RÉDACTION N° 148

COTE : **NBR 050**

TITRE : **RAPPORT CARTAN SUR L'INTÉGRATION DES FORMES DIFFÉRENTIELLES**

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : **18**

NOMBRE DE FEUILLES : **18**

Archives N. Cartan - juin 1951

NBR 050

148 2

RAPPORT CARTAN sur l'INTÉGRATION des FORMES DIFFÉRENTIELLES (Mai 1951)

Commentaire.- Le rapporteur a essayé de mettre en oeuvre l'idée de Weil, qui consiste à considèrer la théorie de l'intégration des formes différentielles comme un chapitre de la théorie de la cohomologie des variétés. Après examen de la question, il est convaincu que ce point de vue est le bon ; c'est, à sa connaissance, le seul qui permette une formulation précise et correcte, ainsi qu'une démonstration rigoureuse de la "formule de Stokes" .

L'exposé objectif qui suit,se place sur le plan de la technique et non sur celui de la polémique. D'autre part, le rapporteur ne se dissimule pas que ce n'est même pas une rédaction "état 0" ; les démonstrations ne sont pas détaillées, et certains points secondaires auraient besoin d'être explicitées. Il espère néanmoins avoir clairement marqué la direction dans laquelle il est possible de s'engager (pour peu que Bourbaki le désire), et souhaite que l'exposition qu'on va lire fournisse une base utile de discussion et conduise à de meilleures rédactions ultérieures.

Bourbaki jugera, et devra en particulier décider s'il semble possible, et opportun, d'extraire de ce rapport une méthode d'exposition "élémentaire", que le rapporteur n'a pas pris la peine d'expliciter, faute d'idées suffisamment nettes sur la question ; "élémentaire" signifiant que cette exposition pourrait prendre place dans les "structures fondamentales" sans exiger de connaissances étendues sur la théorie de la cohomologie des espaces topologiques.

Ici, le rédacteur n'a pas cherché à faire "élémentaire", et il s'en excuse auprès des détracteurs systématiques du Haut-Commissariat. Il a seulement voulu donner au lecteur des éléments d'appréciation aussi objectifs que possible.

1 - <u>Notion de variété stratifiée</u>.-

On considère un espace <u>localement compact</u> X , muni de la donnée de sous-espaces <u>fermés</u> X_p (p entier, $X_p=\emptyset$ pour $p<0$) tels que $X_p \subset X_{p+1}$, et tels que $Y_p = X_p - X_{p-1}$ soit une variété de dimension p , dont toutes les composantes connexes sont orientables.

U étant un <u>ouvert</u> quelconque de X , les $U \cap X_p$ définissent évidemment sur U une structure de variété stratifiée.

Dans l'espace localement compact $X_{p+1}-X_{p-1}$, on a un sous-espace fermé Y_p , et son complémentaire ouvert Y_{p+1}. Ceci donne lieu à une suite exacte pour la cohomologie : on envisagera exclusivement la cohomologie à supports compacts, et, pour le moment, les coefficients entiers. En particulier, on a un homomorphisme

$$\delta \ : \ H^p(Y_p) \longrightarrow H^{p+1}(Y_{p+1}) \ .$$

Orientons une fois pour toutes les composantes connexes des variétés Y_p ; ceci définit un isomorphisme canonique de $H^p(Y_p)$ sur le groupe des combinaisons linéaires finies, à coefficients entiers, des <u>cellules</u> de dimension p (en appelant provisoirement "cellules" les composantes connexes de Y_p) . Si à chaque élément de $H^p(Y_p)$ on associe la somme des coefficients de la combinaison linéaire qui lui correspond, on obtient un homomorphisme de $H^p(Y_p)$ dans Z ; la valeur de cet homomorphisme s'appelle l'<u>intégrale</u> d'un élément de $H^p(Y_p)$ (sur la variété orientée Y_p

Cela dit, la détermination de l'homomorphisme δ revient à savoir quelle est la combinaison de cellules de dimension $p+1$ que δ attache à chaque cellule de dimension p ; les coefficients de cette combinaison s'appellent les <u>nombres d'incidence</u> de la cellule de dimension p (relativement aux cellules de dimension $p+1$). Si on change l'orientation d'une seule cellule, ses nombres d'incidence sont évidemment multipliés par -1.

La théorie de la cohomologie montre facilement que le composé des homomorphismes $H^p(Y_p) \longrightarrow H^{p+1}(Y_{p+1})$ et $H^{p+1}(Y_{p+1}) \longrightarrow H^{p+2}(Y_{p+2})$ est nul. Donc les nombres d'incidence satisfont aux relations quadratiques exprimées par $\delta\delta = 0$.

Les nombres d'incidence servent aussi à définir le "bord" d'une cellule orientée de dimension p : c'est une combinaison linéaire (en général infinie), à coefficients entiers, de cellules orientées de dimension $p-1$.

Le problème de la <u>détermination des nombres d'incidence</u> est facilité par la <u>règle</u> suivante ; considérons un <u>ouvert</u> U, et la stratification induite ; affectons chaque cellule de la nouvelle stratification (une telle cellule est une composante connexe d'une cellule de la stratification initiale) de l'orientation induite par celle de la cellule initiale. Si W est une cellule de la décomposition induite sur U, notons f(W) la cellule de X dont elle fait partie. Cela étant ; si, dans la stratification induite sur U, on a $\delta W = \sum_j n_j W^j$ (j : indice de sommation), alors, dans la stratification initiale, on a

$$\delta(f(W)) = \sum_j n_j f(W^j) .$$

[On notera que les $f(W^j)$ ne sont pas nécessairement des cellules distinctes de X, de sorte qu'au second membre il peut se produire des "réductions"]. Telle est la règle en question ; elle découle immédiatement des compatibilités habituelles des homomorphismes de la suite exacte de cohomologie.

On voit que la détermination des nombres d'incidence est un problème de nature <u>locale</u>. Par exemple, la règle précédente prouve ceci : le nombre d'incidence d'une cellule de dimension p et d'une cellule de dimension p+1 ne peut être $\neq 0$ que si la première est tout entière contenue dans l'adhérence de la seconde.

Voici un cas simple où la détermination des nombres d'incidence est immédiate : soit a un point d'une cellule V de dimension p ; supposons qu'il existe un voisinage ouvert U de a tel que $U \cap X_{p+1}$ ne rencontre, outre V , qu'une seule cellule W , de dimension p+1 (resp. deux cellules W_1 et W_2 de dimension p+1), et que l'on ait un homéomorphisme f de $U \cap X_{p+1}$ sur un demi-espace fermé de l'espace numérique R^{p+1} (resp. sur l'espace R^{p+1} tout entier), qui applique $U \cap Y_{p+1}$ sur le demi-espace ouvert et $U \cap V$ sur l'hyperplan limitant ce demi-espace (resp. qui applique $U \cap V$ sur un hyperplan de R^{p+1} et $U \cap W_i$ (i=1,2) sur les 2 demi-espaces qu'il limite). Alors le "cobord" de V se compose de la seule cellule W (resp. des 2 cellules W_1 et W_2), affectée d'un coefficient ± 1 qui dépend de l'accord des orientations imposées à l'hyperplan et au demi-espace (resp. aux 2 demi-espaces).

2 - <u>Intégrale d'une forme différentielle</u>.-

Soit Y une variété de dimension n dont toutes les composantes connexes sont orientables ; orientons-les. Considérons la cohomologie à supports compacts, comme ci-dessus, mais à <u>coefficients réels</u>. Un élément de $H^n(Y,R)$ s'identifie à une combinaison linéaire finie, à coefficients réels, des cellules (orientées) de Y . Mais on sait (théorème de DE RHAM) que les formes différentielles à support compact donnent la cohomologie réelle (à sup. comp.) de Y . En particulier, toute forme <u>de degré n</u> , étant fermée (i.e ; de différentielle extérieure nulle) définit, si son support est compact, une combinaison linéaire de cellules orientées, à coefficients réels ; la somme des coefficients s'appelle l'<u>intégrale</u> de la forme différentielle (sur la variété orientée Y) .

Mais le point de vue précédent ne suffit pas, car on est amené à intégrer des formes différentielles sur autre chose que des variétés ("ouvertes"). On va dire maintenant sur quoi, et préciser la notion de forme différentielle dans ce cas plus étendu.

3 - Immersion différentiable d'une variété stratifiée.-

C'est, par définition, un homéomorphisme de la variété stratifiée sur un sous-espace fermé (que nous noterons encore X) d'une variété différentiable (autant de fois qu'on voudra) A , homéomorphisme tel que les Y_p deviennent des sous-variétés différentiablement plongées. On peut alors considérer, pour chaque forme différentielle de la variété ambiante A , la forme différentielle qu'elle induit sur chaque Y_p . Dans ce qui suit, nous considèrerons exclusivement, dans la variété ambiante A , des formes différentielles à support compact.

Définissons l'algèbre différentielle $D(X_p)$ comme le quotient de l'algèbre $D(A)$ des formes différentielles de A (à suppport compact) par l'idéal des formes qui induisent 0 sur $Y_0, Y_1, \ldots, Y_p$. $D(X_p)$ s'appellera aussi l'algèbre des formes différentielles induites sur X_p . On a un homomorphisme canonique $D(X_p) \to D(X_{p-1})$, dont le noyau se compose des formes induites sur X_p qui induisent 0 sur X_{p-1} ; nous désignerons ce noyau par $D(X_p,X_{p-1})$. La suite

$$(1) \qquad 0 \to D(X_p,X_{p-1}) \to D(X_p) \to D(X_{p-1}) \to 0$$

est une suite exacte. En passant à la cohomologie, on en déduit une suite exacte :

$$(2) \quad \ldots \to H^q(D(X_p,X_{p-1})) \to H^q(D(X_p)) \to H^q(D(X_{p-1})) \to H^{q+1}(D(X_p,X_{p-1})) \to$$

Or X_p , sous-espa ce fermé de la variété différentiable A , est justiciable de la théorie générale des carapaces ; soit $\overline{D}(X_p)$ le quotient de l'algèbre $D(A)$ par l'idéal des formes dont le support ne rencontre pas X_p ; la carapace $\overline{D}(X_p)$ permet de calculer la cohomologie réelle (à supports compacts) de l'espace X_p , de son sous-espace X_{p-1} et du complémentaire Y_p . Ainsi : soit $\overline{D}(Y_p)$ la sous-algèbre (idéal) de $\overline{D}(X_p)$ formée des éléments dont le support ne rencontre pas X_{p-1} , et soit $\mathbb{D}(X_{p-1})$ le quotient de $\mathbb{D}(X_p)$ par $\mathbb{D}(Y_p)$; la suite exacte

$$(3) \qquad 0 \to \mathbb{D}(Y_p) \to \mathbb{D}(X_p) \to \mathbb{D}(X_{p-1}) \to 0$$

donne naissance à une suite exacte de cohomologie, laquelle, d'après la théorie générale des carapaces, s'identifie canoniquement à la suite exacte de cohomologie réelle de l'espace X_p, de son sous-espace ouvert Y_p et du complémentaire fermé X_{p-1} :

$$(4) \quad \ldots \to H^q(Y_p) \to H^q(X_p) \to H^q(X_{p-1}) \to H^{q+1}(Y_p) \to \ldots$$

Or on a un homomorphisme canonique (évident) de la suite (3) dans la suite (1) ; on en déduit un homomorphisme de la suite (4) dans la suite (2) :

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^q(Y_p) \arrow[r] \arrow[d] & H^q(X_p) \arrow[r] \arrow[d] & H^q(X_{p-1}) \arrow[r] & H^{q+1}(Y_p) \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H^q(D(X_p,X_{p-1})) \arrow[r] & H^q(D(X_p)) \arrow[r] & H^q(D(X_{p-1})) \arrow[r] & H^{q+1}(D(X_p,X_{p-1})) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

4.- On va maintenant donner des conditions suffisantes pour que les homomorphismes verticaux soient des <u>isomorphismes sur</u> ; autrement dit, pour que les algèbres $D(X_p,X_{p-1})$, $D(X_p)$ et $D(X_{p-1})$ puissent servir à calculer la cohomologie réelle (à supports compacts) des espaces Y_p, X_p et X_{p-1}, ainsi que les homomorphismes de la suite exacte (4). En vertu du "lemme des cinq", si les homomorphismes $H^q(X_p) \to H^q(D(X_p))$ sont des isomorphismes sur (pour tout p et tout q), alors les homomorphismes $H^q(Y_p) \to H^q(D(X_p,X_{p-1}))$ soit aussi des isomorphismes sur. Supposons qu'il en soit ainsi : soit ω une forme <u>de degré p</u>, induite sur X_p ; une telle forme induit automatiquement 0 sur X_{p-1} (pour des raisons de degré), et son cobord $d\omega$ induit 0 sur X_p ; elle définit donc un cocycle de $D(X_p,X_{p-1})$, lequel définit un élément de la cohomologie réelle $H^p(Y_p)$; cet élément définit à son tour une "intégrale" (nombre réel, défini quand on a orienté les composantes connexes de Y_p), qui sera alors, par définition, l'intégrale de la forme ω sur la variété (orientée) Y_p .

Donnons maintenant des conditions qui suffisent pour que les homomorphismes

(5) $$H^q(X_p) \longrightarrow H^q(D(X_p))$$

soient des isomorphismes sur . Pour un entier p donné, $D(X_p)$ est une carapace fine de l'espace X_p ; la théorie générale des carapaces permet d'affirmer ceci : si le faisceau de cohomologie de cette carapace est trivial, (5) est un isomorphisme sur . La condition exprime que si, en chaque point $x \in X_p$, on considère le quotient de $D(X_p)$ par l'idéal $D_x(X_p)$ formé de celles des formes différentielles induites sur X_p dont le support ne contient pas x , les groupes de cohomologie $H^q(D(X_p)/D_x(X_p))$ sont nuls pour $q > 0$, et isomorphes à R (nombres réels) pour $q=0$. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que soit remplie la condition que voici :

(RETR) Pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x (dans la variété ambiante A) et une rétraction différentiable de U sur x pour laquelle les $U \cap X_p$ sont stables.

On utilise alors un "opérateur d'homotopie", qui opère dans chacun des $D(X_p)/D_x(X_p)$, et conduit au résultat cherché.

En résumé :

THÉORÈME.- Lorsque l'immersion de la variété stratifiée X dans la variété différentiable A satisfait à la condition (RETR), les algèbres différentielles $D(X_p, X_{p-1})$ et $D(X_p)$ servent à calculer la cohomologie réelle (à supports compacts) des espaces Y_p et X_p respectivement. En particulier, toute forme différentielle ω de degré p , induite sur Y_p , par une forme de A à support compact, définit un élément du groupe de cohomologie réelle $H^p(Y_p, R)$, et par suite on peut définir l'intégrale de ω sur Y_p (une fois orientées les composantes connexes de la variété Y

Observons maintenant que Y_p est réunion des "cellules" de dimension p (composantes connexes de Y_p) . Peut-on définir l'intégrale de ω (forme différentielle de degré p) sur une cellule orientée de dimension p ? Pour cela, il suffira de poser l'axiome supplémentaire suivant :

(STRAT II) L'adhérence de chaque cellule de la variété stratifiée X est réunion de cette cellule et de cellules de dimensions strictement plus petites.

S'il en est ainsi, l'adhérence de chaque cellule est, à son tour, une variété stratifiée, et la théorie précédente lui est donc applicable. On a alors la proposition suivante : <u>l'intégrale de</u> ω (forme de degré p, à support compact) <u>sur</u> Y_p <u>est la somme des intégrales de</u> ω <u>sur les cellules dont se compose</u> Y_p . Cela résulte aussitôt du fait suivant : si C est une composante connexe de Y_p , l'élément de $H^p(C)$ défini par ω a pour image canonique, dans $H^p(Y_p)$, l'élément de $H^p(Y_p)$ défini par ω.

5. <u>Formule de Stokes</u>.-

Ne supposons pas, tout d'abord, l'axiome (STRAT II). L'homomorphisme $\delta : H^p(Y_p,R) \longrightarrow H^{p+1}(Y_{p+1},R)$ de la suite exacte de cohomologie réelle, est défini par les <u>nombres d'incidence</u> que l'on a obtenus, au §1 , pour la cohomologie à coefficients entiers. D'autre part, il est composé de $H^p(Y_p,R) \longrightarrow H^p(X_p,R)$ et de $H^p(X_p,R) \longrightarrow H^{p+1}(Y_{p+1},R)$, c'est-à-dire, si l'on suppose l'axiome (RETR), des homomorphismes $H^p(D(X_p,X_{p-1})) \longrightarrow H^p(D(X_p))$ et $H^p(D(X_p)) \longrightarrow H^{p+1}(D(X_{p+1},X_p))$. Ainsi : soit ω une forme différentielle de degré p de la variété ambiante A , et soit $d\omega$ son cobord. La forme ω définit une combinaison linéaire (à coefficients réels, nuls sauf un nombre fini) de cellules orientées de Y_p et $d\omega$ définit une combinaison linéaire de cellules orientées de Y_{p+1}. Eh bien : on passe de la première combinaison à la seconde à l'aide des <u>nombres d'incidence</u> : dans la première, on remplace chaque cellule par son cobord δ , qui est une combinaison linéaire (à coefficients entiers) de cellules de dimension $p+1$.

C'est ce fait essentiel qui donne naissance à la "formule de Stokes". Supposons en effet vérifié l'axiome (STRAT II), et cherchons quel sera le coefficient d'une cellule C de dimension $p+1$ dans la combinaison linéaire définie par $d\omega$; d'une part, ce sera l'intégrale de $d\omega$ sur C orientée ; d'autre part, ce sera la somme des intégrales de ω sur les cellules du bord de C , chacune étant affectée du coefficient entier donné par les nombres d'incidence.

6. Remarques diverses.-

Grâce à l'axiome supplémentaire (STRAT II), on a défini l'intégrale d'une forme de degré p sur chaque cellule orientée de dimension p ; cette intégrale est la même pour 2 formes de la variété ambiante A , lorsque ces formes induisent la même forme sur la cellule considérée. Mais en général, même sans supposer (STRAT II), une forme ω de degré p de la variété ambiante A définit, on l'a vu, une combinaison linéaire (finie) de cellules orientées de dimension p , à coefficients réels ; les coefficients de cette combinaison peuvent encore être appelés les intégrales de ω sur les diverses cellules orientées de dimension p . Cette nouvelle définition est en accord avec l'ancienne quand (STRAT II) est vérifié. Ainsi, on peut encore dire que l'intégrale de ω sur Y_p est la somme des intégrales de ω sur les cellules orientées (de dimension p) dont se compose Y_p .

N.B.: il n'est plus certain que l'intégrale de ω sur une cellule de dimension p ne dépende que de la forme induite par ω sur cette cellule.

Avec cette nouvelle définition de l'intégrale, sur une p-cellule, d'une p-forme de la variété ambiante A , on a encore une "formule de Stokes" ; c'est évident.

Soit maintenant U un <u>ouvert</u> de la variété ambiante A ; la variété stratifiée X étant plongée dans A , on obtient sur $X \cap U$ une structure de variété stratifiée (plongée dans U). Soit ω une forme différentielle de degré p de la variété A , dont le <u>support</u> soit compact et contenu dans U ; il lui correspond canoniquement une forme de la variété U , notée encore ω . Pour cette forme, on a des intégrales sur les cellules dont se compose $Y_p \cap U$.

Je dis que : <u>l'intégrale de ω sur une cellule (orientée) C de Y_p est égale à la somme des intégrales de ω sur les cellules de $Y_p \cap U$ contenues dans</u> C (et munies des orientations induites). En effet, cela résulte aussitôt (tout comme la "règle" donnée au paragraphe 1) des compatibilités habituelles des homomorphismes de la suite exacte de cohomologie.

Nous sommes maintenant en mesure de <u>caractériser axiomatiquement l'intégrale</u> (dans le sens général du début de ce paragraphe). C'est, pour toute variété différentiable A , toute variété stratifiée X plongée dans A, de manière à satisfaire à l'axiome (RETR), toute cellule orientée C (de dimension p quelconque) de X , et toute forme différentielle à support compact ω (de même degré p) de la variété ambiante A , la donnée d'un nombre réel, appelé l'intégrale de ω sur C , et noté $\int_C \omega$, de manière que soient satisfaites les conditions suivantes :

(1) si U est un ouvert de A , et si ω de degré p a un support compact contenu dans U , l'intégrale de ω sur une cellule p-dimensionnelle C de X est égale à la somme des intégrales de ω sur les cellules p-dimensionnelles de $X \cap U$ contenues dans C ;

(2) additivité : $\int_C \omega_1+\omega_2 = \int_C \omega_1 + \int_C \omega_2$.

(3) on a une formule de Stokes : si C est une cellule $(p+1)$-dimensionnelle de X , et ω une forme de degré p , l'intégrale de $d\omega$ sur C est égale à la somme des intégrales de ω sur les cellules du "bord" de C (affectées chacune du coefficient entier convenable).

(4) pour $p=0$, l'intégrale d'une fonction sur un point (cellule de dimension 0) est égale à la valeur de la fonction en ce point.

Les conditions précédentes caractérisent l'intégrale : on montre l'unicité par récurrence sur p , à partir de $p=0$. La démonstration, facile, est laissée à l'imagination du lecteur. [Utiliser les partitions de l'unité, et le fait qu'une forme fermée est (localement) une différentielle exacte] .

L'existence résulte des considérations cohomologiques des paragr.1 à 5

7. Lien avec la théorie de l'intégration proprement dite.-

Soit toujours une variété stratifiée X, plongée dans une variété différentiable A de manière à satisfaire à l'axiome (RETR). On va montrer que toute forme différentielle ω de degré p de A (à support compact ou non) définit une mesure de Radon sur l'espace localement compact X_p (une fois qu'on a orienté les cellules de Y_p), cette mesure μ_ω étant cara-ctérisée par le fait que, pour toute fonction continue f à support compact (dans la variété ambiante), l'intégrale, sur Y_p , de la forme $f\omega$, est égale à l'intégrale, dans l'espace localement compact X_p , de la fonction f par rapport à la mesure μ_ω . Il en résultera que si deux formes différentielles induisent la même forme sur Y_p , elles définissent la même mesure de Radon sur l'espace X_p .

Tout sera démontré si nous prouvons ceci : soit U un ouvert relativement compact de A ; la forme ω étant donnée, il existe un nombre M_U jouissant de la propriété suivante : pour toute f continue dont le support est contenu dans U , l'intégrale, sur Y_p , de la forme $f\omega$ est, en valeur absolue, inférieure à $M_U . \| f \|$, en désignant par $\| f \|$ la borne supérieure de la valeur absolue de f . Or il suffit de démontrer cette propriété pour les ouverts U assez petits, car le cas général se traitera ensuite avec une partition de l'unité. Mais, pour U assez petit, la forme $f\omega$ est, dans U , la différentielle $d\overline{\omega}$ d'une forme $\overline{\omega}$ qu'on calcule par un procédé standard, et dont les coefficients (relatifs à un système de coordonnées locales) sont donc majorés à l'aide de $\| f \|$; en appliquant la formule de Stokes on prouve alors la proposition par récurrence sur l'entier p .

On rejoint ainsi le point de vue classique de l'"intégration" des formes différentielles ; il consiste, par un choix convenable des coordonnées locales, à ramener la forme considérée $\overline{\omega}$ au type $f\omega$, f étant une fonction, et ω une forme différentielle pour laquelle on connaît déjà la mesure de Radon qu'elle définit. Alors on n'a plus qu'à "intégrer" la fonction f par rapport à cette mesure. Le théorème du "changement de variables" est devenu évident, puisqu'on sait d'avance que l'intégrale de $\overline{\omega}$ ne dépend pas de la manière choisie d'écrire $\overline{\omega}$ sous la forme $f\omega$.

On notera ceci : si U est un ouvert de la variété ambiante A , et si ω_U désigne la forme différentielle induite par ω sur U , la mesure de Radon définie, sur $X_p \cap U$, par la forme ω_U , n'est autre que la mesure induite par la mesure que ω définit sur X_p .

Pour achever de rejoindre le point de vue classique, il reste à montrer que, sur l'espace-produit R^n , la forme différentielle $dx_1 dx_2 \dots dx_n$ définit une mesure qui n'est autre que le produit des mesures $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ définies sur chaque espace facteur.

(La mesure dx_1 sera connue grâce à la formule de Stokes ; l'intégrale de dx_1 sur un intervalle orienté (a,b) sera égale à la différence des valeurs de x_1 aux points b et a). Dans ce but, il reste à faire la théorie de l'intégration des formes différentielles sur les espaces-produits, ou plus généralement sur les <u>espaces fibrés</u>. C'est l'objet de ce qui suit.

8. <u>Les formes différentielles sur une variété fibrée</u>.-

Pour simplifier, on supposera qu'il s'agit d'une vraie variété différentiable, sans singularité. On notera $\mathfrak{X}$ la variété fibrée, $\mathfrak{B}$ sa base, $\mathfrak{F}$ la fibre-type. Soit X l'espace vectoriel (gradué) des formes différentielles de $\mathfrak{X}$. Il possède une <u>structure filtrée-décroissante</u>, définie par les sous-espaces vectoriels X^p (stables pour le cobord) que voici : au voisinage d'un point de $\mathfrak{X}$, écrivons $\mathfrak{X}$ comme produit de la base par la fibre, et prenons des coordonnées locales (x_i) dans la base et (y_j) dans la fibre, ce qui donne un système de coordonnées locales dans l'espace fibre $\mathfrak{X}$. La propriété, pour une forme différentielle de $\mathfrak{X}$, de s'écrire, au voisinage du point considéré, comme somme de termes dont chacun contient le produit d'au moins p différentielles dx_i, est indépendante des choix que l'on a faits ; s'il en est ainsi, nous dirons que la forme est de degré-base $\geqslant p$ au point considéré. Cela dit, X^p sera, par définition, le sous-espace des formes de $\mathfrak{X}$ qui sont, en chaque point de $\mathfrak{X}$, de degré-base $\geqslant p$. Il est clair que $X^p \supset X^{p+1}$, et que les X^p sont stables pour le cobord. On convient que $X^p = X$ pour $p \leqslant 0$.

On note $X^{p,q}$ le sous-espace des éléments de X^p qui sont homogènes de degré $p+q$. Le cobord envoie $X^{p,q}$ dans $X^{p,q+1}$.

On peut maintenant mettre en marche la machinerie de la "suite spectrale" (Voir par exemple Séminaire Cartan 1950-51, et Thèse de SERRE). En particulier, on définit un espace $E_0 = \sum_{p,q} E_0^{p,q}$, avec

$$E_0^{p,q} = X^{p,q} / X_{p,q}^{p+1,q-1} .$$

On peut ici interpréter E_0 : c'est l'espace vectoriel des formes différentielles de la base $\mathcal{B}$, de degré p, à valeurs dans l'espace des formes différentielles des fibres, de degré q. Ceci nécessite deux mots d'explication ; pour chaque point b de la base $\mathcal{B}$, un élément de $E_0^{p,q}$ attache aux p-vecteurs tangents en b à l'espace $\mathcal{B}$, une q-forme différentielle de la <u>fibre située au-dessus de b</u>. Dans E_0, l'opérateur cobord est la <u>différentielle-fibre</u>. On a un homomorphisme $X \rightarrow E_0$, qui conserve la graduation, et est défini comme suit : soit k la dimension de la fibre $\mathcal{F}$; tout élément de X, de degré n, appartient à $X^{n-k,k}$, donc définit un élément de $E_0^{n-k,k} = X^{n-k,k} / X^{n-k+1,k-1}$. Telle est l'application $X \rightarrow E_0$.

Le terme E_1 de la suite spectrale s'interprète aussitôt : $E_1^{p,q}$ s'identifie à l'espace vectoriel des formes de la base, de degré p, à valeurs dans la cohomologie de dimension q de la fibre (les espaces de cohomologie des fibres constituent, sur l'espace de base, un "système local" au sens de Steenrod). En fait, il est nécessaire de préciser de quelle sorte de cohomologie l'on parle ici ; nous nous bornerons désormais, pour simplifier, au cas où X désigne l'espace vectoriel des formes différentielles à <u>support compact</u> de l'espace fibré $\mathcal{X}$; alors $E_1^{p,q}$ est l'espace vectoriel des formes différentielles de la base, de degré p, à support compact, et à valeurs dans la cohomologie à supports compacts, de degré q, de la fibre. L'opérateur cobord de E_1 est la <u>différentielle-base</u> (différentielle extérieure d'une forme de l'espace $\mathcal{B}$).

k désignant toujours la dimension de la fibre, les éléments de $E_0^{p,k}$ sont des cocycles (pour l'opéra-teur cobord de E_0) ; donc on a un homomorphisme canonique de $E_0^{p,k}$ <u>sur</u> $E_1^{p,k}$. Composé avec l'homomorphisme $X \to E_0$ ci-dessus (qui envoie le sous-espace ${}^nX$ des éléments de degré n de X dans $E_0^{n-k,k}$), il donne un homomorphisme $\alpha : X \to E_1$, qui envoie ${}^nX$ dans $E_1^{n-k,k}$. On vérifie aussitôt que cet homomorphisme est compatible non seulement avec les graduations (dans E_1, il s'agit du degré total), mais avec les opérateurs "cobord" de X et de E_1. Il définit donc, en passant à la cohomologie, d'un homomorphisme

$$\beta_n : H^n(\mathfrak{X}) \longrightarrow E_2^{n-k,k} ,$$

qui n'est autre que l'homomorphisme classique, défini pour la cohomologie à coefficients quelconques (pas seulement réels) chaque fois que la fibre d'un espace fibré est de dimension k. Rappelons que $E_2^{p,q}$ s'identifie à l'espace de cohomologie de dimension p de la ba-se $\mathcal{B}$, à coefficients dans la cohomologie de dimension q de la fibre $\mathcal{F}$ (comme dans la théorie de LERAY).

Notons désormais n la <u>dimension de la variété fibrée</u> $\mathfrak{X}$; alors l'homomorphisme β_n est un <u>isomorphisme sur</u>, parce que les éléments de $E_2^{n-k,k}$ sont tous des cocycles, et ne sont jamais des cobords (sauf 0) pour les différentielles $\delta_2, \delta_3, \ldots$ de la suite spectrale. On voit ici comment on peut obtenir cet isomorphisme : un élément de $H^n(\mathfrak{X})$ est défini à partir d'une forme différentielle ω de degré n de $\mathfrak{X}$ (laquelle est automatiquement fermée) ; l'homomorphisme α la transforme en une forme $\overline{\omega}$, de degré n-k, de l'espace $\mathcal{B}$, à valeurs dans $H^k(\mathcal{F})$; la forme $\overline{\omega}$ est fermée, et définit donc un élément de $H^{n-k}(\mathcal{B}, H^k(\mathcal{F}))$, qui est justement celui qui correspond canoniquement à l'élément de $H^n(\mathfrak{X})$ défini par ω.

Supposons enfin que l'espace $\mathcal{X}$ et la base $\mathcal{B}$ soient des variétés orientables, et orientons leurs composantes connexes ; ceci définit une orientation sur chaque composante connexe de la fibre $\mathcal{F}$, d'où un homomorphisme : $H^k(\mathcal{F},R) \to R$. Cet homomorphisme envoie $E_1^{p,k}$ dans l'espace $\Omega^p(\mathcal{B})$, espace vectoriel des formes différentielles (réelles) de $\mathcal{B}$, de degré p . En composant avec l'homomorphisme α , on obtient un homomorphisme α' de X dans $\Omega(\mathcal{B})$, qui abaisse le degré de k unités ; c'est l'homorphisme que l'on dit obtenu "par intégration sur la fibre (orientée)". En passant enfin à la cohomologie, on obtient un homomorphisme β' : $H(\mathcal{X},R) \to H(\mathcal{B},R)$, qui abaisse le degré de k unités, et est composé de β et de l'homomorphisme $H(\mathcal{B},H^k(\mathcal{F})) \to H(\mathcal{B},R)$.

Toutes les hypothèses précédentes étant conservées, soit ω une forme différentielle de degré n de l'espace fibré $\mathcal{X}$. Elle est fermée, et possède donc une intégrale (dans l'espace fibré). Or l'homomorphisme α' ("intégration sur la fibre") lui associe une forme de degré n-k de l'espace de base, forme que l'on peut ensuite intégrer sur l'espace de base. Je dis que le nombre réel que l'on obtient est égal à l'intégrale de la forme ω sur l'espace $\mathcal{X}$. Cela résulte précisément des considérations précédentes.- Ainsi, pour intégrer ω (de degré maximum n) sur la variété fibrée, on intègre d'abord "sur la fibre", ce qui donne une forme de degré n-k de l'espace de base $\mathcal{B}$; puis on prend l'intégrale de cette forme sur l'espace $\mathcal{B}$.

Ce résultat s'applique notamment lorsque l'espace $\mathcal{X}$ est le produit de deux variétés orientées.

Comme application, considérons deux variétés orientées y et y', de dimensions p et p'. Soit ω une p-forme de y, et ω' une p'-forme de y' ; alors $\omega \otimes \omega'$ est une $(p+p')$-forme de $y \times y'$. Je dis : la mesure définie, sur $y \times y'$, par la forme $\omega \otimes \omega'$, est la <u>mesure-produit</u> des mesures définies par ω et ω' sur y et y' respectivement. En effet, soit $f(y,y')$ une fonction continue à support compact sur l'espace $y \times y'$; d'après la caractérisation de la mesure-produit, on doit montrer que, si l'on pose

$$g(y) = \int_{y'} f(y,y')\omega' \quad , \quad \text{on a}$$

$$\int_{y \times y'} f(y,y')(\omega \otimes \omega') = \int_{y} g(y)\omega \; .$$

Or c'est précisément ce qui résulte du théorème concernant l'intégrale d'une forme à support compact sur une variété-produit.
