R)$.- Si $x = (x_{ij})$, on prend les x_{ij} pour paramètres. Alors, $m_{ij} = e_{ij}$ (la matrice qui présente un 1 dans la case (i,j) et des zéros partout ailleurs).

Posant $x^{-1} = (y_{ij})$, on a :

$$(\delta x)_{pq} = \sum_{i=1}^{n} y_{pi}\,dx_{iq} = \omega_{pq}$$

et $\displaystyle\prod_{p,q=1}^{n}\omega_{pq} = \prod_{q=1}^{n} D(x^{-1})dx_{1q} \wedge dx_{2q} \wedge \dots \wedge dx_{nq} = D(x)^{-n}\prod_{p,q=1}^{n} dx_{pq}$

donc : $d\mu(x) = |D(x)|^{-n} \prod_{p,q=1}^{n} dx_{pq}$

Mesure de Haar (biinvariante) dans $G = GL(n,C)$.- Si $x = (x_{pq})$, on prend pour paramètres x'_{pq}, x''_{pq}, parties réelles et imaginaires de x_{pq}. Alors, $m'_{pq} = e_{pq}$, $m''_{pq} = i\, e_{pq}$. Avec les mêmes notations que plus haut, on a donc :

$$\omega'_{pq} = \mathcal{R} \sum_{s=1}^{n} y_{ps}\, dx_{sq} \qquad \omega''_{pq} = \mathcal{J} \sum_{s=1}^{n} y_{ps}.\, dx_{sq}$$

$$\omega'_{pq} \wedge \omega''_{pq} = \frac{1}{2i} \left(\sum_{s=1}^{n} \overline{y}_{ps}\, \overline{dx}_{sq} \right) \wedge \left(\sum_{s=1}^{n} y_{ps} dx_{sq} \right)$$

d'où : $$\prod_{p,q=1}^{n} \omega'_{pq} \wedge \omega''_{pq} = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n^2} D(\overline{x})^{-n}\, D(x)^{-n} \prod_{p,q=1}^{n} dx_{pq} \prod_{p,q=1}^{n} \overline{dx}_{p,q}$$

$$d\mu(x) = |D(x)|^{-2n} \prod_{p,q=1}^{n} dx'_{pq} \wedge dx''_{pq}$$

Mesure de Haar dans le groupe Z des $z = (z_{pq})$ telles que $z_{pq} = 0$ pour $p < q$, et $z_{pp} = 1$.- Paramètres : parties réelles et imaginaires z'_{pq} et z''_{pq} de z_{pq}, $p > q$. On a $m'_{pq} = e_{pq}$, $m''_{pq} = ie_{pq}$ $(p > q)$.

Posant $z^{-1} = (y_{pq})$; on a :

$$(\delta z)_{pq} = \sum_{s=1}^{n} y_{ps}\, dz_{sq} = \omega_{pq} \quad ; \quad \omega'_{pq} = \mathcal{R}\, \omega_{pq}, \quad \omega''_{pq} = \mathcal{J}\, \omega_{pq}.$$

Comme plus haut, il faut donc calculer $\prod_{p>q} \omega_{pq} \wedge \overline{\omega_{pq}}$. Or :

$$\omega_{21} \wedge \omega_{31} \wedge \ldots \wedge \omega_{n1} = dz_{21} \wedge (y_{32} dz_{21} + dz_{31}) \wedge \ldots \wedge (y_{n2} dz_{21} \underbrace{+ dz_{31}}_{y_{n3}} + \cdots + dz_{n1})$$

$$= dz_{21} \wedge dz_{31} \wedge \ldots \wedge dz_{n1}$$

De même, $\omega_{32} \wedge \omega_{42} \wedge \ldots \wedge \omega_{n2} = dz_{32} \wedge dz_{42} \wedge \ldots \wedge dz_{n2}$. Etc. Donc, à un facteur constant près :

$$d\mu(z) = \prod_{p>q} dz_{pq} \wedge \overline{dz}_{pq}$$

Calculant $dz . z^{-1}$, on trouve que $d\mu(z)$ est aussi la mesure invariante à droite (on aimerait donner une raison plus astucieuse).

<u>Mesure de Haar dans le groupe K des matrices</u> $k=(k_{pq})$ <u>telles que</u> $k_{pq}=0$ <u>pour</u> $p<q$, <u>et unimodulaires c'est-à-dire telles que</u> $k_{11}k_{22}\ldots k_{nn}=1$. Paramètres : parties réelles et imaginaires de $k_{22}, k_{33},\ldots,k_{nn}$, et des k_{pq} , $p>q$.

K admet Z pour sous-groupe distingué fermé, et pour sous-groupe fermé le groupe Δ des matrices diagonales $\delta=[\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n]$ avec $\delta_1\delta_2\ldots\delta_n=1$. Prenant pour paramètres dans Δ les parties réelles et imaginaires de $\delta_2,\ldots,\delta_n$, la mesure de Haar dans Δ (isomorphe à $(C^*)^{n-1}$) est $|\delta_2|^{-2}|\delta_3|^{-2}\ldots|\delta_n|^{-2}\prod_{i=2}^{n} d\delta_i\wedge\overline{d\delta_i}$. Toute classe de K modulo Z contient un élément et un seul de Δ , de sorte que K/Z peut-être identifié à Δ , K opérant à gauche dans Δ : si $k=(k_{pq})\in K$, on a $k=\delta z$, avec : $\delta_i=k_{ii}$, $z_{pq}=\delta_p^{-1}k_{pq}=k_{pp}^{-1}k_{pq}$, d'où

$$dz_{pq}=k_{pp}^{-1}dk_{pq}-k_{pp}^{-2}k_{pq}\,dk_{pp}\ ,\qquad p>q\ .$$

D'après le n°1 et le calcul précédent de $d\mu(z)$, il faut calculer :

$$\prod_{i=2}^{n}|k_{ii}|^{-2}dk_{ii}\wedge\overline{dk_{ii}}\wedge\prod_{p>q}dz_{pq}\wedge\overline{dz_{pq}}$$

Compte-tenu de ce que dk_{11} est combinaison linéaire de $dk_{22},\ldots,dk_{nn}$ (car $\sum_{i=1}^{n}\frac{dk_{ii}}{k_{ii}}=0$), cette expression est égale à

$$\prod_{i=2}^{n}|k_{ii}|^{-2}dk_{ii}\wedge\overline{dk_{ii}}\prod_{p>q}|k_{pp}|^{-2}dk_{pq}\,\overline{dk_{pq}}$$

Donc :

$$d\mu(k)=|k_{22}|^{-4}|k_{33}|^{-6}\ldots|k_{nn}|^{-2n}\prod dk_{pq}\wedge\overline{dk_{pq}}$$

($p>q$ et $p=q=2,3,\ldots,n$) .

[On peut de même calculer la mesure de Cohaar ; elle est égale à $|k_{33}|^{2}\ldots|k_{nn}|^{2n-4}\prod dk_{pq}\wedge\overline{dk_{pq}}$. Donc

$$\Delta(k)=|k_{22}|^{4}|k_{33}|^{8}\ldots|k_{nn}|^{4-4n}\ ]\ .$$

Résultats analogues pour le groupe K' des $k'=(k'_{pq})$ unimodulaires telles que $k'_{pq}=0$ pour $p>q$.

<u>Mesure de Haar</u> (<u>biinvariante</u>) <u>dans le groupe</u> $G = SO(n,C)$ (<u>groupe spécial linéaire complexe</u>). Soit M l'ensemble des $g \in G$ qui admettent une décomposition $g = k'z$ avec $z \in Z$, $k' \in K'$ (cette décomposition, si elle existe, est unique ; faire le calcul). Pour des raisons de dimension (!) $N = \complement M$ est négligeable. G et Z étant unimodulaires, il existe dans G/Z une mesure unique invariante par G. M et N sont saturés modulo Z, soient M' et N' leurs images canoniques dans G/Z. N' est négligeable pour la mesure invariante dans G/Z, celle-ci induit donc dans M' une mesure invariante à gauche par G ; d'ailleurs M' peut-être identifié canoniquement à K', et la mesure ainsi obtenue sur K', étant invariante à gauche par G donc par K', n'est autre que la mesure de Haar sur K'. Ceci posé, on a :

$$\int_G f(g)\, d\mu(g) = \int_{G/Z} d\mu(\mathring{x}) \int_Z f(xz)\, d\mu(z) =$$

$$= \int_{M'} d\mu(\mathring{x}) \int_Z f(xz)\, d\mu(z) = \int_{K'} d\mu(k') \int_Z f(k'z)\, d\mu(z)$$

et $d\mu(z)$, $d\mu(k')$ ont été calculés précédemment.

<u>Mesure de Haar</u> (<u>biinvariante</u>) <u>dans</u> $U(n)$ (<u>groupe unitaire</u>).

Si $x \in U(n)$, $x = e^{ih}$, avec h hermitienne, et bien déterminée dans un voisinage de I par $h(I)=0$. Paramètres : les éléments diagonaux h_{pp} de h, et les parties réelles et imaginaires h'_{pq}, h''_{pq} de h_{pq}, $p > q$. On a : $\frac{\partial x}{\partial h_{11}}(I) = i\, \frac{\partial h}{\partial h_{11}}(I)$, donc $m_{11} = ie_{11}$; de même,

$m_{pp} = ie_{pp}$, $m'_{pq} = i(e_{pq} + e_{qp})$, $m''_{pq} = -e_{pq} + e_{qp}$.

Ecrivons $x = v\lambda v^{-1}$, avec v, $\lambda \in U(n)$ et $\lambda = [e^{i\theta_1}, \dots e^{i\theta_n}]$. Il faut exprimer $\lambda^{-1}\delta v \lambda + \delta\lambda - \delta v$ comme combinaison linéaire des m_{pp}, m'_{pq}, m''_{pq}. On a remarqué plus haut que les termes diagonaux sont $\delta\lambda_p = d\theta_p$. Donc $\omega_{pp} = d\theta_p$. Puis, $-\omega''_{pq}$ et ω'_{pq} sont les parties réelle et imaginaire du $(p,q)^{\text{ème}}$ coefficient de $\lambda^{-1}\delta v \lambda - \delta v$, à savoir $(e^{i(\theta_q - \theta_p)} - 1)(\delta v)_{pq}$. Changeons alors de paramètres ;

les nouveaux paramètres seront $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ et (n^2-n) paramètres définissant v (ce qui oblige à laisser de côté dans $U(n)$ un ensemble négligeable...). L'élément de mesure de Haar apparaît comme le produit de deux formes différentielles dont l'une ne dépend que de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ et l'autre des n^2-n paramètres indéterminés. LA forme en $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ est :

$$\prod_{p>q} (e^{i(\theta_q-\theta_p)}-1)(e^{-i(\theta_q-\theta_p)}-1)\, d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge \dots \wedge d\theta_n =$$

$$= \prod_{p>q} \sin^2 \frac{\theta_p-\theta_q}{2}\, d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge \dots \wedge d\theta_n$$

à un facteur constant près. Comme $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ repèrent justement la classe de $x \in U(n)$, le résultat précédent permet d'intégrer les fonctions centrales sur $U(n)$. (Il y a sûrement là quelque chose de général).

<u>Mesure de Haar</u> <u>(biinvariante)</u> <u>dans</u> $SO(n)$ <u>(groupe des rotations)</u>. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la base canonique de l'espace R^n. Soit $g=(g_{ij}) \in SO(n)$. Les colonnes de (g_{ij}) sont les vecteurs $b_i = ga_i$. Ceci posé, les

$$\langle ga_i, dg\, a_k \rangle = \langle b_i, db_k \rangle = - \langle b_k, db_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} g_{ji}\, dg_{jn},$$

où $i < k$, sont $\frac{1}{2} n(n-1)$ formes de Maurer-Cartan. Car

$$\langle g_0 g\, a_i, d(g_0 g)a_k \rangle = \langle g_0\, b_i, g_0 db_k \rangle = \langle b_i, db_k \rangle .$$

Ces formes sont linéairement indépendantes (et constituent donc une base de l'espace des formes de Maurer-Cartan) ; car supposons $\sum_{i<k} u_{ik} \langle b_i, db_k \rangle = 0$, où les u_{ik} sont des constantes réelles. Prenons $g = I$, $db_k = 0$ pour $k \geqslant 3$, $db_1 = b_2$, $db_2 = -b_1$ (dg est une rotation infinitésimale dans le plan a_1, a_2). On a alors :

$$0 = \sum_{i<k} u_{ik} \langle b_i, db_k \rangle = -u_{12}$$

et de même $u_{ik} = 0$.

Donc $\quad d\mu(g) = \prod_{i<k} \left(\sum_{j} g_{ji}\, dg_{jn} \right)$

(On arrive aussi à ce résultat par la méthode antérieure, en choisissant les g_{ij}, $i > j$, pour paramètres).

Mesure de Haar (biinvariante) dans le groupe G des déplacements de R^n. Soit H le sous-groupe des rotations autour de O, K le sous-groupe invariant des translations. Tout $g \in G$ se met de manière unique sous la forme $g = kh$, avec $h \in H$, $k \in K$; les formules sont :

$$y_r = \sum_{s=1}^{n} h_{rs} x_s + k_r$$

où $(h_{rs})=h$, et où (k_r) est le vecteur de la translation k . On a :

$$\int_G f(g)dg = \int_{G/K} d\mu(\dot{x}) \int_K f(kx)d\mu(k) =$$

$$= \int_H d\mu(h) \int_K f(k\, h)\, d\mu(k) = \iint_{H\times K} f(kh)d\mu(h)\, d\mu(k)$$

donc :

$$d\mu(g) = \prod_{i<k} \Big(\sum_j h_{ji}\, dh_{jk} \Big) \wedge \prod_i dk_i$$

Par exemple, pour $n=2$, le déplacement étant défini par les paramètres φ , k_1, k_2 :

$$y_1 = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi + k_1 \qquad y_2 = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi + k_2$$

on trouve : $d\mu(g) = dk_1 \wedge dk_2 \wedge d\varphi$

Mesure invariante par rotation dans l'espace homogène des sous-espaces de dimension r de R^n .— Soit G le groupe des rotations autour de O dans R^n , H le sous-groupe formé des rotations qui laissent fixe un sous-espace de dimension r ; G/H est l'espace homogène des sous-espaces de dimension r de R^n . Comme G et H sont unimodulaires, il existe sur G/H une mesure invariante par G . G est de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$; si $s=n-r$, H est de dimension $\frac{1}{2}r(r-1) + \frac{1}{2}s(s-1)$. Donc G/H est de dimension

$$\frac{1}{2}(r+s)(r+s-1) - \frac{1}{2}r(r-1) - \frac{1}{2}s(s-1) = rs .$$

Soit $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ une base orthonormale de R^n ; $b_1,b_2,\dots,b_r$ (resp. $b_{r+1}, b_{r+2},\dots,b_n$) sous-tendent un sous-espace V(resp. W) de dimension r(resp. s). L'élément de mesure de Haar dans G est, on l'a vu :

$$\prod_{i<k} \langle b_i, db_k \rangle = \prod_{\substack{1\leq i\leq r\\ r+1\leq j\leq n}} \langle b_i, db_j \rangle \prod_{1\leq k<l\leq r} \langle b_k, db_l \rangle \prod_{r+1\leq u<v\leq n} \langle b_u, db_v \rangle$$

Or $\prod_{1\leq k<l\leq r} \langle b_k, db_l \rangle \prod_{r+1\leq u<v\leq n} \langle b_u, db_v \rangle$ est

l'élément de mesure de Haar dans le produit du groupe des rotations laissant V invariant et du groupe des rotations laissant W invariant, c'est-à-dire dans H. Donc

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq r\\ r+1\leq j\leq n}} \langle b_i, db_j \rangle$$

est l'élément de mesure invariante dans G/H.

Mesure de Haar (biinvariante) dans le groupe simple exceptionnel à 248 paramètres.- GODEMENT s'engage à rédiger cet exercice.

Produit de composition.

1. Composition des mesures.- Définition 1.- Soient ν et ν' des mesures positives sur G. On dit que ν et ν' (dans cet ordre) sont composables si, pour toute $f \in L$, la fonction continue $(x,y) \to f(xy)$ sur $G \times G$ est sommable pour $\nu \otimes \nu'$. Alors, l'application $f \to \iint_{G\times G} f(xy)d\nu(x)d\nu'(y)$, qui est évidemment une mesure positive sur G, est appelée le produit de composition de ν et ν', et se note $\nu * \nu'$.

Si ν et ν' sont des mesures réelles, on dit qu'elles sont composables si $\nu^+ * \nu'^+$, $\nu^+ * \nu'^-$, $\nu^- * \nu'^+$, $\nu^- * \nu'^-$ existent. On pose alors :
$\nu * \nu' = \nu^+ * \nu'^+ + \nu^- * \nu'^- - \nu^+ * \nu'^- - \nu^- * \nu'^+$.

Si ν et ν' sont des mesures complexes de la forme $\nu_1 + i\nu_2$, $\nu'_1 + i\nu'_2$ (avec ν_1, ν_2, ν'_1, ν'_2 réelles), on dit qu'elles sont composables si $\nu_1 * \nu'_1$, $\nu_1 * \nu'_2$, $\nu_2 * \nu'_1$, $\nu_2 * \nu'_2$ existent, et on pose :
$\nu * \nu' = \nu_1 * \nu'_1 - \nu_2 * \nu'_2 + i(\nu_1 * \nu'_2 + \nu_2 * \nu'_1)$.

Avec ces définitions, on a, si ν et ν' sont composables et si $f \in L$:

$$\int_G f(z)\, d(\nu * \nu')(z) = \iint_{G\times G} f(xy)\, d\nu(x)\, d\nu'(y)$$

<u>Cas d'existence et inégalités.</u>- <u>Proposition 1.</u>- <u>Si</u> ν <u>et</u> ν' <u>sont bornées,</u> ν <u>et</u> ν' <u>sont composables, et</u> $\nu * \nu'$ <u>est bornée. On a :</u> $\nu * \nu' = \int U_x \nu'\, d\nu(x) = \int V_{x^{-1}}\nu\, d\nu'(x)$. (<u>Dans ces intégrales,</u> $U_x \nu'$ et $V_{x^{-1}}\nu$ <u>sont des fonctions à valeurs dans</u> M_1, <u>faiblement continues et de norme constante</u>, <u>donc faiblement sommables</u>). <u>On a donc</u> $\|\nu * \nu'\| \leqslant \|\nu\|\,\|\nu'\|$.

Soit $\rho = \int U_x \nu'\, d\nu(x)$, l'intégrale existant au sens faible d'après les remarques de la proposition et vérifiant $\|\rho\| \leqslant \|\nu\|\,\|\nu'\|$. Si $f \in L$, on a : $\rho(f) = \int d\nu(x) \int {}_{x^{-1}}f(y)\, d\nu'(y) = \int d\nu(x) \int f(xy)\, d\nu'(y)$. Si ν, ν', f sont positives, on voit que $f(xy)$ est sommable pour $\nu \otimes \nu'$; donc si ν et ν' sont positives, $\nu * \nu'$ existe et $\nu * \nu' = \rho$. On passe aussitôt au cas général. Même raisonnement à partir de $\int V_{x^{-1}}\nu\, d\nu'(x)$.

<u>Proposition 2.</u>- <u>Si</u> ν <u>est à support compact, et si</u> ν' <u>est quelconque,</u> ν <u>et</u> ν' <u>sont composables. On a</u> $\nu * \nu' = \int U_x \nu'\, d\nu(x) = \int V_{x^{-1}}\nu\, d\nu'(x)$. <u>Dans la première de ces intégrales,</u> $U_x \nu'$ <u>est une fonction à valeurs dans</u> $\mathcal{M}_G$, <u>continue pour la topologie vague, dont on sait définir l'intégrale par rapport à la mesure</u> ν <u>à support compact</u> (<u>référence inexistante</u>). <u>Dans la deuxième intégrale,</u> $V_{x^{-1}}\nu$ <u>est une fonction à valeurs dans</u> $\mathcal{M}_G$, <u>continue pour la topologie vague, qui n'est pas à support compact, mais qui est telle que, pour toute</u> $f \in L$, $V_{x^{-1}}\nu(f)$ <u>soit à support compact.</u>

<u>Si</u> ν <u>est quelconque et</u> ν' <u>à support compact,</u> $\nu * \nu'$ <u>existe et est donné par les mêmes intégrales, qui s'interprètent de façon analogue.</u> <u>Enfin, si</u> ν <u>et</u> ν' <u>sont à supports compacts,</u> K et K', <u>le support de</u> $\nu * \nu'$ <u>est contenu dans</u> KK'.

Les raisonnements sont à peu près les mêmes que pour la propos.1, sauf pour la dernière assertion. Si ν et ν' ont des supports compacts K et K', et si $f \in L$ est nulle sur KK', $V_{x^{-1}}\nu(f) = \nu(f_{x^{-1}})$

est nul pour $x \in K'$ (car $f_{x^{-1}}$ est nulle sur K), donc $\int V_{x^{-1}} \vartheta(f) d\vartheta'(x) = (\vartheta * \vartheta')(f)$ est nul.

Proposition 3. a) Si ϑ_0 est à support compact, les applications $\vartheta \rightarrow \vartheta_0 * \vartheta$ et $\vartheta \rightarrow \vartheta * \vartheta_0$ sont continues pour la topologie vague sur $\mathcal{M}$.

b) Si ϑ_0 est quelconque les applications $\vartheta \rightarrow \vartheta_0 * \vartheta$ et $\vartheta \rightarrow \vartheta * \vartheta_0$ sont continues pour la topologie vague sur toute partie de $\mathcal{M}$ dont les éléments ont leurs supports contenus dans un compact fixe.

Si ϑ_0 est à support compact, la fonction $x \rightarrow \int f(xy) d\vartheta_0(y)$ est continue à support compact, donc $(\vartheta * \vartheta_0)(f) = \int d\vartheta(x) \int f(xy) d\vartheta_0(y)$ est une fonction vaguement continue de ϑ ; donc $\vartheta * \vartheta_0$ est une fonction vaguement continue de ϑ. Il en est de même de $\vartheta_0 * \vartheta$: il suffit de remarquer que $\vartheta * \vartheta'$ est égal au produit $\vartheta' * \vartheta$ calculé sur le groupe opposé à G.

Soit $\mathcal{N}$ une partie de $\mathcal{M}$ dont les éléments ont leurs supports contenus dans un compact fixe K. Si ϑ_0 est quelconque, la fonction $x \rightarrow \int f(xy) d\vartheta_0(y)$ est continue quelconque, mais égale sur K à une fonction $\varphi \in L$; comme, pour $\vartheta \in \mathcal{N}$, on a $(\vartheta * \vartheta_0)(f) = \int \varphi(x) d\vartheta(x)$, le b de la proposition est établi.

2. Composition d'une mesure et d'une fonction.- Remarque.- Soit ϑ une mesure sur G. Considérons, sur $G \times G$, la mesure $\mu \otimes \vartheta$. L'application $(x,y) \rightarrow (y^{-1}x, y)$ est un automorphisme de l'espace topologique mesuré $G \times G$. En effet, c'est évidemment un homéomorphisme de $G \times G$ sur $G \times G$; et, si f est continue à support compact, on a :

$$\iint f(y^{-1}x, y) d\mu(x) d\vartheta(y) = \int d\vartheta(y) \int f(y^{-1}x, y) d\mu(x) =$$
$$= \int d\vartheta(y) \int f(x,y) d\mu(x) = \iint f(x,y) d\mu(x)\, d\vartheta(y) .$$

Remarques symétriques si on remplace μ par la mesure invariante à droite μ'.

Ceci posé, soit ν une mesure relativement invariante. Pour pouvoir composer une mesure et une fonction f, on associera à f la mesure $f\nu$.

Proposition 4. Soit ρ une mesure sur G, f une fonction localement intégrable. Si $f\nu$ et ρ (resp. ρ et $f\nu$) sont composables, on a $f\nu * \rho = g\nu$ (resp. $\rho * f\nu = h\nu$), avec une fonction g (resp. h) localement intégrable donnée par la formule $g(x) = \int f(xy^{-1}) \chi_d(y)^{-1}\, d\rho(y)$ (resp. $h(x) = \int f(y^{-1}x) \chi_g(y)^{-1}\, d\rho(y)$), les intégrales existant sauf sur un ensemble localement négligeable de valeurs de x.

Supposons $f\nu$ et ρ composables. Si $\varphi \in L$, $\varphi(xy)$ est intégrable pour $f(x)\, \chi_d(x) d\mu'(x) d\nu(y)$ sur $G \times G$, donc $\varphi(xy)\, f(x) \chi_d(x)$ est intégrable pour $d\mu'(x)\, d\nu(y)$, donc (remarque initiale) il en est de même de $\varphi(x)\, f(xy^{-1})\, \chi_d(x)\, \chi_d(y)^{-1}$, et on a :

$$\int \varphi(x)\, d(f\nu * \rho)(x) = \iint_{G\times G} \varphi(x) f(xy^{-1}) \chi_d(x)\, \chi_d(y)^{-1}\, d\mu'(x) d\rho(y) .$$

Vu l'arbitraire de φ, ceci entraîne que $f(xy^{-1})\chi_d(y)^{-1}$ est intégrable pour $d\rho(y)$ sauf sur un ensemble localement négligeable de valeurs de x, et que $g(x) = \int f(xy^{-1})\chi_d(y)^{-1} d\rho(y)$ est localement intégrable ; en outre :

$$\int \varphi(x) d(f\nu * \rho)(x) = \int \varphi(x) g(x) d\nu(x)$$

donc $f\nu * \rho = g\nu$. Raisonnement analogue si ρ et $f\nu$ sont comparables.

Définition 2.- On dit que ρ et f (resp. f et ρ) sont composables relativement à ν si ρ et νf (resp. νf et ρ) sont composables. On pose alors $(\rho * f)_\nu = g$ (resp. $(f * \rho)_\nu = h$) avec les notations de la prop. 4 (prière de trouver une meilleure notation). Les fonctions g, h ne sont définies qu'à un ensemble localement négligeable près.

Cas d'existence et inégalités.- Si $_s\nu = \chi_g(s)\nu$, $\nu_s = \chi_d(s)\nu$, on désignera par $^p\nu$ et ν^p ($1 \leq p \leq +\infty$) les mesures relativement invariantes telles que $_s(^p\nu) = \chi_g(s)^{1/p}\, {}^p\nu$, $(\nu^p)_s = \chi_d(s)^{1/p}\, \nu^p$.

Proposition 5.- Si ρ est bornée, et si $f \in L^p_\nu$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, $(f * \rho)_{\nu\rho}$ (resp. $(\rho * f)_{\rho\nu}$) existe et est dans L^p_ν . On a : $(f * \rho)_{\nu\rho} = \int V_{x^{-1}} f \; d\rho(x)$ (resp. $(\rho * f)_{\rho\nu} = \int U_x f \; d\rho(x)$) . (Dans ces intégrales, $V_{x^{-1}} f$ et $U_x f$ sont des fonctions de x à valeurs dans L^p_ν, continues - faiblement si $p = +\infty$ - de norme constante $\|f\|_{p,\nu}$). On a donc $\|(f * \rho)_{\nu\rho}\|_{p,\nu} \leq \|\rho\| \, \|f\|_{p,\nu}$ et $\|(\rho * f)_{\rho\nu}\|_{p,\nu} \leq \|\rho\| \, \|f\|_{p,\nu}$.

(En réalité, comme $f * \rho$, par exemple, n'est définie qu'à un ensemble localement négligeable près, c'est seulement une de ses déterminations qui est dans L^p_ν , si $p < +\infty$).

D'après les remarques de la proposition, $\int V_{x^{-1}} f \; d\rho(x)$ est un élément g de L^p_ν tel que $\|g\|_{p,\nu} \leq \|\rho\| \, \|f\|_{p,\nu}$. Si $\varphi \in L$, la fonction de x

$$\int (V_{x^{-1}} f)(y) \, \varphi(y) \, \chi_d(y)^{1/p-1} \, d\nu(y) = \int \chi_d(x)^{-1/p} f(yx^{-1}) \varphi(y) \chi_d(y)^{1/p} \, d\mu'(y) =$$

$$= \int f(yx^{-1}) \varphi(y) \, \chi_d(yx^{-1})^{1/p} \, d\mu'(y) ,$$

est donc ρ-intégrable. Comme $f(yx^{-1}) \varphi(y) \chi_d(yx^{-1})^{1/p}$ est mesurable sur $G \times G$ pour $d\rho(x) \, d\mu'(y)$ (remarque initiale), on voit que (si f et φ sont $\geqslant 0$) cette fonction est intégrable pour $d\rho(x) d\mu'(y)$, donc il en est de même (remarque initiale) de $f(y) \varphi(yx) \chi_d(y)^{1/p}$.

Autrement dit, $\varphi(yx)$ est intégrable pour

$d\rho(x) \, f(y) \chi_d(y)^{1/p} \, d\mu'(y) = d\rho(x) f(y) d\nu^p(y)$, de sorte que $(f * \rho)_{\nu\rho}$ existe. Le raisonnement prouve en même temps que

$$\int g(y) \, \varphi(y) \chi_d(y)^{1/p-1} \, d\nu(y) = \iint \varphi(yx) d\rho(x) \; f(y) \; d\nu^p(y)$$

donc que

$$\int \varphi(y) \; g(y) \; d\nu^p(y) = \int \varphi(y) \; d(f * \rho)_{\nu\rho} \, (y)$$

donc que $g = (f * \rho)_{\nu\rho}$. On passe aisément au cas où f est de signe quelconque. Raisonnement analogue à partir de $\int U_x f \; d\nu(x)$.

Proposition 6.- Si ρ est bornée, et si $f \in L_\infty$, $(f * \rho)_{\mu'}$ (resp. $(\rho * f)_\mu$) existe et est dans L_∞ . On a : $(f * \rho)_{\mu'} = \int V_{x^{-1}} f \; d\rho(x)$

(resp. $(\rho * f)_\mu = \int U_x f \, d\rho(x)$) . *(Dans ces intégrales,* $V_{x^{-1}} f$ et $U_x f$ *sont des fonctions fortement continues à valeurs dans* L_∞ , *de norme constante* $\|f\|_\infty$) . *On a donc* $\|(f * \rho)_{\mu'}\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\rho\|$, et $\|(\rho * f)_\mu\| \leq \|f\|_\infty \|\rho\|$.

Le raisonnement précédent s'applique mot pour mot.

Proposition 7. - Si ρ *est positive à support compact* K , *si* f *est positive, localement intégrable et semi-continue inférieurement,* $(f * \rho)_\nu$ *et* $(\rho * f)_\nu$ *existent et celles de leurs déterminations qui sont fournies par les intégrales*

$$g(x) = \int f(xy^{-1}) \chi_d(y)^{-1} \, d\rho(y) , \qquad h(x) = \int f(y^{-1}x) \chi_g(y)^{-1} \, d\rho(y)$$

sont semi-continues inférieurement.

L'existence de $(f * \rho)_\nu$ et $(\rho * f)_\nu$ résulte de la prop.2 . Les intégrales écrites ont un sens (et valent éventuellement $+\infty$) . Soient $x_0 \in G$, $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage V de x_0 tel que $x \in V$ entraîne $f(xy^{-1}) - f(x_0 y^{-1}) > -\varepsilon$ pour $y \in K$ (référence ?). Alors

$$g(x) - g(x_0) \geqslant -\varepsilon \int \chi_d(y)^{-1} \, d\rho(y) , \qquad h(x) - h(x_0) \geqslant -\varepsilon \int \chi_g(y)^{-1} \, d\rho(y) ,$$

ce qui établit la proposition.

3. Composition des fonctions. - Proposition 8.- Soient f, g *des fonctions localement intégrables. Si* $f\nu$ *et* $g\nu$ *sont composables pour une mesure relativement invariante* ν , $f\nu'$ *et* $g\nu'$ *sont composables pour toute mesure relativement invariante* ν'. *On a alors* $f\nu * g\nu = h\nu$, *avec une fonction* h *indépendante de* ν , *localement intégrable, donnée par la formule* $h(x) = \int f(y) g(y^{-1}x) \, d\mu(y) = \int g(y) f(xy^{-1}) \, d\mu'(y)$, *où les intégrales existent sauf sur un ensemble localement négligeable de valeurs de* x .

En effet, dire que $f\nu$ et $g\nu$ sont composables, c'est dire que, pour toute $\varphi \in L$, $\varphi(xy)$ est intégrable pour $f(x)g(y)\chi_g(xy)\,d\mu(x)\,d\mu(y)$, donc que $\varphi(xy)\,f(x)\,g(y)\,\chi_g(xy)$ est intégrable pour $d\mu(x)d\mu(y)$, donc que $\varphi(y)f(x)g(x^{-1}y)\chi_g(y)$ est intégrable pour $d\mu(x)\,d\mu(y)$. Comme φ est à support compact et que χ_g est continue > 0, cette propriété est vraie pour toute mesure relativement invariante dès qu'elle l'est pour l'une d'elles. En outre, si elle est vérifiée, on a

$$\int \varphi(y)d(f\nu * g\nu)(y) = \iint \varphi(y)f(x)g(x^{-1}y)\chi_g(y)d\mu(x)\,d\mu(y) \quad .$$

Par suite, l'intégrale $\int f(x)g(x^{-1}y)d\mu(x) = h(y)$ existe sauf sur un ensemble localement négligeable de valeurs de y, est localement intégrable, et on a :

$$\int \varphi(y)d(f\nu * g\nu)(y) = \int \varphi(y)h(y)d\nu(y)$$

donc $f\nu * g\nu = h\nu$.

Définition 3.- On dit que f et g sont composables si $f\nu$ et $g\nu$ sont composables pour toute mesure relativement invariante ν . On pose alors $f * g = h$ avec les notations de la prop.8 . La fonction h n'est définie qu'à un ensemble localement négligeable près.

Cas d'existence. Inégalités.- Proposition 9.- Si $f \in L^p_\nu$ (resp. $f \in L_\infty$) et $g \in L^1_{\nu,p}$, $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, $f*g$ existe et est dans L^p_ν (resp. L_∞). On a alors : $f * g = \int V_{x^{-1}}\, f.g(x)\, d\nu^p(x)$, donc $\|f*g\|_{p,\nu} \leqslant \|f\|_{p,\nu}\,\|g\|_{1,\nu^p}$. Si $f \in L^1_{\nu^p}$ et $g \in L^p_\nu$ (resp. L_∞), $f * g$ existe et est dans L^p_ν (resp. L_∞). On a alors :

$f * g = \int U_x\, g.f(x)d^p\nu(x)$, donc $\|f * g\| \leqslant \|f\|_{1,p,\nu}\|g\|_{p,\nu}$.

En effet, si $f \in L^p$ (resp. L_∞) et $g \in L^1_{\nu,p}$, la mesure $g(x)d\nu^p(x)$ est bornée, donc (prop.5 ou 6) $f\nu^p * g\nu^p$ existe, donc $f * g$ existe. De même si $f \in L^1_{p,\nu}$ et $g \in L^p_\nu$. Le reste de la prop. résulte aussitôt de la prop.5 (resp.6) .

<u>Proposition 10.- Si</u> $f \in L^p_\mu$ <u>et</u> $g \in L^{p'}_{\mu'}$ $(1 \leq p \leq +\infty$, $1/p + 1/p' = 1)$, $f * g$ <u>existe et l'une de ses déterminations est dans</u> L_∞. <u>Cette détermination est fournie par les intégrales</u> $\int f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y) = \int g(y)\, f(xy^{-1})d\mu'(y)$ <u>qui existent pour toute valeur de</u> x. <u>On a</u> : $\| f * g \|_\infty \leq \| f \|_{p,\mu} \, \| g \|_{p',\mu'}$.

Si $f \in L^p_\mu$ et $g \in L^{p'}_{\mu'}$, $U_x g^*$ est une fonction continue de x à valeurs dans $L^{p'}_{\mu'}$, donc $\langle f, U_x g^* \rangle = \int f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y) = h(x)$ est une fonction continue sur G, et on a $\| h \|_\infty \leq \| f \|_{p,\mu} \| g^* \|_{p',\mu}$. Comme h est à support compact quand f et g sont dans L, cette inégalité prouve que $h \in L_\infty$ quand $f \in L^p_\mu$ et $g \in L^{p'}_{\mu'}$. Pour $\varphi \in L$, $\varphi(xy)\, f(x)g(y)$ est mesurable sur $G \times G$ pour $d\mu(x)\, d\mu(y)$, donc il en est de même de $\varphi(y)f(x)\, g(x^{-1}y)$. Alors, ce qui précède prouve que $\varphi(y)\, f(x)\, g(x^{-1}y)$ est intégrable pour $d\mu(x)\, d\mu(y)$ (si φ, f, g sont ≥ 0), donc il en est de même de $\varphi(xy)f(x)g(y)$, donc $f * g$ existe, et on a :

$$\int \varphi(z)(f * g)(z)d\mu(z) = \int \varphi(z)h(z)\, d\mu(z)$$

donc $f * g = h$. On passe aisément au cas où f et g sont de signe quelconque.

<u>4. Les algèbres de G.- A.- L'algèbre M_1 des mesures bornées.</u>- On a vu que, si ν et ν' sont bornées, $\nu * \nu'$ existe. La définition entraîne aussitôt que $\nu * \nu'$ est bilinéaire en ν et ν'. Pour montrer que M_1 est une algèbre sur C, il suffit de prouver l'associativité. Or, soient ν, ν', ν'' bornées ; posons $\rho = \nu * \nu'$, $\sigma = \nu' * \nu''$. Si $\varphi \in L$, on a :

$$\int \varphi(u)d(\rho * \nu'')(u) = \int d\nu''(z) \int \varphi(xz)d\rho(x) = \iiint \varphi(xyz)d\nu(x)d\nu'(y)d\nu''(z)$$

$$\int \varphi(u)d(\nu * \sigma)(u) = \iiint \varphi(xyz)d\nu(x)\, d\nu'(y)\, d\nu''(z)$$

donc $\nu * \sigma = \rho * \nu''$.

Si $u \in G$, on a $\nu * \varepsilon_u = \nu_{u^{-1}}$, $\varepsilon_u * \nu = {}_{u^{-1}}\nu$. Car, si $\varphi \in L$,

$$\nu * \varepsilon_u(\varphi) = \iint \varphi(xy)d\nu(x)d\varepsilon_u(y) = \int \varphi(xu)d\nu(x) = \nu(\varphi_{u^{-1}}) = \nu_{u^{-1}}(\varphi)$$

et de même pour $\varepsilon_u * \nu$. En particulier, M_1 admet l'élément unité ε_e. Comme on a $\|\varepsilon_e\| = 1$, et $\|\nu * \nu'\| \leq \|\nu\| \ \|\nu'\|$, M_1 est une algèbre normée complète à élément unité. De plus, l'application $\nu \rightarrow \nu^*$ est une involution sur M_1 : les relations $\nu^{**} = \nu$, $(\nu_1 + \nu_2)^* = \nu_1^* + \nu_2^*$, $(\lambda\nu)^* = \bar{\lambda}\nu^*$, $\|\nu^*\| = \|\nu\|$ sont immédiates ; d'autre part, $(\nu_1 * \nu_2)^* = \nu_2^* * \nu_1^*$; en effet, si $\varphi \in L$, on a :

$$(\nu_1 * \nu_2)^*(\varphi) = \overline{(\nu_1 * \nu_2)(\varphi^*)} = \iint \check{\varphi}(xy)d\bar{\nu}_1(x)\,d\bar{\nu}_2(y) =$$

$$= \iint \varphi(y^{-1}x^{-1})d\bar{\nu}_1(x)\,d\bar{\nu}_2(y)$$

$$(\nu_2^* * \nu_1^*)(\varphi) = \int d\nu_1^*(y)\int \varphi(x^{-1}y)d\bar{\nu}_2(x) = \int d\bar{\nu}_1(y)\int \varphi(x^{-1}y^{-1})d\bar{\nu}^{\varepsilon}(x) =$$

$$= \iint \varphi(y^{-1}x^{-1})d\bar{\nu}_1(x)\,d\bar{\nu}_2(y).$$

Enfin, l'application $x \rightarrow \varepsilon_x$ est un isomorphisme du groupe topologique G dans M_1 muni de sa topologie faible et de sa structure multiplicative. On sait en effet que cette application est un homéomorphisme. D'autre part, on a $(\varepsilon_x * \varepsilon_y)(\varphi) = \iint \varphi(uv)d\varepsilon_x(u)d\varepsilon_y(v) = \varphi(xy) = \varepsilon_{xy}(\varphi)$ pour $\varphi \in L$, donc $\varepsilon_x * \varepsilon_y = \varepsilon_{xy}$.

B.- <u>L'algèbre M des mesures à support compact.-</u>

C'est une sous-algèbre de M_1, stable pour l'involution, contenant les ε_x. C'est donc une algèbre normée à involution, avec élément unité, dense dans M_1 pour la norme.

C.- <u>L'algèbre L^1_ν des fonctions intégrables pour une mesure relativement invariante ν.-</u> L'application $f \rightarrow f_\nu$ est une application linéaire biunivoque de L^1_ν dans M_1. On a vu (prop. 8) que $(f * g)\nu = (f\nu) * (g\nu)$, et il est immédiat que $\|f\|_{1,\nu} = \|\nu\|$.

Enfin, pour $\varphi \in L$:

$$(f\nu)^*(\varphi) = \int \varphi(x^{-1})\overline{f(x)}\,d\nu(x) = \int \varphi(x)\,\overline{f(x^{-1})}\,(\chi_g\chi_d)^{-1}(x)\,d\nu(x) =$$
$$= (Sf.\nu)(\varphi)$$

donc $(f\nu)^* = Sf.\nu$. Ainsi, L^1_ν , muni du produit de composition et de l'involution S , est une $*$-algèbre normée complète à involution, identifiable à une sous-algèbre de M_1. Plongé dans M_1, c'est un idéal bilatère de M_1 . Car (prop.5) $\rho * (f\nu) = g\nu$ et $(f\nu) * \rho = h\nu$ avec $g \in L^1_\nu$ et $h \in L^1_\nu$.

Si G est discret, la fonction caractéristique de $\{e\}$ est dans L^1_ν et est élément unité de L^1_ν . Il est facile de voir que, si G n'est pas discret, L^1_ν n'a pas d'élément unité. Mais les éléments $f + \lambda\varepsilon_e$ $(f \in L^1_\nu \subset M_1 \ , \ \lambda \in C)$ de M_1 forment une sous-$*$-algèbre normée complète de M_1 , à élément unité, dans laquelle L^1_ν est un hyperplan.

D.- <u>L'algèbre L des fonctions continues à support compact.</u>

C'est une sous-$*$-algèbre partout dense de L^1_ν , et un idéal bilatère de M .

5.- Prolongement aux algèbres de G d'une représentation de G .-

Soient E un espace de Banach, E' son dual, $x \to U_x$ une représentation fortement continue de G par des opérateurs linéaires isométriques de E . Soit $U'_x = U^*_{x^{-1}}$, qui opère dans E' ; $x \to U'_x$ est une représentation faiblement continue de G par des opérateurs linéaires isométriques de E' .

Si ν est une mesure complexe bornée sur E , la fonction $x \longrightarrow U_x$ est faiblement intégrable pour ν . Soit $U_\nu = \int U_x\,d\nu(x)$. On a , pour $a \in E$, $b \in E'$:

$$\langle U_\nu a, b \rangle = \int \langle U_x a, b \rangle \, d\nu(x) .$$

En particulier, $U_{\varepsilon_x} = U_x$. D'ailleurs, $|\langle U_\nu\, a,b\rangle| \leq \|a\|\ \|b\|\ \|\nu\|$, donc $\|U_\nu\| \leq \|\nu\|$.

L'application $\nu \longrightarrow U_\nu$ est une représentation de l'algèbre M_1. La linéarité est évidente. D'autre part, si $\nu \in M_1$, $\nu' \in M_1$, on a :

$$\langle U_\nu U_{\nu'} a,b\rangle = \int \langle U_x U_{\nu'} a,b\rangle\, d\nu(x) = \int \langle U_{\nu'} a, U_x^* b\rangle\, d\nu(x) =$$
$$= \int d\nu(x) \int \langle U_y a\, ,\, U_x^* b\rangle\, d\nu'(y) = \int d\nu(x) \int \langle U_{xy}\, a,b\rangle\, d\nu'(y) =$$
$$= \langle U_{\nu * \nu'}\, a,b\rangle$$

donc $U_{\nu * \nu'} = U_\nu U_{\nu'}$.

Puisque $\|U_\nu\| \leq \|\nu\|$, cette représentation est continue pour la norme. D'autre part, on a le résultat suivant :

<u>Proposition 11</u>. - <u>Soit</u> $N \subset M_1$ <u>un ensemble de mesures dont les supports sont contenus dans un compact fixe</u> K <u>de</u> G, <u>et dont les normes sont majorées par un nombre fixe</u> A. <u>Alors, sur</u> N, <u>l'application</u> $\nu \longrightarrow U_\nu$ <u>est continue quand on munit</u> N <u>de la topologie vague et les</u> U_ν <u>de la topologie forte</u>.

En effet, soit $a \in E$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des vecteurs de E, et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions de L tels que $\|U_x a - a_1 f_1(x) - \ldots - a_n f_n(x)\| \leq \varepsilon$ pour $x \in K$. On a :

$$\|U_\nu a - \sum a_i\, \nu(f_i)\| \leq \varepsilon A$$

pour $\nu \in N$. Comme $\nu(f_i)$ dépend continument de ν pour la topologie vague, la prop. est établie.

On peut définir aussi $U'_\nu = \int U'_x\, d\nu(x)$. L'application $\nu \longrightarrow U'_\nu$ est encore une représentation de M_1, telle que $\|U'_\nu\| \leq \|\nu\|$. Si $a \in E$, $b \in E'$, on a :

$$\langle U'_\nu\, b,a\rangle = \int \langle U'_x\, b,a\rangle\, d\nu(x) = \int \langle b, U_{x^{-1}}\, a\rangle\, d\nu(x) =$$
$$= \int \overline{\langle U_{x^{-1}}\, a,b\rangle}\, d\nu(x) = \overline{\int \langle U_x a,b\rangle\, d\nu^*(x)} = \overline{\langle U_{\nu^*}\, a,b\rangle} =$$
$$= \langle b\, ,\, U_{\nu^*}\, a\rangle .$$

donc $U'^{*}_{\nu} = U_{\nu*}$. De même, $U^{*}_{\nu} = U'_{\nu*}$. Si E est un espace hilbertien, $\nu \longrightarrow U_\nu$ est donc une représentation unitaire de M_1.

Si $f \in L^1_\nu$, on peut lui associer l'opérateur $U_{f,\nu} = U_{f\nu}$. Ce qui précède prouve qu'on définit ainsi une représentation de L^1_ν.

<u>Représentations régulières des algèbres de G.</u>- Si, dans ce qui précède, on prend pour $x \longrightarrow U_x$ une des représentations régulières de G, on obtiendra une "représentation régulière" d'une algèbre de G. Les opérateurs de la représentation constituent une algèbre qu'il y a avantage à considérer encore comme algèbre de G. On peut aussi considérer comme algèbre de G l'adhérence uniforme, ou forte, de cette algèbre d'opérateurs. Cette dernière est, pour E hilbertien, une algèbre de von Neumann.

Si U_x est l'opérateur défini dans L^p_ν au § 1, n°5 ($1 \leqslant p < +\infty$), U'_x est défini dans $L^{p'}_\nu$ ($1/p + 1/p' = 1$, $1 < p' \leqslant +\infty$). D'où des représentations régulières dans L^p_ν et $L^{p'}_\nu$ des algèbres M_1, M, L^1_ν, L. Si $\rho \in M_1$ et $g \in L^p_\nu$, on a $U_\rho g = (\nu * g)_{\rho\nu}$ (prop.5). Si $f \in L^1_{\rho\nu}$ et $g \in L^p_\nu$, $U_{f,\rho\nu}\, g = f * g$. De même, les opérateurs V_x conduisent à des opérateurs V_ρ et $V_{f,\nu}$; la prop.5 prouve que $V^{*}_{\rho}\, g = (g * \rho)_{\nu\rho}$ pour $\rho \in M_1$, $g \in L^p_\nu$, et $V_{f,\nu\rho}\, g = g * f$ pour $f \in L^1_{\nu\rho}$, $g \in L^p_\nu$. On a $U_\nu V_{\nu'} = V_{\nu'} U_\nu$, $SU_\nu S = V_{\bar\nu}$, $SV_\nu S = U_{\bar\nu}$. Résultats analogues dans L_∞ et M_1.

6. <u>Régularisation</u>.- Soit $\mathcal{B}$ une base du filtre des voisinages de e. Soit, pour tout $V \in \mathcal{B}$, ρ_V une mesure positive sur G, de support contenu dans V, telle que $\|\rho_V\| = 1$. L'application $V \longrightarrow \rho_V$ converge, suivant le filtre des sections de $\mathcal{B}$, vers ε_e, quand on munit M de la topologie vague. En effet, si $f \in L$, soit W un voisinage de e tel que $|f(x) - f(e)| < \alpha$ pour $x \in W$; alors, si $V \in \mathcal{B}$ tel que $V \subset W$, on a $\varepsilon_e(f) - \alpha = f(e) - \alpha \leqslant \rho_V(f) \leqslant f(e) + \alpha = \varepsilon_e(f) + \alpha$.

Alors, la prop.11 prouve que, si $f \in L_\nu^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, $(\rho_\nu * f)_{\mu\nu}$ et $(f * \rho_\nu)_{\nu\mu}$ tendent fortement vers f ; si $f \in L_\infty$, $(\rho_\nu * f)_\mu$ et $(f * \rho_\nu)_\mu$, tendent uniformément vers f . La prop.3 prouve que, si $\sigma \in \mathcal{M}$, $\sigma * \rho_\nu$ et $\rho_\nu * \sigma$ tendent vaguement vers σ .

En particulier, supposons $\rho_\nu = f_\nu \mu$, avec $f_\nu \in L$. Alors, si $\sigma \in \mathcal{M}$, $\sigma * \rho_\nu$ et $\rho_\nu * \sigma$ sont définies par les densités continues $\int f_\nu (y^{-1}x)\, d\sigma(y)$ et $\int f(xy^{-1}) \Delta(y)^{-1}\, d\sigma(y)$. Si $f \in L_\nu^p$, $f * f_\nu$ et $f_\nu * f$ sont dans L_∞ d'après la prop.10 .

Si de plus, G étant analytique, f_ν est indéfiniment différentiable, $\sigma * f_\nu$ et $f_\nu * \sigma$ sont indéfiniment différentiables ; car si $t \to x_t$ est un sous-groupe à un paramètre, on a, pour $t \neq 0$

$$t^{-1}\left[\int f_\nu(y^{-1}x\, x_t)\, d\sigma(y) - \int f_\nu (y^{-1}x)\, d\sigma(y)\right] =$$

$$= \int t^{-1}\left[f_\nu (y^{-1}x\, x_t) - f_\nu (y^{-1}x)\right] d\sigma(y)$$

et, quand $t \to 0$, $t^{-1}\left[f_\nu (y^{-1}x\, x_t) - f_\nu (y^{-1}x)\right]$ tend vers $\left[\frac{d}{dt}\; f(y^{-1}x\, x_t)\right]_{t=0}$, en restant nul hors d'un compact fixe, uniformément. L'expression précédente a donc une limite de la forme $\int g(y^{-1}x)\, d\sigma(y)$, où g est indéfiniment différentiable et à support compact.

7. __Potentiels d'ordre α__ .- Soit a un nombre réel > 0 . Soit (ν_α) une famille de mesures positives, définies pour $\alpha \in [0,a]$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(P_1) ν_α est une fonction vaguement continue de α .

(P_2) $\nu_0 = \varepsilon_e$; $\nu_{\alpha+\beta} = \nu_\alpha * \nu_\beta$ si $\alpha + \beta \leqslant a$.

(P_3) Pour $0 < \alpha \leqslant a$, $\nu_\alpha = f_\alpha \mu$, où $f_\alpha \geqslant 0$ est semi-continue inférieurement.

(P_4) $\check{\nu}_\alpha = \nu_\alpha$.

(P_2) et (P_4) donnent :

$$f_{\alpha+\beta}(xy^{-1})\Delta(y)^{-1} = \int f_\alpha(xz^{-1})f_\beta(yz^{-1})\Delta(z)^{-2}\,d\mu(z)$$

$$f_\alpha(x^{-1}) = \Delta(x)\, f_\alpha(x) \quad .$$

Si ν est une mesure à support compact, $\nu_\alpha * \nu$ existe (prop.2), dépend continument de α pour la topologie vague, (prop.3), et, pour $\alpha > 0$, est de la forme $U_\alpha^\nu\,\mu$, avec $U_\alpha^\nu = (f_\alpha * \nu)_\mu$; U_α^ν, qui est localement intégrable, s'appelle potentiel gauche d'ordre α de ν (pour la famille ν_α). Si $\nu \geqslant 0$, U_α^ν est semi-continu inférieurement (prop.7). Si $\nu = \varphi\mu$, avec $\varphi \in L$, on voit aisément que U_α^ν est continu.

De même, pour ν à support compact, $\nu * \nu_\alpha$ existe et définit, pour $\alpha > 0$, un potentiel droit d'ordre α, V_α^ν, qui est semi-continu inférieurement si $\nu \geqslant 0$.

<u>Proposition 12.- Si ν, à support compact, est telle que U_α^ν soit nul localement presque partout pour une valeur particulière de α, on a $\nu = 0$.</u>

Régularisons ν par f_V, conformément aux notations du n°6, avec $f_V \in L$. L'hypothèse $\nu_\alpha * \nu = 0$ entraîne $\nu_\alpha * (\nu * f_V) = 0$. Si on suppose la prop. établie pour les mesures de la forme $f\mu$, où $f \in L$, on a donc $\nu * f_V = 0$, et ceci quel que soit V, donc $\nu = 0$ d'après le n°6.

Supposons donc désormais $\nu = f\mu$, avec $f \in L$. Alors :

$$\int \left[U_{\alpha/2}^\nu(z)\right]^2 d\mu(z) = \iiint \frac{f_{\alpha/2}(yz^{-1})}{\Delta(z)}\,\frac{f_{\alpha/2}(xz^{-1})}{\Delta(z)}\, f(y)\, f(x)\, d\mu(y)\, d\mu(x)\, d\mu(z)$$

$$= \iint \frac{f_\alpha(xy^{-1})}{\Delta(y)}\, f(y)\, f(x)\, d\mu(y)\, d\mu(x) = \int U_\alpha^\nu(x)\, f(x)\, d\mu(x) = 0$$

donc $U_{\alpha/2}^\nu = 0$ presque partout. De proche en proche, on a $\nu_\beta * \nu = 0$ pour $\beta = 2^{-n}\alpha$. D'après la prop.3, ceci entraîne que $\nu = 0$.

Questions diverses ou exercices.

1) Dans la construction de la mesure de Haar, il n'y a pas besoin d'ultrafiltre ; en réalité, λ_V a une limite suivant le filtre des voisinages de e.

A-t-on $\lambda(A) = \mu(A)$? Autrement dit, le passage de λ à λ' est-il vraiment nécessaire ?

2) Un isomorphisme local entre groupes respecte la mesure de Haar et le module.

3) Bibliographie sur l'existence et l'unicité de la mesure de Haar : WEIL (Intégration dans les groupes topologiques ; 2 méthodes). H. CARTAN (C.R. 1940). Von NEUMANN (Mat. Sbornik, 1936). HALMOS (Measure theory. 3 méthodes). KAKUTANI (Ann. of Math. 1948). LOOMIS (Duke J. 1949).

SEGAL (Journal Indian Math. Soc. 1949) prouve le résultat suivant : Soit G un groupe équicontinu d'unimorphismes d'un espace uniformément localement compact M . Alors il existe une mesure sur M invariante par G , unique si et seulement si il existe un point dont l'orbite est partout dense [Espace uniformément localement compact = espace uniforme avec une base d'entourages U_α telle que les $U_\alpha(x)$ soient compacts pour tout x ; groupe équicontinu G d'unimorphismes de M = isomorphismes φ de la structure uniforme de M tel que, pour tout α , existe un β avec $\varphi(U_\beta(x)) \subset U_\alpha(\varphi(x))$ pour tout φ et tout x].

4) Si u est un automorphisme de G , $\Delta(u(s)) = \Delta(s)$.

5) L'équation $\Delta(s)=1$ définit le plus grand sous-groupe invariant unimodulaire.

6) Sur l'espace homogène G/G' existent toujours des mesures quasi-invariantes par G (= G conserve les ensembles négligeables).

7) Une mesure quasi-invariante à gauche sur G est équivalente à la mesure de Haar .

8) Pour que A ait dans G une adhérence compacte, il faut et il suffit qu'il y ait B mesurable de mesure finie > 0 tel que BA soit de mesure intérieure finie.

9) $\mu(A \cap xB)$ est une fonction continue de x, d'intégrale égale à $\mu(A)\mu(B^{-1})$. Donc AA^{-1} est un voisinage de l'unité. Topologie de WEIL. Réciproque du théorème de Haar .

10) Conséquences des inégalités de Riesz pour le produit de composition dans les groupes unimodulaires.

11) $(f * g)(e) = (g * f)(e)$ dans les groupes unimodulaires.

12) L^1_μ est abélien si et seulement si G est abélien.

13) Soit $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des mesures à support contenu dans le compact K . L'application $(\vartheta, \vartheta') \longrightarrow \vartheta * \vartheta'$ est une application vaguement continue de $\mathcal{B}_K \times \mathcal{B}_K$ dans $\mathcal{M}$ ($\mathcal{B}_K$: boule unité de $\mathcal{M}_K$) mais pas de $\mathcal{M}_K \times \mathcal{M}_K$ dans $\mathcal{M}$.