RÉDACTION N° 145

COTE : **NBR 047**

TITRE : **LIVRE V : E.V.T. CHAPITRE III (ÉTAT 5)**
DUALITÉ DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : **41**

NOMBRE DE FEUILLES : **41**

N32047 145 2

Archives Janvier 1951

LIVRE V

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE III (Etat 5)

LA DUALITÉ DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Sommaire

LIVRE V

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE III (Etat 5)

LA DUALITE DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

§ 1 . Espaces d'applications linéaires continues dans un espace localement convexe .

1 . Les espaces $\mathcal{L}(E,F)$ pour F localement convexe .

On a vu (chap.I, § 3) que si ~~EX~~ E et F sont deux espaces vectoriels topologiques sur R , $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F ; $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E , la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. En outre :

PROPOSITION 1 .- Soient E un espace vectoriel topologique réel , F un espace localement convexe réel , $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E . Sur l'espace $\mathcal{L}(E,F)$, la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est une topologie localement convexe .

En effet , un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{L}(E,F)$ est formé des ensembles $\underline{T}(V,A)$, où V parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans F , A parcourt $\mathfrak{S}$, et $\underline{T}(V,A)$ est l'ensemble des applications linéaires continues u de E dans F telles que $u(A)\subset V$. Tout revient à montrer que si V est convexe dans F , $\underline{T}(V,A)$ est convexe dans $\mathcal{L}(E,F)$, ce qui est immédiat , car si $u(x)\in V$ et $v(x)\in V$ pour tout $x\in A$, on a aussi $\lambda u(x)+(1-\lambda)v(x)\in V$ pour tout $x\in A$ et pour $0<\lambda<1$.

On notera que la relation $\lambda u\in\underline{T}(V,A)$ est équivalente à $\lambda u(x)\in V$ pour tout $x\in A$; si p_V est la jauge de $\overset{\circ}{V}$, on voit que la jauge $q_{V,A}$ de l'intérieur de $\underline{T}(V,A)$ est définie par la formule

(1) $$q_{V,A}(u)=\sup_{x\in A} p_V(u(x)) .$$

Si E et F sont deux espaces normés , on retrouve ainsi en particulier la définition de la norme d'une application linéaire continue de E dans F (Top. gén.,chap.X, § 2,n°2) , qui définit sur $\mathcal{L}(E,F)$ la topologie de la co,vergence uniforme dans toutes les parties bornées de E .

Rappelons que si F est séparé , pour que la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ soit séparée , il suffit que la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ soit égale à E . Parmi les topologies satisfaisant à cette condition , la moins fine est la topologie de la co,vergence simple (correspondant au cas où $\mathfrak{S}$ est formé de toutes les parties finies de E) , la plus fine est la topologie de la convergence uniforme dans tous les ensembles bornés de E .

Remarques .- 1) Pour que la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ soit séparée , il suffit que la réunion A des ensembles de $\mathfrak{S}$ soit un ensemble total dans E . Supposons en effet cette condition vérifiée , et soit $u_0 \neq 0$ un élément de $\mathcal{L}(E,F)$; il existe alors un $x_0 \in A$ tel que $u_0(x_0) \neq 0$, et par suite un voisinage V de 0 dans F tel que $u_0(x_0) \notin V$; pour tout ensemble $B \in \mathfrak{S}$ tel que $x_0 \in B$, on aura donc $u_0 \notin \underline{T}(V,B)$. Inversement , montrons que si E est localement convexe et si $\mathcal{L}(E,F)$ est séparé pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, A est total dans E . Dans le cas contraire , le sous-espace vectoriel fermé M engendré par A serait distinct de E , et il existerait donc une forme linéaire continue $x' \neq 0$ sur E telle que $\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout $x \in A$ (chap.II, § 5,prop.4) ; si y_0 est un point quelconque ~~XO~~ $\neq 0$ dans F , et u l'application linéaire continue $x \to \langle x,x'\rangle y_0$ de E dans F , on a $u \neq 0$ et $u \in \underline{T}(V,B)$ quels que soient l'ensemble $B \in \mathfrak{S}$ et le voisinage V de 0 dans F .

2) Soit V un voisinage convexe , symétrique et fermé de 0 dans F .Soit B une partie de E , u une application linéaire continue de E dans F telle que $u(B) \subset V$; si C est ~~XXXXXXXXX~~ l'enveloppe convexe fermée de $B \cup (-B)$ dans F , il est clair qu'on a aussi $u(C) \subset V$. Il en résulte que , si $\mathfrak{S}'$ désigne l'ensemble des enveloppes convexes fermées des ensembles $B \cup (-B)$, où B parcourt $\mathfrak{S}$, les topologies $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ et $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}'}$ sur $\mathcal{L}(E.F)$ sont identiques .

2 . Complété de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$.

L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ peut être considéré comme un sous-espace de l'espace $\mathcal{H}(E,F)$ de toutes les applications linéaires de E dans F ; lorsque F est séparé et complet , et que la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ est égale à E , on sait que $\mathcal{H}(E,F)$, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, est complet (chap.I, § 3) . Le complété de $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ peut donc être identifié à un espace d'applications linéaires de E dans F ; en outre , la restriction de chacune de ces applications linéaires u à un ensemble quelconque de $\mathfrak{S}$ est continue , comme limite uniforme de fonctions continues. Montrons de plus que , pour tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$, u(A) est borné dans F . En effet , on peut supposer que les ensembles $A \in \mathfrak{S}$ sont convexes et symétriques (n°1, Remarque 2). Soit V un voisinage symétrique et convexe de O dans F ; il existe un voisinage U de O dans E tel que , pour tout point $x \in U \cap A$, on ait $u(x) \in V$. Comme A est borné , il existe $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda U$; pour tout $x \in A$, on a donc $\frac{1}{\lambda}x \in U \cap A$, d'où $u(x) \in \lambda V$ et par suite $u(A) \subset \lambda V$, ce qui prouve notre assertion .

En particulier :

THEOREME 1 .- Soient E un espace bornologique , F un espace localement convexe séparé et complet . L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est complet pour la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de E .

On sait en effet que toute application linéaire de E dans F qui transforme tout ensemble borné en ensemble borné est continue dans E (chap.II, § 4, th.2)

Pour les espaces localement convexes métrisables , on retrouve la prop.7 du chap.I, § 5 .

3 . Parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$.

Rappelons que lorsqu'on munit $\mathcal{L}(E,F)$ de la topologie de la convergence uni forme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, une partie bornée H de $\mathcal{L}(E,F)$ est caractérisée par le fait que , pour toute partie $A \in \mathfrak{S}$, la réunion H(A) des ensembles u(A) , où u parcourt H , est bornée dans F (chap.I, § 3). Lorsque $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont deux ensembles de parties bornées de E telles que $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$, tout ensemble $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ qui est borné pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}_2$ est borné pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}_1$, la réciproque n'étant pas nécessairement vraie ; en particulier , une partie de $\mathcal{L}(E,F)$ qui est bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de E , est bornée pour la topologie de la convergence simple . Rappelons enfin que toute partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$ est bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de E (et par suite aussi pour toute topologie moins fine) (chap.I, § 3).

PROPOSITION 2 .- Soient E et F deux ensembles localement convexes séparés , $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties de E convexes , symétriques , bornées et complètes . Toute partie H de $\mathcal{L}(E,F)$, bornée pour la topologie de la convergence simple , est bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$.

En effet , soit A un ensemble de $\mathfrak{S}$, V un voisinage de 0 dans F , convexe, symétrique et fermé ; tout revient à montrer que si B est l'intersection des ensembles $\overset{-1}{u}(V)$, où u parcourt H , il existe $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda B$. Or B est évidemment symétrique , convexe et fermé dans E ; si nous montrons que B engendre E , B sera un tonneau (chap.II, § 4, n°3) , et la proposition sera une conséquence du th.1 du chap.II, § 4 . Or , pour tout $x \neq 0$ dans E , l'ensemble des u(x) , où u parcourt H , est borné par hypothèse dans F ; il existe par suite $\mu > 0$ tel que $u(x) \in \mu V$ pour tout $u \in H$, ce qui signifie que $x \in \mu B$ et achève la démonstration .

En particulier :

THEOREME 2 .- Soient E et F deux espaces localement convexes séparés . Si I E est complet , toute partie de $\mathcal{L}(E,F)$, bornée pour la topologie de la convergence simple , est bornée pour la topologie de la convergence uniform dans toutes les parties bornées de E .

En effet , l'adhérence d'une partie bornée de E est alors complète .

THEOREME 3 .- Soient E un espace tonnelé (chap.II, § 4,n°3) , F un espace lo calement convexe quelconque . Toute partie H de $\mathcal{L}(E,F)$, bornée pour la to pologie de la convergence simple , est équicontinue (et par suite bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornée de E).

Il suffit de prouver que , pour tout voisinage V de 0 dans F , convexe , symétrique et fermé , il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $u(U) \subset V$, pour tout $u \in H$; cela signifie encore que l'intersection B des ensembles $\overset{-1}{u}(V)$, lorsque u parcourt H , est un voisinage de 0 dans E . Or , le raison nement de la prop.2 prouve que B est un tonneau dans E , et l'hypothèse sur E entraîne que B est un voisinage de 0 .

Lorsque E est un espace localement convexe métrisable et complet (et plus généralement lorsque E est un espace de Baire), on retrouve le th.2 du chap I, § 5 .

Lorsque E est un espace tonnelé (ou un espace localement convexe séparé et complet) , on peut parler de parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$ sans spécifier l'en semble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E qui définit la topologie de $\mathcal{L}(E,F)$ .Rap- pelons qu un filtre sur un espace vectoriel topologique est dit borné s'il existe un ensemble borné appartenant à ce filtre (ce qui entraîne l'existen ce d'une base du filtre formée d'ensembles bornés) . Le th.3 entraîne la conséquence suivante :

PROPOSITION 3 .- Soient E un espace tonnelé , F un espace localement convexe séparé , Φ un filtre borné sur $\mathcal{L}(E,F)$. Si Φ converge simplement vers une fonction u_0 , u_0 est une application linéaire continue de E dans F , et Φ converge uniformément vers u_0 dans toute partie précompacte de E . En outre , si F est complet , pour que Φ converge simplement dans E , il suffit que converge simplement dans une partie totale de E .

Cela résulte du fait qu'il existe dans Φ un ensemble H équicontinu (en vertu du th.3) , et de~~s~~ ~~XXXXX~~ la prop.5 du chap.I, § 3 .

PROPOSITION 4 .- Soient E un espace tonnelé , F un espace localement convexe séparé , Φ un filtre sur $\mathcal{L}(E,F)$ ayant une base dénombrable . Si Φ converge simplement vers une fonction u_0 , u_0 est une application linéaire continue de E dans F , et Φ converge uniformément vers u_0 dans toute partie précompacte de E .

Lorsque Φ est le filtre élémentaire associé à une suite (u_n) , la suite des $u_n(x)$ est convergente vers $u_0(x)$ ~~XXXXXXXX~~ dans F , pour tout $x \in E$; la suite (u_n) est donc bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$, et la prop.4 est alors un corollaire de la prop.3 .

Supposons maintenant que Φ soit un filtre quelconque ayant une base dénombrable (H_n) , qu'on peut supposer telle que $H_{n+1} \subset H_n$. Soit u_n un élément de H_n ; la suite (u_n) converge simplement vers u_0 , donc u_0 est une application linéaire continue de E dans F , en vertu de ce qui précède . Pour démontrer la dernière partie de la prop.4 , nous devons établir que , si K est un ensemble précompact dans E et V un voisinage de 0 dans F , on a , pour n assez grand et pour tout u H_n , $v(K) \subset V$, en posant $v=u-u_0$. Or , s'il n'en était pas ainsi , il existerait pour tout entier n une application $w_n \in H_n$ telle que $v_n(K) \not\subset V$ (avec $v_n=w_n-u_0$) ; mais cette conclusion est absurde , car la suite (w_n) converge simplement vers u_o dans E .

On se gardera de croire qu'un filtre sur $\mathcal{L}(E,F)$ ayant une base dénombrable et convergent , soit un filtre borné . Par exemple , si E est un espace de Banach , F un espace localement convexe métrisable dans lequel aucun voisinage de 0 n'est borné (chap.I, § 1,exerc.) , ~~XXXXX~~ alors $\mathcal{L}(E,F)$, muni de la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de E , est métrisable , et aucun voisinage de 0 dans $\mathcal{L}(E,F)$ n'est borné ; toutefois , le filtre des voisinages de 0 dans $\mathcal{L}(E,F)$ admet alors une base dénombrable .

§ 2 . Ensembles polaires et ensembles semi-polaires .

1 . Dual d'un espace localement convexe .

PROPOSITION 1 .- Le dual d'un espace localement convexe séparé E est sépara

Cela signifie (chap.I, § 4) que pour tout $x \neq 0$ dans E , il existe une forme linéaire continue x' sur E telle que $\langle x,x'\rangle \neq 0$. Or , comme $\{0\}$ est un sous espace vectoriel fermé de E par hypothèse , il existe un hyperplan fermé H dans E , passant par 0 et ne contenant pas x (chap.II, § 5,cor. de la prop.4 Si $\langle y,x'\rangle = 0$ est une équation de H , x' répond à la question .

La prop.1 permet d'appliquer aux espaces localement convexes séparés la th orie générale de la dualité faible développée dans l'Appendice du chap.I . Mais les propriétés des ensembles convexes , et notamment le th. de Minkows permettent d'apporter à cette dernière théorie d'importants compléments lor que le corps des scalaires est le corps des nombres réels ; nous commencero par les exposer .

2 . Ensembles semi-polaires et ensembles polaires .

Soient E et E' deux espaces vectoriels sur R en dualité faible ; nous désignerons par $\langle x,x'\rangle$ la forme bilinéaire canonique sur le produit $E \times E'$ (cha I, Appendice) : les topologies faibles $\sigma(E,E')$ et $\sigma(E',E)$ sont alors des to logies localement convexes séparées sur E et E' respectivement : en effet , $\sigma(E,E')$ par exemple est définie par les semi-normes $x \rightarrow \sup_{1\leq i\leq n} |\langle x,x'_i\rangle|$ (pour t tes les suites finies (x'_i) d'éléments de E') . Dans ce qui suit , les qualificatifs "faible" et "faiblement" s'appliqueront toujours aux notions relatives à ces topologies , lorsque ces dernières ne seront pas mentionnées explicitement .

DEFINITION 1 .- Etant donnée une partie M de E (resp. M' de E') , on appelle ensemble semi-polaire de M (resp. M') et on note $M^{\vee}$ (resp. $M'^{\vee}$) l'ensemble des $x' \in E'$ (resp. $x \in E$) tels que $\langle x,x' \rangle \leq 1$ pour tout $x \in M$ (resp. $\langle x,x' \rangle \leq 1$ pour tout $x' \in M'$).

Il est clair que l'origine de E'(resp. E)) appartient à $M^{\vee}$ (resp. $M'^{\vee}$) . En raison de la symétrie des définitions , nous nous bornerons en général dans ce qui suit à formuler les propriétés des ensembles semi-polaires pour les parties de E , laissant au lecteur le soin d'énoncer les propriétés analogues pour les parties de E' .

PROPOSITION 2 .- Si M et N sont deux parties de E telles que $M \subset N$, on a $N^{\vee} \subset M^{\vee}$.

PROPOSITION 3 .- Si (M_α) est une famille quelconque de parties de E , l'ensemble semi-polaire de l'enveloppe convexe de la réunion $\bigcup_\alpha M_\alpha$ est l'intersection des ensembles semi-polaires $M_\alpha^{\vee}$.

La proposition 2 est évidente à partir des définitions . D'autre part , si (x_i) est une famille finie de points de E , la relation $\langle x_i,x' \rangle \leq 1$ pour tout indice i entraîne $\langle \sum \lambda_i x_i , x' \rangle \leq 1$ pour toute famille de nombres réels λ_i tels que $\lambda_i \geq 0$ et $\sum \lambda_i = 1$, d'où la prop.3 .

On notera aussi que , pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble semi-polaire de λM est $\lambda^{-1} M^{\vee}$.

PROPOSITION 4 .- Pour toute partie M de E , l'ensemble semi-polaire $M^{\vee}$ est un ensemble convexe faiblement fermé dans E' .

En effet , si F_x désigne le demi-espace défini dans E' par l'inégalité $\langle x,x' \rangle \leq 1$, $M^{\vee}$ est l'intersection des demi-espaces F_x lorsque x parcourt M et les F_x sont des ensembles convexes faiblement fermés .

THEOREME 1 .- *Pour toute partie* M *de* E , *l'ensemble semi-polaire* $M^{\cup\cup}$ *de l'ensemble semi-polaire* $M^{\cup}$ *de* M , *est l'enveloppe convexe faiblement fermée de la réunion de* M *et de* $\{0\}$.

En effet , si M_1 est l'enveloppe convexe de la réunion de M et de $\{0\}$, on a $M_1^{\cup}=M^{\cup}$ d'après la prop.3 , donc on peut se borner au cas où M est convexe et contient l'origine . En vertu de la prop.4 , il est clair que l'adhérence faible $\overline{M}$ de M est contenue dans $M^{\cup\cup}$, puisque l'on a $M\subset M^{\cup\cup}$. D'autre part , si $x\notin\overline{M}$, il existe un hyperplan faiblement fermé H séparant strictement x et $\overline{M}$ (chap.II.§ 5.prop.2) ; comme H ne contient pas 0 , il exóste $x'\in E'$ tel que $\langle y,x'\rangle=1$ soit une équation de H ; comme on a $\langle y,x'\rangle\leq 1$ pour y=0 , on a aussi $\langle y,x'\rangle\leq 1$ pour tout $y\in M$, donc $x'\in M^{\cup}$; mais comme $\langle x,x'\rangle>1$, on a $x\notin M^{\cup\cup}$, ce qui achève la démonstration .

COROLLAIRE 1 .- *Pour toute partie* M *de* E , *on a* $M^{\cup\cup\cup}=M^{\cup}$.

COROLLAIRE 2 .- *Si* (M_α) *est une famille de parties de* E , *convexes , faiblement fermées et contenant* 0 , *l'ensemble semi-polaire de l'intersection* $\bigcap_\alpha M_\alpha$ *est l'enveloppe convexe faiblement fermée de la réunion des ensembles semi-polaires* $M_\alpha^{\cup}$.

En effet , en vertu de la prop.3 , l'ensemble semi-polaire de l'enveloppe convexe de $\bigcup_\alpha M_\alpha^{\cup}$ est l'intersection des ensembles $M_\alpha^{\cup\cup}$; comme l'hypothèse entraîne $M_\alpha^{\cup\cup}=M_\alpha$ pour tout α , le corollaire résulte du th.1 appliqué en échangeant les rôles de E et E' .

Remarque .- Soit C un *cône* (de sommet 0) dans E ; si x' appartient à l'ensemble semi-polaire $C^{\cup}$ de C , et si x est un point quelconque de C , on a $\langle\lambda x,x'\rangle\leq 1$ pour tout $\lambda>0$, et par suite $\langle x,x'\rangle\leq 0$; la réciproque étant immédiate , on voit que $C^{\cup}$ peut être défini comme l'ensemble des $x'\in E'$ tels que $\langle x,x'\rangle\leq 0$ pour tout $x\in C$. Il en résulte aussitôt que $C^{\cup}$ est un *cône convexe faiblement fermé* dans E' ; $C^{\cup\cup}$

est donc un cône convexe faiblement fermé , enveloppe convexe faiblement fermée de C ; on dit que $C^{\vee\vee}$ et $C^{\vee}$ sont supplémentaires .

PROPOSITION 5 .- Soit M un ensemble convexe dans E , faiblement fermé et contenant 0 . Pour que $M^{\vee}$ soit faiblement borné dans E', il faut et il suffit que 0 soit point interne de M et que M engendre E .

Si M engendre E et admet 0 comme point interne , pour tout $x\neq 0$ dans E , il existe $\alpha > 0$ tel que la relation $|\lambda| \leq \alpha$ entraîne $\lambda x \in M$; pour tout $x' \in M^{\vee}$ on a donc $\langle \lambda x, x'\rangle \leq 1$ pour $-\alpha \leq \lambda \leq \alpha$, c'est-à-dire $|\langle x,x'\rangle| \leq \frac{1}{\alpha}$, ce qui montre que $M^{\vee}$ est faiblement borné . Réciproquement , si $M^{\vee}$ est faiblement borné , pour tout $x\neq 0$ dans E , il existe $\alpha > 0$ tel que $|\langle x,x'\rangle| \leq \alpha$ pour tout $x' \in M^{\vee}$, c'est-à-dire $\langle \lambda x, x'\rangle \leq 1$ pour $|\lambda| \leq \frac{1}{\alpha}$; cela signifie que $\lambda x \in M^{\vee\vee} = M$ pour $|\lambda| \leq \alpha$, donc que M engendre E et admet 0 comme point interne

La relation entre les notions d'ensemble semi-polaire et d'ensemble polaire (chap.I, § 4) est immédiate : l'ensemble polaire M° d'un ensemble $M \subset E$ est l'ensemble semi-polaire de la réunion $M \cup (-M)$ (ou de l'enveloppe convexe de cette réunion). Les résultats précédents entraînent donc les conséquences suivantes pour les ensembles polaires :

PROPOSITION 6 .- L'ensemble polaire M° d'une partie M de E est un ensemble convexe , symétrique et faiblement fermé dans E' ; l'ensemble $M^{\circ\circ}$ est l'enveloppe convexe faiblement fermée de $M \cup (-M)$.

PROPOSITION 7 .- Pour qu'un ensemble $M \subset E$ soit un tonneau pour la topologie faible $\sigma(E,E')$, il faut et il suffit qu'il soit de la forme M'° , où M' est un ensemble faiblement borné dans E' .

3 . Topologies compatibles avec la dualité faible .

Soient E,E' deux espaces vectoriels réels en dualité faible . Nous dirons qu'une topologie localement convexe séparée $\mathcal{T}$ sur E est compatible avec la dualité faible entre E et E' si l'ensemble des formes linéaires continues sur E pour la topologie $\mathcal{T}$ est identique à l'ensemble des formes linéaires $x \to \langle x, x' \rangle$, où $x' \in E'$: en d'autres termes , cela signifie qu'on peut *identifier* E' *au dual de* E *pour la topologie* $\mathcal{T}$.

Il résulte aussitôt de cette définition que toute topologie $\mathcal{T}$ sur E compatible avec la dualité faible entre E et E' est *plus fine* que $\sigma(E,E')$. Les *hyperplans fermés* sont donc les *mêmes* pour $\mathcal{T}$ et pour $\sigma(E,E')$, et la même propriété est donc valable pour les *demi-espaces fermés* ; enfin , comme tout ensemble convexe fermé dans un espace localement convexe est intersection de demi-espaces fermés (chap.II, § 5, cor. de la prop.2) , on voit :

PROPOSITION 8 .- *Si* $\mathcal{T}$ *est une topologie compatible avec la dualité faible entre* E *et* E' , *tout ensemble convexe fermé pour* $\mathcal{T}$ *est faiblement fermé* .

On aura soin de noter que $\mathcal{T}$ peut être *distincte* de $\sigma(E,E')$ et par suite qu'il peut exister des ensembles fermés pour $\mathcal{T}$ mais non faiblement fermés . Par exemple , soit E un espace normé , E' son dual ; toute *sphère* S , d'équation $\|x\|=a$ est fermée dans E pour la topologie $\mathcal{T}$ définie par la norme , mais si ~~KX~~ E est de dimension infinie , S n'est pas faiblement fermée : en effet , quelles que soient les formes linéaires $x'_i \in E'$ en nombre fini , le sous-espace vectoriel V de E ~~XXXXXX~~ défini par les équations $\langle x, x'_i \rangle = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ n'est pas réduit à 0 , donc a une partie commune avec S , ce qui prouve que 0 est *faiblement adhérent* à S .

COROLLAIRE 1 .- *Pour toute partie convexe* A *de* E , *l'adhérence de* A *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *est identique à l'adhérence faible de* A .

En effet , l'adhérence faible A_1 de A est fermée pour $\mathcal{T}$, donc contient l'adhérence A_2 de A pour la topologie $\mathcal{T}$; mais comme A_2 est convexe (chap. II, § 1, prop.18) , A_2 est faiblement fermé en raison de la prop.8 , donc identique à A_1 .

COROLLAIRE 2 .- *Pour qu'une partie* A *de* E *soit un ensemble total pour la to* pologie $\mathcal{T}$, il faut et il suffit que , pour tout $x'\neq 0$ dans E' , il existe $x\in A$ tel que $\langle x,x'\rangle\neq 0$.

COROLLAIRE 3 .- Pour qu'une famille (x_ι) de points de E soit topologiquement libre pour la topologie $\mathcal{T}$, il faut et il suffit que , pour tout indice $\varkappa$, il existe $a'_\varkappa\in E'$ tel que $\langle x_\varkappa, a'_\varkappa\rangle\neq 0$ et $\langle x_\iota, a'_\varkappa\rangle = 0$ pour tout $\iota\neq\varkappa$.

Ces deux corollaires sont des conséquences immédiates des propriétés analogues pour la topologie faible (chap.I, § 4) et du fait que les adhérences d'un sous-espace vectoriel dans E sont les mêmes pour $\mathcal{T}$ et pour $\sigma(E,E')$ en raison du cor.1 .

COROLLAIRE 4 .- Toute semi-norme p sur E , continue pour la topologie $\mathcal{T}$, est semi-continue inférieurement pour la topologie faible .

En effet , l'ensemble des $x\in E$ tels que $p(x)\leq 1$ est convexe et fermé pour $\mathcal{T}$, donc faiblement fermé .

Les topologies compatibles avec la dualité faible sont caractérisées par le théorème suivant :

THEOREME 2 (Mackey) .- Pour qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur E soit compatible avec la dualité faible entre E et E' , il faut et il suffit que $\mathcal{T}$ soit identique à la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties convexes , symétriques et faiblement compactes de E' , de réunion E' (il est sous-entendu dans cet énoncé que E est considéré comme espace de formes linéaires sur E').

Il revient au même (chap.I, § 4) de dire que les ensembles polaires K^o des ensembles $K\in\mathfrak{S}$ engendrent un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie .

Montrons d'abord que la condition de l'énoncé est nécessaire . Supposons que E' soit le dual de E muni de $\mathcal{T}$; soit $\mathfrak{V}$ un système fondamental de voi

15

sinages convexes , symétriques et fermés (pour $\mathcal{T}$) de 0 dans E ; tout ensemble $V \in \mathfrak{V}$ est aussi faiblement fermé (prop.8) , donc $V=V^{\circ\circ}$. Mais on sait que dans E', V° est un ensemble <u>faiblement compact</u> (chap.I, § 4) ; on peut donc prendre pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties faiblement compactes V°, où V parcourt $\mathfrak{V}$, car pour tout $x' \in E'$, il existe $V \in \mathfrak{V}$ tel que $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$ pour $x \in V$, c'est-à-dire $x' \in V^{\circ}$.

Montrons maintenant que la condition de l'énoncé est <u>suffisante</u> . Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties convexes , symétriques et faiblement compactes de E' , de réunion E' ; on peut toujours supposer en outre que $\mathfrak{S}$ est filtrant (pour la relation $\subset$) ; les ensembles K° , où K parcourt $\mathfrak{S}$, forment alors un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathcal{T}$. Comme toute partie finie de E' est contenue dans un ensemble de $\mathfrak{S}$, la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie faible $\sigma(E,E')$, et par suite on peut identifier E' à un sous-espace du dual ~~XX~~ F de E pour la topologie $\mathcal{T}$. Prouvons que $F=E'$. Soit K_1 l'ensemble polaire <u>dans</u> F du voisinage K° de 0 ; en vertu du th.1 , appliqué aux espaces E,F en dualité faible , K_1 est l'adhérence de K dans F pour la topologie $\sigma(F,E)$. Mais K est faiblement compact dans E' , donc aussi dans F , puisque la topologie $\sigma(E',E)$ est induite par $\sigma(F,E)$; on a donc $K_1=K$. Comme toute forme linéaire u continue sur E (pour $\mathcal{T}$) appartient à l'homothétique d'un ensemble polaire (dans F) d'un voisinage de 0 dans E pour la topologie $\mathcal{T}$, cela achève de montrer que $F=E'$.

COROLLAIRE .- <u>Pour qu'une topologie localement convexe</u> $\mathcal{T}$ <u>sur</u> E <u>soit compatible avec la dualité faible entre</u> E <u>et</u> E' , <u>il faut et il suffit qu'elle soit plus fine que la topologie faible</u> $\sigma(E,E')$, e<u>t moins fine que la topologie</u> $\tau(E,E')$ <u>de la convergence uniforme dans toutes les parties convexes , symétriques et faiblement compactes de</u> E' .

La condition est évidemment nécessaire en vertu du th.2 . Elle est suffi-

16

sante , car si $\mathcal{T}$ est plus fine que XXXXXXX $\sigma(E,E')$ le dual de E pour la topologie $\mathcal{T}$ contient E' ; et de même , si $\mathcal{T}$ est moins fine que $\tau(E,E')$ le dual de E pour la topologie $\mathcal{T}$ est contenu dans le dual de E pour la topologie $\tau(E,E')$, qui est encore E' ; d'où le corollaire .

Remarques .- 1) Il peut se faire que l'on ait $\tau(E,E')=\sigma(E,E')$ (exerc. 11) ; mais en général $\tau(E,E')$ sera strictement plus fine que $\sigma(E,E')$ (cf. remarque suivant la prop. 8).

2

2) La topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties faiblement compactes de E' peut être strictement plus fine que la topologie $\tau(E,E')$ (exerc. 11) ; ces deux topologies sont identiques lorsque dans E' l'enveloppe convexe faiblement fermée de toute partie faiblement compacte est faiblement compacte .

THEOREME 3 (Mackey) .- Tout ensemble faiblement borné dans E est borné pour toute topologie $\mathcal{T}$ compatible avec la dualité faible entre E et E' .

En effet , tout ensemble faiblement compact dans E' est borné et complet pour la topologie faible $\sigma(E',E)$; il suffit donc d'appliquer à E (considéré comme dual de E') la prop. 2 du § 1 , en tenant compte de la caractérisation de la topologie $\mathcal{T}$ donnée dans le th. 2 .

4 . Application aux espaces tonnelés et aux espaces bornologiques .

PROPOSITION 9 .- Si E est un espace localement convexe séparé , tonnelé ou bornologique , de topologie $\mathcal{T}$, et si E' est le dual de E , la topologie $\mathcal{T}$ est identique à $\tau(E,E')$.

La proposition est immédiate lorsque E est tonnelé : en effet , si K est un ensemble faiblement compact dans E' , K est faiblement borné , donc (prop. 7) , K° est un tonneau dans E pour la topologie faible $\sigma(E,E')$, et a fortiori pour la topologie plus fine $\mathcal{T}$; mais par définition , tout tonneau dans E est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$, ce qui montre que $\mathcal{T}$ est plus fine que $\tau(E,E')$; mais $\mathcal{T}$ est moins fine que $\tau(E,E')$ en vertu du cor. d th.2 , d'où la proposition dans ce cas .

Supposons maintenant que E soit bornologique , et soit K un ensemble convexe , symétrique et faiblement compact dans E' . Pour montrer que K^o est un voisinage de O pour $\mathcal{T}$, il suffit de prouver que , si B est un ensemble borné quelconque pour $\mathcal{T}$, il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda K^o$. Cela résultera évidemment de la relation $K \subset \lambda B^o$; or B est faiblement borné dans E , donc (prop.7) B^o est un tonneau dans E' pour la topologie $\sigma(E',E)$; l'existence de résulte donc du th.1 du chap.II, § 4, appliqué à E' .

COROLLAIRE .- *Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies compatibles avec la structure d'un espace vectoriel E , et telles que pour chacune de ces topologies , E soit bornologique ou tonnelé . Alors , si le dual de E est le même pour $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, on a $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

La prop 7 et la prop.9 donnent aussitôt une autre caractérisation des espaces tonnelés :

PROPOSITION 10 .- *Pour qu'un espace localement convexe séparé E soit un espace tonnelé , il faut et il suffit que dans le dual E' de E , tout ensemble faiblement borné soit équicontinu .*

Il revient au même de dire que , *dans E' , tout ensemble faiblement borné est ~~XX~~ relativement faiblement compact , et que la topologie de E est identique à $\tau(E,E')$* .

Soient E,E' et F,F' deux couples d'espaces en dualité faible , et désignons par $\mathcal{L}(E,F')$ l'espace des applications linéaires de E dans F' , continues pour les topologies faibles $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F',F)$ (espace algébriquement isomorphe de façon canonique à l'espace des formes bilinéaires séparément continues sur $E \times F$). On sait que $\mathcal{L}(E,F')$ et le produit tensoriel $E \otimes F$ sont mis en dualité faible par la forme bilinéaire $\langle x \otimes y, u \rangle = \langle y, u(x) \rangle$ (chap.I). Cela étant , on a la proposition suivante :

PROPOSITION 11 .- <u>Si les espaces</u> E <u>et</u> F <u>sont tonnelés pour les topologies</u> $\tau(E,E')$ <u>et</u> $\tau(F,F')$, <u>l'espace</u> $E\otimes F$ <u>est tonnelé pour la topologie</u> $\tau(E\otimes F, \mathcal{L}(E,F'))$.

Tout revient , en vertu de la prop.10 , à montrer que, dans $\mathcal{L}(E,F')$, tout ensemble faiblement borné H est relativement faiblement compact . Soit Φ un ultrafiltre sur H ; par hypothèse , pour tout $x\in E$ et tout $y\in F$, l'ensemble des nombres $\langle y,u(x)\rangle$ est borné lorsque u parcourt H ; cela signifie que l'ensemble H(x) des u(x) est faiblement borné dans F' , et par suite faiblement relativement compact dans F' . La base d'ultrafiltre $\Phi(x)$ formée des H(x) est donc <u>faiblement convergente</u> dans F' vers un élément $u_o(x)$. Il est clair que u_o est une application linéaire de E dans F' ; il reste à prouver que u_o est continue pour les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F',F)$. Il suffit de montrer que , pour tout $y\in F$, la forme linéaire $x\to\langle y,u_o(x)\rangle$ est continue dans E . Or , on a $\langle y,u_o(x)\rangle=\lim_{\Phi}\langle y,u(x)\rangle=\lim_{\Phi}\langle {}^tu(y),x\rangle$. Mais par hypothèse , pour tout $y\in F$, l'ensemble des ${}^tu(y)$ est faiblement borné dans E' , donc faiblement relativement compact dans E' ; il en résulte bien que la base d'ultrafiltre ${}^tH(y)$ converge faiblement vers un élément de E', autrement dit , que $x\to\langle y,u_o(x)\rangle$ est continue . Nous voyons donc que , dans $\mathcal{L}(E,F')$, Φ converge faiblement vers u_o , ce qui établit la proposition .

<u>Remarque</u> .- Si E et F sont des espaces <u>métrisables et complets</u> pour les topologies $\tau(E,E')$ et $\tau(F,F')$, l'espace $E\otimes F$ est <u>métrisable</u> pour la topologie $\tau(E\otimes F, \mathcal{L}(E,F'))$. Il suffit en effet de montrer qu'il existe dans $\mathcal{L}(E,F')$ un système fondamental <u>dénombrable</u> de parties bornées . Or , soit (U_m) (resp. (V_n)) un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans E (resp. F) . Soit H une partie bornée de $\mathcal{L}(E,F')$; pour tout couple $(x,y)\in E\times F$, l'ensemble des ~~XXXXXX~~ $\langle y,u(x)\rangle$, où u parcourt H , est borné . Or , chaque application bilinéaire $(x,y)\to\langle y,u(x)\rangle$ est <u>continue</u> dans $E\times F$ (chap.I, § 5, th.3) ; comme $E\times F$ est métrisable et complet , le th. de Baire prouve qu'il exis-

te un point $(x_0,y_0)\in E\times F$ et deux indices m,n tels que l'ensemble des fonctions $(x,y)\to\langle y,u(x)\rangle$ soit uniformément borné dans $(x_0+U_m)\times(y_0+$
On en déduit que H est contenu dans l'ensemble H_{mnp} des $u\in\mathcal{L}(E,F')$ satisfaisant à $|\langle y,u(x)\rangle|\leq p$ pour $x\in U_m$ et $y\in V_n$ et pour un entier p assez grand. Ces ensembles forment par suite un ensemble fondamental de parties bornées de $\mathcal{L}(E,F')$.

§ 3. Dual fort et bidual d'un espace localement convexe.

1. Topologies sur le dual d'un espace localement convexe.

Soient E un espace localement convexe séparé, E' son dual ; comme E' n'est autre que l'espace $\mathcal{L}(E,R)$, on peut lui appliquer les résultats du § 1 ; pour tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E, de réunion E, la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est une topologie localement convexe sur E' (§ 1, prop. 1). Un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie est formé des homothétiques des ensembles polaires B^o des ensembles $B\in\mathfrak{S}$ (chap. I, § 4). On peut encore dire qu'elle est définie par les semi-normes

(1) $$|x'|_B=\sup_{x\in B}|\langle x,x'\rangle|$$

où B parcourt l'ensemble $\mathfrak{S}$.

On remarquera qu'on ne change pas la topologie précédente en remplaçant par l'ensemble des parties B^{oo}, où B parcourt $\mathfrak{S}$, puisque B^o est l'ensemble polaire de B^{oo}. On peut donc toujours supposer que les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont convexes, fermés et symétriques (cf. § 1, n°1, remarque 2).

Les plus importantes des topologies que l'on peut ainsi définir sur E' correspondent aux cas suivants :

1° $\mathfrak{S}$ se compose des parties finies de E ; la topologie correspondante est alors la topologie faible $\sigma(E',E)$ sur E' (chap. I, § 4).

2° $\mathfrak{S}$ se compose des parties relativement compactes de E (pour la topologie donnée sur cet espace) ; la topologie correspondante sur E' est donc la

NBR 047

20

topologie de la convergence compacte (Top.gén.,chap.X, § 1) .

3° $\mathfrak{S}$ est formé des parties convexes et faiblement compactes de E , qui sont bornées dans E en raison du th.3 du § 2 ; la topologie correspondante sur E' n'est autre que la topologie $\tau(E',E)$ définie au § 2,n°3 .

4° $\mathfrak{S}$ se compose de toutes les parties bornées ; la topologie correspondante est évidemment la plus fine de toutes les topologies considérées sur E' ; nous la désignerons par la notation $\beta(E',E)$, et nous l'appellerons topologie forte sur E' . L'espace vectoriel E' , muni de cette topologie , sera dit le dual fort de E . Pour qu'il soit métrisable , il faut et il suffit qu'il existe dans E un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés . En particulier , lorsque E est un espace normé , la topologie forte sur son dual E' est définie par la norme

(2) $$\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x,x'\rangle| ;$$

quand on parle du dual fort d'un espace normé comme d'un espace normé , il est toujours sous-entendu que c'est de la norme définie par la relation (2) qu'il est question , sauf mention expresse du contraire . On a donc dans ce cas

(3) $$|\langle x,x'\rangle| \leq \|x\| \cdot \|x'\|$$

quels que soient x,x' dans E,E' respectivement , ce qui prouve que la forme bilinéaire $(x,x') \rightarrow \langle x,x'\rangle$ est continue dans le produit $E \times E'$ des espaces normés E et E' .

Remarques .- 1) Lorsque la topologie de E ne peut être définie par une norme , on peut montrer que la forme bilinéaire canonique $(x,x') \rightarrow \langle x,x'\rangle$ n'est pas continue dans $E \times E'$ lorsqu'on munit E' de la topologie forte (exerc.1) ; on peut seulement dire qu'elle est séparément continue relativement à l'ensemble des parties bornées de E et à l'ensemble des parties équicontinues de E' (chap.I § 4,prop.8).

2) La notation $\beta(E',E)$ se justifie par le fait que les parties bor-

nées de E ne dépendent que du dual de E , et non de la topologie sur E , compatible avec la dualité faible entre E et E' (§ 2,th.3) .

3) La formule (1) montre que toute semi-norme $|x'|_B$ continue pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, est semi-continue inférieurement pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, étant l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues pour cette topologie .

2 . Complétion du dual d'un espace localement convexe .

Soit E un espace localement convexe séparé , $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E , de réunion E , et munissons le dual E' de E de la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$; nous pouvons toujours supposer que ces derniers sont convexes , symétriques et fermés (n°1) .

THÉORÈME 1 (Grothendieck) .- Le complété de l'espace E' muni de la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ est identique à l'espace $E'_{\mathfrak{S}}$ des formes linéaires sur E dont la restriction à chaque ensemble de $\mathfrak{S}$ est faiblement continue .

Comme toute forme linéaire $x' \in E'$ est faiblement continue dans E , les résultats du § 1,n°2 montrent d'abord que le complété de E' est un sous-espace de $E'_{\mathfrak{S}}$. Tout revient donc à démontrer que tout élément $u \in E'_{\mathfrak{S}}$ est adhérent à E' pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$. En d'autres termes , pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$, il nous faut montrer qu'il existe $v \in E'$ telle que $|u(x)-v(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in A$. Par hypothèse , la restriction de u à A est faiblement continue ; il existe donc un voisinage faible V de 0 dans E , convexe , symétrique et fermé , tel que $|u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ pour tout $x \in A \cap V$. Comme A est borné , il est faiblement précompact (chap.I,§) , et par suite il existe un nombre fini de points $a_i \in A$ tels que A soit contenu dans la réunion des ensembles a_i+V . Nous allons imposer à la forme v la condition $v(a_i)=u(a_i)$ pour tout indice i ; alors , pour tout $x \in A$, il existe un indice i tel que $x-a_i \in V$, et on peut écrire $u(x)-v(x)=u(x-a_i)-v(x-a_i)$; comme $x-a_i \in (2A) \cap V \subset 2(A \cap V)$, on a $|u(x-a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; en posant $B=A \cap V$, on voit que le théorème sera démontré si on prouve qu'on peut choisir v telle que $|v(z)| < \frac{\varepsilon}{4}$ pour tout $z \in B$.

Désignons par M le sous-espace vectoriel de E , de dimension finie, engendré par les a_i , et par u_0 la restriction de u à M . On est ramené au problème suivant : la forme linéaire u_0 étant supposée telle que $|u_0(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ pour $x \in B \cap M$, la prolonger en une forme linéaire continue v sur E telle que $|v(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ pour $x \in B$. Si H_0 est la variété linéaire dans M , définie par l'équation $u_0(x)= \frac{\varepsilon}{4}$, la condition (compte tenu de ce que B est symétrique) revient à la suivante : trouver un hyperplan fermé H contenant H_0 et ne rencontrant pas B ; si $v(x)= \frac{\varepsilon}{4}$ est une équation de cet hyperplan , v répondra à la question .

Or , soit $\hat{E}$ le complété de E , lorsqu'on munit E de la topologie faible $\sigma(E,E')$; comme H_0 est de dimension finie , il est identique à son adhérence dans $\hat{E}$ (chap.I, § 2) ; l'adhérence $\bar{B}$ de B dans $\hat{E}$ est un ensemble compact , et on a $H_0 \cap \bar{B}=\emptyset$, car un point commun à H_0 et $\bar{B}$ appartiendrait à M , donc à $H_0 \cap B$, puisque B est fermé dans E ; et on sait que $H_0 \cap B=\emptyset$. Il existe alors dans $\hat{E}$ un voisinage ouvert convexe U de $\bar{B}$ qui ne rencontre pas H_0 (Top.gén.,chap.II, § 4,prop.1) ; le th. de Minkowski montre donc qu'il existe dans $\hat{E}$ un hyperplan fermé H_1 contenant H_0 et ne rencontrant pas U ; la trace $H=H_1 \cap E$ répond à la question , ce qui achève la démonstration .

COROLLAIRE 1 .- Soient E,E' deux espaces en dualité faible . Lorsqu'on munit E' de la topologie faible $\sigma(E',E)$, le complété de E' est le dual algébrique E^* de E .

COROLLAIRE 2 .- Le dual fort d'un espace bornologique est complet .

En effet , tout revient à prouver que si E est un espace bornologique , toute forme linéaire u sur E dont la restriction à toute partie bornée de E est faiblement continue , appartient au dual E' de E . Or , il résulte de l'hypothèse que u est <u>bornée</u> dans toute partie bornée , convexe et symétrique A de E : car il existe un voisinage faible V de 0 tel que $|u(x)| \leq 1$ pour $x \in A \cap V$, et d'autre part il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda A \subset V$, donc (puisqu'on peut supposer $\lambda < 1$) , $\lambda A \subset A \cap V$, ce qui entraîne $|u(x)| \leq \frac{1}{\lambda}$ pour $x \in A$. Comme E est supposé bornologique, u est continue dans E (chap.II, § 4

En particulier , le dual fort d'un espace localement convexe <u>métrisable</u> est complet : plus particulièrement , le dual fort E' d'un <u>espace normé</u> E muni de la norme définie par (2) , est un <u>espace de Banach</u> .

COROLLAIRE 3 .- <u>Soient</u> E,E' <u>deux espaces en dualité faible</u> , $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties bornées de</u> E ~~XXXX~~ <u>tel que</u> E' <u>soit complet pour la topologie</u> $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$: <u>alors , pour tout ensemble</u> $\mathfrak{S}'$ <u>de parties bornées de</u> E <u>contenant</u> $\mathfrak{S}$, E' <u>est complet pour la topologie</u> $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}'}$.

En effet , toute forme linéaire sur E dont la restriction à tout ensemble de $\mathfrak{S}$ est faiblement continue , appartient alors à E' ; il en est ainsi a fortiori de toute forme linéaire dont la restriction à tout ensemble de $\mathfrak{S}'$ est faiblement continue .

3 . <u>Parties bornées du dual fort</u> .

Soit E un espace localement convexe séparé , $\mathcal{T}$ sa topologie , E' son dual. Il y a lieu de distinguer dans E' les quatre catégories d'ensembles suivantes :

1° Les ensembles <u>équicontinus</u> (pour $\mathcal{T}$) : un tel ensemble est contenu dans l'ensemble polaire U° d'un voisinage de 0 (pour $\mathcal{T}$) dans E ; les polaires des parties équicontinues de E' forment donc un système fondamental de voisinages de 0 dans E (§ 2, th.1) .

2° Les ensembles <u>convexes relativement faiblement compacts</u> : ce sont les ensembles convexes dont chacun est contenu dans l'ensemble polaire V^o d'un voisinage de 0 dans E pour la topologie $\tau(E,E')$ (§ 2,th.2) ; les ensemble polaires de ces ensembles forment donc un système fondamental de voisinages de 0 dans E pour $\tau(E,E')$.

3° Les ensembles fortement bornés : un tel ensemble H' est caractérisé par le fait que , pour toute partie bornée B de E , la borne supérieure de $|\langle x,x'\rangle|$ est finie lorsque x parcourt B et x' parcourt H' . On peut encore dire qu'un ensemble fortement borné est un ensemble contenu dans l'ensemble polaire W^o d'un tonneau $W\subset E$ ayant la propriété que , pour tout ensemble B borné dans E , il existe $\lambda>0$ tel que $\lambda B\subset W$.

4° Les ensembles faiblement bornés : un tel ensemble H' est caractérisé par le fait que pour tout $x\in E$, la borne supérieure de $|\langle x,x'\rangle|$ lorsque x' parcourt H' est finie . On sait qu'on peut encore dire qu'un ensemble faiblement borné est un ensemble contenu dans l'ensemble polaire T^o d'un tonneau quelconque T dans E (§ 2,prop.7).

On notera que les trois dernières de ces catégories d'ensembles ne dépendent pas de la topologie $\mathcal{T}$, mais seulement du couple d'espaces E,E' en dualité faible .

Lorsqu'un ensemble A' appartient à une de ces quatre catégories , il en est de même de son enveloppe convexe faiblement fermée C' puisque , si A' est contenu dans l'ensemble polaire d'un ensemble $G\subset E$, il en est de même de C' ; en outre , C' est contenu dans la catégorie suivante . Ces quatre catégories d'ensembles peuvent être toutes distinctes (exerc.4) ; mais on sait déjà que si l'espace E est tonnelé , tout ensemble faiblement borné est équicontinu , et a fortiori faiblement relativement compact et fortement borné (§ 2,prop.10) ; et d'autre part , pour que tout ensemble convexe relativement faiblement compact soit équicontinu , il faut et il suffit que la topologie $\mathcal{T}$ soit identique à $\tau(E,E')$ (§ 1, th.2) . Enfin , on a encore les deux résultats suivants :

PROPOSITION 1 .- Si E est un espace bornologique , tout ensemble fortement borné dans E' est équicontinu (et par suite relativement faiblement compact).

En effet , tout tonneau $W \subset E$ tel que , pour tout ensemble B borné dans E, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda B \subset W$, est alors un voisinage de 0 dans E pour la topologie $\mathcal{T}$.

PROPOSITION 2 .- Si E est complet pour la topologie $\mathcal{T}$, tout ensemble faiblement borné dans E' est fortement borné .

C'est un cas particulier du th.2 du § 1 .

2

Remarque .- On aura soin de noter que lorsque l'enveloppe convexe d'un ensemble faiblement compact dans E' n'est pas nécessairement relativement faiblement compacte , un ensemble faiblement compact dans E' n'est pas nécessairement fortement borné (exerc.3).

Les prop.3 et 4 du § 1 donnent pour le dual fort les propositions suivantes :

PROPOSITION 3 .- Soient E un espace tonnelé , Φ un filtre borné sur le dual E' de E . Si Φ est un filtre de Cauchy pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, il est convergent pour cette topologie vers un point x'_0 de E' ; de plus , il converge uniformément vers x'_0 dans toute partie précompacte de E . Pour que Φ soit un filtre de Cauchy pour $\sigma(E',E)$, il suffit d'ailleurs que la base de filtre $\Phi(x)$ soit convergente dans R pour tout point x d'une partie totale de E .

PROPOSITION 4 .- Soient E un espace tonnelé , Φ un filtre sur le dual E' de E , ayant une base dénombrable . Si Φ est un filtre de Cauchy pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, il est convergent pour cette topologie vers un point x'_0 de E' ; de plus , il converge uniformément vers x'_0 dans toute partie précompacte de E .

On notera en outre que l'on a , pour tout ensemble borné $B \subset E$

(4) $$|x'_0|_B \leq \liminf_{\mathfrak{F}} |x'|_B$$

puisque la semi-norme $x' \to |x'|_B$ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible .

4 . Polarité entre voisinages et ensembles bornés .

Soient E un espace localement convexe séparé , $\mathfrak{T}$ sa topologie , E' son dual . Les définitions des voisinages et des ensembles bornés se récapitulent de la façon suivante :

1° Le polaire B^o d'un ensemble borné $B \subset E$ est un voisinage de 0 dans E' pour la topologie forte ; lorsque B parcourt un système fondamental de parties bornées de E , B^o parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans le dual fort E' .

2° Le polaire V^o d'un voisinage de 0 dans E (pour $\mathfrak{T}$) est équicontinu , donc relativement faiblement compact , fortement et faiblement borné dans E' (n°3) ; nous avons déjà remarqué que les polaires des voisinages de 0 dans E ne constituent pas nécessairement un système fondamental de parties fortement bornées de E' (n°3) .

3° Le polaire V'^o d'un voisinage fort V' de 0 dans E' , est borné dans E, puisqu'il existe par définition un ensemble borné B dans E tel que $V' \supset B^o$, ce qui entraîne $V'^o \subset B^{oo}$. Lorsque V' parcourt un système fondamental de voisinages forts de 0 dans E' , V'^o parcourt un système fondamental de parties bornées de E .

4° Le polaire B'^o d'une partie fortement bornée B' de E' n'est pas nécessairement un voisinage de 0 dans E pour la topologie $\mathfrak{T}$. Mais tout voisinage de 0 dans E (pour $\mathfrak{T}$) contient l'ensemble polaire d'une partie bornée de E' , car il contient un voisinage convexe , symétrique et fermé V , et on a $V=V^{\circ\circ}$ (§ 2, prop. 6) .

En outre, le fait que, si E est bornologique ou tonnelé, tout ensemble fortement borné dans E' est équicontinu s'exprime encore par la proposition suivante :

PROPOSITION 5 .- Soient E un espace bornologique ou tonnelé, E' son dual fort ; les polaires des voisinages de 0 dans l'un de ces deux espaces forment un système fondamental de parties bornées de l'autre ; les polaires des parties bornées de l'un de ces deux espaces forment un système fondamental de voisinages de 0 dans l'autre .

En particulier, si E est métrisable, il existe dans son dual fort E' un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés, constitué par les ensembles polaires d'un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans E .

5 . Bidual fort d'un espace localement convexe .

Soient E un espace localement convexe séparé, $\mathcal{T}$ sa topologie, E' son dual . On ne peut parler du dual de E' que lorsqu'on a défini une topologie sur E' ; si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E, dont E est la réunion, nous désignerons par $E''_{\mathfrak{S}}$ le dual de E', lorsqu'on munit E' de la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$. Pour tout $x \in E$, la forme linéaire $x' \to \langle x, x' \rangle$ sur E' est continue pour la topologie faible $\sigma(E', E)$, et a fortiori pour la topologie plus fine $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$. C'est donc un élément de $E''_{\mathfrak{S}}$, que nous noterons $\tilde{x}$.

PROPOSITION 6 .- L'application $x \to \tilde{x}$ de E dans $E''_{\mathfrak{S}}$ est une application linéaire biunivoque .

En effet, on a par définition $\langle x, x' \rangle = \langle x', \tilde{x} \rangle$ pour tout $x \in E$ et tout $x' \in E'$; la relation $\tilde{x}=0$ signifie que $\langle x, x' \rangle = 0$ pour tout $x' \in E'$, c'est-à-dire que $x=0$ puisque E' est séparant (§ 2, prop. 1), d'où la proposition .

28

On dit que $x \to \tilde{x}$ est l'application canonique de E dans $E''_{\mathfrak{S}}$; elle permet d'identifier E (en tant qu'espace vectoriel non topologique) à un sous-espace vectoriel de $E''_{\mathfrak{S}}$.

On appelle bidual de E le dual fort E" du dual fort E' ; autrement dit , c'est l'espace $E''_{\mathfrak{S}}$ correspondant au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de E . On considérera toujours dans ce qui suit l'espace E (en tant qu'espace vectoriel non topologique) comme un sous-espace de son bidual E" . Il est clair que la topologie induite sur E par la topologie faible $\sigma(E'',E')$ n'est autre que $\sigma(E,E')$; quand nous parlerons de topologie faible sur E" , c'est toujours de $\sigma(E'',E')$ qu'il s'agira , sauf mention expresse du contraire .

L'espace E est faiblement dense dans son bidual E" ; de façon plus précise:
PROPOSITION 7 .- Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties équicontinues de E' ; les adhérences faibles dans E" d'un système fondamental de voisinages de 0 dans E (pour la topologie $\mathcal{E}$) forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E" pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{F}$

En effet , soit $\mathfrak{U}$ un système fondamental de voisinages de 0 convexes , symétriques et fermés pour la topologie $\mathcal{E}$; tout ensemble de est contenu dans un ensemble polaire U° d'un ensemble $U \in \mathfrak{U}$. Mais , pour la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{F}$, les polaires $U^{\circ\circ}$ dans E" des ensembles U° forment un système fondamental de voisinages de 0 . Or , on a vu (§ 2,prop.6) que $U^{\circ\circ}$ est l'adhérence faible de U dans E" , d'où la proposition .

Comme U est faiblement fermé dans E , on a $U=E \cap U^{\circ\circ}$, autrement dit :
COROLLAIRE .- La topologie $\mathcal{E}$ sur E est identique à la topologie induite par la topologie (sur E") de la ~~la~~ convergence uniforme dans les parties équi-

continues de E' .

On appelle bidual fort de E le bidual E" muni de la topologie $\beta(E'',E')$ de la convergence uniforme dans les parties fortement bornées de E' ; comme toute partie équicontinue de E' est fortement bornée , on voit que la topologie induite sur E par la topologie forte $\beta(E'',E')$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}$; pour que ces deux topologies soient identiques , il faut et il suffit que toute partie fortement bornée de E' soit équicontinue (pour la topologie $\mathcal{T}$ sur E) ; en particulier (prop.1 et § 2,prop.10) :

PROPOSITION 8 .- Si E est un espace bornologique ou un espace tonnelé , la topologie $\mathcal{T}$ de E est identique à la topologie induite sur E par la topologie ~~XXXX~~ $\beta(E'',E')$ du bidual fort de E .

En d'autres termes , E peut alors être considéré comme un sous-espace vectoriel topologique de son bidual fort E" ; en outre , si E est complet , c'est un sous-espace fermé de E" (pour $\beta(E'',E')$) .

La prop.8 s'applique en particulier lorsque E est un espace localement convexe métrisable : comme il existe alors un système fondamental dénombrable de parties équicontinues de E' , on voit que le bidual fort E" d'un espace localement convexe métrisable E est métrisable .

On peut montrer en outre que E" est alors complet pour la topologie $\beta(E'',E')$ (exerc.).

Plus particulièrement , si E est un espace normé , son bidual fort E" est un espace de Banach (n°3) ; en outre :

PROPOSITION 9 .- Si E est un espace normé , l'application canonique $x \to \tilde{x}$ de E dans ~~EX~~ son bidual fort E" est une isométrie .

En effet , E" est le dual fort de l'espace de Banach E' , et on a $\|\tilde{x}\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle x,x'\rangle| \leq \|x\|$; d'autre part , en vertu du th. de Hahn-Banach (chap.II, § 5,cor.3 du th.2) , il existe une forme linéaire continue $x' \in E'$ telle que

$\langle x, x' \rangle = \|x\|$ et $\|x'\| = 1$, d'où $\|\tilde{x}\| = \|x\|$.

La prop.6 du § 2 montre en outre que si B désigne la boule $\|x\| \leq 1$ dans E" $B \cap E$ est faiblement dense dans B .

6 . Espaces réflexifs et espaces complètement réflexifs .

DÉFINITION 1 .- On dit qu'un espace localement convexe séparé E est réflexif si l'application biunivoque canonique $x \to \tilde{x}$ de E dans son bidual E" est une application de E sur E" ; on dit que E est complètement réflexif si $x \to \tilde{x}$ est un isomorphisme de E (muni de sa topologie) sur son bidual fort E"

En vertu de la prop.8 , si E est un espace bornologique ou un espace tonnelé , pour que E soit complètement réflexif , il suffit qu'il soit réflexif (cf.cor.2 du th.2) .

Tout espace de dimension finie est réflexif ; on peut par contre donner des exemples d'espaces de Banach non réflexifs (exerc.3). Nous étudierons au ~~XX~~ chap.IV une catégorie très importante d'espaces de Banach réflexifs , les espaces hilbertiens .

PROPOSITION 10 .- Pour qu'un espace localement convexe séparé E soit réflexif , il faut et il suffit que toute partie convexe fortement fermée du dual E' de E , soit aussi faiblement fermée .

La condition est nécessaire : en effet , si A' est une partie convexe fortement fermée de E' , A' est fermée pour la topologie faible $\sigma(E', E")$ (§ 2 prop.8) , et cette dernière est par hypothèse identique à $\sigma(E', E)$. La condition est suffisante , car elle entraîne en particulier que tout hyperplan homogène fortement fermé dans E' est faiblement fermé , donc a une équation de la forme $\langle x_0, x' \rangle = 0$, où $x_0 \in E$; toute forme linéaire fortement continue dans E' est donc de la forme $x' \to \langle x_0, x' \rangle$, où $x_0 \in E$, ce qui prouve que E"= =E .

COROLLAIRE .- Soit E un espace localement convexe réflexif ; pour qu'un en semble $A' \subset E'$ soit total pour la topologie forte , il faut et il suffit que pour tout $x \neq 0$ dans E , il existe $x' \in A'$ tel que $\langle x, x' \rangle \neq 0$.

En effet , cette condition exprime que le sous-espace vectoriel engendré par A' est faiblement dense dans E' , donc fortement dense en vertu de la prop.10 .

THEOREME 2 .- Pour qu'un espace localement convexe séparé E soit réflexif , il faut et il suffit que toute partie bornée de E soit relativement faiblement compacte .

La condition est nécessaire . En effet , si E est réflexif , pour toute partie bornée B de E , B^o est un voisinage de 0 dans E' pour la topologie forte $\beta(E',E)$; comme E est le dual de E' pour cette topologie , l'ensemble polaire B^{oo} de B^o dans E est faiblement compact (chap.I, § 4) , et par suite $B \subset B^{oo}$ est faiblement relativement compact .

La condition est suffisante . En effet , tout ensemble convexe borné et fermé dans E est alors faiblement compact (§ 2,prop.8) ; la topologie forte $\beta(E',E)$ sur E' , qui est la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles convexes bornés et fermés de E , est alors identique à la topologie $\tau(E',E)$, donc le dual fort de E' est E (§ 2,th.2).

COROLLAIRE 1 .- Si E est un espace réflexif , son dual fort E' est un espace tonnelé .

Cela résulte aussitôt de la caractérisation des espaces tonnelés donnée dans la prop.10 du § 2 .

COROLLAIRE 2 .- Pour qu'un espace E soit complètement réflexif , il faut et il suffit qu'il soit réflexif et tonnelé .

En effet , si E est complètement réflexif , il en est de même de E' , et E est le dual fort de E' , donc est tonnelé (et évidemment réflexif) . Inversement , si E est réflexif et tonnelé , on a E=E" et la topologie induite sur E par la topologie forte $\beta(E'',E')$ est identique à la topologie donnée sur E (prop.8) , donc E est complètement réflexif .

COROLLAIRE 3 .- Tout sous-espace fermé F d'un espace réflexif E est réflexi

En effet , soit A un ensemble convexe fermé et borné dans F ; A est aussi borné et fermé dans E , puisque F est fermé ; en vertu du th.2 , A est compact pour la topologie $\sigma(E,E')$; mais la topologie induite sur F par $\sigma(E,E')$ est identique à la topologie faible $\sigma(F,F')$ (chap.I,§) , ce qui montre que F est réflexif .

Remarque .- Si E est un espace réflexif , toute suite de Cauchy (x_n) pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ est faiblement convergente dans E . En effet , l'ensemble des x_n est borné dans E , donc relativement faiblement compact ; la suite (x_n) a donc une valeur d'adhérence faible x , qui est limite faible de la suite (x_n) , puisque cette dernière est une suite de Cauchy pour $\sigma(E,E')$.

7 . Caractérisation des formes linéaires faiblement continues dans E' .

Lorsque E est un espace réflexif , toute forme linéaire fortement continue sur le dual E' de E , est de la forme $x' \to \langle x,x'\rangle$, où $x \in E$, autrement dit est faiblement continue (pour $\sigma(E',E)$) . Il n'en est pas de même lorsque E n'est pas réflexif ; mais on a la caractérisation suivante des formes linéaires faiblement continues sur E' lorsque E est complet :

PROPOSITION 11 .- Soit E un espace localement convexe séparé et complet ,et soit E' son dual . Pour qu'une forme linéaire sur E' soit faiblement continue , il suffit (et il faut) que sa restriction à toute partie équicontinue de E' soit faiblement continue .

En effet , si $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des parties équicontinues de E' , la topologie $\mathcal{T}$ de E est identique à la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{F}$. La proposition résulte alors du th.1 et de l'hypothèse que E est complet pour $\mathcal{T}$.

COROLLAIRE .- <u>Soit E un espace tonnelé complet . Pour qu'une forme linéaire sur E' soit faiblement continue , il suffit que sa restriction à toute partie bornée de E' soit faiblement continue</u> .

§ 4 . Transposée d'une application linéaire continue . Continuité forte et continuité faible .

1 . <u>Transposée d'une application linéaire continue</u> .

Soient E,E' et F,F' deux couples d'espaces vectoriels sur R en dualité faible : nous désignerons par $\langle x,x'\rangle$ (resp. $\langle y,y'\rangle$) la forme bilinéaire canonique sur $E\times E'$ (resp. $F\times F'$) . Rappelons que pour toute application linéaire u de E dans F , <u>faiblement continue</u> (c'est-à-dire continue pour les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$) la <u>transposée</u> ${}^tu$ de u est une application linéaire faiblement continue de F' dans E' (c'est-à-dire continue pour les topologies $\sigma(F',F)$ et $\sigma(E',E)$) , caractérisée par l'identité

(1) $$\langle u(x),y'\rangle = \langle x,{}^tu(y')\rangle$$

quels que soient $x\in E$ et $y'\in F'$. En outre , pour tout ensemble $A\subset E$, on a ${}^tu((u(A))^\circ)\subset A^\circ$. On déduit de là la proposition suivante :

PROPOSITION 1 .- <u>Soit u une application ~~XX~~ linéaire faiblement continue de E dans F ; alors la transposée ${}^tu$ est continue</u> :

1° <u>pour les topologies</u> $\tau(F',F)$ <u>et</u> $\tau(E',E)$;

2° <u>pour les topologies fortes</u> $\beta(F',F)$ <u>et</u> $\beta(E',E)$.

En effet , pour tout ensemble convexe , symétrique et faiblement compact $K\subset E$, u(K) est un ensemble convexe , symétrique et faiblement compact dans F : comme ${}^tu((u(K))^\circ)\subset K^\circ$, la définition des voisinages de 0 pour les topologies $\tau(F',F)$ et $\tau(E',E)$ montre que l'image réciproque par ${}^tu$ d'un voisinage de 0 pour $\tau(E',E)$ est un voisinage de 0 pour $\tau(F',F)$, d'où la première partie de la proposition . La seconde partie se démontre de même , en remarquant que si B est un ensemble borné dans E , u(B) est borné dans F.

Ce qui précède s'applique au cas où E et F sont deux espaces localement convexes séparés , et E' et F' leurs <u>duals</u> ; on sait alors que toute application linéaire continue u de E dans F (pour les topologies données sur ces deux espaces) est aussi <u>faiblement continue</u> ; elle admet par suite une <u>transposée</u> ${}^t u$, et la prop.1 montre que :

PROPOSITION 2 .- <u>Soient E et F deux espaces localement convexes séparés . Pour toute application linéaire continue u de E dans F , la transposée</u> ${}^t u$ <u>est une application fortement continue de F' dans E'</u> .

Lorsque E et F sont des espaces <u>normés</u> , on peut préciser ce résultat de la façon suivante : on a

(2) $$\|{}^t u\| = \|u\| \ .$$

En effet , on a , par définition

$$\|{}^t u\| = \sup_{\|y'\|\leq 1} \|{}^t u(y')\| = \sup_{\|x\|\leq 1,\, \|y'\|\leq 1} |\langle x, {}^t u(y')\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1,\, \|y'\|\leq 1} |\langle u(x), y'\rangle| =$$
$$= \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \|u\| \ .$$

2 . Continuité forte et continuité faible .

Nous venons de rappeler que toute application linéaire continue d'un espace localement convexe séparé E dans un espace localement convexe séparé F est <u>faiblement continue</u> ; la réciproque est inexacte , mais on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3 .- <u>Soient E et F deux espaces localement convexes séparés . Toute application linéaire faiblement continue u de E dans F est continue pour les topologies</u> $\tau(E,E')$ <u>et</u> $\tau(F,F')$.

En effet , u est la transposée de sa transposée ${}^t u$, et la proposition résulte donc de la prop.1 , appliquée à l'application linéaire faiblement continue ${}^t u$ de F' dans E' .

COROLLAIRE .- <u>Soit E un espace bornologique ou tonnelé , F un espace locale-</u>

ment convexe séparé quelconque . Toute application linéaire faiblement continue de E dans F est continue (pour les topologies données sur E et F) .

En effet , on sait que la topologie donnée sur E est identique à $\tau(E,E')$ et que celle de F est moins fine que $\tau(F,F')$.

Considérons maintenant les applications linéaires du dual F' de F dans le dual E' de E . Si une telle application v est faiblement continue (pour $\sigma(F',F)$ et $\sigma(E',E)$) , elle est la transposée de l'application linéaire faiblement continue ${}^t v$ de E dans F , et la prop.1 montre donc que v est fortement continue . Mais la réciproque est inexacte .

2 Par exemple , si E n'est pas réflexif , une forme linéaire fortement continue sur E' n'appartient pas nécessairement à E , donc n'est pas faiblement continue .

On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 4 .- Soient E et F deux espaces localement convexes séparés ; si F est réflexif , toute application linéaire fortement continue de F' dans E' est faiblement continue .

En effet , une telle application est continue pour les topologies faibles $\sigma(F',F'')$ et $\sigma(E',E'')$: mais $\sigma(F',F'')$ est identique à $\sigma(F',F)$, et $\sigma(E',E'')$ est plus fine que $\sigma(E',E)$, d'où la proposition .

3 . Isomorphismes forts et isomorphismes faibles .

PROPOSITION 5 .- Soient E et F deux espaces localement convexes séparés ; tout isomorphisme u de E dans F est aussi un isomorphisme faible de E dans F (c'est-à-dire un isomorphisme pour les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$) .

En effet , si $G=u(E)$, u est évidemment un isomorphisme de E sur G pour les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(G,G')$. Mais on sait que la topologie $\sigma(G,G')$ est induite sur G par $\sigma(F,F')$, d'où la proposition .

La réciproque de la prop.5 est inexacte , mais on a la proposition suivante :

PROPOSITION 6 .- Soient E et F deux espaces localement convexes séparés , et soit u un isomorphisme faible de E dans F . Si u est continue (pour les topologies données sur E et F) et si la topologie induite sur $G=u(E)$ par la topologie de F est identique à la topologie $\tau(G,G')$, u est un isomorphisme de E dans F (pour les topologies données) .

En effet , soit v l'application de $G=u(E)$ sur E , réciproque de u . Par hypothèse , v est faiblement continue ; mais en outre , la topologie de G est identique à $\tau(G,G')$ et la topologie de E est moins fine que $\tau(E,E')$; la prop.3 montre donc que v est continue ; comme u est aussi continue par hypothèse , u est un isomorphisme de E sur G .

COROLLAIRE .- Soient E un espace bornologique ou tonnelé , F un espace localement convexe métrisable ; tout isomorphisme faible u de E dans F est aussi un isomorphisme de E dans F (pour les topologies données sur E et F).

En effet , u est alors continue pour les topologies données sur E et F (cor de la prop.3) . D'autre part , tout sous-espace G de F est métrisable , et par suite la topologie induite sur G par celle de F est identique à $\tau(G,G')$.

Rappelons que , pour que u soit un isomorphisme faible de E dans F , il faut et il suffit que ${}^tu$ soit faiblement continue et que ${}^tu(F')=E'$; $v={}^tu$ est alors une application fortement continue de F' sur E' . Inversement , si v est une application fortement continue de F' sur E' , v n'est pas nécessairement faiblement continue (n°2) ; toutefois , si F est réflexif , v est faiblement continue (prop.4) et sa transposée u est alors un isomorphisme faible de E dans F ; si en outre E est bornologique ou tonnelé , et F métrisable , u est un isomorphisme de E dans F (pour les topologies données sur ces espaces) en vertu du cor. de la prop.6 .

Plus particulièrement :

PROPOSITION 7 .- Soient E un espace tonnelé complet , F un espace localement convexe métrisable et réflexif . Si v est une application linéaire biunivoque et fortement continue de F' sur E' , v est un isomorphisme fort et faible de F' sur E' , et sa transposée $u={}^tv$ est un isomorphisme de E sur F (ce qui entraîne que E et F sont métrisables et complets).

En effet , d'après ce qui précède , u est un isomorphisme de E dans F ; comme v est biunivoque , $u(E)$ est partout dense dans F . D'autre part , $u(E)$, étant isomorphe à l'espace complet E , est complet , donc fermé dans F , et par suite $u(E)=F$, ce qui démontre la proposition .

La conclusion de la proposition n'est plus valable si on ne suppose plus E complet (exerc.) ou si on ne suppose plus F réflexif : elle peut déjà être en défaut lorsque $E=F$ est un espace de Banach (non réflexif) : on peut en effet donner des exemples où v est un automorphisme ~~de~~ fort de E' , mais non faiblement continue (exerc.).

Bornons-nous désormais au cas où l'application linéaire biunivoque v de F' dans E' que nous considérons est faiblement continue , c'est-à-dire la transposée d'une application linéaire faiblement continue u de E dans F .

PROPOSITION 8 .- Soient E et F deux espaces de Banach ; tout isomorphisme fort v de F' dans E' qui est faiblement continu est un isomorphisme faible de F' dans E' (et par suite la transposée d'un homomorphisme u de E sur F)

En effet , pour que $v={}^tu$ soit un isomorphisme fort de F' dans E' , il faut et il suffit que pour toute boule fermée B de centre 0 dans F , il existe une boule fermée A de centre 0 dans E , telle que $B\subset(u(A))^{\circ\circ}=(\overline{u(A)})$ (chap I, § 4, prop.15 , et chap.III, § 2, prop.6 et 8). Mais en vertu du th. de Banach caractérisant les homomorphismes de E sur F (chap.I, § 5, th.1) , cela démontre la proposition .

On peut étendre la prop.8 au cas où E et F sont métrisables et complets (exerc.) ; par contre , la conclusion de la prop.8 peut déjà être en défaut lorsque E est un espace de Banach et F un espace complet , mais non métrisable (exerc.). Elle est en défaut aussi lorsque F est un espace de Banach et E un espace normé non complet (exer

Notons enfin qu'en général un isomorphisme faible v de F' dans E' n'est pas nécessairement un isomorphisme fort (exerc.) ; on peut toutefois démontrer cette propriété lorsque E est un espace normé et F un espace de Banach (exerc.).

4 . Application aux formes bilinéaires séparément continues .

Soient E_1 et E_2 deux espaces localement convexes séparés ; on sait qu'il existe un isomorphisme canonique de l'espace vectoriel (non topologique) des formes bilinéaires f séparément continues sur $E_1 \times E_2$ (c'est-à-dire telles que $x \to f(x,y)$ (resp. $y \to f(x,y)$) soient continues quels que soient y (resp. x)) , sur l'espace vectoriel (non topologique) $\mathcal{L}(E_1,E'_2)$ des applications linéaires u de E_1 dans le dual E'_2 de E_2 , qui sont faiblement continues , c'est-à-dire continues pour les topologies $\sigma(E_1,E'_1)$ et $\sigma(E'_2,E_2)$; cet isomorphisme s'exprime par la relation

$$(3) \qquad f(x,y)=\langle y,u(x)\rangle$$

quels que soient $x \in E_1$ et $y \in E_2$.

Soit $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées de E_1 (resp. E_2) formant un recouvrement de E_1 (resp. E_2) . On sait que , pour que f soit séparément continue par rapport à $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$, il faut et il suffit que u vérifie les deux conditions suivantes :

1° u est continue pour la topologie donnée sur E_1 et la topologie (sur E'_2) de la convergence uniforme dans les parties de $\mathfrak{S}_2$;

2° l'image par u de tout ensemble $B_1 \in \mathfrak{S}_1$ est équicontinue dans E'_2 (pour la topologie ~~s~~ donnée sur E_2).

La relation (3) est d'ailleurs équivalente à

$$(4) \qquad f(x,y)=\langle x,{}^t u(y)\rangle$$

la transposée ${}^t u$ de u étant une application linéaire faiblement continue de E_2 dans E'_1 ; les conditions 1° et 2° sont respectivement équivalentes aux suivantes :

3° l'image par ${}^t u$ de tout ensemble $B_2 \subset \mathfrak{S}_2$ est équicontinu dans E_1' (pour la topologie donnée sur E_1) ;

4° ${}^t u$ est continue pour la topologie donnée sur E_2 et la topologie (sur ~~XX~~ E_1') de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}_1$.

PROPOSITION 9 .- <u>Soit f une forme bilinéaire séparément continue sur $E_1 \times E_2$. Alors f est aussi séparément continue par rapport aux ensembles de parties bornées de E_1 et E_2 dans les deux cas suivants</u> :

1° <u>E_1 et E_2 sont tonnelés</u> ;

2° <u>E_1 et E_2 sont réflexifs , et les topologies données sur ces deux espaces sont les topologies $\tau(E_1,E_1')$ et $\tau(E_2,E_2')$</u> .

En effet , si E_2 est tonnelé , tout ensemble faiblement borné dans E_2' est équicontinu : or , pour tout ensemble borné $B_1 \subset E_1$, $u(B_1)$ est faiblement borné dans E_2' , donc équicontinu . On voit de même que l'image par ${}^t u$ de tout ensemble borné dans E_2 est équicontinu dans E_1' si E_1 est tonnelé .

Si E_1 est réflexif , tout ensemble borné , convexe et fermé B_1 dans E_1 est faiblement compact , donc son image $u(B_1)$ est convexe et faiblement compacte dans E_2' . Mais si la topologie donnée sur E_2 est la topologie $\tau(E_2,E_2')$, tout ensemble convexe et faiblement compact dans E_2' est équicontinu . On voit de même que si E_2 est réflexif et si la topologie de E_1 est $\tau(E_1,E_1')$, ${}^t u(B_2)$ est équicontinu dans E_1' pour tout ensemble borné B_2 dans E_2 .

Il revient au même , d'après ce qui précède , de dire qu'une application faiblement continue u de E_1 dans E_2' est aussi fortement continue dans chacun des deux cas suivants :

1° E_1 est tonnelé , E_2 quelconque (ce qui résulte de la prop.1 , car $\beta(E_1,E_1')$ est alors identique à $\tau(E_1,E_1')$, donc à la topologie de E_1 ;

2° la topologie de E_1 est la topologie ~~XXXXXX~~ $\tau(E_1,E_1')$, et E_2 est réflexif (ce qui entraîne que $\beta(E_2',E_2) = \tau(E_2',E_2)$, et la proposition est alors encore conséquence de la prop.1).

En général , lorsque les conditions de la prop.9 sont remplies , la forme bilinéaire f n'est pas nécessairement continue pour les topologies données sur E_1 et E_2 . Elle l'est toutefois lorsque E_1 et E_2 sont métrisables et que l'un au moins est complet (chap.I, § 5); cela signifie encore qu'il existe un voisinage V_1 de 0 dans E_1 tel que $u(V_1)$ soit faiblement relativement compact dans E_2' .

5 . Parties bornées dans $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(F';E')$.

Soient E,E' et F,F' deux couples d'espaces vectoriels en dualité faible , et soit $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires faiblement continues de E dans F ; nous désignerons par $\mathcal{T}_s$ la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{L}(E,F)$, E et F étant munis des topologies faibles $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$. Nous dirons qu'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ est faiblement bornée si elle est bornée pour la topologie $\mathcal{T}_s$; cela signifie donc que , pour tout $x \in E$, l'ensemble $H(x)$ des $u(x)$, où u parcourt H , est borné dans F (pour $\sigma(F,F')$ ou toute autre topologie compatible avec la dualité faible), ou encore que , quels que soient $x \in E$ et $y' \in F'$, l'ensemble des nombres $\langle u(x),y'\rangle$ est borné lorsque u parcourt H . Cette remarque et l'identité (1) prouvent aussitôt que :

PROPOSITION 10 .- Pour que H soit faiblement borné dans $\mathcal{L}(E,F)$, il faut et il suffit que l'ensemble ${}^tH$ des transposées ${}^tu$ des fonctions $u \in H$ soit faiblement borné dans $\mathcal{L}(F',E')$.

Remarquons maintenant que $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi l'espace des applications linéaires continues de E dans F quand on munit E et F des topologies $\tau(E,E')$ et $\tau(F,F')$ (prop.3) ; nous désignerons par $\mathcal{T}_b$ la topologie , sur $\mathcal{L}(E,F)$, de la convergence uniforme dans les parties bornées de E (F étant muni de $\tau(F,F')$) . Nous dirons qu'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ est fortement bornée si

NBR 047 41

si elle est bornée pour la topologie $\mathcal{T}_b$: cela signifie que pour toute partie bornée B de E (pour une topologie quelconque comptaible avec la dualité faible), l'ensemble H(B) (réunion des ensembles u(B), où u parcourt H) est borné dans F (pour toute topologie compatible avec la dualité faible). Il est clair que tout ensemble $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ fortement borné est faiblement borné ; en outre, les résultats du § 1 montrent que :

PROPOSITION 11 .- <u>Si</u> E , <u>muni de la topologie</u> $\tau(E,E')$, <u>est complet ou tonnelé , toute partie faiblement bornée</u> H <u>de</u> $\mathcal{L}(E,F)$ <u>est fortement bornée</u>. En outre , si E <u>est tonnelé</u> , H <u>est équicontinue</u> (pour les topologies $\tau(E,E')$ et $\tau(F,F')$) .

Remarquons maintenant que si H est faiblement borné (ou , ce qui revient au même d'après la prop.10 , si H est faiblement borné) , ${}^tH$ est <u>équicontinu</u> pour la topologie <u>forte</u> $\beta(E',F)$ sur F' et la topologie <u>faible</u> $\sigma(E',E)$ sur E' (chap.I, § 4, prop.13) ; par suite :

PROPOSITION 12 .- <u>Si</u> H <u>est faiblement borné dans</u> $\mathcal{L}(E,F)$, <u>pour toute partie fortement bornée</u> B' <u>de</u> F' , ${}^tH(B')$ <u>est faiblement bornée dans</u> E' .

COROLLAIRE .- <u>Si</u> F , <u>muni de la topologie</u> $\tau(F,F')$, <u>est complet ou tonnelé</u>, <u>pour toute partie</u> H <u>faiblement bornée de</u> $\mathcal{L}(E,F)$ <u>et pour toute partie faiblement bornée</u> B' <u>de</u> F' , ${}^tH(B')$ <u>est faiblement bornée dans</u> E' .

En effet , on sait alors que toute partie faiblement bornée de F' est fortement bornée .

Si H est <u>fortement borné</u> dans $\mathcal{L}(E,F)$, on sait (chap.I, § 4, prop.13) que ${}^tH$ est <u>équicontinu</u> pour les topologies <u>fortes</u> $\beta(F',F)$ et $\beta(E',E)$; d'où:

PROPOSITION 13 .- <u>Si</u> H <u>est fortement borné dans</u> $\mathcal{L}(E,F)$, <u>pour toute partie</u> B' <u>de</u> F' , ${}^tH(B')$ <u>est fortement bornée dans</u> E' .