TITRE : E.V.T.
FASCICULE DE RÉSULTATS

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

FASCICULE de RÉSULTATS.

CHAPITRE I

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES SUR UN CORPS VALUÉ.

§ 1. Espaces vectoriels topologiques.

1. Définition d'un espace vectoriel topologique.

Un espace vectoriel topologique à gauche sur un corps topologique K est un ensemble E muni d'une structure d'espace vectoriel à gauche sur K, et d'une topologie compatible avec la structure de groupe additif de E (c'est-à-dire telle que l'application $(x,y) \longrightarrow x-y$ de $E \times E$ dans E soit continue) et satisfaisant en outre à l'axiome suivant :

(L) L'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de $K \times E$ dans E est continue.

Si K' est un sous-corps de K, la restriction à K' du corps des scalaires fait de E un espace vectoriel topologique sur K'.

Pour $\lambda_0 \in K$, l'homothétie $x \longrightarrow \lambda_0 x$ est un automorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique de E, si $\lambda_0 \neq 0$. Si $a \in K$ est $\neq 0$, et si $b \in E$, la similitude $x \longrightarrow ax + b$ est un homéomorphisme de E sur lui-même.

Bien qu'une partie des théorèmes énoncés soit vraie dans des cas plus généraux, le corps K sera toujours supposé dans la suite commutatif, valué, complet et non discret.

Alors un espace vectoriel topologique E séparé, de dimension finie n sur K, est isomorphe à l'espace vectoriel K^n muni de la topologie produit et toute application linéaire de E dans un espace vectoriel topologique quelconque F est continue.

2. Voisinages de 0.

Une partie A de E est dite disquée si, pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \leq 1$, $\lambda . A \subset A$. L'enveloppe disquée d'une partie quelconque A de E est la réunion des λA, $|\lambda| \leq 1$; c'est la plus petite partie disquée contenant A. Si K est localement compact, l'enveloppe disquée d'un compact est compacte.

Une partie A de E absorbe une partie B s'il existe $\lambda \in K$ tel que $\lambda . A \supset B$. Une partie A est dite absorbante si elle absorbe tout point de E; alors elle engendre E. Un voisinage de 0 est absorbant.

Une partie absorbée par tous les voisinages de 0 est dite bornée.

Il existe un système fondamental de voisinages de 0, $\mathfrak{S}$, ayant les propriétés suivantes :

A) Quelque soit $V \in \mathfrak{S}$, il existe $W \in \mathfrak{S}$ tel que $W+W \subset V$.

B) $\mathfrak{S}$ est invariant par les homothéties $\neq 0$.

C) Tout $V \in \mathfrak{S}$ est disqué et absorbant.

Comme E est régulier, on peut en outre supposer tout $V \in \mathfrak{S}$ fermé.

Réciproquement, toute base de filtre sur un espace vectoriel E, ayant les propriétés A, B, C, définit d'une manière unique une topologie d'espace vectoriel, ayant $\mathfrak{S}$ comme système fondamental de voisinages de 0.

Pour qu'un espace vectoriel topologique E soit séparé, il faut et il suffit que l'intersection des voisinages de 0 se réduise à $\{0\}$. Pour qu'un espace vectoriel topologique E soit localement compact, il faut et il suffit que K soit localement compact et E de dimension finie.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$, F des espaces vectoriels topologiques. Pour qu'une application multilinéaire de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F soit continue, il faut et il suffit qu'elle le soit à l'origine. Pour qu'un ensemble d'applications multilinéaires continues soit équicontinu, il faut et il suffit qu'il le soi à l'origine. Dans la suite on appellera toujours $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires <u>continues</u> d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F ; et E', dual topologique de E, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,K)$ des formes linéaires continues sur E .

3. <u>Structure uniforme et complétion</u>.

La topologie de E , étant compatible avec sa structure de groupe, définit sur E une structure uniforme. Toute application linéaire continue d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F est uniformément continue ; mais il n'en est pas en général de même pour une application multilinéaire (par exemple l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de $K \times E$ dans E , continue, n'est pas uniformément continue). Tout ensemble équicontinu d'applications linéaires de E dans F est uniformément équicontinu. Si E est un espace vectoriel topologique séparé sur K , soit $\hat{E}$ le complété du groupe topologique E . L'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E$ dans E , prolongée par continuité, donne une application de $K \times \hat{E}$ dans $\hat{E}$ et fait de $\hat{E}$ un espace vectoriel topologique complet sur K , appelé complété de E.

Un espace vectoriel topologique E est dit <u>quasi-complet</u> si toute partie fermée bornée de E est complète. Un espace quasi-complet, est tel que toute suite de Cauchy soit convergente, il est donc sémi-complet. Nous verrons que si E' est le dual d'un espace E tonnelé, muni de la topologie faible, il est quasi-complet, sans être complet. Tout espace vectoriel complet (resp. quasi-complet) le reste si on remplace la topologie par une plus fine ayant un système fondamental de voisinages de 0 fermés pour la topologie initiale.

NBR 046 5

4. Sous-espaces, espaces quotients, espaces produits, homomorphismes.

Si M est un sous-espace vectoriel de E , la topologie induite par E sur M fait de M un espace vectoriel topologique, appelé sous-espace vectoriel topologique de E : de même, la topologie quotient fait de E/M un espace vectoriel topologique, appelé espace vectoriel topologique quotient de E par M . Pour que E/M soit séparé, il faut et il suffit que M soit fermé. Enfin (!) si $(E_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille quelconque d'espaces vectoriels topologiques sur K , la topologie produit fait de $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ un espace vectoriel topologique, appelé espace produit. Dans $\prod_{\iota \in I} E_\iota$, le sous-espace F , somme directe des E_ι , est dense.

Pour que $\prod_\iota E_\iota$ soit complet (resp. quasi-complet), il faut et il suffit que chaque E_ι le soit .

Soit u une application linéaire continue d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F . On dit que u est un homomorphisme si l'application canonique u de $E/\overset{-1}{u}(0)$ sur u(E) qu'elle définit est un isomorphisme. Pour cela il faut et il suffit que l'image par u de tout ouvert de E soit un ouvert de u(E) . Nous verrons plus tard des critères pour qu'une application linéaire continue soit un homomorphisme.

5. Somme directe topologique de sous-espaces.

Si un espace vectoriel topologique séparé E est somme directe d'une famille finie $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de sous-espaces vectoriels, l'application $(x_i) \to \sum_{i=1}^{n} x_i$ de $\prod_{i=1}^{n} M_i$ sur E est continue ; si de plus c'est un homéomorphisme (donc un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques), on dit que E est somme directe topologique des M_i. Cela veut dire que, pour chaque indice i , l'application réciproque $x \to k_i(x)$ qui, à tout $x \in E$, fait correspondre son composant sur M_i , est continue.

Pour cela, il est nécessaire que les M_i soient fermés ; cette condition est suffisante si tous les M_i, sauf un au plus, sont de dimension finie ; nous verrons qu'elle est aussi suffisante, si E est un espace métrisable et complet.

Un projecteur u de E est une application linéaire u de E dans lui-même telle que $u^2=u$. Les k_i sont des projecteurs, et de plus vérifient les relations :

$$\begin{cases} k_i \circ k_j = \delta_{ij} \; k_i \\ \sum_{i=1}^{n} k_i = I \end{cases}$$

Réciproquement, l'existence d'applications linéaires k_i continues vérifiant ces relations décompose E en somme directe topologique des

$M_i' = k_i(E)$. Une décomposition de E en somme directe topologique de sous-espaces est donc équivalente à une décomposition de l'identité en somme finie de projecteurs continus s'annulant mutuellement.

Si E est somme directe topologique de 2 sous-espaces vectoriels M et N, on dit que N est un supplémentaire topologique de M . Cela revient à dire que l'application canonique de E/M sur N est un isomorphisme (d'espaces vectoriels topologiques). Un sous-espace vectoriel fermé M de E n'admet pas nécessairement de supplémentaire algèbrique fermé, ni à fortiori de supplémentaire topologique. Il en est cependant ainsi si E est un espace de Hilbert, ou si M est de codimension finie, ou si E est localement convexe et M de dimension finie. Pour qu'un sous-espace vectoriel M admette un supplémentaire, il faut et il suffit qu'il existe un projecteur continu u tel que $u(E)=M$. Alors $N = u^{-1}(O) = (I-u)\,(E)$.

Pour qu'une application linéaire continue u d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F soit inversible à droite (c.à.d. qu'il existe une application linéaire continue v de F dans E vérifiant $u \circ v = I$) il faut et il suffit que u soit un <u>homomorphisme</u> de E <u>sur</u> F , et que le noyau $\overset{-1}{u}(0)$ ait un supplémentaire topologique.

Pour que u soit <u>inversible à gauche</u> (c.à.d. pour qu'il existe une application linéaire continue v de F dans E vérifiant $v \circ u = I$), il faut et il suffit que u soit un isomorphisme, et que u(E) ait un supplémentaire topologique.

6 - <u>Exemples</u>.

Un corps K , considéré comme espace vectoriel sur K , est un espace vectoriel topologique. Alors si I est un ensemble d'indices quelconque, l'espace vectoriel produit K^I est un espace vectoriel topologique séparé et complet.

Soit G un espace topologique séparé. Sur l'espace C(G,F) des applications continues de G dans un espace vectoriel topologique F sur K , la topologie de la convergence compacte définit une structure d'espace vectoriel topologique sur K . Cet espace est séparé si F est séparé, complet si G est localement compact et F complet.

La topologie de la convergence uniforme sur G n'est pas en général compatible avec la structure d'espace vectoriel de C(G,F), si G n'est pas compact.

Si V est une variété indéfiniment différentiable, la topologie de la convergence compacte pour toute dérivée définit sur l'espace $\mathcal{E}(V)$ des fonctions numériques indéfiniment différentiables sur V ou sur l'espace $\mathcal{D}(V)$ des fonctions numériques indéfiniment différentiables à support compact, une topologie d'espace vectoriel sur R , $\mathcal{E}(V)$ est complet, $\mathcal{D}(V)$ est dense dans $\mathcal{E}(V)$.

Nous verrons dans la suite d'autres exemples importants (voir espaces normés).

On appelle <u>semi-norme</u> sur un espace vectoriel E une fonction numérique $p(x)$ sur E , vérifiant les propriétés suivantes :

a) $p(x) \geqslant 0$

b) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$

c) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$

Une semi-norme p , ou plus généralement une famille de semi-normes $(p_\iota)_{\iota \in I}$, définit sur E une structure d'espace vectoriel topologique, dans laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est défini par les intersections d'un nombre fini de parties $p_\iota(x) \leqslant R$, $\iota \in I$, $R > 0$. Les semi-normes p_ι sont continues pour cette topologie. Pour que cette topologie soit séparée, il faut et il suffit que les égalités $p_\iota(x) = 0$ pour tout $\iota \in I$ entraînent $x = 0$.

Rappelons qu'une <u>norme</u> sur un espace vectoriel E est une semi-norme p telle que $p(x)=0$ entraîne $x=0$. Un espace vectoriel <u>normé</u> est un espace vectoriel topologique dont la topologie est définie par une norme, alors notée $\|x\|$. Il est séparé. Un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages de 0 disqués fermés, invariant par les homothéties $\neq 0$, est alors donné par les boules $\|x\| \leqslant R$, $R > 0$.

Pour que 2 normes $p_1(x)$, $p_2(x)$, définissent sur un espace vectoriel la même topologie, il faut et il suffit que, pour $x \neq 0$, leur rapport $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ reste compris entre 2 nombres > 0 fixes. 2 telles normes sont dites <u>équivalentes</u>.

Il faudra donc soigneusement distinguer, pour deux espaces normés, les isomorphismes des structures d'espaces vectoriels normés, appelés <u>isomètries</u>, des isomorphismes des structures d'espaces vectoriels topologiques.

Un espace vectoriel normé complet sur R ou C est appelé <u>espace de Banach</u>. L'espace $C(K)$ des fonctions numériques continues sur un compact K, pour la norme $\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$, l'espace C' des mesures de Radon sur K, pour la norme $\|\mu\| = \int_K |d\mu|$, l'espace des fonctions numériques m fois continûment différentiables sur l'intervalle (a,b), pour la norme $\|f\| = \sup_{0\leqslant k\leqslant m,\, a\leqslant x\leqslant b} |f^{(k)}(x)|$, l'espace des fonctions holomorphes dans le disque $|z|<1$ du plan complexe, continues dans $|z|\leqslant 1$, pour la norme $\|f\| = \sup_{|z|\leqslant 1} |f(z)|$, l'espace L^p_μ des classes de fonctions $\tilde{f}$ de puissance p-ième sommable pour une mesure $\mu \geqslant 0$, avec la norme $\|f\| = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ $(1 \leqslant p < \infty)$, l'espace L^∞_μ des classes de fonctions mesurables essentiellement bornées pour la mesure $\mu \geqslant 0$, avec la norme $\|f\| = \text{Max.vrai}\, |f|$, sont des espaces de Banach.

Soit E un espace vectoriel sur R ou C, et $(x,y) \to B(x,y)$ une forme bilinéaire symétrique (si K = R) ou hermitienne (si K = C) telle que $B(x,x)$ soit définie $\geqslant 0$. Alors $\sqrt{B(x,x)}$ est une norme sur E ; si, pour cette structure d'espace normé, E est complet, il est appelé espace de Hilbert. Un espace de Hilbert est un espace de Banach.

§ 2. Variétés linéaires dans un espace vectoriel topologique.

1. Parties totales, parties libres.

Rappelons que dans un espace vectoriel, une <u>variété linéaire</u> est la transformée par une translation quelconque d'un sous-espace vectoriel.

Dans un espace vectoriel topologique E , l'adhérence d'une variété linéaire en est une autre. Toute variété linéaire de dimension finie de E est fermée (et tout sous-espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à K^n). Si M est un sous-espace vectoriel fermé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie, $M+F$ est fermé.

On appelle sous-espace vectoriel fermé engendré par une partie A de E l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par A. C'est le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant A . La partie A est dite <u>totale</u> si le sous-espace vectoriel fermé qu'elle engendre est E .

Exemples de parties totales : les fonctions x^n dans $C(0,1)$ (Weierstrass-Stone) ; les $e^{2i\pi nx}$ dans $C(T)$ (tore).

Une famille $(a_i)_{i \in I}$ de points de E est dite <u>topologiquement libre</u> si, quel que soit $j \in I$, le sous-espace vectoriel fermé engendré par la famille $(a_i)_{i \in I, i \neq j}$ ne contient pas a_j . Une famille topologiquement libre est algèbriquement libre. La réciproque est inexacte. Mais toute famille <u>finie</u> algèbriquement libre est topologiquement libre si E est séparé. Les $e^{2i\pi nx}$ forment une partie topologiquement libre, mais pas les x^n . L'ensemble des éléments d'une famille topologiquement libre est appelé une partie topologiquement libre.

Le théorème de Hahn-Banach nous donnera, dans les espaces localement convexes, d'importants critères pratiques. Pour qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$

soit totale dans un espace vectoriel topologique E localement convexe sur R ou C , il faut et il suffit que toute forme linéaire continue f , nulle sur les x_i , soit identiquement nulle. Pour que la famille soit topologiquement libre, il faut et il suffit qu'il existe une famille de formes linéaires continues $(f_i)_{i \in I}$, dépendant du même ensemble d'indices vérifiant $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Une telle famille est dite biorthogonale normale associée à (x_i) .

2. Hyperplans fermés.

Tout hyperplan est ou fermé ou partout dense. Pour qu'un hyperplan H soit fermé, il faut et il suffit qu'il soit défini par une équation de la forme $f(x) = \alpha$, où f est une forme linéaire continue non identiquement nulle. L'existence d'hyperplans fermés est donc équivalente à l'existence de formes linéaires continues.

Un espace vectoriel topologique n'a pas nécessairement d'hyperplan fermé ; nous verrons que dans un espace vectoriel localement convexe il y a des hyperplans fermés (donc des formes linéaires continues non triviales).

§ 3. Espaces vectoriels métrisables.

1. Définition.

Un espace vectoriel topologique E est dit métrisable si sa topologie est métrisable ; c'est alors un groupe métrisable (et il est séparé) ; sa structure uniforme peut être définie par une distance invariante $d(x,y) = |x-y|$. Pour que E soit métrisable, il faut et il suffit qu'il existe un système fondamental dénombrable de voisinages de O ; il existe alors une suite (V_n) de voisinages de O , disqués, tels que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$, et formant un système fondamental.

Un espace vectoriel normé est métrisable ; la réciproque est inexacte, ~~exemp~~ il y a des espaces vectoriels métrisables dont la topologie ne peut pas être définie par une norme. Un espace vectoriel métrisable dont la topologie peut être définie par une norme est dit <u>normable</u>.

<u>Exemples</u> : Si G est un espace topologique localement compact, dénombrable à l'infini et non compact, l'espace $C(G,K)$ des fonctions continues sur G, à valeurs dans K, muni de la topologie de la convergence compacte, est métrisable non normable. De même l'espace $\mathcal{E}(V)$ des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur une variété V non compacte, pour la topologie de la convergence compacte de chaque dérivée, est métrisable, non normable.

Un espace vectoriel métrisable, complet, localement convexe, sur R ou C, est appelé espace de Fréchet. Un espace de Banach est un espace de Fréchet.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel métrisable, tout quotient par un sous-espace vectoriel fermé, tout produit dénombrable d'espaces vectoriels métrisables, le complété d'un espace vectoriel métrisable, sont métrisables. Si E est métrisable et complet, M fermé dans E, E/M est complet.

Si E est un espace vectoriel métrisable, si (x_n) est une suite convergeant vers 0, il existe une suite de scalaires λ_n tendant vers 0, telle que la suite $\frac{x_n}{\lambda_n}$ converge encore vers 0.

Dans un espace vectoriel métrisable E toute partie absorbant toutes les parties bornées est un voisinage de 0. C'est pourquoi nous verrons que tout espace vectoriel localement convexe métrisable est bornologique.

Pour qu'une application linéaire u d'un espace vectoriel métrisable E dans un espace vectoriel topologique F soit continue, il faut et il suffit que l'image par u de toute suite de E convergeant vers O soit bornée dans F .

2 - Propriétés des espaces vectoriels métrisables complets.

Rappelons qu'un espace métrisable complet est un espace de Baire.

Théorème de Banach. Si E et F sont deux espaces vectoriels métrisables complets, toute application linéaire continue de E sur F est un homomorphisme ; toute application linéaire biunivoque et continue de E sur F est un isomorphisme. Pour qu'une application linéaire continue u de E dans F soit un homomorphisme, il faut et il suffit que u(E) soit fermé dans F .

On en déduit que 2 topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur un même espace vectoriel E faisant toutes deux de E un espace métrisable complet, ne peuvent être comparables sans être identiques.

Si $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une décomposition de E , espace vectoriel métrisable et complet, en somme directe algèbrique de sous-espaces vectoriels fermés, la somme directe est topologique. Deux sous-espaces vectoriels fermés de E , algèbriquement supplémentaires, sont topologiquement supplémentaires.

On déduit enfin du théorème : pour qu'une application linéaire u de E dans F , espaces vectoriels métrisables et complets, soit continue, il faut et il suffit que son graphe soit fermé, c.à.d. que, pour toute suite (x_n) de points de E convergeant vers O et telle que la suite $(u(x_n))$ ait une limite y , on ait $y = O$.

Remarque. Le théorème de Banach est vrai pour d'autres espaces vectoriels que les métrisables complets. C'est vrai par exemple pour les duals faibles d'espaces de Fréchet.

 14

CHAPITRE II

CONVEXITÉ, ENSEMBLES CONVEXES, ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

A partir de maintenant, le corps K des scalaires sera <u>toujours</u> le corps R des réels ou le corps C des complexes.

Tout espace vectoriel topologique sur C est, par restriction du corps des scalaires, un espace vectoriel topologique sur R . L'homothétie complexe $x \longrightarrow ix$ est alors un automorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique sur R , vérifiant $i \cdot i = -I$. Réciproquement, tout espace vectoriel topologique sur R admettant un tel automorphisme a une structure complexe associée. Tout hyperplan (resp. hyperplan fermé) H réel contient un et un seul hyperplan (resp. hyperplan fermé) complexe, $H \cap iH$.

Toutes les notions relatives à la convexité et aux cônes supposent le corps des scalaires restreint à R.

§ 1. <u>Définition et propriétés des ensembles convexes</u>.

1. <u>Définition d'un ensemble convexe</u>.

Un ensemble A d'un espace affine E est dit <u>convexe</u> si, quels que soient les points x et y de A, le segment fermé d'extrémités x et y est dans A . Cela revient à dire que, si $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda A + (1-\lambda)A \subset A$. Pour que A soit convexe il faut et il suffit que A contienne tout centre de gravité d'un nombre fini de masses positives portées par des points de A

<u>Exemples</u>. $\emptyset$, E , une variété linéaire sont convexes.

Les 2 demi-espaces algèbriquement ouverts (resp. fermés) définis par un hyperplan sont convexes. Si p est une semi-norme, l'ensemble $p(x) < R$ (resp. $p(x) \leq R$) sont convexes.

Toute intersection de convexes est un convexe. Si $E = \prod_{i \in I} E_i$, pour qu'une partie $A = \prod_i A_i$ soit convexe, il faut et il suffit que chaque A soit convexe ; donc tout parallélotope de R^n est convexe.

Si A et B sont 2 parties convexes d'un espace vectoriel E , et si α et β sont 2 scalaires, $\alpha A + \beta B$ est convexe .

Si E et F sont deux espaces affines, f une application affine de E dans F , l'image directe et l'image réciproque d'un convexe sont convexes.

Si A est une partie quelconque d'un espace affine E , on appelle <u>enveloppe convexe</u> de A l'intersection de toutes les parties convexes contenant A ; c'est donc le plus petit convexe contenant A .

Si $(A_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille quelconque de parties convexes de E , l'enveloppe convexe de leur réunion est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota x_\iota$, où $x_\iota\in A_\iota$, $\lambda_\iota\geqslant 0$ pour tout ι (et $\lambda_\iota=0$ sauf pour un nombre fini d'indices), et $\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota=1$. Par suite, l'enveloppe convexe d'une partie A est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_i\lambda_i x_i$, ou (x_i) est une famille finie quelconque de points de A , $\lambda_i>0$ pour tout i, et $\sum_i\lambda_i=1$.

2.- <u>Cônes convexes et espaces vectoriels ordonnés</u>.

Dans un espace affine E , un <u>cône</u> $\mathring{C}$ de sommet x_0 est une réunion de demi-droites fermées d'origine x_0 . Le complémentaire $\mathring{C}$ de x_0 dans C et un <u>cône épointé</u> de sommet x_0 . Dans la suite de ce numéro, E sera un espace vectoriel, et x_0 sera l'origine.

Pour qu'une partie C de E soit un cône convexe, il faut et il suffit que $C+C\subset C$ et $\lambda C\subset C$ pour tout $\lambda\geqslant 0$. Alors le sous-espace vectoriel réel engendré par C est $C-C$. Le plus grand sous-espace vectoriel réel contenu dans C est $C\cap(-C)$. Si cette intersection est $\{0\}$, alors le cône épointé, $\mathring{C}$ est convexe.

Une intersection de cônes convexes, un produit de cônes convexes, une image directe ou réciproque d'un cône convexe, sont des cônes convexes.

Une structure d'ordre sur un espace vectoriel E (sur R) est dite compatible avec sa structure d'espace vectoriel, et fait de E un espace vectoriel ordonné, si elle vérifie les deux axiomes :

 16

(EO_I) $x \leqslant y$ entraîne $x + z \leqslant y + z$

(EO_{II}) $x \geqslant 0$ entraîne $\lambda x \geqslant 0$ quel que soit $\lambda \geqslant 0$.

E est alors un groupe ordonné. Les relations $x \leqslant y$ et $x + z \leqslant y + z$ ~~ékm~~ sont équivalentes, ainsi que les relations $x \leqslant y$ et $\lambda x \leqslant \lambda y$ si $\lambda > 0$.

Si E est un espace vectoriel ordonné, l'ensemble P des éléments $\geqslant 0$ est un cône convexe, qui vérifie $P \cap (-P) = \{0\}$. Réciproquement, si P est un cône convexe d'un espace vectoriel E, vérifiant $P \cap (-P) = \{0\}$, il existe une relation d'ordre et une seule compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, et pour laquelle P soit le cône des éléments $\geqslant 0$: $x \leqslant y$ est défini par $y - x \in P$.

Si P est un cône convexe quelconque dans un espace vectoriel E, $P \cap (-P)$ est un sous-espace vectoriel H ; l'image canonique P' de P dans E/H est un cône convexe vérifiant $P' \cap (-P') = \{0\}$, et P' définit sur E/H une relation d'ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel. Cette relation d'ordre est dite associée à la relation de préordre définie par P.

Une forme linéaire f sur un espace vectoriel ordonné E est dite $\geqslant 0$ si $f(P) \geqslant 0$. Dans le dual algèbrique E de E, les formes linéaires $\geqslant 0$ forment un cône convexe Q, mais on n'a pas nécessairement $Q \cap (-Q) = \{0\}$. Pour que E^* soit un espace vectoriel ordonné par la relation $f \geqslant 0$, il faut et il suffit que P engendre E.

3.- <u>Ensembles convexes dans les espaces vectoriels topologiques</u>.

Dans un espace vectoriel topologique E(sur R ou C), l'adhérence et l'intérieur d'un convexe sont convexes.

Si x_0 est un point intérieur d'un convexe A , et si $x \in \bar{A}$, tout point du segment ouvert d'extrémités x_0 et x est <u>intérieur</u> à A . Donc si A a au moins un point intérieur, l'intérieur de $\bar{A}$ est identique à l'intérieur de A , l'adhérence de $\mathring{A}$ identique à l'adhérence de A .

On appelle <u>corps convexe</u> un ensemble fermé convexe ayant au moins un point intérieur. Dans un espace vectoriel normé sur R ou C, tous les corps convexes sont homéomorphes à la boule $\|x\| = 1$.

On appelle enveloppe convexe fermée d'une partie A de E (resp. envelopp convexe disquée fermée) l'adhérence de son enveloppe convexe (resp. l'adhérence de son enveloppe convexe disquée) ; c'est le plus petit ensemble connexe fermé (resp. convexe disqué fermé) contenant A .

4.- <u>Espaces localement convexes</u>.

Un espace vectoriel topologique localement convexe (sur R ou C) est un espace vectoriel topologique ayant un système fondamental de voisinages de O convexes. Il a alors un système fondamental $\mathfrak{G}$ de voisinages de O convexes disqués fermés (et absorbants).

Réciproquement si $\mathfrak{G}$ est une base de filtre sur E , invariante par les homothéties et formée d'ensembles convexes disqués absorbants, il existe une topologie et une seule sur E , compatible avec sa structure d'espace vectoriel, et pour laquelle $\mathfrak{G}$ soit un système fondamental de voisinages de O , et pour cette topologie, E est localement convexe. Tout espace localement convexe métrisable a un tel système fondamental $\mathfrak{G}$ dénombrable. Un espace vectoriel localement convexe métrisable et complet, est appelé <u>espace de Fréchet</u>. Un espace de Banach est un espace de Fréche

<u>Exemples.</u> Si G est un espace topologique séparé, F un espace localement convexe, C(G,F) est localement convexe. Tous les espaces normés sur R ou C sont localement convexes. Pour qu'un espace vectoriel topologique

sur R ou C soit localement convexe, il faut et il suffit que sa topologie puisse être définie par une famille de semi-normes.

Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel localement convexe, un quotient, un produit d'espaces vectoriels localement convexes, le complété d'un espace localement convexe, sont localement convexes. Sur un espace vectoriel, la borne supérieure d'une famille quelconque de topologies localement convexes est une topologie d'espace vectoriel localement convexe. En particulier, il existe, sur un espace vectoriel E sur R ou C , une topologie localement convexe plus fine que toutes les autres ; dans cette topologie, un système fondamental de voisinages de O est formé par toutes les parties convexes disquées absorbantes. Si E est muni de cette topologie, toutes les variétés linéaires de E sont fermées ; toute application linéaire de E dans un espace vectoriel localement convexe quelconque F et toute semi-norme de E sont continues.

Il en résulte que toute propriété relative aux convexes fermés ou, aux applications linéaires continues, donnera une propriété des convexes quelconques et des applications linéaires quelconques d'un espace vectoriel E non topologique puisqu'il suffira de munir E de la topologie localement convexe la plus fine.

Un point d'un convexe A de E sera dit <u>interne</u> s'il est intérieur pour la topologie localement convexe la plus fine ; pour que a soit interne, il faut et il suffit que E-a soit absorbant. Si un convexe n'a que des points internes, c.à.d. s'il est ouvert pour la topologie localement convexe la plus fine, il est ouvert pour toute topologie d'espace vectoriel pour laquelle il a un point intérieur.

5.- Limite inductive d'espaces vectoriels localement convexes.

Soient maintenant I un ensemble d'indices ordonné filtrant, et $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur R ou C , chacun étant muni d'une topologie $\mathcal{C}_\iota$, localement convexe, de telle sorte que, si $i \leq j$, E_i soit un sous-espace de E_j, $\mathcal{C}_i$ étant plus fine que la topologie induite par $\mathcal{C}_j$ sur E_i . Alors il existe sur E une topologie localement convexe la plus fine qui induise sur chaque E_ι une topologie moins fine que $\mathcal{C}_\iota$.

Dans cette topologie, un système fondamental de voisinages de 0 est formé par les ensembles convexes qui coupent chaque E_ι suivant un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}_\iota$. E, muni d'une telle topologie, est appelé <u>limite inductive</u> des E . Pour qu'une application linéaire u de E dans un espace vectoriel localement convexe quelconque F soit continue, il faut et il suffit que ses restrictions à tous les E_ι soient continues. Par exemple, la topologie localement convexe la plus fine est limite inductive des topologies des . sous-espaces vectoriels de dimension finie.

En utilisant le théorème de Hanh-Banach, on montre, dans le cas d'une limite inductive <u>dénombrable</u> et si pour $i \leq j$, $\mathcal{C}_j$ induit exactemnt sur E_i la topologie $\mathcal{C}_i$, que la topologie limite inductive $\mathcal{C}$ induit sur chaque E_i sa topologie $\mathcal{C}_i$. Si en outre tous les E_i sont complets, E est complet et les parties bornées (resp. précompactes) de E sont celles des E_i ; si tous les E_i sont des espaces de Fréchet, est appelée un espace $\mathcal{L}\mathcal{F}$.

§ 2. Les ensembles convexes dans les espaces localement convexes.

1 - Le théorème de Minkowski dans les espaces vectoriels topologiques sur R ou C .

Rappelons que deux parties non vides A,B, d'un espace vectoriel réel E sont dites séparées (resp. strictement séparées) par un hyperplan H si A est contenue dans l'un des deux demi-espaces algèbriquement fermés (resp. ouverts) définis par H , et B dans l'autre.

Théorème de Minkowski. Soient E est un espace vectoriel topologique sur R (non nécessairement localement convexe), A un ouvert convexe non vide, B un convexe non vide quelconque ; il existe un hyperplan fermé H qui les sépare.

On en déduit que si E est un espace vectoriel localement convexe sur R ; un convexe fermé et un convexe compact sans point commun peuvent être séparés strictement par un hyperplan fermé ; tout convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Soient maintenant E un espace vectoriel topologique (non nécessairement localement convexe) sur R ou C , A un convexe ouvert, V une variété linéaire ne recontrant pas A ; il existe un hyperplan fermé H contenant V et ne rencontrant pas A .

On en déduit que dans un espace vectoriel E localement convexe sur R ou C , si A est un ensemble convexe compact et V une variété linéaire fermée ne rencontrant pas A , il existe un hyperplan fermé H contenant V et ne rencontrant pas A . Toute variété linéaire fermée $\neq$ E est l'intersection des hyperplans fermés qui la contiennent. En particulier $\{0\}$ est l'intersection de tous les hyperplans fermés si E est séparé ; ceci assure l'existence d'hyperplans fermés dans les espaces vectoriels localement convexes séparés sur R ou C . Tout sous-espace vectoriel de dimension finie a des supplémentaires topologiques. On en déduit que si, sur un espace vectoriel sur R ou C , deux topologies ont les mêmes hyperplans fermés (ou les mêmes formes linéaires continues), elles ont les mêmes ensembles convexes fermés.

On déduit de ces propriétés une application à la théorie des dérivées de fonctions vectorielles (généralisation de la formule des accroissements finis) : Soit f une fonction continue dans un intervalle I de R , prenant ses valeurs dans un espace vectoriel E localement convexe séparé sur R ou C . On suppose que f admette une dérivée en tous les points de I sauf au plus une infinité dénombrable et que la dérivée $f'(x)$, en tous ces points appartienne à un ensemble fermé convexe $D \subset E$. Dans ces conditions, pour tout couple de points distincts a,b, de I , $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))$ appartient à D .

2.- <u>Prolongement des formes linéaires continues</u>. <u>Théorème de Hahn-Banach</u>.

L'équivalence entre les hyperplans fermés et les formes linéaires continues permet d'énoncer les précédentes propositions en termes de formes linéaires continues.

<u>Théorème de Hahn-Banach</u>. Soit f une forme linéaire continue définie sur un sous-espace vectoriel M d'un espace vectoriel E localement convexe sur R ou C . Il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ sur E prolongeant f.

3.- <u>Prolongement des formes linéaires</u> $\geqslant 0$ <u>dans un espace vectoriel ordonné</u>

Soit E un espace vectoriel localement convexe séparé sur R , P un cône convexe <u>ayant un point intérieur</u> et tel que $P \cap (-P) = \{0\}$, donc définissant sur E une structure d'ordre. Toute forme linéaire sur E , $\geqslant 0$, est continue. Soit M un sous-espace vectoriel de E , contenant un point intérieur de P ; toute forme linéaire $f \geqslant 0$ définie dans M peut être

22

prolongée en une forme linéaire $\bar{f} \geqslant 0$ (donc continue) sur E . Si en particulier on prend pour M la droite joignant l'origine a un point intérieur de P , on voit que cette proposition montre l'existence de formes linéaires continues $\geqslant 0$ non triviales.

Si E est un espace vectoriel localement convexe sur R, P un cône convexe vérifiant $P \cap (-P) = \{0\}$, la condition nécessaire et suffisante pour que la relation $f \quad 0$ soit une relation d'ordre sur le dual topologique E' de E (espace des formes linéaires continues) est que $P-P$ soit dense dans E .

§ 3. Ensembles compacts convexes dans les espaces localement convexes

L'enveloppe convexe d'une partie précompacte est précompacte, dans un espace localement convexe séparé E. Si E est en outre, quasi-complet, l'enveloppe convexe fermée d'une partie précompacte est compacte. Quel que soit E l'enveloppe convexe de la réunion d'un nombre fini de compacts convexes est toujours compacte . L'enveloppe disquée d'un compact est compacte.

Dans un espace vectoriel E sur R , on appelle hyperplan d'appui d'une partie non vide A de E un hyperplan H contenant au moins un point de A et tel que A soit tout entier d'un même côté de H . Si A est un corps convexe d'un espace vectoriel topologique sur R, tout hyperplan d'appui de A est fermé, et tout point frontière de A est contenu dans un hyperplan d'appui. Si A est un compact convexe d'un espace vectoriel topologique séparé sur R , H_0 un hyperplan fermé, il existe au moins un hyperplan d'appui H de A parallèle à H_0 ; il en existe un si A est contenu dans un espace vectoriel parallèle à H_0 , sinon il en existe 2 entre lesquels se trouve A .

Dans un espace vectoriel localement convexe E séparé sur R , tout corps convexe ou tout convexe compact est l'intersection de demi-espaces fermés définis par des hyperplans d'appui de A .

Un point x_0 d'un convexe A d'un espace vectoriel E est dit <u>point extrémal</u> de A si A ne contient aucun segment auquel x_0 soit intérieur . Dans un espace vectoriel localement convexe sur R , tout hyperplan d'appui fermé d'un convexe compact contient un point extrémal ; le théorème suivant affirme l'existence de points extrémaux assez nombreux : <u>Théorème de Krein-Milman</u> : tout convexe compact d'un espace vectoriel localement convexe séparé sur R ou C , est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.

On appelle <u>génératrice extrémale</u> d'un cône convexe P une génératrice dont aucun point n'est intérieur à un segment porté par P non contenu dans la génératrice. Alors si K est un compact ne contenant pas x_0 , dans un espace vectoriel localement convexe séparé sur R ou C , le cône de sommet x_0 engendré par K est fermé, et il est l'enveloppe convexe fermée de ses génératrices extrémales.

Donner des exemples abondants et variés d'applications de 3e espèce.

Je ne pense pas que le théorème sur les points fixes ait sa place ici.

§ 4. <u>Semi-normes</u>.

1. <u>Fonctions convexes, semi-normes</u>.

Etant donnée une partie H convexe d'un espace affine E sur R ou C , on dit qu'une fonction numérique f définie dans H est convexe (resp. strictement convexe) si, quels que soient les points x,x' de H , tout point du segment $M_x M_{x'}$ (M_y étant le point (y, f(y)) de $E \times R$) , distinct des extrémités, est au-dessus (resp. strictement au-dessus) du graphe de f . Cela revient à dire que l'on a l'inégalité $f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leqslant$ (resp. $<$) $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(x')$, pour tout couple de 2 points distincts x, x' de H, et $0 < \lambda < 1$, et plus généralement que, pour toute famille finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de $p \geqslant 2$ points distincts de H , et toute famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de p nombres réels λ_i , $0 < \lambda_i < 1$ $\Sigma \lambda_i = 1$, on a $f(\sum_i \lambda_i x_i) \leqslant$ (resp. $<$) $\sum_i \lambda_i f(x_i)$: si g est le centre de gravité des points x_i affectés de masses $\lambda_i > 0$, M_g est au-dessous (resp. strictement au-dessous) du centre de gravité des M_{x_i} , affectés des mêmes masses.

Pour que f soit convexe (resp. strictement convexe), il faut et il suffit que, pour toute droite réelle $D \subset E$, la restriction de f à $D \cap E$ soit convexe (resp. strictement convexe) ; pour que f soit convexe, il faut et il suffit que l'ensemble des points de $E \times R$ situés au-dessus du graphe de f soit convexe.

Une semi-norme p est une fonction convexe $\geqslant 0$, telle que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$. La valeur absolue d'une forme linéaire est une semi-norme. Toute semi-norme est continue pour la topologie localement convexe la plus fine. L'ensemble A des points x tels que $p(x) < 1$, est un ensemble convexe disqué absorbant, dont tous les points sont internes (voisinage de O ouvert disqué convexe pour la topologie localement convexe la plus fine) ; il est appelé l'<u>indicateur</u> de p .

Réciproquement si A est un ouvert convexe disqué, pour la topologie localement convexe la plus fine, il existe une semi-norme p , et une seule, dont A soit l'indicateur ; p est la <u>jauge</u> de A .

Par ailleurs, si p est une semi-norme, l'ensemble des x tels que $p(x) \leqslant 1$ est convexe, disqué, et de voisinage fermé de O pour la topologi

2 - Semi-normes dans un espace vectoriel localement convexe.

Pour qu'un espace vectoriel topologique E sur R ou C soit localement convexe, il faut et il suffit que sa topologie puisse être définie par une famille de semi-normes $(p_\iota)_{\iota\in I}$. Toute famille de semi-normes définissant la topologie est dite famille fondamentale de semi-normes. Pour que (p_ι) soit une famille fondamentale, il faut et il suffit que les intersections d'un nombre fini d'indicateurs des λp_ι , λ réel > 0 , forment un système fondamental de voisinages de 0 (ouverts convexes disqués).

Toutes les semi-normes p_ι sont continues pour la topologie définie par la famille (p_ι). Pour qu'une semi-norme p soit continue, il faut et il suffit que son indicateur soit ouvert ; il faut et il suffit qu'elle soit majorée par une combinaison linéaire d'un nombre fini des p_ι à coefficient > 0 . Une topologie localement convexe peutêtre définie par la famille Γ de toutes les semi-normes continues. L'ensemble des x tels que $p(x) \leq 1$ est l'adhérence de l'indicateur de p .

La topologie localement convexe la plus fine est définie par la famille de toutes les semi-normes.

Si E est localement convexe, toute semi-norme p continue sur E est uniformément continue ; la structure uniforme de E est définie par les écarts $p(x-y)$, où p parcourt Γ . Si E est séparé et si $\hat{E}$ est son complété, p se prolonge d'une manière unique en une semi-norme continue $\bar{p}$ sur $\hat{E}$, et toutes les semi-normes continues sur $\hat{E}$ sont les prolongements des semi-normes continues sur E .

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace localement connexe E , un système fondamental de semi-normes continues de F est constitué par les restrictions à F d'un système fondamental de semi-normes continues de E ;

un système fondamental de semi-normes continues de E/F est constitué par les $\dot{p}$, où p parcourt un système fondamental de semi-normes continues sur E, et où $\dot{p}(\dot{x}) = \inf_{z \in \dot{x}} p(z)$.

Si $(E_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'espaces vectoriels localement convexes, un système fondamental de semi-normes continues de $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$, est constitué par les fonctions p définies par $p((x_\iota)_{\iota \in I}) = \sum_{\iota \in I} p_\iota(x_\iota)$, où p_ι est une semi-norme continue sur E_ι, toutes les semi-normes p_ι étant nulles sauf pour un nombre fini d'indices ι.

La borne supérieure d'une famille quelconque de topologies localement convexes sur un espace vectoriel E sur R ou C a pour système fondamental de semi-normes continues toute réunion de systèmes fondamentaux de semi-normes de chacune des topologies.

Pour qu'un espace localement convexe E soit métrisable, il faut et il suffit qu'il ait un système fondamental dénombrable de semi-normes continues. Si E est un espace normé, il a un système fondamental de semi-normes réduit à une seule, sa norme. Pour que la topologie d'un espace localement convexe puisse être définie par une norme, il faut et il suffit qu'il ait un voisinage de 0 borné, ou un système fondamental de voisinages bornés ; on sait qu'il existe alors une infinité de normes équivalentes, c.à.d. définissant la même topologie : pour que deux normes p et q soient équivalentes, il faut et il suffit que leur rapport $\frac{p(x)}{q(x)}$ $(x \neq 0)$ soit compris entre deux nombres >0 fixes. Si E est un espace normé, la restriction de sa norme p à un sous-espace vectoriel F fait de F un espace normé ; si F est fermé, la semi-norme $\dot{p}(\dot{x}) = \inf_{z \in \dot{x}} p(z)$ est une norme sur E/F qui définit la topologie quotient et fait de E/F un espace normé.

Si $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille <u>finie</u> d'espaces normés, la semi-norme $p((x_i)) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)$ est une norme et fait de $E = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} E_i$ un espace normé, mais il existe sur le produit E beaucoup d'autres normes équivalentes utilisées dans la pratique.

3.- <u>Applications multilinéaires continues et semi-normes.</u>

<u>Théorème de Hahn-Banach et semi-normes.</u>

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$, F des espaces localement convexes.

Pour qu'une application multilinéaire u de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans F soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme p continue sur F, il existe des semi-normes q_i continue sur E_i et $a \geqslant 0$ tel que $p(u(x_1, x_2 \ldots x_n)) \leqslant a$, $q_1(x_1)\, q_2(x_2) \ldots q_n(x_n)$.

En particulier si les E_i et F sont des espaces normés, pour que u soit continue il faut et il suffit qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que
$\| u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \leqslant a \| x_1 \| \, \| x_2 \| \ldots \| x_n \|$.

La borne inférieure de ces nombres a est appelée la norme de u et notée $\| u \|$; elle définit sur l'espace vectoriel des applications multilinéaires de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F une structure d'espace vectoriel normé.

Si E est un espace vectoriel localement convexe, pour qu'une forme linéaire f sur E soit continue, il faut et il suffit qu'il existe une semi-norme p continue sur E telle que $|f| \leqslant p$; il faut et il suffit que la semi-norme $|f|$ soit continue.

Le théorème de Hahn-Banach peut se préciser de la façon suivante : si M est un sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe E sur R ou C , f une forme linéaire sur M , p une semi-norme sur E , et si $|f| \leq p$ dans M , il existe une forme linéaire $\bar{f}$ définie dans E , prolongeant f , et telle que $|\bar{f}| \leq p$. Si p est continue, $\bar{f}$ est alors continue.

En particulier, si $x_o \in E$, et si p est une semi-norme continue, il existe une forme linéaire continue f vérifiant $f(x_o) = p(x_o)$, $|f| \leq p$; .

Si E est un espace normé, le théorème de Hahn-Banach donne ceci :

si M est un sous-espace vectoriel de E , f une forme linéaire continue sur M de norme N , il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ sur E , prolongeant f , et de même norme N .

CHAPITRE III.

ESPACES D'APPLICATIONS LINÉAIRES.

§ 1. Ensembles bornés dans les espaces vectoriels localement convexes.

Rappelons qu'une partie bornée A d'un espace vectoriel topologique E d'un espace vectoriel topologique E est une partie absorbée par tous les voisinages de 0 . Alors si $B \subset A$, B est bornée, et λA est bornée. Les parties bornées de E forment un antifiltre (si E est séparé) invariant par les homothéties. On appelle système fondamental $\mathfrak{S}$ de parties bornées tout ensemble de parties bornées tel que toute partie bornée A soit contenue dans une partie λB , $B \in \mathfrak{S}$. Dans un espace normé, les boules $\|x\| \leqslant n$, forment un système fondamental dénombrable de parties bornées. Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont deux topologies différentes sur E , $\mathcal{T}'$ plus fine que $\mathcal{T}$, toute partie bornée pour $\mathcal{T}'$ est bornée pour $\mathcal{T}$; mais il peut arriver que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, distinctes, aient les mêmes parties bornées.

En général aucun voisinage de 0 n'est borné. Si E est localement convexe séparé, pour qu'il ait un voisinage de 0 borné, il faut et il suffit qu'il soit normable.

Pour qu'une partie A d'un espace localement convexe soit bornée, il faut et il suffit que toute semi-norme continue soit bornée sur A .

L'enveloppe fermée convexe disquée d'une partie bornée est bornée ; il existe un système fondamental de parties bornées, invariant par les homothéties $\neq 0$, formé de parties convexes disquées fermées. Pour qu'une partie d'un produit $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ soit bornée, il faut et il suffit que chacune de ses projections soit bornée. Si E est limite inductive d'une <u>suite</u> d'espa-ces vectoriels E_n localement convexes <u>complets</u>, pour qu'une partie $B \subset E$ soit bornée, il faut et il suffit qu'il existe un entier n tel que B soit contenue dans E_n et bornée dans E_n.

L'image d'une partie bornée par une application linéaire continue ou d'un produit de parties bornées par une application multilinéaire continue, sont bornées ; en particulier si M est un sous-espace vectoriel de E, l'image canonique dans E/M de tout borné de E est bornée.

Toute partie précompacte est bornée. Toute suite de Cauchy est bornée. Pour qu'une partie A soit bornée, il faut et il suffit que toute suite (x_n) d'éléments de A soit bornée. Pour qu'une suite (x_n) soit bornée, il faut et il suffit que, pour toute suite (λ_n) de scalaires convergeant vers 0, la suite $(\lambda_n x_n)$ converge vers 0.

Nous verrons que les parties bornées d'un espace vectoriel localement convexe ne dépendent que de sa topologie faible.

§ 2. <u>Espaces bornologiques</u>.

1.- <u>Définition</u>. Dans un espace vectoriel topologique, un voisinage de 0 absorbe toutes les parties bornées. La réciproque n'est pas exacte.

Un espace vectoriel topologique E sur R ou C est dit <u>bornologique</u> s'il est localement convexe, et si toute partie convexe absorbant les parties bornées est un voisinage de 0 ; cela revient à dire que toute semi-norme bornée sur les parties bornées est continue. Dans un tel espace un ensemble convexe absorbant les suites convergeant vers 0 est un voisinage de 0. La topologie d'un espa-ce bornologique est donc entièrement définie par les parties bornées, donc aussi par la topologie faible associée.

Tout espace quotient d'un espace vectoriel bornologique, tout produit dénombrable d'espaces bornologiques, toute limite inductive d'espaces bornologiques, sont bornologiques ; un sous-espace vectoriel d'un espace bornologique n'est pas nécessairement bornologique.

La topologie localement convexe la plus fine est bornologique. Un espace localement convexe métrisable est bornologique, ainsi que tous ses sous-espaces. Donc les espaces normés, les espaces de Banach, les espaces de Fréchet, les $\mathcal{L}\,\mathcal{F}$ sont bornologiques.

2.- Propriétés.

Une application linéaire u d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F est dite bornée si l'image par u de toute partie bornée de E est bornée dans F.

Toute application linéaire continue est bornée ; la réciproque est inexacte.

Soit E un espace localement convexe. Pour que toute application linéaire bornée de E dans un espace vectoriel localement convexe quelconque F soit continue, il faut et il suffit que E soit bornologique.

Alors toute application linéaire u de E dans F telle que l'image par u de toute suite de E convergeant vers O soit bornée dans F, est continue ; si E est bornologique, une application linéaire de E dans F est donc continue dès qu'elle est continue pour les suites.

§ 3. Espaces d'applications linéaires continues.

1) Parties équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$.

Rappelons que $\mathcal{L}(E,F)$ est l'espace vectoriel des applications linéaires continues d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F . Si F est le corps des scalaires, $\mathcal{L}(E,F)$ est le dual topologique E' de E , espace vectoriel des formes linéaires continues.

Pour qu'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ soit équicontinue, il faut et il suffit qu'elle le soit à l'origine de E ; elle est alors uniformément équicontinue.

Si H est équicontinue, son adhérence $\overline{H}$ dans l'espace de toutes les applications de E dans F , pour la topologie de la convergence simple , est encore dans $\mathcal{L}(E,F)$ et est équicontinue.

Sur toute partie H équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$, la topologie de la convergence simple sur une partie partout dense de E , la topologie de la convergence simple sur E et la topologie de la convergence uniforme sur toute partie précompacte de E , sont identiques. Autrement dit, si un filtre Φ sur H converge vers $u_0 \in \mathcal{L}(E,F)$ simplement sur une partie partout dense de E ; Φ converge vers u_0 uniformément sur toute partie précompacte de E . Si en outre F est complet, et, si un filtre Φ sur H converge ; simplement en tous les points d'une partie partout dense A de E , vers une application u_0 de A dans F , u_0 se prolonge d'une manière unique en une application linéaire continue $\overline{u}_0$ de E dans F , et Φ converge vers $\overline{u}_0$ uniformément sur toute partie précompacte de E .

En particulier si H est une partie équicontinue du dual topologique E' de E , son adhérence $\overline{H}$ dans le dual algébrique E'^* pour la topologie de la convergence simple est encore dans E' et est équicontinue.

Exemples d'applications.

1) Soit $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2i\pi xy}\, dy$, $f \in L^1$.

On a $|g| \leqslant \|f\|$, donc $f \to g(x)$ est une forme linéaire continue sur L^1. Lorsque x varie, cette forme est bornée pour f fixe, donc équicontinue. Lorsque $|x| \to \infty$, $g(x)$ tend vers 0 si f est différentiable à support compact, donc pour un sous-ensemble dense de L^1 ; donc pour $f \in L^1$, $g(x) \to 0$ pour $(x) \to \infty$ (théorème de Lebesgue).

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \longrightarrow 0$ pour $|x| \to \infty$ si $f \in L^p$, $g \in L^q$,
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

3) etc ...!

2. Les $\mathfrak{S}$ -topologies dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Soit E un ensemble quelconque, F un espace vectoriel topologique sur un corps K . Pour que, sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{L}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F , la $\mathfrak{S}$-topologie, topologie de la convergence uniforme sur une famille $\mathfrak{S}$ de parties de E soit compatible avec la structure vectorielle de $\mathcal{L}$, il faut et il suffit que, pour toute partie $A \in \mathfrak{S}$, et toute application $u \in \mathcal{L}$, $u(A)$ soit bornée dans F .

Il en est ainsi en particulier si $\mathcal{L}$ est quelconque et $\mathfrak{S}$ une famille quelconque de parties finies de E ; ou si E est un espace topologique, $\mathcal{L}$ est un sous-espace de l'espace $C(E,F)$ des applications continues de E dans F et si $\mathfrak{S}$ est une famille de parties relativement compa-ctes de E ; ou si $\mathcal{L}$ est un sous-espace de l'espace des applications continues de E dans F à valeurs bornées, et si $\mathfrak{S}$ est une famille quelconque de parties.

Dans la suite, E et F seront des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés sur R ou C . $\mathcal{L}(E, F)$ sera l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F . Alors, si $\mathfrak{S}$ est une famille quelconque de parties <u>bornées</u> de E la $\mathfrak{S}$-topologie est compatible avec la structure vectorielle de $\mathcal{L}(E,F)$ et est localement convexe. Les cas les plus importants sont : $\mathfrak{S}$ est la famille de toutes les parties finies (convergence simple, convergence faible si $F = K$) , de toutes les parties relativement compactes (convergence compacte), de toutes les parties bornées (convergence bornée, convergence forte si $F = K$). Pour que $\mathcal{L}(E,F)$ soit séparé, il faut et il suffit que la réunion des parties $A \in \mathfrak{S}$ soit totale dans E . Nous le supposerons désormais.

Soit $\overline{\mathfrak{S}}$ l'ensemble des parties des homothétiques des enveloppes convexes disquées fermées de réunions finies de parties appartenant à $\mathfrak{S}$. La $\overline{\mathfrak{S}}$-topologie est identique à la $\mathfrak{S}$-topologie. Si $\mathfrak{S}' \supset \overline{\mathfrak{S}}$ et $\neq \overline{\mathfrak{S}}$, la $\mathfrak{S}'$ topologie est strictement plus fine que la $\mathfrak{S}$-topologie. Un système fondamental de voisinages de 0 de la $\mathfrak{S}$-topologie est formé par les ensembles de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ définis par $p(u(A)) \leqslant R$, $R > 0$, où p parcourt la famille des semi-normes continues de F , A la famille des réunions finies de parties $\in \mathfrak{S}$.

Si E et F sont normés, et si $\mathfrak{S}$ est formé par la boule $\|x\| \leqslant 1$ de E , on a la topologie de la convergence bornée ; un système fondamental de voisinages de 0 de $\mathcal{L}(E,F)$ est alors formé par les boules $\|u\| \leqslant R$, $R > 0$, de sorte que $\mathcal{L}(E,F)$ est normé .

Supposons F complet et soit $\hat{E}$ le complété de E . Alors il y a identité entre les espa ces vectoriels $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(\hat{E},F)$; de plus la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathcal{L}(E,F)$ est identique à la $\mathfrak{S}$-topologie sur

$\mathcal{L}(\hat{E}, F)$, donc aussi à la $\hat{\mathfrak{S}}$-topologie de $\mathcal{L}(\hat{E}, F)$ où $\hat{\mathfrak{S}}$ est formé des adhérences dans $\hat{E}$ des parties $A \in \mathfrak{S}$. Comme en général, les parties bornées (resp. relativement compactes) de $\hat{E}$ ne sont pas nécessairement contenues dans des adhérences de parties bornées (resp. précompactes) de E, la convergence bornée (resp. compacte) dans $\mathcal{L}(\hat{E}, F)$ est en général distincte de (donc strictement plus fine que) la convergence bornée (resp. précompacte) dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Même si F est complet, $\mathcal{L}(E,F)$ n'est pas nécessairement complet. Cependant, si F est complet et E bornologique, $\mathcal{L}(E,F)$ est complet pour la $\mathfrak{S}$-topologie dès que $\mathfrak{S}$ contient toutes les parties compactes, en particulier pour la convergence compacte et la convergence bornée (alors le dual E' est complet pour la convergence compacte, et pour la topologie forte) ; si E et F sont normés, $\mathcal{L}(E,F)$ et E' sont des espaces de Banach. Il faut et il suffit, pour que E' soit complet pour la $\mathfrak{S}$-topologie, que toute forme linéaire continue sur les parties $A \in \bar{\mathfrak{S}}$, soit continue (théorème de Grothendieck). Plus généralement la complétion de E' pour la $\mathfrak{S}$-topologie est l'espace des formes continues sur les parties appartenant à $\bar{\mathfrak{S}}$.

Si maintenant F est quasi-complet, et E tonnelé, $\mathcal{L}(E,F)$ et E' sont quasi-complets pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies. Si F est quasi-complet et E sous-tonnelé, $\mathcal{L}(E,F)$ et E' sont quasi-complets pour la convergence bornée.

3.- Parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$.

Pour qu'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ soit bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie, il faut et il suffit que, pour toute $A \in \mathfrak{S}$, la réunion des $u(A)$, $u \in H$, soit bornée dans F. Si $\mathfrak{S}' \supset \mathfrak{S}$, toute partie $\mathfrak{S}'$-bornée est $\mathfrak{S}$-bornée. Ainsi toute partie de $\mathcal{L}(E,F)$, bornée pour la topologie de la convergence bornée, est bornée pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies ; si la réunion des parties de $\mathfrak{S}$ engendre E; toute partie bornée pour une $\mathfrak{S}$-topologie est bornée pour la topologie de la convergence simple. Ainsi toute partie fortement bornée du dual topologique E' est faiblement bornée.

La réciproque est inexacte, mais toute partie H de $\mathcal{L}(E,F)$, bornée pour la topologie de la convergence simple, est bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées convexes disquées complètes de E et si E est quasi complet ou tonnelé, alors les parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$ ou de E' sont les mêmes pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies, et on peut parler de parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$ ou de E' sans spécifier la topologie, pourvu que la réunion des parties de $\mathfrak{S}$ engendre E.

Une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$ ou de E' est bornée pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies. La réciproque est inexacte, mais nous verrons que, si E est tonnelé (resp. sous-tonnelé), toute partie de $\mathcal{L}(E,F)$ ou de E' bornée pour la topologie de la convergence simple (resp. bornée) est équicontinue.

§ 4. Tonneaux, espaces tonnelés et sous-tonnelés.

1) Définitions. Un tonneau d'un espa-ce localement convexe E est une partie convexe, disquée, fermée, absorbante. Il y a identité entre les tonneaux et les indicateurs des semi-normes semi-continues inférieurement sur E.

Un tonneau d'un espace localement convexe E absorbe toutes les parties bornées convexes complètes, en particulier toutes les parties convexes compactes (ou faiblement compactes). Si E est quasi-complet, un tonneau absorbe toutes les parties bornées (il en sera de même si E est tonnelé).

On dit qu'un espace vectoriel topologique E est tonnelé s'il est localement convexe et si tout tonneau est un voisinage de 0 ; ou encore si toute semi-norme semi-continue inférieurement est continue.

On dit qu'un espace est sous-tonnelé si tout tonneau absorbant les parties bornées est un voisinage de 0. Tout espace bornologique ou tonnelé est sous-tonnelé. Tout espace sous-tonnelé quasi-complet est tonnelé.

La topologie localement convexe la plus fine est tonnelée. Tout espace localement convexe de Baire est tonnelé ; donc les espaces de Fréchet (en particulier les espaces de Banach) sont tonnelés. Nous verrons que le dual fort d'un espace réflexif et qu'un espace complètement réflexifs sont tonnelés.

Tout espace quotient d'un tonnelé (resp. sous), tout produit d'espaces tonnelés (resp. sous), toute limite inductive d'espaces tonnelés (resp. sous) sont tonnelés (resp. sous) ; en particulier R^I et C^I sont tonnelés quel que soit l'ensemble d'indices I , et tout espace $\mathcal{LF}$ est tonnelé.

2) Propriétés des espaces tonnelés.

Soient E, F, deux espaces localement convexes. Pour que toute partie H de $\mathcal{L}(E,F)$, bornée pour la topologie de la convergence simple (resp. pour la topologie de la convergence bornée) soit équicontinue, il faut et il suffit que E soit tonnelé (resp. sous-tonnelé).

Si donc E est tonnelé, les parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$ sont les mêmes pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies. On en déduit le

Théorème de Banach-Steinhaus.

Si E est tonnelé, F localement convexe, séparé, et si Φ est un filtre borné ou à base dénombrable sur $\mathcal{L}(E,F)$, convergeant simplement vers une fonction u_o, alors u_o est une application linéaire continue de E dans F et Φ converge vers u_o uniformément sur toute partie précompacte de E.

Exemple d'applications.

Montrons que si (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$ entraîne $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| < +\infty$, la suite a_n est bornée.

Appelons ℓ^1 l'espace des suites (x_n) telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$, normé par $\|(x_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. ℓ^1 est un espace de Banach. Dans cet espace, (a_n) définit une application linéaire L par $(x_n) \longrightarrow (a_n x_n)$. L est limite simple de la suite d'applications linéaires continues L_k définies par $L_k((x_n)) = (a_n^{(k)} x^n)$, où $a_n^{(k)} = a_n$ si $n \leqslant k$, $a_n^{(k)} = 0$ si $n > k$. Donc L est continue ; soit N sa norme, alors $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \leqslant N \sum |x_n|$; en faisant $x_n = 1$, $x_m = 0$ pour $m \neq n$, on a $|a_n| \leqslant N$.

§ 5. Applications multilinéaires hypocontinues.

1). Définitions. Soient E_1, E_2, F, trois espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés. On dit qu'une application bilinéaire u de $E_1 \times E_2$ dans F est séparément continue, si, l'une des deux variables $x \in E_1$, $y \in E_2$, étant fixée, elle est continue par rapport à l'autre.

Pour x fixé, $y \to u(x,y)$ définit donc un élément u_x de $\mathcal{L}(E_2,F)$, et l'application $x \to u_x$ est linéaire et continue si on munit $\mathcal{L}(E_2,F)$ de la topologie de la convergence simple. Réciproquement toute application linéaire continue de E_1 dans $\mathcal{L}(E_2,F)$ muni de la topologie de la convergence simple définit une application bilinéaire séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F.

Soit maintenant $\mathfrak{S}_1$ un ensemble de parties bornées de E_1, dont la réunion est totale ; et soit u application bilinéaire séparément continue. On dit que u est hypocontinue relativement à $\mathfrak{S}_1$ si les applications u_x de E_2 dans F sont équicontinues lorsque x parcourt n'importe quelle partie $M_1 \in \mathfrak{S}_1$ (ou encore que $x \to u_x$ applique M_1 dans une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E_2,F)$). Cela revient à dire que, quels que soient $M_1 \in \mathfrak{S}_1$ et le voisinage de 0, W dans F, il existe un voisinage de 0, V_2, dans E_2, tel que $u(M_1,V_2) \subset W$. Cela revient enfin à dire que l'application $y \to u_y$ de E_2 dans $\mathcal{L}(E_1,F)$ est continue quand on munit $\mathcal{L}(E_1,F)$ de la $\mathfrak{S}_1$-topologie.

L'hypocontinuité est d'autant plus restrictive que la famille $\mathfrak{S}_1$ est plus grande ; mais l'hypocontinuité relativement à $\overline{\mathfrak{S}}_1$ est la même que relativement à $\mathfrak{S}_1$. On peut naturellement considérer les applications hypocontinues relativement à une famille $\mathfrak{S}_1$ de E_1 et une famille $\mathfrak{S}_2$ de E_2. Enfin on peut considérer une famille H équihypocontinue d'applications multilinéaires ; les conditions ci-dessus devront être uniformément vérifiées pour $u \in H$.

2) <u>Applications continues et hypocontinues.</u>

Toute application bilinéaire continue est hypocontinue, quels que soient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. La réciproque est inexacte. Mais si E_1 est un un espace vectoriel de Baire, E_2 un espace vectoriel métrisable, F un espace vectoriel topologique séparé quelconque, alors toute application bilinéaire séparément continue est continue. Elle est alors hypocontinue quels que soient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. De même tout ensemble d'applications séparément équicontinu est équicontinu, donc équihypocontinu quels que soient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$.

Si E_1 et E_2 sont tonnelés, F localement convexe séparé, toute application séparément continue est encore hypocontinue quels que soient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$, et un ensemble séparément équicontinu est équihypocontinu.

3) <u>Propriétés des applications multilinéaires hypocontinues</u>.

Si u est hypocontinue relativement à $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$, et si $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$, u est continue sur $M_1 \times E_2$, sur $E_1 \times M_2$, et uniformément continue sur $M_1 \times M_2$.

Soient G_1 et G_2 des sous-espaces vectoriels denses respectivement dans E_1 et E_2, $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées de G, (resp. G_2) tel que tout point de E_1 (resp. E_2) soit adhérent à un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$). Alors toute application bilinéaire de $G_1 \times G_2$ dans un espace vectoriel topologique séparé et complet F, hypocontinue relativement à $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$, se prolonge d'une seule manière en une application bilinéaire $\overline{u}$ séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F ; $\overline{u}$ est encore hypocontinue relativement à $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, donc relativement à $\overline{\mathfrak{S}_1}$, $\overline{\mathfrak{S}_2}$.

4) $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$-topologie.

Sur l'espace des applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F, hypocontinues relativement à $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$, on introduit la $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$-topologie, ou topologie de la convergence uniforme sur les parties $M_1 \times M_2$, $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$.

L'application linéaire continue $x \to u_x$ de E_1 dans $\mathcal{L}(E_2, F)$ muni de la $\mathfrak{S}_2$-topologie définit un élément $\tilde{u}$ de $\mathcal{L}(E_1 ; \mathcal{L}(E_2,F))$; si on munit $\mathcal{L}(E_1 ; \mathcal{L}(E_2,F))$ de la $\mathfrak{S}_1$-topologie $u \to \tilde{u}$ est un isomorphisme de l'espace des applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F muni de la $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$-topologie, dans $\mathcal{L}(E_1 ; (\mathcal{L} E_2, F))$.

Si E_1, E_2, F, sont des espaces normés, l'espace des applications bilinéaires continues de $E_1 \times E_2$ dans F et l'espace $\mathcal{L}(E_1 ; (\mathcal{L} E_2, F))$ sont des espaces de Banach et $u \to \tilde{u}$ est une isométrie : $\|u\| = \|\tilde{u}\|$.

5) Applications aux produits d'opérateurs.

Soient E, F, G, trois espaces vectoriels localement convexes. L'application $(A,B) \to B \circ A$ de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est bilinéaire ; elle est hypocontinue pour l'ensemble $\mathfrak{S}_1$ de parties de $\mathcal{L}(E,F)$ et l'ensemble $\mathfrak{S}_2$ de parties de $\mathcal{L}(F,G)$ dans les circonstances suivantes :

a) $\mathfrak{S}_2$ est l'ensemble des parties équicontinues de $\mathcal{L}(F,G)$;

b) $\mathfrak{S}_1$ est l'ensemble des parties finies (resp. compactes, resp. bornées) de $\mathcal{L}(E,F)$,

c) Les trois espaces $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(F,G)$, $\mathcal{L}(E,G)$ sont munis de la topologie de la convergence simple (resp. compacte, resp. bornée).

En particulier cette application bilinéaire est <u>continue</u> sur tout produit $\mathcal{L}(E,F)\times H$, H étant une partie équicontinue de $\mathcal{L}(F,G)$. Dans le cas particulier où F est tonnelé, toute suite de $\mathcal{L}(F,G)$ simplement convergente étant équicontinue, on voit que si la suite (A_n) converge vers A dans $\mathcal{L}(E,F)$, et la suite (B_n) vers B dans $\mathcal{L}(F,G)$, la suite $(B_n \circ A_n)$ converge vers $B\circ A$ dans $\mathcal{L}(E,G)$, les 3 espaces étant munis ensemble de la topologie de la convergence simple ou compacte ou bornée.

<u>CHAPITRE IV</u> - <u>DUALITÉ</u>

§ 1. <u>Dualité faible</u>.

1) <u>Espaces vectoriels en dualité faible</u>.

Soient E,E', deux espaces vectoriels sur R ou C , et $\langle x,x'\rangle$ une forme bilinéaire sur $E\times E'$ ayant les propriétés suivantes :

$\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout $x'\in E'$ entraîne $x = 0$

$\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout $x\in E$ entraîne $x' = 0$.

La forme bilinéaire est dite séparante, et on dit qu'elle établit une dualité faible entre E et E' .

La forme linéaire $x'\rightarrow\langle x,x'\rangle$ définit un élément $\tilde{x}$ du dual algébrique E'^* de E' ; l'application $x\longrightarrow\tilde{x}$ est biunivoque et elle définit un isomorphisme canonique de E avec un sous-espace de E'^* , avec lequel E sera identifié ; de même E' est identifié avec un sous-espace vectoriel de E^*.

Réciproquement si E est un espace vectoriel, E' un sous-espace de E^*, alors $\langle x,x'\rangle$ définit la entre E et E' une dualité faible si cette forme est séparante ; c'est ce qui se produira toujours en vertu du théorème de Hahn-Banach, si E est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et si E' est le sous-espace de E^* constitué par les formes linéaires continues sur E ou <u>dual topologique</u> de E .

Si E et E' sont deux espaces vectoriels en dualité faible, la topologie $\sigma(E,E')$ définie sur E par la convergence simple sur E' est appelée <u>topologie faible</u> définie sur E par E' ; elle est localement convexe et séparée. Un système fondamental de semi-normes est constitué par les fonctions $x \to |\langle x,x'\rangle|$, $x' \in E'$. Pour cette topologie, E' est exactement le dual topologique de E , de sorte que tout couple d'espaces en dualité peut être défini par un espace vectoriel localement convexe séparé et son dual topologique. De même E est le dual topologique de E' muni de la topologie faible $\sigma(E',E)$.

Si F' est un sous-espace de E', distinct de E', la topologie $\sigma(E,F')$ est strictement moins fine que $\sigma(E,E')$.

Si E est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, il faudra donc distinguer soigneusement sur E sa topologie initiale $\mathcal{C}$ et sa topologie faible $\sigma(E,E')$; pour cette dernière, on emploiera toujours le mot fa-ible (faiblement fermé, etc..). De même sur E' il y a un lieu de distinguer par le mot faible ce qui est relatif à la topologie fa-ible, par le mot fort ce qui est relatif à la topologie forte (topologie de la convergence bornée), sans compter les autres $\mathfrak{S}$-topologies. Remarquons que si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux topologiés localement convexes sur E , et si $\mathcal{C}'$ est plus fine que $\mathcal{C}$, la topologie faible associée à $\mathcal{C}'$ est plus fine que la topologie faible associée à $\mathcal{C}$.

Mais $\mathcal{C}'$ peut être strictement plus fine que $\mathcal{C}$ et avoir la même topologie faible.

Chaque forme linéaire $x' \to \langle x,x' \rangle$ est faiblement continue sur E' ; la topologie $\sigma(E,E')$ est la moins fine pour laquelle toutes ces formes linéaires, pour $x' \in E'$, soient continues.

La forme bilinéaire $\langle x,x' \rangle$ est faiblement séparément continue, mais non faiblement continue (sauf si E et E' sont de dimension finie).

2) Ensembles semi-polaires.

Soient E,E' deux espaces vectoriels sur R en dualité faible. Si M est une partie de E, on appelle ensemble semi-polaire de M et on note $M^{\cup}$ l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\langle M,x' \rangle \leq 1$. $M^{\cup}$ est un ensemble convexe faiblement fermé contenant $\{0\}$. $(M^{\cup})^{\cup}$ qu'on note $M^{\cup\cup}$ est l'enveloppe faiblement fermée convexe de $M \cup \{0\}$. Enfin $M^{\cup\cup\cup} = M^{\cup}$.

Si donc on se borne à considérer des ensembles faiblement fermés convexes contenant $\{0\}$ dans E et dans E', on aura toujours réciprocité : $M^{\cup\cup} = M$, et M et $M^{\cup}$ sont semi-polaires l'un de l'autre.

Si $M \subset N$, $M^{\cup} \supset N^{\cup}$. Si M est absorbé par N, $M^{\cup}$ absorbe $N^{\cup}$. Le semi-polaire de la réunion d'une famille quelconque de parties $(M_\iota)_{\iota \in I}$ est l'intersection des semi-polaires $M_\iota^{\cup}$; le semi-polaire de l'intersection des M_ι est l'enveloppe convexe faiblement fermée de la réunion des $M_\iota^{\cup}$.

Soient maintenant E, E', deux espaces vectoriels en dualité faible sur R ou C. On appelle polaire d'une partie M de E et on note M° l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $|\langle M, x' \rangle| \leq 1$.

Le polaire M^o est toujours convexe, disqué, faiblement fermé. M^{oo} est l'enveloppe convexe disquée faiblement fermée de M, et $M^{ooo}=M^o$. Si donc on se borne à ne considérer que des parties convexes disquées faiblement fermées, M et M^o sont polaires l'un de l'autre. Si $M \subset N$, $M^o \supset N^o$; si M est absorbé par N, M^o absorbe N^o. Le polaire de la réunion d'une famille de parties est l'intersection des polaires, le polaire de leur intersection est l'enveloppe connexe disquée faiblement fermée de la réunion des polaires.

3) Sous-espaces vectoriels orthogonaux.

Si M est un sous-espace vectoriel de E, son polaire M^o est un sous-espace vectoriel faiblement fermé de E', appelé orthogonal de M, c'est l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\langle M,x' \rangle = 0$. Alors M^{oo} est l'adhérence faible de M.

Soit M un sous-espace vectoriel de E. Le dual topologique M' de M muni de la topologie induite soit par la topologie initiale de E soit par $\sigma(E,E')$, est le quotient E'/M^o, (qui est aussi le dual de $\bar{M}$, adhérence faible de M). De plus $\sigma(M,M')$ est la topologie induite sur M par $\sigma(E,E')$, et $\sigma(E'/M^o, \bar{M})$ est la quotient par M^o de la topologie $\sigma(E',E)$. Si M est fermé, le dual de E/M, muni de la topologie quotient par M soit de la topologie initiale de E soit de $\sigma(E',E)$, est M^o. De plus $\sigma(E/M, M^o)$ est la topologie quotient par M de $\sigma(E,E')$, et $\sigma(M^o, E/M)$ est la topologie induite sur M^o par $\sigma(E',E)$.

§ 2. Comparaison des diverses topologies sur E .

1) Topologies compatibles avec la topologie-faible.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Sa topologie $\mathcal{E}$ est plus fine que la topologie faible $\sigma(E,E')$ définie par son dual topologique. Cependant pour ces deux topologies le dual topologique est le même, E'. Une topologie sur E est dite compatible avec la topologie faible $\sigma(E,E')$ si elle a le même dual topologique E' , c.à.d. la même topologie faible associée.

Théorème de Mackey: Pour qu'une topologie sur E soit compatible avec la topologie faible $\sigma(E,E')$, il fa-ut et il suffit qu'elle soit la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties de E', convexes, disquées, faiblement compactes, de réunion E' .

Alors un système fondamental de voisinages de 0 dans une telle topologie est formé des polaires des homothétiques de réunions finies de parties appartenant à $\mathfrak{S}'$.

Appelons $\tau(E,E')$ la topologie sur E de la convergence uniforme sur les parties convexes disquées faiblement compactes de E' ; alors pour qu'une topologie soit compatible avec la topologie faible $\sigma(E,E')$, il faut et il suffit qu'elle soit intermédiaire entre $\sigma(E,E')$ et $\tau(E,E')$. En particulier la topologie initiale $\mathcal{E}$ de E est intermédiaire entre σ et τ ; elle est identique à la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E', (qui sont faiblement relativement compactes).

Tout espace sous-tonnelé a sa topologie identique à la topologie $\tau(E,E')$; la topologie d'un tel espace est donc entièrement déterminée par la connaissa nce de la topologie faible associée.

Si un espace E a la topologie $\mathcal{T}$, il en est de même de ses quotients par des sous-espaces fermés ; tout produit de topologies $\mathcal{T}$ est une topologie $\mathcal{T}$, toute limite inductive de topologies $\mathcal{T}$ est une topologie $\mathcal{T}$.

3) Ensembles convexes fermés.

Pour qu'une topologie de E soit compatible avec la topologie faible $\sigma(E,E')$, il faut et il suffit qu'elle ait les mêmes ensembles fermés convexes ou mêmes variétés linéaires fermées, ou les mêmes tonneaux, ou les mêmes semi-normes semi-continues inférieurement que $\sigma(E,E')$. En particulier tout convexe fermé pour la topologie initiale est faiblement fermé ; les convexes fermés,... sont déterminés par la connaissance de la topologie faible. Les tonneaux de E, entièrement déterminés par sa topologie faible, sont les polaires dans E des parties faiblement bornées de E' ; la topologie dont un système fondamental de voisinages de O est constituée par les tonneaux est plus fine que $\mathcal{T}$, identique à $\mathcal{T}$ si E est tonnelé.

4) Les parties bornées de E .

Dans toutes les topologies compatibles avec la topologie faible $\sigma(E,E')$, les parties bornées sont les mêmes. En particulier toute partie faiblement bornée est aussi bornée pour la topologie initiale. Il y a identité entre les parties bornées, convexes disquées fermées de E, et les polaires des voisinages de O de E' muni de la topologie forte.

§ 3. Comparaison des diverses topologies sur E' .

1) Rappel des topologies.

Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E , dont la réunion est totale, la $\mathfrak{S}$ -topologie sur E' est localement convexe ; un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie est formé des polaires des homothétiques réunions finies de parties $A \in \mathfrak{S}$. Les plus importantes $\mathfrak{S}$ -topologies, par ordre de finesse croissante, sont : la topologie faible $\sigma(E',E)$ (convergence simple), la topologie $\tau(E',E)$ (convergence uniforme sur les parties faiblement compactes convexes), la topologie forte (convergence bornée).

Ces trois topologies sont déterminées par la seule connaissance de E et de E' ou encore de E et de sa topologie faible.

La topologie forte de E', quoique déterminée par sa topologie faible, n'est pas en général compatible avec elle, puisque plus fine que $\tau(E',E)$.

La topologie de la convergence compacte est aussi intermédiaire entre les topologies faible et forte ; elle est intermédiaire entre σ et τ si et seulement si, dans E , l'enveloppe convexe fermée d'un compact est faiblement compacte.

Rappelons que si E est normé, la topologie forte de E' peut être définie par la norme, E' est un espace normé. Dans ce cas, la forme bilinéaire $(x,x') \to \langle x,x' \rangle$ est continue. Si E n'est pas normé et si E' est muni de la $\mathfrak{S}$ -topologie, elle est seulement hypocontinue, relativement à l'ensemble de parties $\mathfrak{S}$ de E et à l'ensemble $\mathfrak{S}'$ des parties équicontinues de E' . Si E est sous-tonnelé elle est hypocontinue sur $E \times (E'$ fort) pour les ensembles de parties bornées.

2) Parties bornées de E' .

Il y a lieu de distinguer dans E', quatre catégories importantes de parties bornées. Chaque catégorie est contenue dans la suivante ; l'enveloppe convexe disquée faiblement fermée d'une partie bornée d'une de ces catégories appartient à la même catégorie .

1ère catégorie. Les parties équicontinues.

2ème catégorie. Les parties dont l'enveloppe convexe faiblement fermée est faiblement compacte.

3ème catégorie. Les parties fortement bornées.

4ème catégorie. Les parties faiblement bornées.

Si on se restreint à considèrer des parties convexes disquées faible-ment fermées de E' , chaque catégorie peut être caractérisée par les polaires de ses parties ; on obtient ainsi dans E les quatre catégories d'ensembles convexes disqués fermés, chaque catégorie étant contenue dans la suivante :

1ère catégorie. Les voisinages de 0 convexes disqués fermés.

2ème catégorie. Les voisina ges de 0 convexes disqués fermés de la topologie $\tau(E,E')$.

3ème catégorie. Les tonneaux absorbant les parties bornées.

4ème catégorie. Les tonneaux.

Ces quatre catégories peuvent être distinctes. Les trois dernières ne dépendent que de la topologie faible $\sigma(E,E')$. Les quatre catégories sont identiques si et seulement si E est tonnelé ; les trois premières sont identiques si et seulement si E est sous-tonnelé ; les deux premières sont identiques si et seulement si E a la topologie $\tau(E,E')$; les deux dernières sont identiques si E est quasi-complet ou tonnelé.

Si maintenant nous remarquons que les polaires des parties bornées de E sont les voisinages de 0 convexes disqués faiblement fermés de E' fort, nous voyons que, si E est sous-tonnelé, les polaires des parties bornées de chacun des deux espaces E, E' fort, forment un système fondamental de voisinages de 0 de l'autre, et que les polaires des voisinages de 0 de chacun d'eux forment un système fondamental de parties bornées de l'autre.

Remarquons enfin que toute partie convexe disquée absorbante faiblement fermée de E' est toujours un voisinage fort de 0 .

5) Bidual fort d'un espace localement convexe.

On appelle bidual de E le dual de E' fort. La forme linéaire $x' \rightarrow \langle x, x' \rangle$ est faiblement donc fortement continue, et par suite définit un élément $\tilde{x}$ de E'' ; l'application $x \rightarrow \tilde{x}$ de E dans E'' est linéaire biunivoque, donc permet d'identifier E à un sous-espace algèbrique de E'' . E est dense dans E'' muni de la topologie faible $\sigma(E'', E')$. Mais l'application $x \rightarrow \tilde{x}$ n'est pas en général continue ; si on munit E'' de la topologie forte de dual de E' , au contraire la topologie de E est moins fine que la topologie induite par E'' .

Un système fondamental de 0 de la topologie de E'' fort est constitué par les adhérences faibles dans E'' des tonneaux de E absorbant les parties bornées. Pour que E'' induise sur E sa topologie initiale, il faut et il suffit que E soit sous-tonnelé ; alors un système fondamental de voisinages de 0 de E'' est formé par les adhérences faibles des voisinages de 0 de E ; Si E est métrisable, il en est de même de E'' ; si E est normé, E'' est un espace de Banach, et $x \rightarrow \tilde{x}$ est une isométrie.

Pour qu'une forme linéaire sur E' appartienne à E" il faut et il suffit qu'elle soit fortement continue ; pour qu'elle appartienne à E il faut et il suffit qu'elle soit faiblement continue.

Théorème de Banach. Si E est séparé et complet, pour qu'une forme linéaire sur E' soit faiblement continue il faut et il suffit que ses restrictions aux parties équicontinues de E' soient faiblement continues.

6) Espaces réflexifs.

Un espace localement convexe E est dit réflexif (resp. complètement réflexif) si E" fort est identique à E algèbriquement (resp. topologiquement). Pour que E soit complètement réflexif, il est nécessaire et suffisant qu'il soit réflexif et tonnelé ; un espace réflexif et sous-tonnelé est complètement réflexif (donc tonnelé). Le dual d'un espace complètement réflexif est complètement réflexif. Le dual fort d'un espace réflexif est tonnelé. Un espace réflexif est quasi-complet, donc complet s'il est métrisable.

Dans le dual E' d'un espace localement convexe E , les parties convexes fermées, ou les variétés linéaires fermées, ne sont pas les mêmes pour les topologies faible $\sigma(E,E')$ et forte ; la topologie forte, plus fine que $\tau(E',E)$, n'est pas en général compatible avec la dualité faible entre E et E' . Pour que E soit réflexif, il faut et il suffit que la topologie forte de E' soit compatible avec la dualité faible entre E et E', ou encore que la topologie forte de E' soit identique à la topologie $\tau(E',E)$, ou encore que les convexes (ou les variétés linéaires) fortement fermés soient aussi faiblement fermés, ou encore que les parties bornées de E soient faiblement relativement compactes.

Exemples d'espaces réflexifs : les L^p $(1<p<\infty)$, les espaces de Hilbert, les espaces $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{D}')$, $(\mathcal{E}')$. Tous ces espaces sont complètement réflexifs.

Un espa ce de Montel est un espace localement convexe tonnelé E , où toute partie bornée est relativement compacte. Un espace de Montel E est complètement réflexif, et E' est aussi un espace de Montel.

Exemples d'espaces de Montel : $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$, $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{E}')$, l'espace des fonctions holomorphes d'un ouvert du plan complexe pour la topologie de la convergence compacte. Un espace normé de dimension infinie n'est jamais un espace de Montel.

§ 4. Transposée d'une application linéaire continue. Continuité forte et continuité faible.

1) Continuité d'une application linéaire pour diverses topologies.

Soient E,F, deux espaces localement convexes séparées, E',F', leurs duals. Une application linéaire u de E dans F est dite faiblement continue, resp. τ-continue, si elle est continue quand on munit E et F de leurs topologies faibles $\sigma(E,E')$, $\sigma(F,F')$ (resp. de leurs topologies $\tau(E,E')$, $\tau(F,F')$).

Les applications linéaires faiblement continues et les applications linéaires τ-continues de E dans F sont les mêmes ; ce sont les applications linéaires u pour lesquelles l'image réciproque de tout hyperplan fermé de F est fermée dans E .

Ceci est naturellement aussi valable pour les applications linéaires v de F' dans E' ; celles qui sont faiblement ou τ-continues sont en outre fortement continues, mais la réciproque n'est pas vraie sauf si F est réflexif.

Toute application linéaire continue de E dans F (pour les topologies initiales) est faiblement et τ-continue ; la réciproque n'est pas vraie, sauf bien entendu si E a la topologie $\tau(E,E')$.

Un homomorphisme de E dans F est aussi un homomorphisme faible. Donc un τ-homomorphisme est un homomorphisme faible. Les réciproques sont inexactes. Cependant si un homomorphisme faible u de E dans F est continu (pour les topologies initiales), et si la topologie induite sur u(E) par F est la topologie τ de u(E), alors u est un homomorphisme de E dans F pour les topologies initiales. Ainsi un homomorphisme faible de E <u>sur</u> F est un τ-homomorphisme.

De même si E a la topologie et si F est localement convexe métrisable, un homomorphisme faible de E dans F est un homomorphisme ; pour des espaces métrisables, homomorphismes et homomorphismes faibles sont identiques.

2) <u>Transposée d'une application linéaire faiblement continue</u>.

Dans ce n°, toutes les notions topologiques seront relatives aux <u>topologies faibles</u>.

Si u est une application linéaire continue de E dans F , sa transposée ${}^t u$; définie par $\langle x, {}^t u(y') \rangle = \langle u(x), y' \rangle$, est une application linéaire continue de F' dans E'. De même la transposée ${}^t v$ d'une application linéaire continue v de F' dans E' est une application linéaire continue de E dans F . On a ${}^{tt}u = u$, ${}^{tt}v = v$. Suivant les notations du chap. III, § 5, n°1, u et ${}^t u$ sont les applications associées à la forme bilinéaire séparément continue $(x,y') \rightarrow \langle u(x), y' \rangle$ sur $E \times F'$.

Soient A, B, des parties respectivement de E et F', connexes, disquées, fermées. Les relations $u(A) \subset B$, ${}^t u(B^0) \subset A^0$, $|\langle u(A), B^0 \rangle| \leqslant 1$ sont équivalentes. On en déduit que $\overset{-1}{{}^t u}(0)$ et $\overline{u(E)}$ sont l'orthogonale l'une de l'autre, de même que $\overset{-1}{u}(0)$ et $\overline{{}^t u(F')}$. Pour que u soit biunivoque, il faut et il suffit que ${}^t u(F')$ soit dense dans E' ; pour que $u(E)$ soit dense dans F , il faut et il suffit que ${}^t u$ soit biunivoque.

L'application $u \longrightarrow {}^t u$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{L}(F',E')$, tous deux munis de la topologie de la convergence simple.

Pour qu'une application continue u (resp. ${}^t u$) soit un homomorphisme, il faut et il suffit que ${}^t u\ (F')$ (resp. $u(E)$) soit fermé . Pour que u soit un isomorphisme, il faut et il suffit que ${}^t u(F')=E'$; ${}^t u$ est alors un homomorphisme F' sur E' si et seulement si $u(E)$ est fermé. Si u est un homomorphisme de E sur F , ${}^t u$ est un isomorphisme de F' dans E'.

3) <u>Transposée d'une application linéaire continue</u>.

Soient E, F, deux espaces localement convexes séparés quelconques. Si u est une application linéaire continue de E dans F ; elle est faiblement continue ; sa transposée ${}^t u$ est faiblement continue, donc aussi fortement. Si de plus E et F sont normés, on a $\|{}^t u\| = \|u\|$.

Mais une application linéaire v de F' dans E', fortement continue, n'étant pas nécessairement faiblement continue, n'est pas une transposée ; si $v = {}^t u$, u est faiblement continue, mais pas nécessairement continue pour les topologies initiales de E et F . Si F est réflexif, et si E a la topologie $\tau(E,E')$, toute application linéaire v de F' dans E', fortement continue, est la transposée d'une application linéaire u continue de E dans F .

Si E et F sont des espaces de Fréchet, u est un homomorphisme (fort ou faible) de E dans F si et seulement si ${}^t u$ est un homomorphisme faible de F' dans E' ; pour cela il faut et il suffit que u(E) soit fermé dans F ou ${}^t u(F')$ faiblement fermé dans E'. Alors pour que u soit un isomorphisme de E dans F, il faut et il suffit que ${}^t u$ soit un homomorphisme faible de F' sur E' ; pour que u soit un homomorphisme de E sur F, il faut et il suffit que ${}^t u$ soit un isomorphisme faible de F' dans E'.

4) Parties bornées et équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(F',E')$.

Nous avons vu les rapports entre les diverses $\mathfrak{S}$-topologies sur $\mathcal{L}(E,F)$. Mais il y a lieu maintenant d'en ajouter une importante : la topologie de la convergence simple faible, ou topologie de la convergence simple de $\mathcal{L}(E,F)$ considéré comme espace d'applications linéaires faiblement continues de E dans F. C'est la topologie la moins fine pour laquelle chaque forme linéaire $u \longrightarrow \langle u(x), y' \rangle$, $x \in E$, $y' \in F'$, soit continue ; les $|\langle u(x), y' \rangle|$ forment un système fondamental de semi-normes continues de cette topologie. Cette topologie n'est autre que $\sigma(\mathcal{L}(E,F), E \otimes F')$, et son dual est le produit tensoriel $E \otimes F'$. La topologie de la convergence simple a le même dual et les mêmes parties bornées, donc sa topologie faible associée est celle de la convergence simple ~~xxxxxxx~~ faible.

E' et F' étant les duals forts de E, F, nous avons dans $\mathcal{L}(F',E')$, espace des applications linéaires fortement continues, divers systèmes de $\mathfrak{S}$-topologies, $\mathfrak{S}$ étant un système de parties fortement bornées de F'. Les parties de $\mathcal{L}(F',E')$ bornées pour la convergence simple faible ne sont plus ici nécessairement bornées pour la convergence simple forte ;

elles le sont si E est quasi-complet ou tonnelé.

Nous n'étudierons pas les relations entre parties bornées pour les diverses $\mathfrak{S}$-topologies car seules les parties formées d'applications faiblement continues ont de l'intérêt ; nous les verrons plus loin.

L'application $u \to {}^t u$ est unisomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F',E')$, tous deux munis de la topologie de la convergence simple faible. Elle n'est pas continue quand on munit ces deux espaces de la topologie de la convergence simple. Elle est un isomorphisme si on munit $\mathcal{L}(E,F)$ de la topologie de la convergence bornée, $\mathcal{L}(F',E')$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F' ; en particulier si F est sous-tonnelé, elle est un isomorphisme quand on munit $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(F',E')$ de la topologie de la convergence bornée. Si E et F sont normés, E' et F' sont des espaces de Banach, ainsi que $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(F',E')$, et $u \to {}^t u$ est une isométrie, puisque $\|{}^t u\| = \|u\|$.

Soit H une partie de $\mathcal{L}(E,F)$, ${}^t H$ son image par $u \to {}^t u$. ${}^t H$ est formée d'applications faiblement continues de $\mathcal{L}(F',E')$.

Pour que H soit bornée pour la convergence simple, il faut et il suffit que ${}^t H$ soit bornée pour la convergence simple faible ; pour que H soit bornée pour la convergence bornée, il faut et il suffit que ${}^t H$ soit bornée pour la convergence simple, mais ${}^t H$ est alors bornée pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies et même équicontinue.

En particulier si E est quasi-complet, ${}^t H$ ne peut être bornée pour la convergence simple faible sans être équicontinue. Si E est tonnelé, et si H est bornée pour la convergence simple ou ${}^t H$ bornée pour la convergence simple faible, H et ${}^t H$ sont équicontinues.
