RÉDACTION N° 147

COTE : NBR 049

TITRE : LIVRE I : THÉORIE DES ENSEMBLES
CHAP. I (ÉTAT 6)
DESCRIPTION DE LA MATHÉMATIQUE FORMELLE

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 50

NOMBRE DE FEUILLES : 50

Archives
Diviner — Mars 1951

N3R 049 147 2

LIVRE I - THEORIE des ENSEMBLES

CHAPITRE 1 (Etat 6)

DESCRIPTION de la MATHEMATIQUE FORMELLE

Commentaires

L'état 6 ne présente avec l'état 5 que des différences de détail.

1. Les termes et les relations ont été définis à partir des "constructions formatives", comme les théorèmes sont définis à partir des démonstrations. L'exposé, bien qu'inchangé dans l'essentiel, me paraît plus satisfaisant aux points de vue logique et esthétique. La démonstration de RF7 est plus compliqué qu'avant ; mais l'ancienne démonstration exige en principe, pour un assemblage explicité, une infinité de vérifications, ce qu'on ne peut admettre. Le rédacteur demande qu'on vide la caractérisation des termes et des relations ; çà ne sert jamais à rien ; d'autre part, l'argument esthétique, peut-être valable pour un système formel élémentaire, ne l'est pas ici : l'existence des liens, et la distinction entre termes et relations, fait de ce n° un vrai diplodocus.

2. On a retiré à la théorie des ensembles son rôle absolu (et on fait un retour partiel vers l'état 4). Avantages : 1. On ne se demande plus, comme à Royaumont, pourquoi la règle de la déduction (entre autres) peut se démontrer avant que les axiomes soient explicités. 2. Comme les axiomes de la théorie des ensembles sont sujets à variation (cf. les flottements du haut-commissariat), il vaut mieux rendre la logique indépendante de ces axiomes. 3. En allégeant la définition des démonstrations (ce qui a nécessité un léger changement de l'ancien schéma S 4), on arrive à simplifier plusieurs raisonnements métamathématiques ultérieurs, et à réduire au minimum les problèmes métaphysiques que peut soulever le § 2.

Ainsi, le § 2 (et la suite sont entièrement "relativisés" (dans les théories), tandis que le § 1 est "absolu". D'~~autres~~ aucuns suggèrent de rendre aussi le § 1 "relatif" (avec signes primitifs dépendant de la théorie).

3. Au système Lesniewski-Tarski, on a substitué le système de Hilbert-Ackermann arrangé à la sauce Chevalley. L'inconvénient (4 schémas au lieu de 3) me paraît compensé par l'avantage : la démonstration de la règle de la déduction prend 2 pages au lieu de 5. (Il a fallu en conséquence prendre non et ou comme signes primitifs, et $\Longrightarrow$ comme symbole abréviateur).

4. Pour les quantificateurs, on a établi de préférence les propriétés de $\forall$ avant celles de $\exists$: c'est plus simple. Les règles permettant de prendre la négation d'une relation quantifiée, qui me semblent importantes, ont été explicitées. Le rédacteur était chargé de réduire à 5 lignes le laïus sur les types ; il a vidé le mot lui-même, qui ne sert à rien en logique ; 2 lignes d'exemples suffisent en ce qui concerne les mathématiques courantes.

* * * * *

- suite -

5. Le § 5 flotte entre le chapitre 1 et le chapitre 2, et se ressent des indécisions de Bourbaki. Pour pousser au maximum la tendance de l'état 5, on a tâché de diminuer le nombre des signes primitifs et des axiomes. L'égalité est donc définie par l'extensionalité (d'où disparition de 2 axiomes). On peut discuter le caractère plus ou moins "logique" de $\in$ et de $=$: ceci n'a pas grand sens ; à noter qu'on n'a pas d'autre moyen en mathématique de prouver $x = y$ que de prouver que x et y ont mêmes éléments (!). Cependant, le rédacteur veut bien reprendre = comme signe primitif, et repasser l'inclusion au chapitre 2 . L'axiome $(x = y) \Longrightarrow (R(x) \Longrightarrow R(y))$ n'a pas été donné ici, puisque inutile : je ne sais trop à partir de quand il devient nécessaire.

6. Le § sur les équations a été entièrement vidé. Un lecteur attentif du chap.1 n'a aucune peine à formaliser les raisonnements relatifs aux équations. Il me semble que Bourbaki doit donner seulement les règles que le lecteur peut avoir des difficultés à établir (Comme c'est le cas dans les "méthodes de démonstration").

Table des matières

§ 1. Termes et relations

1. Signes et assemblages.- Les signes que nous emploierons seront les suivants :

le signe $\in$
le signe τ
le signe $\square$
le signe $\neg$
le signe $\vee$
les lettres

Au début, nous utiliserons les lettres majuscules et minuscules latines, affectés d'accents ou d'indices. Ainsi, A, A', A", A"', ... sont des lettres. A tout endroit du texte, il est donc possible d'introduire des lettres autres que celles qui figuraient dans les raisonnements antérieurs.

Dans les textes mathématiques courants, on utilise aussi les lettres des autres alphabets.

Un assemblage est une suite de signes écrits les uns à côté des autres, certains signes distincts des lettres pouvant être joints deux à deux par des traits qui courent au-dessus de la ligne et qu'on appelle des liens. Ainsi

$$\tau \vee \neg \in A' \square \in \square A''$$

est un assemblage.

L'usage exclusif des assemblages conduit à des difficultés typographiques insurmontables. C'est pourquoi les textes courants utilisent des symboles abréviateurs (notamment les mots du langage ordinaire), qui n'appartiennent pas à la mathématique formelle. L'introduction de ces symboles est l'objet des définitions. Leur emploi n'est pas théoriquement indispensable, et prête souvent à des confusions que seule une certaine habitude permet d'éviter.

Exemples.- 1. L'assemblage $\vee \neg$ se représente par $\Longrightarrow$; l'assemblage l'assemblage $\neg \in$ se représente par $\notin$.

* 2. Les symboles suivants représentent des assemblages (d'ailleurs fort longs) : 3 et 4 ; $\emptyset$; N ; la droite numérique ; la fonction Γ ; $f \circ g$; $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $1 \in 2$; si l'espace topologique E est complétement régulier, il est uniformisable .*

En général, le symbole qu'on utilise pour représenter un assemblage contient toutes les lettres qui figurent dans cet assemblage. Parfois cependant, on peut enfreindre ce principe sans grand risque de confusion.* Par exemple, "la complétion de E" représente un assemblage qui contient la lettre E , mais qui contient aussi la lettre représentant l'ensemble des entourages de la structure uniforme de E . Par contre $\int_0^1 f(x)dx$ représente un assemblage où ne figure pas la lettre x (ni la lettre d)*.

La mathématique formelle est une manipulation d'assemblages qui sera décrite ultérieurement.

Dans cette description (qui n'appartient pas à la mathématique formelle et ne peut bien entendu lui appartenir) interviennent des assemblages plus ou moins indéterminés. Pour alléger l'exposé, il est commode de désigner les assemblages dont il s'agit par des symboles peu encombrants. Nous utiliserons notamment des combinaisons de lettres gothiques, de signes, et de symboles spécifiques, dont on va donner quelques exemples. (<u>Comme on veut seulement éviter des circonlocutions</u>, on n'énoncera pas de règles strictes et générales ; le lecteur pourra reconstituer sans peine, dans chaque cas particulier, l'assemblage dont il s'agit). Par abus de langage, on dira souvent que les symboles employés <u>sont</u> des assemblages au lieu de dire qu'ils désignent des assemblages.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des assemblages. On désignera par $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ l'assemblage obtenu en écrivant l'assemblage $\mathcal{B}$ à la droite de l'assemblage $\mathcal{A}$. On désignera par $\vee\mathcal{A}\neg\mathcal{B}$ l'assemblage obtenu en écrivant de gauche à droite le signe $\vee$, l'assemblage $\mathcal{A}$, le signe $\neg$, l'assemblage $\mathcal{B}$. Etc.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des assemblages, et x une lettre. On désignera par $(\mathcal{B}|x)\mathcal{A}$ l'assemblage obtenu en remplacant x, en chacune de ses occurences dans $\mathcal{A}$, par l'assemblage $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{A}$ un assemblage, et x une lettre. On désignera par $\varepsilon_x(\mathcal{A})$ l'assemblage obtenu de la manière suivante : on forme l'assemblage $\varepsilon\mathcal{A}$, on joint chaque occurence de x à l'occurence initiale de ε par un lien, et on remplace x, en chacune de ses occurences, par un $\square$. L'assemblage désigné par $\varepsilon_x(\mathcal{A})$ ne contient pas x.

Quand on introduit, par une définition, un symbole abréviateur Σ pour représenter un assemblage explicite $\mathcal{A}$, on convient, en général de façon tacite, de représenter l'assemblage $(\mathcal{B}|x)\mathcal{A}$ par le symbole obtenu en remplaçant la lettre x dans Σ par $\mathcal{B}$ ou plus fréquemment par un symbole représentant $\mathcal{B}$. * Par exemple, après avoir précisé quel assemblage représente le symbole $E \otimes F$, où E,F sont des lettres - assemblage qui, d'ailleurs, contient d'autres lettres que E et F - on utilisera sans explications le symbole $Z \otimes F$*. Cette règle conduit souvent à des confusions qu'on évite par des artifices typographiques variés dont le plus fréquent consiste à remplacer x par $(\mathcal{B})$ au lieu de $\mathcal{B}$. * Par exemple, $A \cap B$ désigne un assemblage contenant la lettre B. Si on ~~xxxxxxx~~ substitue à B l'assemblage représenté par $C \cup D$, on obtient un assemblage qui se désigne par $A \cap (C \cup D)$*.

2. <u>Règles de substitution</u>.- La mathématique formelle ne doit concerner que des assemblages explicitement écrits. Cependant, même avec l'usage des signes abréviateurs, un développement de la mathématique

strictement conforme à ce principe conduit à des raisonnements effroyablement longs. Aussi allons-nous établir dans ce livre des *règles*, qui concernent des assemblages indéterminés. Ces règles ne sont pas théoriquement indispensables ; on pourrait ne pas les énoncer, et les rétablir, chaque fois que c'est nécessaire, pour les assemblages explicites de la mathématique formelle. Leur démonstration constitue ce qu'on appelle la métamathématique.

Le développement de la métamathématique nécessite lui-même pratiquement l'usage de symboles abréviateurs dont certains ont déjà été indiqués. La plupart de ces symboles seront aussi utilisés en mathématique.

Les règles qui suivent sont appelées règles de substitution.

RS1. *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *des assemblages,* x *et* x' *des lettres. Si* x' *ne figure pas dans* $\mathcal{A}$, $(\mathcal{B}|x)\mathcal{A}$ *est identique à* $(\mathcal{B}|x')(x'|x)\mathcal{A}$

RS2.- *Soient* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *des assemblages,* x *et* y *des lettres distinctes. Si* y *ne figure pas dans* $\mathcal{B}$, $(\mathcal{B}|x)(\mathcal{C}|y)\mathcal{A}$ *est identique à* $(\mathcal{C}'|y)(\mathcal{B}|x)\mathcal{A}$, *où* $\mathcal{C}'$ *est* $(\mathcal{B}|x)\mathcal{C}$.

RS3.- *Soient* $\mathcal{A}$ *un assemblage,* x *et* x' *des lettres. Si* x' *ne figure pas dans* $\mathcal{A}$, $\varepsilon_x(\mathcal{A})$ *est identique à* $\varepsilon_{x'}(\mathcal{A}')$, où $\mathcal{A}'$ *est* $(x'|x)\mathcal{A}$.

RS4.- *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *des assemblages,* x *et* y *des lettres distinctes. Si* x *ne figure pas dans* $\mathcal{B}$, $(\mathcal{B}|y)\varepsilon_x(\mathcal{A})$ *est identique à* $\varepsilon_x(\mathcal{A}')$, *où* $\mathcal{A}'$ *est* $(\mathcal{B}|y)\mathcal{A}$.

RS5.- *Soient* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *des assemblages,* x *une lettre. Les assemblages* $(\mathcal{C}|x)(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{C}|x)(\vee\mathcal{A}\mathcal{B})$, $(\mathcal{C}|x)(\epsilon\mathcal{A}\mathcal{B})$, $(\mathcal{C}|x)(\Rightarrow\mathcal{A}\mathcal{B})$ *sont identiques respectivement à* $\neg\mathcal{A}'$, $\vee\mathcal{A}'\mathcal{B}'$, $\epsilon\mathcal{A}'\mathcal{B}'$, $\Rightarrow\mathcal{A}'\mathcal{B}'$, *où* $\mathcal{A}'$ *est* $(\mathcal{C}|x)\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}'$ *est* $(\mathcal{C}|x)\mathcal{B}$.

Prouvons RS2. A partir de l'assemblage $\mathcal{A}$, une première opération conduit à l'assemblage $(\mathcal{B}|x)(\mathcal{C}|y)\mathcal{A}$, un deuxième opération à l'assemblage $(\mathcal{C}'|y)(\mathcal{B}|x)\mathcal{A}$, et il faut prouver que les résultats de ces opérations sont identiques. Or, soit s un signe de $\mathcal{A}$.

Si s est distinct de x et de y , aucune des deux opéra tions ne modifie s . Si s est identique à x , la première opération remplace s par $\mathcal{B}$ (parce que y est distinct de x), et la deuxième aussi (parce que y ne figure pas dans $\mathcal{B}$). Enfin, si s est identique à y , la première opération remplace s par $(\mathcal{B}|x)\,\mathcal{C}$, c'est-à-dire par $\mathcal{C}'$, et la deuxième opération remplace aussi s par $\mathcal{C}'$, parce que x est distinct de y..

Les autres règles de substitution s'établissent de facon analogue .

3. <u>Constructions formatives</u>.- Un assembla ge est dit <u>de première espèce</u> s'il commence par un ε , ou s'il se réduit à un lettre, <u>de deuxième espèce</u> dans les autres cas.

Une <u>construction formative</u> est une suite $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,...., $\mathcal{A}_n$ d'assemblages qui possède la propriété suivante : pour chaque assemblage $\mathcal{A}$ de la suite, l'une des conditions ci-dessous est vérifiée :

a. $\mathcal{A}$ est une lettre.

b. Il existe deux assemblages de première espèce $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ précédant $\mathcal{A}$ tels que $\mathcal{A}$ soit $\varepsilon\mathcal{B}\mathcal{C}$.

c. Il existe un assemblage de deuxième espèce $\mathcal{B}$ précédant $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}$ soit $\neg\mathcal{B}$.

d. Il existe deux assemblages de deuxième espèce $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ précédant $\mathcal{A}$ tels que $\mathcal{A}$ soit $\vee\mathcal{B}\mathcal{C}$.

e. Il existe un assembla ge de deuxième espèce $\mathcal{B}$ précédant $\mathcal{A}$ et une lettre x tels que $\mathcal{A}$ soit $\varepsilon_x(\mathcal{B})$.

On appelle <u>termes</u> (resp. <u>relations</u>) les assemblages de première espèce (resp. de deuxième espèce) figurant dans les constructions formatives.

Intuitivement, les termes sont des assemblages qui représentent des objets, les relations sont des assemblages qui représentent des assertions que l'on peut faire sur des objets. La condition a signifie que les lettres représentent des objets. La condition b signifie que, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des objets, $\in \mathcal{B}\,\mathcal{C}$ est une assertion qu'on peut faire sur ces objets ; à savoir que $\mathcal{C}$ est une collection d'objets dont $\mathcal{B}$ est élément ; cette relation se lit aussi : " $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{C}$ ". La condition c signifie que, si $\mathcal{B}$ est une assertion, $\neg\,\mathcal{B}$, qu'on appelle la négation de $\mathcal{B}$, est une assertion ; affirmer que $\neg\,\mathcal{B}$ est vraie équivaut à affirmer que $\mathcal{B}$ est fausse ; (affirmer que $\notin \mathcal{B}\,\mathcal{C}$ est vraie, c'est donc affirmer que $\mathcal{B}$ n'appartient pas à $\mathcal{C}$). La condition d signifie que, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des assertions, $\vee\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}$, qu'on appelle la disjonction de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, est une assertion ; affirmer que $\vee\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}$ est vraie, c'est affirmer que, si $\mathcal{B}$ est fausse, $\mathcal{C}$ est vraie ; (affirmer que $\Longrightarrow \mathcal{B}\,\mathcal{C}$ est vraie, c'est donc affirmer que, si $\mathcal{B}$ est vraie, $\mathcal{C}$ est vraie ; autrement dit, que $\mathcal{B}$ entraîne $\mathcal{C}$). La condition e signifie que, si $\mathcal{B}$ est une assertion et x une lettre, $\varepsilon_x(\mathcal{B})$ est un objet ; considérons l'assertion $\mathcal{B}$ comme exprimant une propriété de l'objet x ; alors, s'il existe un objet possédant la propriété en question, $\varepsilon_x(\mathcal{B})$ représente un objet privilégié qui possède cette propriété ; sinon, $\varepsilon_x(\mathcal{B})$ représente un objet dont on ne peut rien dire.

*Exemples.- Les symboles $\emptyset$, N , "la droite numérique", "la fonction Γ ", $f\circ g$, représentent des termes. Les symboles $\pi = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, $1 \in 2$, "si l'espace topologique E est complètement régulier, il est uniformisable", représentent des relations. Le symbole "3 et 4" ne représente ni un terme, ni une relation".

Le signe initial d'une relation est $\in$, $\vee$ ou $\neg$, le signe initial d'un terme est ε à moins que le terme ne se réduise à une lettre. L'assertion relative aux termes résulte de ce qu'un terme est un assemblage de première espèce. Si $\mathcal{A}$ est une relation, $\mathcal{A}$ figure dans une construction formative ; n'étant pas une lettre, et ne commençant pas par un ε, $\mathcal{A}$ est précédé par un assemblage $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{A}$ soit $\neg\,\mathcal{B}$, ou par deux assemblages $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ tels que $\mathcal{A}$ soit $\in \mathcal{B}\,\mathcal{C}$ ou $\vee\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}$.

4. <u>Règles formatives</u>.– RF1.– <u>Si</u> $\mathcal{A}$ <u>et</u> $\mathcal{A}'$ <u>sont des termes</u>, $\varepsilon \mathcal{A} \mathcal{A}'$ <u>est une relation</u>.

En effet, considérons deux constructions formatives dont l'une contient $\mathcal{A}$ et l'autre $\mathcal{A}'$. Considérons la suite d'assemblages obtenue en écrivant d'abord les assemblages de la première construction, puis les assemblages de la deuxième, puis $\varepsilon \mathcal{A}\mathcal{A}'$. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont de première espèce, on vérifie aussitôt que cette suite est une construction formative; l'assemblage $\varepsilon \mathcal{A} \mathcal{A}'$ est de deuxième espèce, donc est une relation.

On établit de facon analogue les règles RF2, RF3, RF4 que voici :

RF2.– <u>Si</u> $\mathcal{A}$ <u>est une relation et</u> x <u>une lettre</u>, $\varepsilon_x(\mathcal{A})$ <u>est un terme</u>.

RF3.– <u>Si</u> $\mathcal{A}$ <u>est une relation</u>, $\neg \mathcal{A}$ <u>est une relation</u>.

RF4.– <u>Si</u> $\mathcal{A}$ <u>et</u> $\mathcal{B}$ <u>sont des relations</u>, $\vee \mathcal{A} \mathcal{B}$ <u>est une relation</u>.

Ces ~~xxxxxxx~~ règles entraînent aussitôt les suivantes :

RF5.– <u>Si</u> $\mathcal{A}$ <u>et</u> $\mathcal{B}$ <u>sont des relations</u>, $\Rightarrow \mathcal{A} \mathcal{B}$ <u>est une relation</u>.

RF6.– <u>Si</u> $\mathcal{A}$ <u>et</u> $\mathcal{B}$ <u>sont des termes</u>, $\notin \mathcal{A} \mathcal{B}$ <u>est une relation</u>.

Etablissons enfin la règle suivante :

RF7.– <u>Si</u> $\mathcal{A}$ <u>est une relation</u> (<u>resp. un terme</u>), x <u>une lettre et</u> $\mathcal{B}$ <u>un terme</u>, $(\mathcal{B}|x)\mathcal{A}$ <u>est une relation</u> (<u>resp. un terme</u>).

On peut supposer que x figure dans $\mathcal{A}$, sans quoi la règle est triviale. Soit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ une construction formative où figure $\mathcal{A}$. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les lettres distinctes qui figurent dans $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}$. Associons à u_q une lettre u'_q, de facon que les lettres $u_1, u_2, \ldots, u_p, u'_1, u'_2, \ldots, u'_p$ soient toutes distinctes. On va montrer que l'assemblage

$$(\mathcal{B}|x)(u'_{q_1}|u_{q_1})(u'_{q_2}|u_{q_2})\ldots(u'_{q_r}|u_{q_r})\,\mathcal{A}_t ,$$

que nous désignerons par $\mathcal{A}^*_t$, est un terme si $\mathcal{A}_t$ est un terme, une relation si $\mathcal{A}_t$ est une relation, quelle que soit la manière dont on choisisse des lettres distinctes $u_{q_1}, u_{q_2}, \ldots, u_{q_r}$ parmi les lettres

NBR 049

$u_1, u_2, \ldots, u_p$. (En n'en choisissant aucune, et en appliquant ce résultat à $\mathfrak{A}$, la règle sera démontrée).

Notre assertion est évidente si $\mathfrak{A}_t$ est une lettre . Supposons-là établie pour les $\mathfrak{A}_t$ qui précèdent $\mathfrak{A}_i$ dans la construction, et établissons-là pour $\mathfrak{A}_i$. Si $\mathfrak{A}_i$ est précédé par des termes $\mathfrak{A}_j$ et $\mathfrak{A}_k$ tels que $\mathfrak{A}_i$ soit $\in \mathfrak{A}_j \mathfrak{A}_k$, l'assemblage $\mathfrak{A}^*_i$ est identique à $\in \mathfrak{A}^*_j \mathfrak{A}^*_k$, et ~~en sait que~~ $\cancel{\mathfrak{A}^*_j \; k}$, et on sait que $\mathfrak{A}^*_j, \mathfrak{A}^*_k$ sont des termes, donc $\mathfrak{A}^*_i$ est une relation d'après RF1. On raisonne de façon analogue si $\mathfrak{A}_i$ est précédé par une relation $\mathfrak{A}_j$ telle que $\mathfrak{A}_i$ soit $\neg \mathfrak{A}_j$, ou par des relations $\mathfrak{A}_j$ et $\mathfrak{A}_k$ telles que $\mathfrak{A}_i$ soit $\vee \mathfrak{A}_j \mathfrak{A}_k$. Si $\mathfrak{A}_i$ est précédé par une relation $\mathfrak{A}_j$ telle que $\mathfrak{A}_i$ soit $\varepsilon_y(\mathfrak{A}_j)$ pour une lettre y , supposons d'abord y identique à une des lettres $u_1, u_2, \ldots, u_p$, soit u_ω . Comme $\mathfrak{A}_i$ ne contient pas u_ω , on peut supposer que u_ω est distincte des lettres $u_{q_1}, u_{q_2}, \ldots, u_{q_r}$, donc que u'_ω est distincte des lettres $u'_{q_1}, u'_{q_2}, \ldots, u'_{q_r}$. D'après RS3, $\mathfrak{A}^*_i$ est identique à

$$(\mathfrak{B}|x)(u'_{q_1}|u_{q_1})(u'_{q_2}|u_{q_2})\ldots(u'_{q_r}|u_{q_r})\,\varepsilon_{u'_\omega}(\mathfrak{A}'_j)$$

où $\mathfrak{A}'_j$ est $(u'_\omega|u_\omega)\mathfrak{A}_j$. D'après RS4, $\mathfrak{A}^*_i$ est donc identique à $\varepsilon_{u'_\omega}(\mathfrak{A}''_j)$, où $\mathfrak{A}''_j$ est

$$(\mathfrak{B}|x)(u'_{q_1}|u_{q_1})(u'_{q_2}|u_{q_2})\ldots(u'_{q_r}|u_{q_r})(u'_\omega|u_\omega)\,\mathfrak{A}_j$$

Or, on sait que $\mathfrak{A}''_j$ est une relation. D'après RF2, $\mathfrak{A}^*_i$ est donc un terme. Un raisonnement analogue, mais plus facile, est applicable si est distincte de $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Intuitivement, si $\mathfrak{A}$ est une relation, que nous pouvons considérer comme exprimant une propriété de l'objet x , affirmer que $(\mathfrak{B}|x)\mathfrak{A}$ est vraie revient à affirmer que l'objet $\mathfrak{B}$ possède cette propriété. Si $\mathfrak{A}$ est un terme, il représente un objet qui dépend d'une certaine manière de l'objet désigné par x ; le terme $(\mathfrak{B}|x)\mathfrak{A}$ représente ce que devient l'objet $\mathfrak{A}$ quand on prend pour x l'objet $\mathfrak{B}$.

5. Caractérisation des termes et des relations.- Soit $\mathfrak{A}$ un assemblage. Soit s un signe de $\mathfrak{A}$, et effacons les signes situés à droite de s ainsi que les liens qui aboutissent à ces signes. On obtient un assemblage qu'on appellera un segment de $\mathfrak{A}$. Un segment de $\mathfrak{A}$ sera dit strict s'il n'est pas identique à $\mathfrak{A}$. On dira que $\mathfrak{A}$ est équilibré si les trois conditions suivantes sont vérifiées : 1. Dans $\mathfrak{A}$, le nombre total de lettres et de signes $\square$ excède d'une unité le nombre total de $\in$ et de $\vee$. 2. Dans tout segment strict de $\mathfrak{A}$, le nombre total de $\in$ et de $\vee$ est au moins égal au nombre total de lettres et de $\square$. 3. Chaque lien de $\mathfrak{A}$ (s'il en a) joint un signe ε à un signe $\square$.

Dans une construction formative $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$, tous les $\mathfrak{A}_i$ sont équilibrés. En effet, il est évident qu'une lettre constitue un assemblage équilibré. Supposons établi que tous les assemblages précédant $\mathfrak{A}_i$ sont équilibrés, et montrons que $\mathfrak{A}_i$ est équilibré. S'il existe deux assemblages $\mathfrak{A}_j$ et $\mathfrak{A}_k$ précédant $\mathfrak{A}_i$ tels que $\mathfrak{A}_i$ soit $\in \mathfrak{A}_j \mathfrak{A}_k$, on sait que $\mathfrak{A}_j$ et $\mathfrak{A}_k$ sont équilibrés. Dans l'assemblage $\mathfrak{A}_j \mathfrak{A}_k$, le nombre de lettres et de $\square$ excède de deux unités le nombre de $\in$ et de $\vee$, donc, dans $\mathfrak{A}_i$, le nombre de lettres et de $\square$ excède d'une unité le nombre de $\in$ et de $\vee$. On voit de même que, dans un segment strict de $\mathfrak{A}_i$, il y a au moins autant de $\in$ et de $\vee$ que de lettres et de $\square$; il suffit de remarquer qu'un tel segment a nécessairement l'une des formes $\in$, $\in A'_j$, $\in A_j A'_k$, où A'_j est un segment de A_j et A'_k un segment strict de A_k . Enfin, la condition relative aux liens est satisfaite. Des raisonnements analogues sont applicables si A_i est $\vee A_j A_k$, ou $\neg A_j$, ou $\varepsilon_x(A_j)$.

Nous venons donc d'obtenir une condition nécessaire pour qu'un assemblage soit un terme ou une relation. Pour trouver une condition nécessaire et suffisante, il faut étudier de plus près les assemblages équilibrés.

Soit $\mathfrak{A}$ un assemblage équilibré, et s un signe de $\mathfrak{A}$. Effaçons les signes situés à gauche de s et les liens qui aboutissent à ces signes.

Soient $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ les segments de l'assemblage obtenu, rangés par ordre de longueur croissante. On va voir qu'un de ces assemblages et un seul est équilibré. Etant donnés deux distincts de ces assemblages, l'un est un segment strict de l'autre, de sorte qu'ils ne peuvent être équilibrés tous les deux. D'autre part, comme $\mathfrak{A}$ est équilibré, le nombre de lettres et de $\square$ dans $\mathfrak{A}_n$ est strictement supérieur au nombre de ε et de $\vee$. Soit $\mathfrak{A}_\ell$ le premier des assemblages $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ dans lequel le nombre de lettres et de $\square$ est strictement supérieur au nombre de ϵ et de $\vee$: on voit aussitôt que $\mathfrak{A}_\ell$ est équilibré.

Soit encore $\mathfrak{A}$ un assemblage équilibré. Si $\mathfrak{A}$ commence par une lettre ou un $\square$, $\mathfrak{A}$ se réduit à ce signe initial. Dans tous les autres cas, nous allons définir le ou les assemblages <u>antécédents</u> à $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A}$ commence par un $\neg$, $\mathfrak{A}$ ne se réduit pas à ce signe ; effaçons-le ; l'assemblage obtenu, qui est évidemment équilibré, sera appelé l'assemblage antécédent à $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A}$ commence par un τ, $\mathfrak{A}$ ne se réduit pas à ce signe ; effaçons-le, ainsi que les liens qui y aboutissent éventuellement, et remplaçons les $\square$ qui étaient liés au τ initial de $\mathfrak{A}$ par une lettre x, distincte des autres lettres figurant dans $\mathfrak{A}$; l'assemblage $\mathfrak{A}_1$ obtenu est équilibré ; si, au lieu de x, on substitue une lettre y qui ne figure pas non plus dans $\mathfrak{A}$, on obtient un assemblage qui n'est autre $(y|x)\mathfrak{A}_1$; les assemblages construits de cette manière seront appelés les assemblages antécédents à $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A}$ commence par un ϵ (ou un $\vee$), $\mathfrak{A}$ ne se réduit pas à ce signe ; effaçons-le, et soit $\mathfrak{A}'$ l'assemblage obtenu ; soit $\mathfrak{A}_1$ le segment unique de $\mathfrak{A}'$ qui est équilibré ; $\mathfrak{A}'$ ne se réduit pas à $\mathfrak{A}_1$; soit $\mathfrak{A}_2$ l'assemblage obtenu en effacant $\mathfrak{A}_1$ dans $\mathfrak{A}'$ ainsi que les liens qui aboutissent aux signes de $\mathfrak{A}_1$; l'assemblage $\mathfrak{A}$ n'est pas nécessairement identique à $\epsilon\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ (ou $\vee\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$), mais s'obtient à partir de $\epsilon\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ (ou $\vee\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$) en liant éventuellement certains τ (resp. $\square$) de $\mathfrak{A}_1$ à certains $\square$

(resp. ε) de $\mathcal{A}_2$; on voit alors aisément que $\mathcal{A}_2$ est, comme $\mathcal{A}_1$, équilibré ; nous dirons que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont les assemblages antécédents à $\mathcal{A}$; si $\mathcal{A}$ est identique à $\in \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2$ (ou à $\vee \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2$), on dira que $\mathcal{A}$ est parfaitement équilibré.

Ceci posé, soit $\mathcal{A}$ un assemblage équilibré.

Pour que $\mathcal{A}$ soit un terme, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée : 1. $\mathcal{A}$ se réduit à une lettre. 2. $\mathcal{A}$ commence par un ε , et les assemblages antécédents sont des relations (d'après RF7 , il suffit de vérifier qu'un assemblage antécédent est une relation).

Pour que $\mathcal{A}$ soit une relation, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée : 1. $\mathcal{A}$ commence par un $\neg$, et l'assemblage antécédent est une relation. 2. $\mathcal{A}$ commence par un $\vee$, est parfaitement équilibré, et les assemblages antécédents sont des relations. 3. $\mathcal{A}$ commence par un $\in$, est parfaitement équilibré, et les assemblages antécédents sont des termes.

Les conditions sont suffisantes d'après les règles RF1 à RF4 . Montrons qu'elles sont nécessaires. Si $\mathcal{A}$ est un terme, ou bien il se réduit à une lettre, ou bien il commence par ε . Dans ce cas, la définition d'une construction formative prouve que $\mathcal{A}$ est de la forme $\varepsilon_x(\mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est une relation et x une lettre, de sorte qu'on peut prendre $\mathcal{B}$ pour assemblage antécédent à $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est une relation, on a vu que $\mathcal{A}$ commence par un $\in$, un $\vee$, ou un $\neg$. On raisonne de façon analogue dans les trois cas. Si par exemple $\mathcal{A}$ commence par $\in$, $\mathcal{A}$ est de la forme $\in \mathcal{B} \mathcal{C}$, où $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont des termes, de sorte que $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont les assemblages antécédents à $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}$ est donc parfaitement équilibré.

Lorsqu'on veut savoir si un assemblage donné $\mathcal{A}$ non réduit à un signe est une relation (resp. un terme), on vérifie d'abord que $\mathcal{A}$ est équilibré, et qu'il commence par un $\in$, un $\vee$, ou un $\neg$ (resp. un ε). On forme le ou les assemblages antécédents, et on vérifie s'il y a lieu que $\mathcal{A}$ est parfaitement équilibré. Ceci fait, on est ramené à un problème analogue, mais concernant des assemblages plus courts. De proche en proche, on est ramené à des assemblages réduits à un signe, pour lesquels la solution est immédiate.

<u>Exercices</u>.

1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des assemblages. Si $\mathcal{A}$ et $\Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$ sont des relations, $\mathcal{B}$ est une relation.

2. Soient $\mathcal{A}$ un assemblage, x une lettre. Si $\varepsilon_x(\mathcal{A})$ est un terme, $\mathcal{A}$ est une relation.

3. Soit $\mathcal{A}$ un assemblage. On appelle sous-assemblage de $\mathcal{A}$ un segment de l'assemblage obtenu en effacant les signes situés à gauche d'un signe de $\mathcal{A}$ ainsi que les liens qui y aboutissent. Etant donnés deux sous-assemblages équilibrés $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, montrer que : 1) ou bien l'un est un sous-assemblage de l'autre ; 2) ou bien $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ n'ont aucun signe en commun.

4. Soit $\mathcal{A}$ un terme ou une relation. Montrer que chaque signe $\square$, s'il y en a, est lié à un seul signe ε , situé à sa gauche. Montrer que chaque signe ε , s'il y en a, est, ou bien non lié, ou bien lié à certains signes $\square$ du sous-assemblage (cf. exerc.3) équilibré qui commence par cet ε (raisonner de proche en proche sur une construction formative).

5. Soit $\mathcal{A}$ un terme ou une relation. Montrer que chaque signe $\in$, s'il y en a , est suivi par une lettre ou un ε .

6. Soit $\mathcal{A}$ un terme ou une relation. Considérons la suite d'assemblages que voici : on écirt d'abord $\mathcal{A}$; si $\mathcal{A}$ est réduit à une lettre,

la construction est terminée. Sinon, on écrit le ou les assemblages antécédents à $\mathfrak{A}$ (si $\mathfrak{A}$ commence par un τ, on choisit arbitrairement un des assemblages antécédents). Puis on écrit, s'il y a lieu, le ou les assemblages antécédents à ceux des assemblages précédents qui ne sont pas réduits à des lettres. Etc..

a) Si on renverse l'ordre de cette suite d'assemblages, on obtient une construction formative.

b) Soit $\mathfrak{B}$ un sous-assemblage (cf. exerc.3) équilibré de $\mathfrak{A}$, tel qu'aucun signe de $\mathfrak{B}$ ne soit lié dans $\mathfrak{A}$ à un signe extérieur à $\mathfrak{B}$. Montrer que $\mathfrak{B}$ est un terme ou une relation (utiliser a) et l'exerc.3).

c) On remplace $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ par un terme (resp. une relation) si $\mathfrak{B}$ est un terme (resp. une relation). Montrer que l'assemblage obtenu est un terme si $\mathfrak{A}$ est un terme, une relation si $\mathfrak{A}$ est une relation.

7. Soient $\mathfrak{A}$ un assemblage, T un terme, x une lettre. Si $(T|x)\mathfrak{A}$ est un terme (resp. une relation), $\mathfrak{A}$ est un terme (resp. une relation). (Utiliser l'exerc.6).

8. Une relation est dite logiquement irréductible si elle commence par un $\in$. Soient $R_1, R_2, \ldots, R_n$ des relations logiquement irréductibles distinctes. On appelle construction logique de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$ toute suite $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p$ d'assemblages tels que, pour chaque $\mathfrak{A}_i$, l'une des conditions suivantes soit vérifiée : 1) $\mathfrak{A}_i$ est l'une des relations $R_1, R_2, \ldots, R_n$. 2) Il existe un assemblage $\mathfrak{A}_j$ précédant $\mathfrak{A}_i$ tel que $\mathfrak{A}_i$ soit $\neg\mathfrak{A}_j$. 3) Il existe deux assemblages $\mathfrak{A}_j$ et $\mathfrak{A}_k$ précédant $\mathfrak{A}_i$ tels que $\mathfrak{A}_i$ soit $\vee\mathfrak{A}_j\mathfrak{A}_k$.

Si, à chaque R_j, est affectée l'un des signes 0 ou 1, on affecte à chaque $\mathfrak{A}_i$ l'un des signes 0 ou 1 par la "règle" suivante :

1) Si $\mathfrak{A}_i$ est identique à R_j, on affecte à $\mathfrak{A}_i$ le même signe qu'à R_j.

2) Si $\mathfrak{A}_i$ est identique à $\neg\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{A}_j$ précédant $\mathfrak{A}_i$, on affecte à $\mathfrak{A}_i$ le signe 1 (resp.0) si $\mathfrak{A}_j$ est affecté du signe 0 (resp. 1). 3) Si $\mathfrak{A}_i$ est identique à $\vee\mathfrak{A}_j\mathfrak{A}_k$, on affecte à $\mathfrak{A}_i$ le signe 1 si $\mathfrak{A}_j$ et $\mathfrak{A}_k$ sont affectés du signe 1 , le signe 0 dans les autres cas. On traduit symboliquement cette règle de la manière suivante : $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, $\vee 11 = 1$, $\vee 10 = \vee 01 = \vee 00 = 0$.

a) Montrer que les assemblages d'une contruction logique de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont des relations. On appelle relation logiquement construite sur $R_1, R_2, \ldots, R_n$ une relation qui figure dans une construction logique de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

b) Si R et S sont logiquement construites sur $R_1, R_2, \ldots, R_n$, il en est de même de $\neg R$, $\vee RS$, $\Rightarrow RS$.

c) Affectons à chaque R_j l'un des signes 0 ou 1 . Si R est logiquement construite sur $R_1, R_2, \ldots, R_n$, le signe affecté à R ne dépend pas de la construction logique de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$ où figure R (raisonner de proche en proche sur une construction logique déterminée de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$).

d) Soient R et S deux relations logiquement construites sur $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Affectons à chaque R_j l'un des signes 0 ou 1, et supposons que le signe correspondant affecté à R et $\Rightarrow RS$ soit 0 . Alors le signe affecté à S est 0 .

e) Soit R une relation. Considérons la suite de relations que voici ; on écrit d'abord R ; si R est logiquement irréductible, la construction est terminée. Sinon, on écrit le ou les assemblages antécédents à R (qui sont des <u>relations</u> bien déterminées). Puis on écrit, s'il y a lieu, le ou les assemblages antécédents à ceux des assemblages précédents qui ne sont pas logiquement irréductibles. Etc.. Soient $R_1, R_2, \ldots, R_n$

les relations logiquement irréductibles distinctes que fournit cette construction : on les appelle les composantes logiques de $\mathcal{R}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est logiquement construite sur ses composantes logiques, mais que, si on ôte de la suite $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ certaines relations, $\mathcal{R}$ n'est pas logiquement construite sur les relations restantes.

f) Soit $\mathcal{R}$ une relation, et $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ des relations logiquement irréductibles distinctes telles que : 1) $\mathcal{R}$ est logiquement construite sur $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$. 2) Si on ôte de la suite $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ certaines relations, $\mathcal{R}$ n'est pas logiquement construite sur les relations restantes. Montrer que $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ sont les composantes logiques de $\mathcal{R}$.

§ 2. Théorèmes.

Pour faciliter l'interprétation "naïve" de ce qui suit, nous écrirons désormais, si $\mathcal{A}$ est une relation, non ($\mathcal{A}$) au lieu de $\neg \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des relations, nous écrirons ($\mathcal{A}$) ou ($\mathcal{B}$) au lieu de $\vee \mathcal{A} \mathcal{B}$, et $(\mathcal{A}) \Longrightarrow (\mathcal{B})$ au lieu de $\Longrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des termes, nous écrirons $(\mathcal{A}) \in (\mathcal{B})$ au lieu de $\in \mathcal{A}\mathcal{B}$, et $(\mathcal{A}) \notin (\mathcal{B})$ au lieu de $\notin \mathcal{A}\mathcal{B}$. Parfois, nous supprimerons les parenthèses. Le lecteur pourra décider sans peine, dans chaque cas, de quel assemblage il s'agit.

1. Axiomes.- Pour construire une théorie $\mathcal{T}$, on définit des relations privilégiées, qu'on appelle les axiomes de $\mathcal{T}$. Pour cela on écrit d'abord des relations bien déterminées ; on dit que ce sont les axiomes explicites de $\mathcal{T}$; les lettres qui figurent dans les axiomes explicites sont appelées les constantes de $\mathcal{T}$. D'autre part, on se donne un certain nombre de règles, appelées schémas, qui permettent de former, à partir de termes ou de relations indéterminées, des relations d'un type particulier ; toute relation formée par application d'un schéma est appelée axiome implicite de $\mathcal{T}$. Les schémas sont tels que, si $\mathcal{A}$ est un axiome

implicite de $\mathcal{C}$; x une lettre et T un terme, $(T|x)\mathcal{A}$ est encore un axiome implicite de $\mathcal{C}$.

Intuitivement, les axiomes représentent, soit des assertions évidentes, soit des hypothèses dont on s'apprête à tirer des conséquences (hypothèses qui, dans certains cas, s'avèrereront finalement être fausses). Les constantes représentent des objets bien déterminés, pour lesquels les propriétés exprimées par les axiomes explicites sont supposées vraies. Au contraire, si la lettre x n'est pas une constante, elle représente un objet complètement indéterminé ; si une propriété de l'objet x est supposée vraie par un axiome, cet axiome est nécessairement implicite, de sorte que la propriété est encore vraie d'un objet T quelconque.

2. Démonstrations. Une démonstration d'une théorie $\mathcal{C}$ est une suite $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de relations telles que, pour chaque relation R_i de la suite, l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

a. R_i est un axiome de $\mathcal{C}$.

b. Il y a dans la suite deux relations R_j et R_k précédant R_i telles que R_k soit $R_j \Rightarrow R_i$.

Un théorème de $\mathcal{C}$ est une relation figurant dans une démonstration de $\mathcal{C}$. Au lieu de "théorème", on dit aussi "relation vraie". Un axiome de $\mathcal{C}$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

La définition des relations vraies dans $\mathcal{C}$ traduit le sens intuitif du symbole $\Rightarrow$. En fait, dans les mathématiques courantes, on omet le plus souvent de préciser que les relations écrites constituent une démonstration, autrement dit, sont des théorèmes.

Une relation est dite fausse dans $\mathcal{C}$ si sa négation est un théorème de $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{C}$ est contradictoire s'il existe une relation qui est à la fois vraie et fausse dans $\mathcal{C}$.

Il existe des règles métamathématiques, dites règles de déduction, qui permettent de former des théorèmes sans passer par l'intermédiaire de démonstrations. Ces lettres seront désignées par la lettre R suivie d'un numéro.

R1 (*règle du syllogisme*).- *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *des relations. Si* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *sont des théorèmes d'une théorie* $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, soit $R_1, R_2, \ldots, R_n$ une démonstration de $\mathcal{T}$ où figure $\mathcal{A}$, et $S_1, S_2, \ldots, S_p$ une démonstration de $\mathcal{T}$ où figure $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Il est évident que $R_1, R_2, \ldots, R_n, S_1, S_2, \ldots, S_p$ est une démonstra-tion de $\mathcal{T}$ où figurent $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Donc $R_1, R_2, \ldots, R_n$, $S_1, S_2, \ldots, S_p$, $\mathcal{B}$ est une démonstration de $\mathcal{T}$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

3. *Substitutions dans une théorie*.- Soient $\mathcal{T}$ une théorie, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ ses axiomes explicites, x une lettre, T un terme. Soit $(T|x)\mathcal{T}$ la théorie dont les schémas sont les mêmes que ceux de $\mathcal{T}$, et dont les axiomes explicites sont $(T|x)\mathcal{A}_1, (T|x)\mathcal{A}_2, \ldots, (T|x)\mathcal{A}_n$.

R2.- *Soient* $\mathcal{A}$ *un théorème d'une théorie* $\mathcal{T}$, T *un terme* , x *une lettre. Alors*, $(T|x)\mathcal{A}$ *est un théorème de* $(T|x)\mathcal{T}$.

En effet, soit $R_1, R_2, \ldots, R_n$ une démonstration de $\mathcal{T}$ où figure $\mathcal{A}$. Considérons la suite $(T|x)R_1, (T|x)R_2, \ldots, (T|x)R_n$, qui est une suite de relations d'après RF7. On va voir que c'est une démonstration de $(T|x)\mathcal{T}$, ce qui établira la règle. Si R_k est un axiome implicite de $\mathcal{T}$, $(T|x)R_k$ est encore un axiome implicite de $\mathcal{T}$, donc de $(T|x)\mathcal{T}$. Si R_k est un axiome explicite de $\mathcal{T}$, $(T|x)R_k$ est un axiome explicite de $(T|x)\mathcal{T}$. Si R_k est précé-dée des relations R_i et R_j , R_j étant $R_i \Rightarrow R_k$, $(T|x)R_k$ est précédée de $(T|x)R_i$ et $(T|x)R_j$, et cette dernière relation est identique à $(T|x)R_i \Rightarrow (T|x)R_k$.

R3.- *Soient* $\mathcal{A}$ *un théorème d'une théorie* $\mathcal{T}$, T *un terme, et* x *une lettre qui n'est pas une constante de* $\mathcal{T}$. *Alors*, $(T|x)\mathcal{A}$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

Cela résulte aussitôt de R2, puisque x ne figure pas dans les axiomes explicites de $\mathcal{T}$.

Plus particulièrement, si $\mathcal{T}$ ne comporte pas d'axiomes explicites, ou si les axiomes explicites ne contiennent pas de lettres, la règle R3 s'applique sans restrictions sur la lettre x.

Le sens intuitif de R3 est clair étant donné le sens intuitif que nous avons attribué aux axiomes.

4. *Comparaison des théories.* Une théorie $\mathcal{T}'$ est dite *plus forte* qu'une théorie $\mathcal{T}$ si tous les axiomes de $\mathcal{T}$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}'$.

R4.- Si une théorie $\mathcal{T}'$ est plus forte qu'une théorie $\mathcal{T}$, tous les théorèmes de $\mathcal{T}$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}'$.

Soit $R_1, R_2, \dots, R_n$ une démonstration de $\mathcal{T}$. On va voir de proche en proche que chaque R_i est un théorème de $\mathcal{T}'$, ce qui établira la règle. Supposons notre assertion établie pour les relations précédant R_k et établissons-la pour R_k. Si R_k est un axiome de $\mathcal{T}$, c'est un théorème de $\mathcal{T}'$ par hypothèse. Si R_k est précédée par des relations R_i et $R_i \Rightarrow R_k$, on sait déjà que R_i et $R_i \Rightarrow R_k$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}'$, donc R_k est un théorème de $\mathcal{T}'$ d'après la règle de syllogisme.

Si chacune des deux théories $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ est plus forte que l'autre, on dit que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont équivalentes. Alors, tout théorème de $\mathcal{T}$ est un théorème de $\mathcal{T}'$ et vice-versa.

R5.- Soient $\mathcal{T}$ une théorie, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ ses axiomes explicites, $a_1, a_2, \dots, a_h$ ses constantes, $T_1, T_2, \dots, T_h$ des termes. Supposons que $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\dots(T_h|a_h)\mathcal{A}_i$ (pour $i = 1, 2, \dots, n$) soient des théorèmes d'une théorie $\mathcal{T}'$, et d'autre part que les axiomes implicites de $\mathcal{T}$ soient aussi des théorèmes de $\mathcal{T}'$. Alors, si $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\dots(T_h|a_h)\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}'$.

En effet, $\mathcal{C}'$ est plus forte que la théorie $(T_1|\alpha_1)(T_2|\alpha_2)\ldots(T_h|\alpha_h)\mathcal{C}$, et il suffit d'appliquer R2 et R4 .

Quand on déduit, par ce procédé, un théorème de $\mathcal{C}'$ d'un théorème de $\mathcal{C}$, on dit qu'on applique dans $\mathcal{C}'$ les résultats de $\mathcal{C}$. Intuitivement, les axiomes de $\mathcal{C}$ expriment des propriétés de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ et $\mathcal{A}$ exprime une propriété qui est une conséquence de ces axiomes. Si des objets $T_1, T_2, \ldots, T_h$ possèdent dans $\mathcal{C}'$ les propriétés exprimées par les axiomes de $\mathcal{C}$, il est clair qu'ils possèdent la propriété $\mathcal{A}$.

Par exemple, dans la théorie des groupes $\mathcal{C}$, les axiomes explicites contiennent deux constantes G et μ (le groupe et la loi de composition). Dans la théorie des ensembles $\mathcal{C}'$, on définit deux termes : la droite numérique et l'addition des nombres réels. Si on substitue ces termes respectivement à G et μ dans les axiomes explicites de $\mathcal{C}$, on obtient des théorèmes de $\mathcal{C}'$. D'autre part, les axiomes implicites de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont les mêmes. On peut donc "appliquer à l'addition des nombres réels les résultats de la théorie des groupes" . On dit qu'on a construit pour la théorie des groupes un <u>modèle</u> dans la théorie des ensembles. (On observera que, la théorie des groupes étant plus forte que la théorie des ensembles, on peut aussi appliquer à la théorie des groupes les résultats de la théorie des ensembles) .

Remarque.- La non-contradiction de $\mathcal{C}'$ entraîne celle de $\mathcal{C}$. Car si $\mathcal{A}$ et non $\mathcal{A}$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$, $(T_1|\alpha_1)(T_2|\alpha_2)\ldots(T_h|\alpha_h)\mathcal{A}$ et non $(T_1|\alpha_1)(T_2|\alpha_2)\ldots(T_h|\alpha_h)\mathcal{A}$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}'$.

Par exemple, si on admet que la théorie des ensembles est non contradictoire, la théorie des groupes est celle aussi non contradictoire.

__Exercice__

Soit $\mathcal{C}$ une théorie, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ ses axiomes explicites, $a_1, a_2, \ldots, a_h$ ses constantes. Soit $\mathcal{C}'$ la théorie dont les schémas sont ceux de $\mathcal{C}$, et dont les axiomes explicites sont $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}$. On dit que $\mathcal{A}_n$ est indépendant des autres axiomes de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}'$ est non équivalent à $\mathcal{C}$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\mathcal{A}_n$ ne soit pas un théorème de $\mathcal{C}'$.

Soit $\mathcal{C}''$ une théorie non contradictoire dont les schémas sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$. Soient $T_1, T_2, \ldots, T_h$ des termes tels que $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\ldots(T_h|a_h)\mathcal{A}_i$ soit un théorème de $\mathcal{C}''$ pour $i=1, 2, \ldots, n-1$, et tels que non $(T_1|a_1)(T_1|a_2)\ldots(T_h|a_h)\mathcal{A}_n$ soit un théorème de $\mathcal{C}''$. Alors, $\mathcal{A}_n$ est indépendant des autres axiomes de $\mathcal{C}$.

§ 3. Théories logiques.

1. Les axiomes.- On appelle théorie logique élémentaire la théorie $\mathcal{T}_0$ sans axiome explicite dans laquelle les axiomes implicites sont fournis par les schémas S1 à S4 ci-dessous. On appelle théorie logique toute théorie plus forte que $\mathcal{T}_0$.

S1.- Si $\mathcal{A}$ est une relation, la relation $(\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}$ est un axiome.

S2.- Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des relations, la relation $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B})$ est un axiome.

S3.- Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des relations, la relation $(\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{B}$ ou $\mathcal{A})$ est un axiome.

S4.- Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des relations, la relation $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{C}$ ou $\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{C}$ ou $\mathcal{B}))$ est un axiome.

Si R est un axiome de $\mathcal{T}_0$, x une lettre et T un terme, on vérifie bien que $(\mathrm{T}|x)\mathrm{R}$ est un axiome de $\mathcal{T}_0$. En effet, si par exemple il existe des relations $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ telles que R soit identique à $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B})$, soient $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ les relations $(\mathrm{T}|x)\mathcal{A}$ et $(\mathrm{T}|x)\mathcal{B}$. Alors $(\mathrm{T}|x)\mathrm{R}$ est identique à $\mathcal{A}' \Rightarrow (\mathcal{A}'$ ou $\mathcal{B}')$ d'après RS5 .

Pour qu'une théorie logique soit contradictoire, il faut et il suffit que toute relation y soit un théorème. La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elles est nécessaire. Soient $\mathcal{A}$ et non $\mathcal{A}$ deux théorèmes de la théorie, et $\mathcal{B}$ une relation quelconque. D'après S2 , non $\mathcal{A} \Rightarrow ((\text{non } \mathcal{A})$ ou $\mathcal{B})$ est un théorème, donc, d'après R1 , (non $\mathcal{A}$) ou $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, est un théorème. Une nouvelle application de R1 montre que $\mathcal{B}$ est un théorème.

2. Premières conséquences.- Dans tout le § , $\mathcal{T}$ désigne désormais une théorie logique quelconque.

R6.- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des relations. Si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

En effet, $(\mathcal{B} \Rightarrow C) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$ est un axiome de $\mathcal{E}$, d'après S4 où on remplace $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ par $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}$ par non $\mathcal{A}$. D'après R1, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$ est un théorème de $\mathcal{E}$. On conclut par une nouvelle application de R1.

R7.- Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des relations, $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B})$ est un théorème de $\mathcal{E}$.

En effet, $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B}$ ou $\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B}$ ou $\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B})$ sont des axiomes d'après S2 et S3. On conclut par application de R6.

R8.- Si $\mathcal{A}$ est une relation, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{E}$.

En effet, $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A})$ et $(\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}$ sont des axiomes d'après S2 et S1. On conclut par application de R6.

R9.- Si $\mathcal{A}$ est une relation, et $\mathcal{B}$ un théorème de $\mathcal{E}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{E}$.

En effet, $\mathcal{B} \Rightarrow ((\text{non } \mathcal{A})$ ou $\mathcal{B})$ est un théorème d'après R7, donc (non $\mathcal{A}$) ou $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, est un théorème d'après R1.

R10.- Si $\mathcal{A}$ est une relation, $\mathcal{A}$ ou (non $\mathcal{A}$) est un théorème de $\mathcal{E}$.

En effet, (non $\mathcal{A}$) ou $\mathcal{A}$ est un théorème d'après R8. On conclut par S3 et R1.

R11.- Si $\mathcal{A}$ est une relation, $\mathcal{A} \Rightarrow$ non non $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{E}$.

En effet, cette relation n'est autre que (non $\mathcal{A}$) ou (non non $\mathcal{A}$), et la règle résulte de R10.

R12.- Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux relations. La relation $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A}))$ est un théorème de $\mathcal{E}$.

En effet, $((\text{non } \mathcal{A})$ ou $\mathcal{B}) \Rightarrow ((\text{non } \mathcal{A})$ ou (non non $\mathcal{B}$)) est un théorème d'après R11, S4 et R1. D'autre part, ((non $\mathcal{A}$) ou (non non $\mathcal{B}$)) $\Rightarrow$ ((non non $\mathcal{B}$) ou (non $\mathcal{A}$)) est un axiome d'après S3. Donc ((non $\mathcal{A}$) ou $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ ((non non $\mathcal{B}$) ou (non $\mathcal{A}$)) est un théorème d'après R6.

Or, c'est là la relation à démontrer.

R13.- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des relations. Si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

En effet, (non $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{A}$) est un théorème d'après R12 et R1 . Donc ($\mathcal{C}$ ou (non $\mathcal{B}$)) $\Rightarrow$ ($\mathcal{C}$ ou (non $\mathcal{A}$)) est un théorème d'après S4 et R1 . Par double application de S3 et de R6 , on en conclut que ((non $\mathcal{B}$) ou $\mathcal{C}$) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{A}$) ou $\mathcal{C}$) est un théorème. Or, ceci est la relation à démontrer.

Désormais, nous emploierons les règles R1 et R6 sans nous y référer explicitement.

3. Méthodes de démonstration.- a . Méthode de l'hypothèse auxiliaire.

Elle repose sur la règle suivante :

R14.- (règle de la déduction).- Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue en adjoignant une certaine relation $\mathcal{A}$ aux axiomes de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}'$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

Soit ($\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$) une démonstration de $\mathcal{T}'$ dans laquelle figure $\mathcal{B}$. Nous allons montrer de proche en proche que les relations $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_k$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$. Supposons ceci démontré pour les relations qui précèdent $\mathcal{B}_i$, et prouvons que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{B}_i$ est un axiome de $\mathcal{T}'$, $\mathcal{B}_i$ est soit un axiome de $\mathcal{T}$, soit $\mathcal{A}$. Dans les deux cas, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$ est un théorème de $\mathcal{T}$; par application de R9 ou de R8 . Si $\mathcal{B}_i$ est précédée des relations $\mathcal{B}_j$ et $\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i$, on sait que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j$ et $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i)$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$. Alors, $(\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i)$ est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après R13. Donc $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i)$ c'est-à-dire (non $\mathcal{A}$) ou ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$) est un théorème de $\mathcal{T}$, et par suite aussi ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$) ou (non $\mathcal{A}$) d'après S3 . Or, (non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}_i$), c'est-à-dire (non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i)$ est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après S2 . Par application de S4, on voit que (($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$) ou (non $\mathcal{A}$)) $\Rightarrow$ (($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$) ou ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$))

est un théorème de $\mathcal{T}$, donc que $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i)$ ou $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i)$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Par S1, on conclut que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

En pratique, on indique qu'on va employer cette règle par une phrase du genre suivant : "Supposons que $\mathcal{A}$ soit vrai". Cette phrase signifie qu'on va raisonner pour un moment dans la théorie $\mathcal{T}'$. On reste dans $\mathcal{T}'$ jusqu'à ce qu'on y ait démontré la relation $\mathcal{B}$. Ceci fait, il est établi que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$, et on continue (s'il y a lieu) à raisonner dans $\mathcal{T}$ sans indiquer en général qu'on abandonne $\mathcal{T}'$. La relation $\mathcal{A}$ que l'on a introduite comme nouvel axiome s'appelle *l'hypothèse auxiliaire*. *Par exemple, quand on dit : "Soit x un nombre réel", on construit une théorie dans laquelle la relation "x est un nombre réel" est une hypothèse auxiliaire.

b. *Méthode de réduction à l'absurde*.- Elle repose sur la règle suivante :

R15. - *Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue en adjoignant l'axiome non $\mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est une relation, aux axiomes de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}'$ est contradictoire, $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$.*

En effet, $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}'$. Par suite (méthode de l'hypothèse auxiliaire), non $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$. D'après S4, $(\mathcal{A}$ ou (non $\mathcal{A}$)) $\Rightarrow$ ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}$) est un théorème de $\mathcal{T}$. D'après R9, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$. On conclut par application de S1 .

En pratique, on indique qu'on va employer cette règle par une phrase du genre suivant : "Supposons que $\mathcal{A}$ soit fausse". Cette phrase signifie qu'on va raisonner pour un moment dans $\mathcal{T}$. On reste dans $\mathcal{T}'$ jusqu'à ce qu'on ait établi deux théorèmes de la forme $\mathcal{B}$ et non $\mathcal{B}$. Ceci fait, il est établi que $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$, ce qu'on indique en général par une phrase du genre suivant : "Or ceci (à savoir, dans les notations précédentes, $\mathcal{B}$ et non $\mathcal{B}$) est absurde ; donc $\mathcal{A}$ est vrai ". On revient alors à la théorie $\mathcal{T}$ dont on s'occupait précédemment.

Comme premières applications de ces méthodes, démontrons les règles suivantes :

<u>R16.- Si</u> $\mathcal{A}$ <u>est une relation</u>, (non non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ <u>est un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

En effet, supposons non non $\mathcal{A}$ vraie ; il faut prouver $\mathcal{A}$. Supposons $\mathcal{A}$ fausse. Dans la théorie ainsi fondée, non non $\mathcal{A}$ et non $\mathcal{A}$ sont des théorèmes. Ceci est absurde ; donc $\mathcal{A}$ est vraie.

<u>R1 7.- Si</u> $\mathcal{A}$ <u>et</u> $\mathcal{B}$ <u>sont des relations</u>, (non $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$ non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) <u>est un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

En effet, supposons (non $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{A}$) vraie. Il faut prouver que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie. Or, supposons $\mathcal{A}$ vraie, et prouvons que $\mathcal{B}$ est vraie Supposons non $\mathcal{B}$ vraie. Alors, non $\mathcal{A}$ est vraie, ce qui est absurde.

c. <u>Méthode de disjonction des cas.</u>- Elle repose sur la règle suivante :

<u>R18.- Soient</u> $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$; C <u>des relations</u>. <u>Si</u> $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow C$, $\mathcal{B} \Rightarrow C$ <u>sont des théorèmes de</u> $\mathcal{C}$, C <u>est un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

En effet, d'après S4, ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{A}$ ou C) et (C ou $\mathcal{A}$) $\Rightarrow$ (C ou C) sont des théorèmes de $\mathcal{C}$. Compte-tenu de S3 et S1 , ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ C est un théorème de $\mathcal{C}$. D'où la règle.

Pour démontrer un théorème C , il suffit donc, quand on dispose d'un théorème $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, de démontrer C en adjoignant $\mathcal{A}$ aux axiomes de $\mathcal{C}$, puis de démontrer C en adjoignant $\mathcal{B}$ aux axiomes de $\mathcal{C}$. L'intérêt de cette méthode provient du fait que, si $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est vraie, rien ne permet d'affirmer que l'une des relations $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ soit vraie.

En particulier, d'après R10, si $\mathcal{A} \Rightarrow C$ et non $\mathcal{A} \Rightarrow C$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$, C est un théorème de $\mathcal{C}$.

d. Méthode de la constante auxiliaire.- Elle repose sur la règle suivante:

R1 9.- Soient x une lettre, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des relations telles que

α. La lettre x n'est pas une constante de $\mathcal{T}$ et n'intervient pas dans $\mathcal{B}$.

β. On connaît un terme T tel que $(T|x)\mathcal{A}$ soit un théorème de $\mathcal{T}$.

Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenu en adjoignant $\mathcal{A}$ aux axiomes de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}'$, $\mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

En effet, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$ (règle de la déduction). Puisque x n'est pas une constante de $\mathcal{T}$, $(T|x)(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ est un théorème de $\mathcal{T}$, d'après R3. Comme x n'intervient pas dans $\mathcal{B}$, cette relation est identique, d'après RS5 , à $(T|x)\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Enfin, $(T|x)\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$, donc aussi $\mathcal{B}$.

Intuitivement, la méthode consiste à utiliser, pour démontrer $\mathcal{B}$, un objet arbitraire x (la constante auxiliaire) qu'on suppose doué de certaines propriétés qui sont exprimées par $\mathcal{A}$. * Par exemple, dans une démonstration de géomètrie où il s'agit, entre autres choses, d'une droite D , on peut "prendre" un point x sur cette droite ; la relation $\mathcal{A}$ est alors $x \in D$ * . Pour qu'on puisse se servir au cours d'une démonstration d'un objet doué de certaines propriétés, il faut évidemment qu'il existe de tels objets. Le théorème $(T|x)\mathcal{A}$, a ppelé théorème de légitimation, nous garantit cette existence.

En pratique, on indique qu'on va utiliser cette méthode par une phrase du genre suivant : "Soit x un objet tel que $\mathcal{A}$ ". Le plus souvent, le fait qu'il existe de tels objets est déjà un fait bien connu de la théorie dont on s'occupe ; s'il n'en est pas ainsi, on établit un théorème de légitimation.

4. La conjonction.- Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des assemblages. L'assemblage non ((non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$)) sera désigné par $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B})$.

RS6.- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, T des assemblages, x une lettre. L'assemblage $(T|x)(\mathcal{A}$ et $\mathcal{B})$ est identique à $(T|x)\mathcal{A}$ et $(T|x)\mathcal{B}$.

Ceci résulte aussitôt de RS5.

RF8.- Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont des relations, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est une relation (appelée conjonction de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$).

Ceci résulte aussitôt de RF3 et RF4.

La définition de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est justifiée par les règles suivantes :

R20.- Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

Supposons $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ fausse, c'est-à-dire non non ((non $\mathcal{A}$)ou (non $\mathcal{B}$)) vraie. D'après R16, (non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$), c'est-à-dire $\mathcal{A} \Rightarrow$ non $\mathcal{B}$, est vraie, donc non $\mathcal{B}$ est vraie. Or, ceci est absurde. Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est vraie.

R21.- Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des relations, $(\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$, $(\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.

En effet, les relations (non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow$((non $\mathcal{A}$)ou (non $\mathcal{B}$)), (non $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$((non $\mathcal{A}$)ou (non $\mathcal{B}$)) sont des théorèmes de $\mathcal{C}$. Or, ((non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$)) $\Rightarrow$ non ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) est un théorème de $\mathcal{C}$ d'après R11 . Donc (non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow$ non ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$), (non $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ non ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) sont des théorèmes de $\mathcal{C}$. On conclut par application de R17.

On convient de désigner par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la relation $\mathcal{A}$ et ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$). Plu généralement, si on a des relations $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_h$, on désigne par $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ et ... et $\mathcal{A}_h$ une relation qui se construit de proche en proche par la convention que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ et ... $\mathcal{A}_h$ désigne la même relation que $\mathcal{A}_1$ et ($\mathcal{A}_2$ et ... et $\mathcal{A}_h$). La relation $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ et... $\mathcal{A}_h$ est un théorème de $\mathcal{C}$ si et seulement si chacune des relations $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_h$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

Il en résulte que toute théorie logique $\mathcal{C}$ est équivalente à une théorie logique $\mathcal{C}'$ possédant au plus un axiome explicite. C'est évident si $\mathcal{C}$ ne possède aucun axiome explicite. Si $\mathcal{C}$ possède les axiomes explicites $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_h$, soit $\mathcal{C}'$ la théorie qui admet les mêmes schémas que $\mathcal{C}$ et l'axiome explicite $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ et ... $\mathcal{A}_h$. On voit aussitôt que tout axiome de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) est un théorème de $\mathcal{C}'$ (resp. $\mathcal{C}$).

L'étude de toute théorie logique $\mathcal{C}$ se ramène, en principe, à l'étude de la théorie logique élémentaire $\mathcal{C}_o$: pour que la relation $\mathcal{A}$ soit un théorème de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit qu'il existe des axiomes $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ de $\mathcal{C}$ tels que ($\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ et ... $\mathcal{A}_n$)$\Rightarrow \mathcal{A}$ soit un théorème de $\mathcal{C}_o$. La condition est évidemment suffisante. Supposons d'autre part que $\mathcal{A}$ soit un théorème de $\mathcal{C}$, et soient $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ les axiomes de $\mathcal{C}$ qui figurent dans une démonstration de $\mathcal{C}$ contenant $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{C}'$ (resp. $\mathcal{C}''$) la théorie déduite de par adjonction des axiomes $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ et ... et $\mathcal{A}_n$). La démonstration de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ est une démonstration de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}'$, donc $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{C}'$ et par suite de $\mathcal{C}''$ puisque, comme on l'a vu, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont équivalentes. D'après la règle de la déduction, ($\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ et...et $\mathcal{A}_n$) $\Rightarrow \mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{C}_o$.

Si $\mathcal{C}$ est contradictoire, il existe d'après ce qui précède une conjonction $\mathcal{A}$ d'axiomes de $\mathcal{C}$ et une relation $\mathcal{R}$ telles que $\mathcal{A} \Rightarrow$ ($\mathcal{R}$ et non $\mathcal{R}$) soit un théorème de $\mathcal{C}_o$. Donc ((non $\mathcal{R}$) ou (non non $\mathcal{R}$)) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{A}$) est un théorème de $\mathcal{C}_o$, et, comme (non $\mathcal{R}$) ou (non non $\mathcal{R}$) est un théorème de $\mathcal{C}_o$, non $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{C}_o$. Réciproquement, s'il existe une conjonction $\mathcal{A}$ d'axiomes de $\mathcal{C}$ telle que non $\mathcal{A}$ soit un théorème de $\mathcal{C}_o$, $\mathcal{A}$ et non $\mathcal{A}$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$, de sorte que $\mathcal{C}$ est contra-dictoire.

NBR 045 32

5. L'équivalence.- Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des assemblages. L'assemblage $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ sera désigné par $(\mathcal{A}) \Leftrightarrow (\mathcal{B})$.

RS7.- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, T des assemblages, x une lettre. L'assemblage $(T|x)(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ est identique à $(T|x)\mathcal{A} \Leftrightarrow (T|x)\mathcal{B}$.

Ceci résulte aussitôt de RS5 et RS6.

RF9.- Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des relations, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est une relation.

Ceci résulte aussitôt de RF5 et RF8.

~~Xxxrésultexaussitôtxdexx RF5xxetxxRF8xx~~

Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$, nous dirons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes dans $\mathcal{T}$.

Il résulte des règles R20 et R21 que, pour démontrer dans $\mathcal{T}$ un théorème de la forme $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, il faut et il suffit qu'on puisse démontrer $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ dans $\mathcal{T}$. Cela se fait souvent en démontrant $\mathcal{B}$ dans la théorie déduite de $\mathcal{T}$ par adjonction de l'axiome $\mathcal{A}$, puis en démontrant $\mathcal{A}$ dans la théorie déduite de $\mathcal{T}$ par adjonction de l'axiome $\mathcal{B}$. Ces remarques permettent d'établir aussitôt les règles suivantes, dont nous laissons la démonstration au lecteur.

R22.- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des relations. Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

R23.- Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des relations équivalentes dans $\mathcal{T}$, et $\mathcal{C}$ une relation. Alors, on a dans $\mathcal{T}$ les théorèmes suivants :

$(\text{non } \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathcal{B})$; $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$; $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$;
$(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})$; $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})$.

R24.- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des relations, on a dans $\mathcal{T}$ les théorèmes suivants :

$(\text{non non } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$; $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathcal{B} \Rightarrow \text{non } \mathcal{A})$;

$(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$; $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{A})$;

$(\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C})$;

$(\text{non } (\mathcal{A} \text{ et non } \mathcal{B})) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$; $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \Leftrightarrow ((\text{non } \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B})$;

$(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \Leftrightarrow \text{non } ((\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B}))$;

$(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$; $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A})$;

$(\mathcal{A} \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C})$;

$(\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}))$;

$(\mathcal{A} \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}))$.

Les règles de ce § seront utilisées, désormais, sans référence.

Exercices

1. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des relations. Montrer que les relations suivantes sont des théorèmes de $\mathcal{T}_0$:

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$$
$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$$
$$\mathcal{A} \Rightarrow ((\text{non } \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } ((\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B})))$$
$$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \text{non } ((\text{non } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ ou } (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$$
$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})))$$
$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}))$$

2. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des relations, T un terme, x une lettre. Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$, $(T|x)\mathcal{A} \Leftrightarrow (T|x)\mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$.

3. Soit $\mathcal{A}$ une relation. Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{non } \mathcal{A}$ est un théorème d'une théorie logique $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ est contradictoire.

4. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des relations. Si $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}$ ou (non $\mathcal{C}$)) est un théorème de $\mathcal{T}_0$, ($\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$) $\Rightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$, et réciproquement.

5. Soient $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ des relations. On désigne par $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ ou... ...ou $\mathcal{A}_n$ une relation qui se construit de proche en proche par la convention que $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ ou ...ou $\mathcal{A}_h$ désigne la même relation que $\mathcal{A}_1$ ou ($\mathcal{A}_2$ ou ...ou $\mathcal{A}_h$).

a) Pour démontrer dans une théorie logique $\mathcal{T}$ la relation $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ ou...ou $\mathcal{A}_n$, il suffit de démontrer $\mathcal{A}_n$ en adjoignant les hypothèses non $\mathcal{A}_1$, non $\mathcal{A}_2, \ldots,$ non $\mathcal{A}_{n-1}$.

b) Si $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ ou...ou $\mathcal{A}_n$ est un théorème de $\mathcal{T}$, et si on veut démontrer dans $\mathcal{T}$ un théorème $\mathcal{A}$, il suffit de démontrer les théorèmes $\mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}$, ..., $\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}$.

6. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des relations. Désignons la relation (non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$) par $\mathcal{A} | \mathcal{B}$. Prouver alors dans $\mathcal{T}_0$ les théorèmes suivants :

$$(\text{non } \mathcal{A}) \Longleftrightarrow (\mathcal{A}|\mathcal{A})$$
$$(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \Longleftrightarrow ((\mathcal{A}|\mathcal{A})|(\mathcal{B}|\mathcal{B}))$$
$$(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Longleftrightarrow ((\mathcal{A}|\mathcal{B})|(\mathcal{A}|\mathcal{B}))$$
$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Longleftrightarrow (\mathcal{A}|(\mathcal{B}|\mathcal{B}))$$

7. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des relations. Si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}_0$.

8. Si $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$, et si $\mathcal{B}$ est une relation, ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) $\Longleftrightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$. Si non $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$, ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) $\Longleftrightarrow \mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$.

9. Soit $\mathcal{T}$ une théorie logique, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ ses axiomes explicites. Pour que $\mathcal{A}_n$ soit indépendant des autres axiomes de $\mathcal{T}$ (§ 2, exerc.), il faut et il suffit que la théorie dont les schémas sont ceux de $\mathcal{T}$, et les axiomes explicites, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}$, non $\mathcal{A}_n$, soit non contradictoire.

¶ 10. a) Soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ des relations logiquement irréductibles (§ 1, exerc. 8), $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ des relations logiquement construites sur $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$. Montrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$; $\mathcal{R} \Longleftrightarrow \mathcal{S}$ sont logiquement construites sur $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$.

b) Soit $\mathcal{R}$ un théorème de $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ ses composantes logiques. Montrer que, quelle que soit la manière d'affecter l'un des signes 0 ou 1 à $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$, le signe correspondant affecté à $\mathcal{R}$ est 0 (établir d'abord ceci quand $\mathcal{R}$ est un axiome de $\mathcal{C}_0$; dans le cas général, considérer une démonstration de $\mathcal{R}$, et appliquer l'exerc. 8d du § 1).

c) Soit $\mathcal{R}$ une relation logiquement irréductible. Ni $\mathcal{R}$, ni non $\mathcal{R}$ ne sont des théorèmes de $\mathcal{C}_0$. En particulier, $\mathcal{C}_0$ est non contradictoire (utiliser b).

d) Soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ des relations logiquement irréductibles distinctes. On considère toutes les relations de la forme $\mathcal{R}'_1$ ou $\mathcal{R}'_2$ ou ... ou $\mathcal{R}'_n$; où $\mathcal{R}'_i$ est, pour chaque i, soit $\mathcal{R}_i$, soit non $\mathcal{R}_i$. Soient $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_p$ ces relations. Soient $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_q$ les relations de la forme $\mathcal{S}_{i_1}$ et $\mathcal{S}_{i_2}$ et ... et $\mathcal{S}_{i_r}$, où $i_1, i_2, \ldots, i_r$ est une suite croissante quelconque d'indices. Soit enfin $\mathcal{T}_0$ la relation $\mathcal{R}_1$ ou (non $\mathcal{R}_1$), qui est un théorème de $\mathcal{C}_0$. Montrer que toute relation logiquement construite sur $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ est équivalente dans $\mathcal{C}_0$ à une et une seule des relations $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_q$. (Démontrer d'abord que $\mathcal{R}_i$ est équivalente dans $\mathcal{C}_0$ à l'une des relations $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_q$; si $\mathcal{R}$ est logiquement construite sur $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$, raisonner de proche en proche sur une construction logique de base $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ contenant $\mathcal{R}$; pour l'unicité, utiliser b).

e) Soit $\mathcal{R}$ une relation, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ ses composantes logiques. Pour que $\mathcal{R}$ soit un théorème de $\mathcal{C}_0$, il faut et il suffit que, pour toute manière d'affecter l'un des signes o ou 1 à $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$, le signe correspondant affecté à $\mathcal{R}$ soit o .

¶ 11. Soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ des relations logiquement irréductibles. Affectons à chacune des $\mathcal{R}_i$ l'un des signes o,1,2 . A toute relation d'une construction logique de base $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$, on affecte alors l'un des signes o,1,2 par la règle symbolique (cf. § 1, exerc. 8) suivante :

$$\neg o = 1 , \quad \neg 1 = o , \quad \neg 2 = 2 ;$$

$$\vee oo = \vee o1 = \vee o2 = \vee 1o = \vee 2o = \vee 22 = o , \vee 11 = 1 , \vee 12 = \vee 21 = 2 .$$

a) Si $\mathcal{R}$ est logiquement construite sur $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$, le signe ainsi affecté à $\mathcal{R}$ est indépendant de la construction logique de base $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ où figure $\mathcal{R}$.

b) Soit $\mathcal{C}$ la théorie sans axiome explicite dont les schémas sont S2, S3, S4 . Soit $\mathcal{R}$ un théorème de $\mathcal{C}$. Montrer que, quelle que soit la manière d'affecter l'un des signes o,1,2 aux composantes logiques de $\mathcal{R}$, le signe correspondant affecté à $\mathcal{R}$ est o . Par contre, si $\mathcal{S}$ est logiquement irréductible et affecté du signe 2 , le signe affecté à ($\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}$) $\Rightarrow \mathcal{S}$ est 2 . En déduire que $\mathcal{C}$ est non équivalente à $\mathcal{C}_o$.

c) Etablir un résultat analogue pour les théories basées sur les schémas S1, S3, S4, et S1, S2, S4 . [On utilisera les règles suivantes

$$\neg o=1, \neg 1=o, \neg 2=2 , \vee oo=\vee o1 = \vee 1o = \vee o2 = \vee 2o=o , \vee 11=1, \vee 12= \vee 21 =1, \vee 22 = 1 ;$$

$$\neg o=1, \neg 1=2 , \neg 2=o, \vee oo= \vee o1 = \vee 1o= \vee o2 = \vee 2o = \vee 21 =o, \vee 11= \vee 12 =1 , \vee 22 = 2].$$

d) Etablir un résultat analogue pour la théorie basée sur les schémas S1, S2, S3 . [On utilisera quatre signes 0,1,2,3, et la règle suivante :

$$\neg o = 1 , \neg 1 = 0 , \neg 2 = 3 , \neg 3 = 0 ,$$

$$\vee oo = \vee o1 = \vee 10 = \vee o2 = \vee 20 = \vee o3 = \vee 30 = \vee 23 = \vee 32 = 0 ,$$

$$\vee 11 = 1 , \vee 12 = \vee 21 = \vee 22 = 2 , \vee 13 = \vee 31 = \vee 33 = 3].$$

§ 4. Théories quantifiées.

1 . Les axiomes. Si $\mathcal{R}$ est un assemblage, et x une lettre, l'assemblage $(\varepsilon_x(\mathcal{R})|x)\mathcal{R}$ se désigne par "il existe un x tel que $\mathcal{R}$ ", ou par $(\exists x)\mathcal{R}$. L'assemblage non$(\exists x)$(non $\mathcal{R}$) se désigne par "pour tout x , $\mathcal{R}$ ", ou par $(\forall x)\mathcal{R}$. Les symboles abréviateurs $\exists$ et $\forall$ s'appellent respectivement quantificateur existentiel et quantificateur universel. La lettre x ne figure pas dans l'assemblage désigné par $\varepsilon_x(\mathcal{R})$; elle ne figure donc pas dans les assemblages désignés par $(\exists x)\mathcal{R}$ et $(\forall x)\mathcal{R}$.

RS 8.- Soient $\mathcal{R}$ un assemblage, x et x' des lettres. Si x' ne figure pas dans $\mathcal{R}$, $(\exists x)\mathcal{R}$ et $(\forall x)\mathcal{R}$ sont identiques respectivement à $(\exists x')\mathcal{R}'$ et $(\forall x')\mathcal{R}'$, où $\mathcal{R}'$ est $(x'|x)\mathcal{R}$.

En effet, $(\varepsilon_x(\mathcal{R})|x)\mathcal{R}$ est identique à $(\varepsilon_x(\mathcal{R})|x')\mathcal{R}'$ d'après RS1 , et $\varepsilon_x(\mathcal{R})$ est identique à $\varepsilon_{x'}(\mathcal{R}')$ d'après RS3 . Donc $(\exists x)\mathcal{R}$ est identique à $(\exists x')\mathcal{R}'$. Il en résulte que $(\forall x)\mathcal{R}$ est identique à $(\forall x')\mathcal{R}'$.

RS 9.- Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{U}$ des assemblages, x et y des lettres distinctes. Si x ne figure pas dans $\mathcal{U}$, $(\mathcal{U}|y)(\exists x)\mathcal{R}$ et $(\mathcal{U}|y)(\forall x)\mathcal{R}$ sont identiques respectivement à $(\exists x)\mathcal{R}'$ et $(\forall x)\mathcal{R}'$, où $\mathcal{R}'$ est $(\mathcal{U}|y)\mathcal{R}$.

En effet, $(\mathcal{U}|y)(\varepsilon_x(\mathcal{R})|x)\mathcal{R}$ est identique, d'après RS2 , à $(\mathcal{T}|x)(\mathcal{U}|y)\mathcal{R}$, où $\mathcal{T}$ est $(\mathcal{U}|y)\,\varepsilon_x(\mathcal{R})$, c'est-à-dire $\varepsilon_x(\mathcal{R}')$ d'après RS4 . D'où l'identité de $(\mathcal{U}|y)(\exists x)\mathcal{R}$ avec $(\exists x)\mathcal{R}'$, et par suite celle de $(\mathcal{U}|y)(\forall x)\mathcal{R}$ avec $(\forall x')\mathcal{R}'$.

RF10.- Si $\mathcal{R}$ est une relation et x une lettre, $(\exists x)\mathcal{R}$ et $(\forall x)\mathcal{R}$ sont des relations.

Ceci résulte aussitôt de RF2 , RF7 et RF3 .

Intuitivement, considérons $\mathcal{R}$ comme exprimant une propriété de l'objet désigné par x . D'après la signification intuitive du terme $\varepsilon_x(\mathcal{R})$, affirmer que $(\exists x)\mathcal{R}$ est vraie revient à affirmer qu'il existe un objet possédant la propriété $\mathcal{R}$. Affirmer que non $(\exists x)$ non $\mathcal{R}$ est vraie, c'est affirmer qu'il n'existe aucun objet tel que non $\mathcal{R}$, c'est donc affirmer que tout objet possède la propriété $\mathcal{R}$.

Si on dispose dans une théorie logique $\mathcal{C}$ d'un théorème de la forme $(\exists x)\mathcal{R}$, où la lettre x n'est pas une constante de $\mathcal{C}$, ce théorème peut servir de théorème de légitimation dans la méthode de la constante auxiliaire, puisqu'il est identique à $(\varepsilon_x(\mathcal{R})|x)\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{C}'$ la théorie obtenue par adjonction de $\mathcal{R}$ aux axiomes de $\mathcal{C}$. Si on peut démontrer dans $\mathcal{C}'$ une relation $\mathcal{S}$ où x ne figure pas, $\mathcal{S}$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

R25.- Soient $\mathcal{R}$ une relation et x une lettre. Les relations $(\forall x)\mathcal{R}$ et $(\varepsilon_x(\text{non } R)|x)\mathcal{R}$ sont équivalentes dans toute théorie logique $\mathcal{C}$.

En effet, $(\forall x)\mathcal{R}$ est identique à non $(\varepsilon_x(\text{non } \mathcal{R})|x)$non $\mathcal{R}$, donc à non non $(\varepsilon_x(\text{non } \mathcal{R})|x)\mathcal{R}$.

R26.- Si $\mathcal{R}$ est un théorème d'une théorie logique $\mathcal{C}$ dont la lettre x n'est pas une constante, $(\forall x)\mathcal{R}$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

En effet, $(\varepsilon_x(\text{non } \mathcal{R})|x)\mathcal{R}$ est un théorème de $\mathcal{C}$ d'après R3.

Par contre, si x est une constante de $\mathcal{C}$, la vérité de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{C}$ n'entraîne pas celle de $(\forall x)\mathcal{R}$. Intuitivement, le fait que $\mathcal{R}$ soit vraie de x qui est, dans $\mathcal{C}$, un objet déterminé, n'entraîne évidemment pas que $\mathcal{R}$ soit vraie de tout objet.

R27.- <u>Soient</u> $\mathcal{R}$ <u>une relation, et</u> x <u>une lettre. Les relations</u> non $(\forall x)\mathcal{R}$ <u>et</u> $(\exists x)$ non $\mathcal{R}$ <u>sont équivalentes dans toute théorie logique</u> $\mathcal{C}$.

En effet, non $(\forall x)\mathcal{R}$ est identique à non non $(\exists x)$ non $\mathcal{R}$.

On appelle <u>théorie quantifiée élémentaire</u> la théorie $\mathcal{C}_1$ sans axiome explicite dans laquelle les axiomes implicites sont fournis par les schémas S1 à S4 et le schéma S5 ci-dessous (dont le sens intuitif est évident). On appelle théorie quantifiée toute théorie plus forte que $\mathcal{C}_1$. Une théorie quantifiée est donc une théorie logique, et les résultats du § 3 lui sont applicables.

S5.- <u>Si</u> $\mathcal{R}$ <u>est une relation,</u> $\mathcal{T}$ <u>un terme et</u> x <u>une lettre, la relation</u> $(\mathcal{T}|x)\mathcal{R} \Rightarrow (\exists x)\mathcal{R}$ <u>est un axiome.</u>

Soient $\mathcal{U}$ un terme et y une lettre. Soit $\mathcal{A}$ un axiome de $\mathcal{C}_1$, obtenu par application de S5 : il existe une relation $\mathcal{R}$, un terme $\mathcal{T}$ et une lettre x tels que $\mathcal{A}$ soit $(\mathcal{T}|x)\mathcal{R} \Rightarrow (\exists x)\mathcal{R}$. On va voir que $(\mathcal{U}|y)\mathcal{A}$ est encore un axiome de $\mathcal{C}_1$, obtenu par application de S5 . Soit x' une lettre distincte de y et de toutes les lettres figurant dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{U}$. Soient $\mathcal{R}'$ la relation $(x'|x)\mathcal{R}$, et $\mathcal{R}''$ la relation $(\mathcal{U}|y)\mathcal{R}'$. La relation $(\mathcal{U}|y)(\mathcal{T}|x)\mathcal{R}$ est identique, d'après RS1 , à $(\mathcal{U}|y)(\mathcal{T}|x')\mathcal{R}'$, donc, d'après RS2 , à $(\mathcal{T}'|x')\mathcal{R}''$, où $\mathcal{T}'$ est $(\mathcal{U}|y)\mathcal{T}$. D'autre part, $(\exists x)\mathcal{R}$ est identique à $(\exists x')\mathcal{R}'$ d'après RS8 , et $(\mathcal{U}|y)(\exists x')\mathcal{R}'$ est identique à $(\exists x')\mathcal{R}''$ d'après RS9 . Donc $(\mathcal{U}|y)\mathcal{A}$ est identique à $(\mathcal{T}'|x')\mathcal{R}'' \Rightarrow (\exists x')\mathcal{R}''$.

2. <u>Propriétés des quantificateurs.</u>- Dans tout ce § , $\mathcal{C}$ désigne désormais une théorie quantifiée.

R28.- <u>Soient</u> $\mathcal{R}$ <u>une relation, et</u> x <u>une lettre. Les relations</u> non $(\exists x)\mathcal{R}$ <u>et</u> $(\forall x)$ non $\mathcal{R}$ <u>sont équivalentes dans</u> $\mathcal{C}$.

En effet, il suffit d'établir la règle dans la théorie $\mathcal{C}_1$, dont x n'est pas une constante. Le théorème $R \Longleftrightarrow$ non non R donne, par R3, les théorèmes $(\exists x)R \Longrightarrow (\varepsilon_x(R)|x)$ non non R et $(\exists x)$ non non $R \Longrightarrow (\varepsilon_x(\text{non non } R)|x)R$. Appliquant S5, on en déduit dans $\mathcal{C}_1$ les théorèmes $(\exists x)R \Longrightarrow (\exists x)$ non non R, et $(\exists x)$ non non $R \Longrightarrow (\exists x)R$, d'où le théorème $(\exists x)R \Longleftrightarrow (\exists x)$ non non R. Or $(\exists x)$ non non R est équivalente dans $\mathcal{C}$ à non non $(\exists x)$ non non R, c'est-à-dire à n-on $(\forall x)$ non R. D'où la règle.

Les règles R27 et R28 permettent de déduire les propriétés d'un des quantificateurs de celles de l'autre.

<u>R29</u>.- <u>Soient</u> R <u>une relation</u>, T <u>un terme</u>, x <u>une lettre</u>. <u>La relatin</u> $(\forall x)R \Longrightarrow (T|x)R$ <u>est un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

D'après S5, $(T|x)(\text{non } R) \Longrightarrow (\varepsilon_x(\text{non } R)|x)$ non R est un axiome. Cette relation est identique à non $(T|x)R \Rightarrow$ non $(\varepsilon_x(\text{non } R)||x)R$. Donc $(\varepsilon_x(\text{non } R)|x)R \Longrightarrow (T|x)R$ est un théorème de $\mathcal{C}$. On conclut par application de R25.

Soit R une relation. D'après R25, R26 et R29, il revient au même (lorsque la lettre x n'est pas une constante de $\mathcal{C}$) d'énoncer dans $\mathcal{C}$ les théorèmes R ou $(\forall x)R$, ou d'énoncer la règle métamathématique : si T est un terme, $(T|x)R$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

<u>R30</u>.- <u>Soient</u> R <u>et</u> S <u>des relations</u>, <u>et</u> x <u>une lettre qui n'est pas une constante de</u> $\mathcal{C}$. <u>Si</u> $R \Rightarrow S$ (resp. $R \Leftrightarrow S$) <u>est un théorème de</u> $\mathcal{C}$, $(\forall x)R \Longrightarrow (\forall x)S$ <u>et</u> $(\exists x)R \Longrightarrow (\exists x)S$ (resp. $(\forall x)R \Longleftrightarrow (\forall x)S$ et $(\exists x)R \Longleftrightarrow (\exists x)S$) <u>sont des théorèmes de</u> $\mathcal{C}$.

En effet, supposons que $R \Rightarrow S$ soit un théorème de $\mathcal{T}$. Adjoignons l'hypothèse $(\forall x)R$ (où x ne figure pas). Alors, R, donc, S, donc $(\forall x)S$, sont vraies. Donc $(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Il en résulte que, si $R \Leftrightarrow S$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Les règles relatives à $\exists$ s'en déduisent par emploi de R 28.

R 31.- Soient R et S des relations, et x une lettre. Les relations

$(\forall x)(R \text{ et } S) \Leftrightarrow (\forall x)R \text{ et } (\forall x)S$,

$(\exists x)(R \text{ ou } S) \Leftrightarrow (\exists x)R \text{ ou } (\exists x)S$, sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

En effet, il suffit d'établir ces règles dans $\mathcal{T}_1$ dont x n'est pas une constante. Si $(\forall x)(R \text{ et } S)$ est vraie, R et S est vraie, donc R, S, et par suite $(\forall x)R$, $(\forall x)S$ sont vraies, donc $(\forall x)R$ et $(\forall x)S$ est vraie. On voit de même que, si $(\forall x)R$ et $(\forall x)S$ est vraie, $(\forall x)(R \text{ et } S)$ est vraie. D'où le premier théorème. Le deuxième s'en déduit par emploi de R 28.

R 32.- Soient R et S des relations, et x une lettre qui ne figure pas dans R. Les relations $(\forall x)(R \text{ ou } S) \Leftrightarrow R \text{ ou } (\forall x)S$,

$(\exists x)(R \text{ et } S) \Leftrightarrow R \text{ et } (\exists x)S$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

En effet, il suffit d'établir la règle dans $\mathcal{T}_1$, dont x n'est pas une constante. Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue en adjoignant $(\forall x)(R \text{ ou } S)$ aux axiomes de $\mathcal{T}_1$. Dans $\mathcal{T}'$, R ou S, donc $(\text{non } R) \Rightarrow S$, sont des théorèmes. Si non R est vraie (hypothèse où x ne figure pas), S, donc $(\forall x)S$, sont vraies. Donc $(\text{non } R) \Rightarrow (\forall x)S$ est un théorème de $\mathcal{T}'$, et par suite $(\forall x)(R \text{ ou } S) \Rightarrow (R \text{ ou } (\forall x)S)$ est un théorème de $\mathcal{T}_1$. De même, si R ou $(\forall x)S$ est vraie, R ou S, donc $(\forall x)(R \text{ ou } S)$, sont vraies. Donc $(R \text{ ou } (\forall x)S) \Rightarrow (\forall x)(R \text{ ou } S)$ est un théorème de $\mathcal{T}_1$. La règle relative à $\exists$ s'en déduit par emploi de R 28.

 42

R 33.- Soient R une relation, x et y des lettres. Les relations $(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)R$, $(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)R$, $(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\forall y)(\exists x)R$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.

En effet, il suffit d'établir la règle dans $\mathcal{C}_1$, dont x , y ne sont pas des constantes. Si $(\forall x)(\forall y)R$ est vraie, $(\forall y)R$, donc R , donc $(\forall x)R$, donc $(\forall y)(\forall x)R$ sont vraies. De même, si $(\forall y)(\forall x)R$ est vraie, $(\forall x)(\forall y)R$ est vraie. D'où le premier théorème. Le deuxième s'en déduit par emploi de R 28 . Enfin, puisque $(\forall y)R \Rightarrow R$ est un théorème de $\mathcal{C}_1$, il en est de même de $(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\exists x)R$ d'après R 30 ; si $(\exists x)(\forall y)R$ est vraie, $(\exists x)R$ est donc vraie, et par suite aussi $(\forall y)(\exists x)R$. D'où le troisième théorème.

Par contre, si $(\forall y)(\exists x)R$ est un théorème de $\mathcal{C}$, on ne peut en conclure que $(\exists x)(\forall y)R$ est un théorème de $\mathcal{C}$. Intuitivement, dire que la relation $(\forall y)(\exists x)R$ est vraie signifie qu'étant donné un objet y quelconque, il existe un objet x tel que R soit vraie de x et de y . Mais l'objet x dépendra en général du choix de l'objet y . Au contraire, dire que $(\exists x)(\forall y)R$ est vraie signifie qu'il existe un objet fixe x tel que R soit vraie de cet objet et de tout objet y .

3. Quantificateurs typiques.- Soient $\mathfrak{A}$ et R des assemblages, et x une lettre. On désigne l'assemblage $(\exists x)(\mathfrak{A}$ et $R)$ par $(\exists_{\mathfrak{A}} x)R$, et l'assemblage non $(\exists_{\mathfrak{A}} x)$ non R par $(\forall_{\mathfrak{A}} x)R$. Les symboles abréviateurs $\exists_{\mathfrak{A}}$ et $\forall_{\mathfrak{A}}$ sont appelés quantificateurs typiques. La lettre x ne figure pas dans les assemblages désignés par $(\exists_{\mathfrak{A}} x)R$, $(\forall_{\mathfrak{A}} x)R$.

RS 10.- *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{R}$ *des assemblages*, x *et* x' *des lettres. Si* x' *ne figure ni dans* $\mathcal{R}$ *ni dans* $\mathcal{A}$, $(\exists_{\mathcal{A}} x)\mathcal{R}$ *et* $(\forall_{\mathcal{A}} x)\mathcal{R}$ *sont identiques respectivement à* $(\exists_{\mathcal{A}'} x')\mathcal{R}'$ *et* $(\forall_{\mathcal{A}'} x')\mathcal{R}'$, *où* $\mathcal{R}'$ *est* $(x'|x)\mathcal{R}$, *et où* $\mathcal{A}'$ *est* $(x'|x)\mathcal{A}$.

RS 11.- *Soient* $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{V}$ *des assemblages*, x *et* y *des lettres distinctes. Si* x *ne figure pas dans* $\mathcal{V}$, *les assemblages* $(\mathcal{V}|y)(\exists_{A} x)\mathcal{R}$ *et* $(\mathcal{V}|y)(\forall_{\mathcal{A}} x)\mathcal{R}$ *sont identiques respectivement à* $(\exists_{\mathcal{A}'} x)\mathcal{R}'$ *et* $(\forall_{\mathcal{A}'} x)\mathcal{R}'$, *où* $\mathcal{R}'$ *est* $(\mathcal{V}|y)\mathcal{R}$ *et où* A' *est* $(\mathcal{V}|y)A$.

Ces règles résultent aussitôt des règles RS 8 et RS 9.

RF 11.- *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{R}$ *des relations, et* x *une lettre. Alors*, $(\exists_{\mathcal{A}} x)\mathcal{R}$ *et* $(\forall_{\mathcal{A}} x)\mathcal{R}$ *sont des relations*.

Cela résulte aussitôt de RF 8, RF 10 et RF 3.

Intuitivement, considérons $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$, comme exprimant des propriétés de x. Il peut arriver que, dans une série de démonstrations, on ne s'intéresse qu'aux objets vérifiant $\mathcal{A}$. Dire qu'il existe un objet vérifiant $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{R}$, c'est dire qu'il existe un objet tel que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$: d'où la définition de $\exists_{\mathcal{A}}$. Dire que tous les objets vérifiant $\mathcal{A}$ sont tels que $\mathcal{R}$, c'est dire qu'il n'existe pas d'objets vérifiant $\mathcal{A}$ tels que non $\mathcal{R}$: d'où la définition de $\forall_{A}$. Dans la pratique, ces signes sont remplacés par des phrases assez diverses suivant la nature de la relation $\mathcal{A}$. * On dira par exemple : "quel que soit l'entier x, $\mathcal{R}$ ", "il existe un élément x de l'ensemble E tel que R ", etc..*

R 34.- *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{R}$ *des relations*, x *une lettre. Les relations* $(\forall_{\mathcal{A}} x)\mathcal{R}$ *et* $(\forall x)(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{R})$ *sont équivalentes dans* $\mathcal{C}$.

En effet, la relation $(\forall_{\mathcal{A}}\, x)\mathbf{R}$ est identique à non$(\exists\, x)($ $\mathcal{A}$ et non $\mathbf{R}$). Or, $\mathcal{A}$ et non $\mathbf{R}$ est équivalente dans $\mathcal{C}_1$ à non$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{R})$ d'après R 24, donc non$(\exists\, x)($ $\mathcal{A}$ et non $\mathbf{R}$) est équivalente dans $\mathcal{C}_1$ à non$(\exists\, x)$ non $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{R})$ d'après R 30, et cette dernière relation est identique à $(\forall x)(\mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{R})$. La règle est donc établie dans $\mathcal{C}_1$ et par suite dans $\mathcal{C}$.

On a souvent à démontrer des relations de la forme $(\forall_{\mathcal{A}}\, x)\mathbf{R}$ dans une théorie telle que $\mathcal{C}$. On le fait généralement en s'aidant d'une des deux règles suivantes.

R 35.- *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathbf{R}$ *des relations,* x *une lettre. Soit* $\mathcal{C}'$ *la théorie obtenue en adjoignant* $\mathcal{A}$ *aux axiomes de* $\mathcal{C}$. *Si* x *n'est pas une constante de* $\mathcal{C}$, *et si* $\mathbf{R}$ *est un théorème de* $\mathcal{C}'$, $(\forall_{A}\, x)\mathbf{R}$ *est un théorème de* $\mathcal{C}$.

En effet, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{R}$ est un théorème de $\mathcal{C}$ d'après la règle de la déduction, donc $(\forall_{\mathcal{A}}\, x)\mathbf{R}$ est un théorème de $\mathcal{C}$ d'après R 26 et R 34.

En pratique, on indique qu'on va employer cette règle par une phrase du genre suivant : "Soit x un élément générique tel que $\mathcal{A}$ ". Dans la théorie $\mathcal{C}'$ ainsi constituée, on cherche à démontrer $\mathbf{R}$.

R 36.- *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathbf{R}$ *des relations,* x *une lettre. Soit* $\mathcal{C}'$ *la théorie obtenue en adjoignant les relations* $\mathcal{A}$ *et non* $\mathbf{R}$ *aux axiomes de* $\mathcal{C}$. *Si* x *n'est pas une constante de* $\mathcal{C}$, *et si* $\mathcal{C}'$ *est contradictoire,* $(\forall_{\mathcal{A}}\, x)\mathbf{R}$ *est un théorème de* $\mathcal{C}$.

En effet, la théorie $\mathcal{C}'$ est équivalente à la théorie obtenue en adjoignant non $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{R})$ aux axiomes de $\mathcal{C}$. D'après la méthode de réduction à l'absurde, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{R}$ est un théorème de $\mathcal{C}$, donc aussi $(\forall_{\mathcal{A}}\, x)\mathbf{R}$ d'après R 26 et R 34.

En pratique, on dit : "Supposons qu'il existe un objet x vérifiant $\mathcal{A}$ pour lequel R soit fausse", et on cherche à établir une contradiction.

Les propriétés des quantificateurs typiques sont analogues à celles des quantificateurs :

R 37.- Soient $\mathcal{A}$ et R des relations, x une lettre. Les relations $\text{non}(\forall_{\mathcal{A}} x)R \Leftrightarrow (\exists_{\mathcal{A}} x)\,\text{non}\,R$, $\text{non}(\exists_{\mathcal{A}} x)R \Leftrightarrow (\forall_{\mathcal{A}} x)\text{non}\,R$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.

R 38.- Soient $\mathcal{A}$, R et S des relations, et x une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{C}$. Si la relation $\mathcal{A} \Rightarrow (R \Rightarrow S)$(resp. $\mathcal{A} \Rightarrow$ $(R \Leftrightarrow S)$)) est un théorème de $\mathcal{C}$, les relations $(\exists_{\mathcal{A}} x)R \Rightarrow (\exists_{A} x)S$, $(\forall_{\mathcal{A}} x)R \Rightarrow (\forall_{\mathcal{A}} x)S$ resp. $(\exists_{\mathcal{A}} x)R \Leftrightarrow (\exists_{\mathcal{A}} x)S$, $(\forall_{\mathcal{A}} x)R \Leftrightarrow (\forall_{\mathcal{A}} x)S$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.

R 39.- Soient $\mathcal{A}$, R et S des relations, et x une lettre. Les relations $(\forall_{\mathcal{A}} x)(R \text{ et } S) \Leftrightarrow (\forall_{\mathcal{A}} x)R$ et $(\forall_{\mathcal{A}} x)S$, $(\exists_{\mathcal{A}} x)(R \text{ ou } S) \Leftrightarrow (\exists_{\mathcal{A}} x)R$ ou $(\exists_{\mathcal{A}} x)S$, sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.

R 40.- Soient $\mathcal{A}$, R et S des relations, et x une lettre qui ne figure pas dans R . Les relations $(\forall_{\mathcal{A}} x)(R \text{ ou } S) \Leftrightarrow R$ ou $(\forall_{\mathcal{A}} x)S$, $(\exists_{\mathcal{A}} x)(R \text{ et } S) \Leftrightarrow R$ et $(\exists_{\mathcal{A}} x)S$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.

R 41.- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, R des relations, x et y des lettres. Si x ne figure pas dans $\mathcal{B}$, et si y ne figure pas dans $\mathcal{A}$, les relations $(\forall_{\mathcal{A}} x)(\forall_{\mathcal{B}} y)R \Leftrightarrow (\forall_{\mathcal{B}} y)(\forall_{\mathcal{A}} x)R$, $(\exists_{\mathcal{A}} x)(\exists_{\mathcal{B}} y)R \Leftrightarrow (\exists_{\mathcal{B}} y)(\exists_{\mathcal{A}} x)R$, $(\exists_{\mathcal{A}} x)(\forall_{\mathcal{B}} y)R \Rightarrow (\forall_{\mathcal{B}} y)(\exists_{\mathcal{A}} x)R$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.

A titre d'exemple, démontrons une partie de R 41. La relation $(\exists_{\mathcal{A}} x)(\exists_{\mathcal{B}} y)\mathcal{R}$ est identique à $(\exists x)(\mathcal{A}$ et $(\exists y)(\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}))$, donc est équivalente dans $\mathcal{C}_1$, puisque y ne figure pas dans $\mathcal{A}$, à $(\exists x)(\exists y)(\mathcal{A}$ et $(\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}))$, d'après R 32 et R 30. De même, $(\exists_{\mathcal{B}} y)(\exists_{\mathcal{A}} x)\mathcal{R}$ est équivalente à $(\exists y)(\exists x)(\mathcal{B}$ et $(\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}))$. On conclut par application de R 24, R 30 et R 33.

Exercices

$\mathcal{C}$ désigne dans tous les exercices une théorie quantifiée.

1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des relations, x une lettre ne figurant pas dans $\mathcal{A}$. Alors $(\forall x)(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Longleftrightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow (\forall x)\mathcal{B})$ est un théorème de $\mathcal{C}$.
2. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des relations, x une lettre distincte des constantes de $\mathcal{C}$ et ne figurant pas dans $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{C}$, $(\exists x)\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{C}$.
3. Soient A une relation, x et y des lettres. Les relations $(\forall x)(\forall y)\mathcal{A} \Rightarrow (\forall x)(x|y)\mathcal{A}$, $(\exists x)(x|y)\mathcal{A} \Rightarrow (\exists x)(\exists y)\mathcal{A}$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.
4. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des relations, x et y des lettres. Si x ne figure pas dans $\mathcal{B}$ et si y ne figure pas dans $\mathcal{A}$, $(\forall x)(\forall y)(\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}) \Longleftrightarrow (\forall x)\mathcal{A}$ et $(\forall y)\mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{C}$.
5. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$ des relations, x une lettre. Les relations $(\exists_A x)\mathcal{R} \Rightarrow (\exists x)$ R, $(\forall x)\mathcal{R} \Rightarrow (\forall_{\mathcal{A}} x)$R sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.
6. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$ des relations, x une lettre distincte des constantes de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{C}$, $(\exists x)\mathcal{R} \Longleftrightarrow (\exists_A x)\mathcal{R}$ est un théorème de $\mathcal{C}$. Si non $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A}$

est un théorème de $\mathcal{T}$, $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_{\mathcal{A}}\, x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$. En particulier, si $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_{\mathcal{A}}\, x)R$ et $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_{\mathcal{A}}\, x)R$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

7. Soient $\mathcal{A}$ et R des relations, T un terme, x une lettre. Si $(T|x)\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $(T|x)R \Rightarrow (\exists_{\mathcal{A}}\, x)R$ et $(\forall_{\mathcal{A}}\, x)R \Rightarrow (T|x)R$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

§ 5. <u>L'inclusion et l'égalité.</u>

1\. <u>L'inclusion.</u>- <u>Définition 1.- La relation désignée par</u> $(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in y)$, (<u>où</u> z <u>ne figure pas</u>), <u>se représente par la rotation</u> $x \subset y$ (<u>ou</u> $y \supset x$, <u>ou</u> "~~xxx~~ <u>x est contenu dans y</u> ").

Conformément aux usages signalés au § 1, n°1, cette définition entraîne la convention métamathématique suivante ; soient T et U des assemblages ; si, dans l'assemblage $x \subset y$, on substitue simultanément T à x et U à y , on obtient un assemblage qui sera désigné par $T \subset U$. Si on désigne par $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ des lettres quelconques distinctes de x et y , distinctes entre elles, ne figurant ni dans T ni dans U , l'assemblage $T \subset U$ est donc identique à $(T|\mathfrak{x})(U|\mathfrak{y})(\mathfrak{x}|x)(\mathfrak{y}|y)(x \subset y)$, donc, d'après RS8 , RS9 et RS5 , à $(\forall z)(z \in T \Rightarrow z \in U)$ si z est une lettre quelconque ni figurant ni dans T ni dans U .

Désormais, quand on posera une définition mathématique, on ne signalera plus la convention métamathématique qui en résulte.

<u>RS 12.-</u> <u>Soient</u> T , U , V <u>des assemblages</u>, <u>et</u> x <u>une lettre</u>. <u>L'assemblage</u> $(V|x)(T \subset U)$ <u>est identique à</u>

$(V|x)T \subset (V|x)U$.

Ceci résulte aussitôt de RS8 , RS9 et RS5 .

RF 12.- Si T et U sont des termes, $T \subset U$ est une relation.
Ceci résulte aussitôt de RF 7 .

Désormais, nous n'expliciterons plus les règles de substitution et les règles formatives qui devraient suivre les définitions. On notera cependant que ces règles sont souvent utilisées, implicitement, dans les démonstrations.

Pour démontrer dans une théorie quantifiée $\mathcal{C}$ la relation $x \subset y$, il suffit, d'après R 26 , de démontrer $z \in y$ dans la théorie obtenue en adjoignant $z \in x$ aux axiomes de $\mathcal{C}$, z étant une lettre distincte des constantes de $\mathcal{C}$, de x , et de y . En pratique, on dit : "soit z un élément de x " ; et on cherche à démontrer que $z \in y$.

D'où aussitôt dans $\mathcal{C}_1$ les théorèmes suivants :

Théorème 1 .- $x \subset x$.

Théorème 2 .- $(x \subset y$ et $y \subset z) \Rightarrow (x \subset z)$.

En effet, adjoignons les hypothèses $x \subset y$ et $y \subset z$, $u \in x$. Alors, $x \subset y$, $y \subset z$ sont vraies, donc $u \in x \Rightarrow u \in y$ et $u \in y \Rightarrow u \in z$ sont vraies, donc $u \in z$ est vraie.

La relation $(\forall x)(x \subset x)$ est un théorème de $\mathcal{C}_1$ d'après R 26 , et, si T est un terme, $T \subset T$ est un théorème de $\mathcal{C}_1$ d'après R3 . Il est ainsi possible de transformer la plupart des théorèmes ultérieurs en des théorèmes où ne figurent aucune lettre, ou en des règles métamathématiques. Nous ne ferons plus désormais ces transformations, mais nous les utiliserons souvent implicitement.

On remarquera que ces théorèmes et ces règles, étant valables dans $\mathcal{C}_1$, sont valables dans toute théorie quantifiée $\mathcal{C}$. Mais, dans les textes courants, on raisonne très souvent (et de facon tacite) dans des théories sans constantes (* par exemple dans la théorie des ensembles *) pour n'avoir pas à préciser que les lettres utilisées sont distinctes des constantes de la théorie.

2. <u>L'égalité</u>.- <u>Définition 2</u>.- <u>La relation désignée par</u> $x \subset y$ <u>et</u> $y \subset x$ <u>se représente par la notation</u> $x=y$.

Pour prouver dans $\mathcal{E}_1$ la relation $x=y$, il suffit de prouver que les relations $z \in x$ et $z \in y$ sont équivalentes. D'où aussitôt les théorèmes suivants :

<u>Théorème 3</u>.- <u>La relation</u> $x=x$ <u>est un théorème de</u> $\mathcal{E}_1$.

<u>Théorème 4</u>.- <u>La relation</u> $x=y \Longleftrightarrow y=x$ <u>est un théorème de</u> $\mathcal{E}_1$.

<u>Théorème 5</u>.- <u>La relation</u> $(x=y$ et $y=z) \Longrightarrow (x=z)$ <u>est un théorème de</u> $\mathcal{E}_1$.

Soit T un terme. Supposons qu'on veuille démontrer une relation R dans une théorie quantifiée $\mathcal{E}$. On peut alors introduire une constante auxiliaire α (ne figurant ni dans R , ni dans T , ni dans les axiomes explicites de $\mathcal{E}$) avec l'axiome introducteur $T = \alpha$. En effet, la relation $(T|\alpha)(T = \alpha)$, identique à $T = T$, sert de théorème de légitimation à l'introduction de α . On annonce en général l'utilisation de cette méthode par la phrase : "Posons $T = \alpha$" .

3. <u>Relations fonctionnelles</u>.- Soient R un assemblage, x une lettre. Soient y ; z des lettres distinctes entre elles et distinctes de x , ne figurant pas dans R . Soient y', z' d'autres lettres ayant les mêmes propriétés. En vertu de RS8, RS9, RS2, RS5, RS6 , les assemblages $(\forall y)(\forall z)((y|x)R$ et $(z|x)R \Rightarrow y = z)$ et $(\forall y')(\forall z')((y'|x)R$ et $(z'|x)R \Rightarrow y' = z')$ sont identiques. Si R est une relation, l'assemblage ainsi défini est une relation qui se désigne par "il existe au plus un x tel que R" ; la lettre x n'y figure pas. Si cette relation est un théorème d'une théorie $\mathcal{E}$, on dit que R est <u>univoque</u> en x dans $\mathcal{E}$. Pour prouver que R est univoque dans une théorie quantifiée $\mathcal{E}$, il suffit de prouver $y = z$ dans la théorie déduite de $\mathcal{E}$ par adjonction

des axiomes $(y|x)\mathcal{R}$ et $(z|x)\mathcal{R}$, y et z étant des lettres distinctes entre elles et distinctes de x , ne figurant ni dans $\mathcal{R}$, ni dans les axiomes explicites de $\mathcal{C}$.

R 42.- Soient $\mathcal{R}$ une relation, et x une lettre qui n'est pas une constante de la théorie quantifiée $\mathcal{C}$. Pour que $\mathcal{R}$ soit univoque en x dans $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que $\mathcal{R} \Rightarrow (x = \varepsilon_x(\mathcal{R}))$ soit un théorème de $\mathcal{C}$.

Supposons que $\mathcal{R} \Rightarrow (x = \varepsilon_x(\mathcal{R}))$ soit un théorème de $\mathcal{C}$. Soient y , z des lettres distinctes entre elles et distinctes de x , ne figurant ni dans $\mathcal{R}$, ni dans les axiomes explicites de $\mathcal{C}$. Comme x n'est pas une constante de $\mathcal{C}$, les relations $(y|x)\mathcal{R} \Rightarrow (y = \varepsilon_x(\mathcal{R}))$ et $(z|x)\mathcal{R} \Rightarrow (z = \varepsilon_x(\mathcal{R}))$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$. Adjoignons les hypothèses $(y|x)\mathcal{R}$ et $(z|x)\mathcal{R}$. Alors, $y = \varepsilon_x(\mathcal{R})$ et $z = \varepsilon_x(\mathcal{R})$ sont vraies, donc $y = z$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{R}$ est univoque en x dans $\mathcal{C}$, et prouvons que $\mathcal{R} \Rightarrow (x = \varepsilon_x(\mathcal{R}))$ est un théorème de $\mathcal{C}$. Adjoignons l'hypothèse $\mathcal{R}$. Alors, $(\varepsilon_x(\mathcal{R})|x)\mathcal{R}$ est vraie d'après S5 , donc $\mathcal{R}$ et $(\varepsilon_x(\mathcal{R})|x)\mathcal{R}$ est vraie. Or, comme $\mathcal{R}$ est univoque en x , $(\mathcal{R}$ et $(\varepsilon_x(\mathcal{R})|x)\mathcal{R}) \Rightarrow x = \varepsilon_x(\mathcal{R})$ est un théorème de $\mathcal{C}$ d'après R 29. Donc $x = \varepsilon_x(\mathcal{R})$ est vraie.

Soit $\mathcal{R}$ une relation. La relation "$(\exists x)\mathcal{R}$ et il existe au plus un x tel que $\mathcal{R}$ " se désigne par "il existe un x et un seul tel que $\mathcal{R}$". Si cette relation est un théorème de $\mathcal{C}$, on dit que $\mathcal{R}$ est fonctionnelle en x dans $\mathcal{C}$. Lorsqu'il en est ainsi, on introduit souvent un symbole abréviateur pour représenter le terme $\varepsilon_x(\mathcal{R})$ dans $\mathcal{C}$. Un tel symbole s'appelle symbole fonctionnel dans $\mathcal{C}$.

> Intuitivement, ce symbole représente l'objet unique qui possède la propriété définie par $\mathcal{R}$. * Par exemple, dans une théorie où "y est un nombre réel $\geqslant 0$" est un théorème, la relation " x est un nombre réel $\geqslant 0$ et $y = x^2$ " est fonctionnelle en x . Le symbole fonctionnel correspondant est $\sqrt{y}$ * .