RÉDACTION N° 137

COTE : NBR 040

TITRE : LIVRE I. CHAPITRE III (ÉTAT 5) : STRUCTURES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 34

NOMBRE DE FEUILLES : 34

Archives sept. 1950

NBR 040 137 2

LIVRE I

CHAPITRE III (Etat 5)

STRUCTURES.

§ 1. ECHELLES D'ENSEMBLES.

Soient A,B,..,D des lettres. Nous allons construire au moyen de ces lettres un certain nombre d'assemblages de signes, qui seront appelés les échelons de l'échelle construite sur A,B,...,D . Ce seront les assemblages de signes qui peuvent s'obtenir par application répétée des règles suivantes :

1. Chacune des lettres A,B,...,D est un échelon.

2. Si E est un échelon, l'assemblage de signes P(E) est un échelon ;

3. Si E et F sont des échelons, l'assemblage de signes E×F est un échelon.

[L'application de la règle 3, doit cependant être modifiée comme suit : si l'échelon E par exemple contient un signe × précédé d'autant de parenthèses d'ouverture que de parenthèses de fermeture, on ne doit pas considèrer E×F , mais seulement (E)×F comme un échelon ; une règle analogue s'applique à F (cf. la situation analogue que nous avons rencontrée en énonçant les règles de formation des relations). Néanmoins, si E et F désignent des échelons, nous continuerons à dénoter par E×F l'échelon formé par application de la règle 3 . modifiée.]

Supposons maintenant que A',B',...,D' soient des ensembles d'une certaine théorie $\mathcal{C}$, en nombre égal à celui des lettres A,B,...,D . Soit E un échelon de l'échelle construite sur A,B,...,D ; si, dans l'assemblage de signes E nous remplaçons simultanément les lettres A,B,...,D (dans toutes leurs occurences) par les termes ~~xxx~~ correspondants A',B',..,D', nous obtenons un assemblage de signes qui est un terme E' de la théorie $\mathcal{C}$

de plus, "E' est un ensemble" est une relation vraie de $\mathcal{E}$. On vérifie en effet sans difficulté qu'il en est bien ainsi en procédant étape par étape de la construction de l'échelon E au moyen des règles données plus haut.

Les ensembles E' que l'on peut ainsi construire à partir des divers échelons sont appelés les <u>ensembles de l'échelle construite sur les ensembles</u> $A',B',..,D'$.

L'introduction de ces ensembles tire son intérêt des considérations qui vont suivre. Supposons données des applications $f, g,..,k$ des ensembles $A',B',...,D'$ respectivement. On peut alors associer à chaque échelon E une application φ_E de l'ensemble E' associé à E de la manière indiquée plus haut en procédant comme suit :

1. Les applications φ_A , φ_B ,...,φ_D sont les applications $f,g,...,k$ elles-mêmes ;

2. Si φ_E est déjà construite, $\varphi_{\mathcal{P}(E)}$ est l'extension canonique de φ_E à $\underline{P}(E')$, qui est égal à $(\underline{P}(E))'$;

3. Si φ_E et φ_F sont déjà construites, $\varphi_{E\times F}$ est l'application $[\varphi_E , \varphi_F]$ de l'ensemble $E'\times F'$, qui est égal à $(E\times F)'$.

Nous dirons que les applications φ_E sont les <u>extensions canoniques</u> du système d'applications $f,g,...,k$ aux ensembles de l'échelle construite sur $A',B',..,D'$. Soient maintenant $A'',B'',...,D''$ des ensembles tels que $f\langle A'\rangle \subset A''$, $g\langle B'\rangle\subset B''$,..., $k\langle D'\rangle \subset D''$. On peut alors faire correspondre à tout échelon E un ensemble E'' de l'échelle construite sur $A'',B'',...,D''$; on vérifie de proche en proche que, pour tout échelon E , φ_E applique E' dans E'' . Supposons de plus données des applications $f',g',...,k'$ des ensembles $A'',B'',...,D''$ respectivement ; si E est un échelon, désignons par ψ_E l'extension canonique correspondant à E du système $(f',g',...,k')$; c'est une application de E'' .

On vérifie sans difficulté de proche en proche que l'extension canonique correspondant à E du système d'applications $f' \circ f$, $g' \circ g, \ldots, k' \circ k$ est l'application $\psi_E \circ \varphi_E$. Considérons en particulier le cas où $f, g, \ldots, k$ sont des applications biunivoques de $A', B', \ldots, D'$ sur $A'', B'', \ldots, D''$ respectivement, et où $f', g', \ldots, k'$ sont les applications réciproques de ces applications. Les applications $\psi_E \circ \varphi_E$ sont alors les extensions canoniques du système formé par les applications identiques des ensembles $A, B, \ldots, D$; on voit tout de suite que chaque $\psi_E \circ \varphi_E$ est alors l'application identique de E' , et, de même, que chaque $\varphi_E \circ \psi_E$ est l'application identique de E'' . On en conclut que, pour tout échelon E , φ_E est une application biunivoque de E' sur E''. Nous avons donc démontré le

Théorème 1. Soient $A, B, \ldots, D$ des lettres, $A', B', \ldots, D'$ et $A'', B'', \ldots, D''$ des ensembles. Soit f une application biunivoque de A' sur A'' , g une application biunivoque de B' sur $B'', \ldots, k$ une application biunivoque de D' sur D'' . Soit E un échelon de l'échelle construite sur $A, B, \ldots, D$, et soient E' et E'' les ensembles qui correspondent à E des échelles d'ensembles sur $A', B', \ldots, D'$ et sur $A'', B'', \ldots, D''$. L'extension canonique φ_E du système $f, g, \ldots, k$ correspondant à l'échelon E est alors une application biunivoque de E' sur E'' , et l'application réciproque de φ_E est l'extension canonique correspondant à E du système formé des applications $\overset{-1}{f}$, $\overset{-1}{g}$, ..., $\overset{-1}{k}$.

Ce théorème joue un rôle fondamental dans toute la mathématique.

Reprenant les notations introduites plus haut, il est souvent commode d'introduire une lettre unique, disons φ , pour désigner simultanément toutes les applications φ_E . Ainsi, si f est une application d'un ensemble A', on désignera alors aussi par f l'extension canonque de f

à $\underline{P}(A')$, ou encore l'application $[f,f]$ de $A' \times A'$, etc.etc. Si on emploie cette notation, l'image par f d'une partie X de A' sera désignée par f(X) au lieu de la notation $f \langle X \rangle$ introduite plus haut.

L'habitude de désigner par une même lettre toutes les applications extensions canoniques d'un même système d'applications est très courante en mathématique. Cependant, cette manière de faire se heurte à des difficultés du fait que certaines notations peuvent devenir dangereusement ambigües. Soient en effet E et F des échelons distincts ; il peut fort bien arriver que les ensembles correspondants E' et F' aient des éléments communs, mais que les valeurs $\varphi_E(x)$ et $\varphi_{F(x)}$ de φ_E et de φ_F en un tel éléments x soient distinctes ; si on emploie une seule lettre pour désigner φ_E et φ_F , soit φ , on ne saura pas si $\varphi(x)$ représente $\varphi_E(x)$ ou $\varphi_F(x)$.

Par ailleurs, si x est une lettre, l'emploi de la notation $\varphi_E(x)$ n'est licite que si la relation $x \in E'$ est vraie dans la théorie dont on s'occupe. Si on introduit une nouvelle lettre x , et qu'on désire parler de $\varphi_E(x)$, il faudra donc introduire l'axiome supplémentaire $x \in E'$.

Nous verrons que l'on remédie, au moins partiellement à la difficulté signalée plus haut par l'emploi de ce qu'on appelle les <u>variables typiques</u> et les <u>termes structuraux</u>. Grosso modo, un terme structural sera un terme qui indiquera de par sa contexture même auquel des ensembles de l'échelle construite sur certains ensembles le terme doit être considéré comme appartenant quand on applique des extensions canoniques de systèmes d'applications.

§ 2. SQUELETTES TYPIQUES.

On appelle <u>squelette typique</u> une théorie $\mathcal{E}$ constituée de la manière suivante. Ses constantes se répartissent en deux catégories, celles de la première catégorie étant appelées <u>ensembles de base du squelette typique</u>, et celles de la seconde <u>objets constitutifs</u>. Les axiomes sont comme suit : pour comme suit : pour chaque ensemble de base A , on a les axiomes

(1). "A est un ensemble" et "$A \neq \emptyset$" .

En vertu de ces axiomes, tous les échelons de l'échelle construite sur les ensembles de base sont des termes de la théorie, et chacun d'eux représente un ensemble. L'échelle construite sur les ensembles de base s'appelle l'<u>échelle des types</u> du squelette typique, et chaque échelon de cette échelle s'appelle un <u>type</u>. Ceci dit, la théorie comporte, en plus des axiomes (1), pour chaque objet constitutif s un axiome de la forme

(2) $$s \in E_s$$

où E_s est un type .

A chaque constante de la théorie on associe un type, qu'on appelle le type de cette constante, de la manière suivante : si A est un ensemble de base, son type est $\underline{P}(A)$; si s est un objet constitutif, le type de s est E_s . Si c est l'une quelconque des constantes de la théorie et E son type, la relation c E est donc un théorème de la théorie.

Soit $\mathcal{E}$ un squelette typique. Choisissons un certain système $\mathcal{S}$ de lettres toutes distinctes des constantes de $\mathcal{E}$ et associons à chacune de ces lettres x un type E_x de la théorie $\mathcal{E}$. Formons la théorie $\mathcal{E}'$ qui se déduit de $\mathcal{E}$ en lui adjoignant les axiomes

$$x \in E_x$$

pour toutes les lettres x de $\mathcal{S}$. Il est clair que $\mathcal{E}'$ est encore un squelette typique, dont les ensembles de base sont les mêmes que ceux de $\mathcal{E}$ et dont les objets constitutifs sont, d'une part ceux de $\mathcal{E}$ et d'autre part les lettres de $\mathcal{S}$. On dit que $\mathcal{E}'$ est un <u>squelette typique augmenté de</u> $\mathcal{E}$, et qu'il se déduit de $\mathcal{E}$ en y typifiant les lettres de $\mathcal{S}$, ou, d'une manière plus précise, en attribuant à chacune des lettres x de $\mathcal{S}$ le type E_x .

Soit Θ la conjonction des axiomes $x \in E_x$ pour toutes les lettres x de $\mathcal{S}$. Si une relation R est vraie dans $\mathcal{E}'$, la relation $\Theta \Longrightarrow R$ est vraie dans $\mathcal{E}$, et réciproquement.

Si R est une relation quelconque qui contient au moins une lettre de $\mathcal{S}$, nous désignerons par Θ_R la conjonction de ceux des axiomes x E_x qui se rapportent à celles des lettres de $\mathcal{S}$ qui figurent dans R ; si R ne contient aucune des lettres de $\mathcal{S}$, nous conviendrons de désigner par Θ_R une relation vraie quelconque de la mathématique (on peut par exemple convenir que Θ_R sera alors la relation $\emptyset = \emptyset$) . Nous dirons que Θ_R est la <u>relation typifiante</u> de R . Ceci dit, nous allons montrer que, si R est vraie dans $\mathcal{E}'$, la relation $\Theta_R \Longrightarrow R$ est vraie dans $\mathcal{E}$.

Observons d'abord pour cela que, si E est un type quelconque de $\mathcal{E}$, la relation $E \neq \emptyset$ est vraie dans $\mathcal{E}$. Il en est ainsi si E est l'un des ensembles de base, puisque, pour tout ensemble de base A , $A \neq \emptyset$ est un axiome de $\mathcal{E}$. Par ailleurs, on sait que, si E est un ensemble quelconque, $\underline{P}(E)$ n'est pas vide (car $\emptyset \in \underline{P}(E)$) et que, si E et F sont des ensembles non vides, $E \times F$ est un ensemble non vide. Notre assertion résulte immédiatement de là .

Ceci dit, supposons que R soit vraie dans $\mathcal{C}'$. Pour chaque lettre x de $\mathcal{S}$ qui ne figure pas dans R, soit T_x le terme $\varepsilon_x(x \in E_x)$. Puisque la relation $E_x \neq \emptyset$ est vraie dans $\mathcal{C}$, il en est de même de $(\exists x)(x \in E_x)$, c'est-à-dire de $T_x \in E_x$. Ceci dit, soit Θ' la conjonction des relations $x \in E_x$ relatives à celles des lettres x de $\mathcal{S}$ qui ne figurent pas dans R ; la relation Θ est donc équivalente à " Θ_R et Θ' ", et la relation (Θ_R et Θ') $\Rightarrow$ R est vraie dans $\mathcal{C}$. Substituons y (simultanément) à toutes les lettres x de $\mathcal{S}$ qui ne figurent pas dans R les termes T_x correspondants ; nous obtenons la relation, vraie dans $\mathcal{C}$, (Θ_R et Θ'') $\Rightarrow$ R, où Θ'' est la conjonction des relations $T_x \in E_x$ pour toutes les lettres x de $\mathcal{S}$ qui ne figurent pas dans R. La relation Θ'' est donc vraie dans $\mathcal{C}$, et il en est de même de $\Theta_R \Rightarrow$ R.

En pratique, on introduit des lettres typiques au fur et à mesure qu'on en a besoin au cours de l'étude de la théorie $\mathcal{C}$ (ou de théories qui s'en déduisent par adjonction de nouveaux axiomes). A chaque étape du développement, on se trouve dans la théorie définie par la donnée des types des lettres qui ont été typifiées depuis le début du raisonnement. Ces lettres, ainsi que les constantes de $\mathcal{C}$, sont appelées les <u>lettres typiques</u> à l'étape en question du développement. Dire qu'une relation est vraie à cette étape, c'est dire qu'elle est vraie dans la théorie munie des axiomes $x \in E_x$ relatifs à toutes les lettres qui ont été typifiées jusque là. On évite naturellement, au cours d'un même développement, de typifier deux fois la même lettre de deux manières différentes.

A la fin d'un développement (par exemple à la fin de la démonstration d'un théorème), on convient tacitement de passer l'éponge sur toutes les typifications auxquelles on a procédé au cours de ce développement. Les lettres qui y ont été typifiées redeviennent alors vierges et disponibles pour être utilisées soit comme lettres non typiques soit comme lettres typiques avec des types différents. Par contre, si on veut préserver pour usage futur (à titre de théorèmes ou de propositions) certaines relations qui ont été établies comme vraies au cours du développement en question, l'énoncé de ces relations doit mentionner explicitement les types des lettres qui ont été typifiées dans le dit développement ; cependant, il résulte de ce que nous avons établi plus haut qu'il suffira de mentionner les types de celles des lettres typiques (autres que les constantes de $\mathcal{E}$) qui figurent dans la relation elle-même, sans qu'il soit besoin de faire état de toutes les lettres qui ont été typifiées au cours de sa démonstration. On fera par exemple précéder l'énoncé de la relation d'un certain nombre d'indications telles que : " Soient x un élément de A , X une partie de B , et U un ensemble de parties de $A \times C$ ", indiquant par là que x doit être considéré comme variable typique de type A , X comme variable typique de type $\underline{P}(B)$ et U comme variable typique de type $\underline{P}(\underline{P}(A \times C))$.

<u>Substitution aux lettres typiques.</u>

Soit R une relation vraie contenant (entre autres) une lettre typique x , et soit T un terme. La lettre x , étant typique, doit être considérée comme une constante de la théorie dans laquelle on se trouve. Il résulte donc des règles du raisonnement dans une théorie que l'on n'a pas le droit de conclure de la vérité de R à celle de (Sub x/T) R . Nous allons cependant montrer que cette conclusion est légitime dans certains cas. Supposons que la lettre typique x <u>ne soit pas</u> une constante du squelette typique sous-jacent $\mathcal{E}$, et soit E son type. Si la relation $T \in E$ est vraie, il en est de même de (Sub x/T)R . Soit en effet Θ_R la relation typifiante de R ; la relation $\Theta_R \Longrightarrow R$ est donc vraie dans $\mathcal{E}$.

Puisque x n'est pas une constante de $\mathcal{T}$, la relation (Sub x/T) $\Theta_R \implies$ (Sub x/T)R est vraie dans $\mathcal{T}$. Or, (Sub x/T) Θ_R est la conjonction de la relation vraie $T \in E$ et des relations vraies $y \in E_y$ pour toutes les lettres typiques y distinctes de x et des constantes de $\mathcal{T}$ qui figurent dans R ; cette relation est donc vraie, et il en est de même de (Sub x/T)R .

En raison du fait qu'il est légitime de leur substituer dans certains cas des termes, les lettres typiques <u>autres que les constantes de</u> sont appelées <u>variables typiques</u>.

~~Relations structurales. Termes structuraux.~~

Si E est l'un quelconque des types de la théorie $\mathcal{T}$, on désigne par $(\exists_E \ldots)$ et $(\forall_E \ldots)$ les quantificateurs typiques associés à la relation $x \in E$.

<u>Relations structurales</u>. <u>Termes structuraux</u>.

Soit donné un squelette typique $\mathcal{T}$. On appelle <u>relations structurales</u> de $\mathcal{T}$ celles qui peuvent s'obtenir par application répétée des règles suivantes :

1. Si x et y sont des lettres typiques, l'une de type E et l'autre de type $\underline{P}(E)$, $x \in y$ est une relation structurale.

2. Si x,y et z sont des lettres typiques de types respectifs E,F et $E \times F$, $z=(x,y)$ est une relation structurale.

3. Si R et S sont des relations structurales, non R et "$R \Rightarrow S$" sont des relations structurales.

4. Si x est une variable typique de type E et R une relation structurale, la relation $(\exists_E x)R$ est structurale.

5. Si R est une relation structurale et S une relation dans laquelle interviennent exactement les mêmes lettres que dans R , et si $R \Longleftrightarrow S$ est une relation vraie, la relation S est structurale.

Il résulte immédiatement de ces règles qu'une relation structurale ne peut contenir que des lettres typiques (constantes ou variables). Par ailleurs, il n'y a pas de moyen régulier de reconnaître si une relation donnée est structurale ou non. Cependant, nous donnerons plus loin un certain nombre de critères suffisants de structuralité qui seront en pratique suffisants pour reconnaître que celles des relations dont nous aurons besoin de savoir qu'elles sont structurales le sont en effet.

Pour reconnaître qu'une relation est structurale, on devra former une suite de relations intermédiaires dont chacune puisse être reconnue comme structurale en vertu de l'une des règles énoncées plus haut et du fait que les relations qui la précèdent sont structurales. Si on examine la règle 4., on voit que ces relations intermédiaires pourront contenir des lettres qui ne figurent pas dans la relation donnée. A une étape donnée quelconque du développement, nous reconnaîtrons comme structurale toute relation qui peut être reconnue telle <u>en introduisant si besoin est de nouvelles variables typiques</u>. Ainsi, une relation qui ne contient que les constantes de $\mathcal{E}$ (c'est le cas le plus important) peut être tenue pour structurale même s'il est nécessaire, pour s'assurer qu'elle l'est, d'introduire un nombre non spécifié de variables typiques de types non spécifiés.

Si E est un échelon de l'échelle des types, on dit qu'un terme T est un <u>terme structural de type</u> E si les conditions suivantes sont satisfaites: a) la relation $T \in E$ est vraie ; b) si x est une variable typique de type E ne figurant pas dans T , la relation $x = T$ est structurale.

Il résulte immédiatement des règles données plus haut que, si R est une relation structurale et si x et x' sont des variables typiques de type E, x' ne figurant pas dans R, la relation (Sub x/x')R est encore structurale. On en conclut que, si la condition b) est satisfaite pour un choix déterminé de la variable x, elle sera encore satisfaite pour tout autre choix.

Il convient d'observer que rien n'interdit a priori qu'un même terme puisse être en même temps structural de pàusieurs types différents.

Critères de structuralité.

Nous allons maintenant donner un assez grand nombre de critères permettant de reconnaître que des relations ou des termes sont structuraux. Pour certains d'entre eux, nous donnerons quelques brèves indications sur la manière dont on peut établir leur validité ; pour les autres, nous laisserons ce soin entièrement au lecteur.

1. Si R et S sont des relations structurales, les relations "R ou S", "R et S" et "$R \Longleftrightarrow S$" sont structurales ; la première est en effet équivalente à "(non R) $\Longrightarrow$ S", la seconde à "non (non R ou non S)" et la troisième à "$(R \Longrightarrow S)$ et $(S \Longrightarrow R)$".

2. Si R est une relation structurale et x une variable typique de type E, la relation $(\forall_E x)R$ est structurale ; elle est en effet équivalente à non $(\exists_E x)$ (non R).

3. Si x et y sont des lettres typiques de même type E, la relation $x=y$ est structurale. Introduisons en effet une variable typique X de type $\underline{P}(E)$; notre assertion sera établie si nous montrons que $x=y$ est équivalente à $(\forall_{\underline{P}(E)}X)(x \in X \Longleftrightarrow y \in X)$. Or, il est évident que la première de ces relations entraîne la seconde ; réciproquement, si nous supposons la seconde vraie, on a $y \in \{x\}$, d'où $y=x$, puisque $\{x\} \in \underline{P}(E)$.

4. Une variable typique de type E est un terme structural de type E ; cela résulte de 3 .

5. Soient R une relation structurale , x une variable typique de type E et T un terme structural de type E ; la relation $(\mathrm{Sub}\ x/T)R$ est alors structurale. Soit x' une variable typique de type E ne figurant ni dans R ni dans T , et soit R' la relation $(\mathrm{Sub}\ x/x')R$. Cette relation est structurale, et $(\mathrm{Sub}\ x/T)R$ est équivalente à $(\mathrm{Sub}\ x'/T)R'$, qui est elle-même équivalente, comme on le voit facilement, à $(\exists_E\ x')$ $(x'=T$ et $R')$.

6. Si T est un terme structural de type E , x une variable typique de type F et U un terme structural de type F , le terme $(\mathrm{Sub}\ x/U)T$ est structural de type E . La relation $T\in E$ est vraie par hypothèse ; puisque U est du même type que x , la relation $(\mathrm{Sub}\ x/U)T\in(\mathrm{Sub}\ x/U)E$ est vraie. Or, E ne contient que les constantes de $\mathcal{E}$, et $(\mathrm{Sub}\ x/U)E$ est par suite identique à E . Soit par ailleurs x' une variable typique de type E n'intervenant pas dans T ni dans U ; la relation $x'=(\mathrm{Sub}\ x/U)T$ est alors identique à $(\mathrm{Sub}\ x/U)(x'=T)$, ce qui montre qu'elle est structurale.

7. Si x et y sont des variables typiques de types E et F , (x,y) est un terme typique de type $E\times F$.

8. Si T et U sont des termes structuraux de types E et F , (T,U) est un terme structural de type $E\times F$.

9. Si T est un terme structural de type E et U un terme structural de type $\underline{P}(E)$, la relation $T\in U$ est structurale.

10. Si T et U sont des termes structuraux tous deux de types $\underline{P}(E)$, la relation $T\subset U$ est structurale. Cette relation est en effet équivalente à $(\forall_E\ x)(x\in T \implies x\in U)$, où x est une variable typique de type E n'intervenant ni dans T ni dans U .

11. Si T est un terme structural de type $\underline{P}(E)$, $\underline{P}(T)$ est un terme structural de type $\underline{P}(\underline{P}(E))$. Puisque $T \in \underline{P}(E)$ est vrai, T est un ensemble, ce qui permet de parler de $\underline{P}(T)$; de plus, on a $T \subset E$, d'où $\underline{P}(T) \subset \underline{P}(E)$ et $\underline{P}(T) \in \underline{P}(\underline{P}(E))$. Soient x une variable typique de type $\underline{P}(E)$ et y une variable typique de type $\underline{P}(\underline{P}(E))$, aucune de ces variables n'intervenant dans T. La relation $y = \underline{P}(T)$ est alors équivalente à $(\forall_{\underline{P}(E)} x)(x \in y \Longleftrightarrow x \subset T)$, ce qui montre qu'elle est structurale.

12. Soient T et U des termes structuraux de types respectifs $\underline{P}(E)$ et $\underline{P}(F)$; $T \times U$ est alors un terme structural de type $\underline{P}(E \times F)$.

13. Tout échelon E de l'échelle des types de E est un terme structural de type $\underline{P}(E)$. Vérification de proche en proche.

14. Soient R une relation structurale et x une variable typique de type E ; soit T le terme $\varepsilon_x(x \in E$ et $R)$. Supposons que les relations $(x \in E$ et $R) \Longrightarrow x = T$ et $(\exists_E\ x)R$ soient vraies ; T est alors un terme structural de type E. En effet, dire que $(\exists_E\ x)R$ est vraie, c'est dire que "$T \in E$ et $(\mathrm{Sub}\ x/T)R$" est vrai ; il résulte de là que la relation $(x \in E$ et $R)$ non seulement implique, mais est équivalente à $x = T$; or cette relation est structurale.

15. Soient R une relation structurale et x une variable typique de type E. Le terme "l'ensemble des x de E tels que R" est alors structural de type $\underline{P}(E)$. Soit X une variable typique de type $\underline{P}(E)$, et soit S la relation $(\forall_E\ x)(x \in X \Longleftrightarrow R)$. Les relations $(\exists_{\underline{P}(E)} X)S$ et $(X \in \underline{P}(E)$ et $S) \Longrightarrow X = \varepsilon_X(S)$ sont vraies ; la relation S est structurale, et $\varepsilon_X(S)$ est l'ensemble des x de E tels que R.

16. Soit X un terme structural de type $\underline{P}(\underline{P}(E))$. Le terme $\bigcup_{Y \in X} Y$ est alors structural de type $\underline{P}(E)$, et, si $X \neq \emptyset$, il en est de même du terme $\bigcap_{Y \in X} Y$. Soient x et y des variables typiques de types respectifs E et $\underline{P}(E)$; le terme $\bigcup_{Y \in X} Y$ est alors l'ensemble des x de E tels que $(\exists_{\underline{P}(E)} y)(x \in y \text{ et } y \in X)$, tandis que (si $X \neq \emptyset$), $\bigcap_{Y \in X} Y$ est l'ensemble des x de E tels que $(\forall_{\underline{P}(E)} y)(y \in X \Rightarrow x \in y)$.

17. Si X est un terme structural de type $\underline{P}(E)$, $\complement_E X$ est un terme structural de type $\underline{P}(E)$.

18. Soient T un terme structural de type E, x une variable typique de type F et Y un terme structural de type $\underline{P}(F)$. Le terme "l'ensemble des objets de la forme T pour x Y" est un terme structural de type $\underline{P}(E)$. Soit y une variable typique de type E ; le terme en question est l'ensemble des y de E tels que $(\exists_F x)(x \in Y \text{ et } y = T)$.

19. Soient X et Y des termes structuraux de types $\underline{P}(E)$ et $\underline{P}(F)$ et z une variable typique de type $\underline{P}(E \times F)$. Les relations "z est une correspondance entre X et Y", "z est une application de X dans Y", "z est une application de X sur Y", "z est une application biunivoque de X dans Y", "z est une application biunivoque de X sur Y" sont structurales. La première de ces relations est "$z \subset X \times Y$" ; la seconde est la conjonction de la relation "$z \subset X \times Y$" et des relations

$$(\forall_E x)(\forall_F y)(\forall_F y')(((x,y) \in z \text{ et } (x,y') \in z) \Rightarrow y = y')$$

et $$(\forall_E x)(x \in X \Rightarrow (\exists_F y)((x,y) \in z))$$

où x est une variable typique de type E et y, y' sont des variables typiques de type F ; ces relations sont structurales. On a une vérification analogue pour les autres relations énoncées.

Soient X,Y et f des termes ; supposons que ces termes soient structuraux de types $\underline{P}(E)$, $\underline{P}(F)$ et $\underline{P}(E \times F)$. Si la relation "f est une correspondance entre X et Y " est vraie, on dit que f est <u>une correspondance structurale entre X et Y</u> . On définit de même les notions d'<u>application structurale de X dans Y</u> , ou de X sur Y , et celles d'<u>application structurale biunivoque de X dans ou sur Y</u> .

20. Soient X,Y et Z des termes structuraux de types $\underline{P}(E)$, $\underline{P}(F)$ et $\underline{P}(G)$; soient Γ une correspondance structurale entre X et Y et Δ une correspondance structurale entre Y et Z ; $\overset{-1}{\Gamma}$ est alors une correspondance structurale entre Y et X , et $\Delta \circ \Gamma$ est une correspondance structurale entre X et Z .

21. Soient X et Y des termes structuraux de types $\underline{P}(E)$ et $\underline{P}(F)$ et Γ une correspondance structurale entre X et Y ; "le domaine de définition de Γ " et " le domaine des valeurs de Γ " sont alors des termes structuraux de types $\underline{P}(E)$ et $\underline{P}(F)$ respectivement.

22. Soient X et Y des termes structuraux de types $\underline{P}(E)$ et $\underline{P}(F)$, et soit Γ une correspondance structurale entre X et Y ; la première et la seconde fonction coordonnée sur Γ sont alors des applications structurales de Γ dans X et dans Y respectivement.

23. Soit X un terme structural de type $\underline{P}(E)$; "l'application identique de X" est alors un terme structural de type $\underline{P}(E \times E)$.

24. Soient X et X' des termes structuraux de type $\underline{P}(E)$ et Y un terme structural de type $\underline{P}(F)$; soit f une application structurale de X dans Y ; le terme $f\langle X' \rangle$ est alors un terme structural de type $\underline{P}(F)$.

25. Soient X et Y des termes structuraux de types $\underline{P}(E)$ et $\underline{P}(F)$, f une application structurale de X dans Y et t un terme structural de type E ; f(t) est alors un terme structural de type F . On a en effet d'abord $f(t) \in F$; de plus, si y est une variable typique de type F n'intervenant ni dans t ni dans f , la relation $y=f(t)$ est équivalente à $(t,y) \in f$.

26. Soient X,Y,X' et Y' des termes structuraux de types $\underline{P}(E)$, $\underline{P}(F)$, $\underline{P}(E')$ et $\underline{P}(F')$, f une application structurale de X dans Y et f' une application structurale de X' dans Y' ; $[f,f']$ est alors une application structurale de $X \times X'$ dans $Y \times Y'$. C'est en effet l'ensemble des termes de la forme $((x,x'), (f(x), f'(x')))$ pour $x \in X$ et $x' \in X'$.

27. Soient X et Y des termes structuraux de types $\underline{P}(E)$ et $\underline{P}(F)$ et f une application structurale de X dans Y ; l'extension canonique de f à $\underline{P}(X)$ est alors une application structurale de $\underline{P}(X)$ dans $\underline{P}(Y)$.

§ 3. INCARNATIONS D'UN SQUELETTE TYPIQUE.

Soit $\mathcal{S}$ un squelette typique. Soit $\mathcal{E}$ une théorie quelconque ; supposons que nous ayons associé à chaque constante de $\mathcal{S}$ un terme de , que nous désignerons systématiquement par la même lettre que la constante donnée de $\mathcal{S}$ mais munie d'une prime. Si on a une relation R ou un terme T de $\mathcal{S}$ qui ne contient pas d'autres lettres que les constantes de $\mathcal{S}$, nous désignerons par R' ou par T' la relation ou le terme de $\mathcal{E}$ qui s'en déduit en y substituant simultanément à toutes les constantes de $\mathcal{S}$ les termes de $\mathcal{E}$ que nous leur avons fait correspondre.

Supposons que, pour chaque ensemble de base A de $\mathcal{S}$, les relations "A' est un ensemble" et "$A' \neq \emptyset$" soient vraies dans $\mathcal{E}$. Alors, pour chaque échelon E de l'échelle des types sur les ensembles de base de $\mathcal{S}$, E' sera un ensemble non vide de $\mathcal{E}$. Chaque objet constitutif s de $\mathcal{S}$ a un type E_s ; supposons que les relations

$$s' \in E'_s$$

soient vraies dans $\mathcal{E}$. Nous dirons alors que nous avons défini une <u>incarnation</u> du squelette typique $\mathcal{S}$ dans la théorie $\mathcal{E}$.

Supposons maintenant qu'on typifie les lettres d'une certaine collection Σ de lettres en associant à chacune d'elles, soit x, un type E_x de la théorie $\mathcal{S}$. A chaque lettre x de Σ faisons correspondre une lettre x' (qui n'ait pas encore été employée dans le développement de la théorie $\mathcal{E}$), et formons la théorie $\mathcal{E}'$ qui se déduit de $\mathcal{E}$ en lui adjoignant les axiomes $x' \in E'_x$ pour toutes les lettres x de Σ ; l'incarnation du squelette $\mathcal{S}$ se prolonge alors par une incarnation du squelette typique déduit de $\mathcal{S}$ en lui adjoignant les axiomes $x \in E_{x'}$.

Supposons maintenant que l'on ait deux incarnations distinctes du même squelette typique $\mathcal{S}$ dans la théorie $\mathcal{E}$, qui associent aux constantes c de $\mathcal{S}$ l'une des termes c' et l'autre des termes c" . Si R (ou T) désigne une relation (ou un terme) de $\mathcal{S}$ qui ne contient que les constantes de $\mathcal{S}$, nous définirons R' (ou T') comme plus haut, et R" (ou T") de manière analogue, relativement à la seconde incarnation de $\mathcal{S}$.

Nous supposerons de plus que l'on a, pour chaque ensemble de base A de $\mathcal{S}$, une application biunivoque φ_A de A' sur A" . Pour chaque type E de $\mathcal{S}$ on en déduit alors une application biunivoque φ_E de E' sur E" , extension canonique du système formé par les applications φ_A pour les ensembles de base A . De plus, nous ferons l'hypothèse que, pour tout objet constitutif s de $\mathcal{S}$, la relation

$$\varphi_{E_s}(s') = s''$$

soit vraie dans $\mathcal{E}$. On dit alors que le système des applications φ_A est un <u>isomorphisme</u> de la première incarnation avec la seconde .

Nous allons considérer des relations R qui peuvent contenir d'autres lettres que les constantes de $\mathcal{S}$, mais qui sont des relations structurales. Supposons que l'on typifie les lettres d'un système Σ en attribuant à chacune d'elles, soit x , un type E_x . On pourra alors prolonger les deux incarnations données de $\mathcal{S}$ en faisant correspondre à chacune des lettres x de Σ deux lettres nouvelles x' et x" (qui seront distinctes de toutes les lettres utilisées jusque là et qui, notamment, ne figureront dans aucun des termes c' ou c" de que l'on a associés aux constantes de $\mathcal{E}$, non plus que dans les termes φ_A et qui ne seront pas des constantes de $\mathcal{E}$). Nous désignerons par $\mathcal{E}^*$ la théorie déduite de $\mathcal{E}$ en lui adjoignant les axiomes

$$x' \in E'_x \quad ; \quad x'' \in E''_x \quad ; \quad x'' = \varphi_{E_x}(x')$$

pour toutes les lettres x de $\sum$. On remarquera d'ailleurs que la relation $x'' \in E''_x$ est une conséquence des relations $x' \in E'_x$ et $x'' = \varphi_{E_x}(x')$; car on sait que, pour tout échelon E , φ_E est une application biunivoque de E' sur E'' .

Si R est une relation, on désignera par R' (resp.:R'') la relation qu'on en déduit en y substituant à chaque constante c de $\mathcal{S}$ qui y intervient le terme c' (resp.:c'') et à chaque lettre x de $\sum$ qui y intervient la lettre x' (resp.:x''). Nous ferons une convention analogue en ce qui concerne les termes.

Ceci dit, supposons que la relation R soit structurale, et qu'elle puisse être reconnue telle en ne typifiant aucune autre lettre que celles de $\sum$. Nous allons alors montrer que

<u>la relation</u> $R' \Longleftrightarrow R''$ <u>est vraie dans</u> $\mathcal{C}^*$.

Cet énoncé métamathématique constitue ce que nous appelerons le <u>théorème de transport</u>.

1. Supposons que R soit la relation $x \quad y$, où x et y sont des lettres de $\sum$ de types respectifs E et $\underline{P}(E)$. La relation $x'' \in y''$ est alors équivalente dans $\mathcal{C}^*$ à $\varphi_E(x') \in \varphi_{\mathcal{P}(E)}(y')$; or on a $x' \in E'$, $y' \in \underline{P}(E')$ et $\varphi_{\underline{P}(E)}$ est l'extension canonique de φ_E à $\underline{P}(E')$. On a donc $\varphi_{\underline{P}(E)}(y') = \varphi_E \langle y' \rangle$, et il est clair que la relation $x' \in y'$ entraîne $\varphi_E(x') \in \varphi_E \langle y' \rangle$. Par ailleurs, la relation $x' \in y'$ est équivalente à $\overset{-1}{\varphi}_E(x'') \in \overset{-1}{\varphi}_{\underline{P}(E)}(y'')$, et $\overset{-1}{\varphi}_{\underline{P}(E)}$ est l'extension canonique de $\overset{-1}{\varphi}_E$ à $\underline{P}(E'')$; on voit alors comme plus haut que la relation $x'' \in y''$ entraîne $x' \in y'$.

2. Supposons que la relation R soit $z=(x,y)$, où x,y et z sont des lettres typiques de types respectifs E,F et $E\times F$. La relation $z''=(x'',y'')$ est alors équivalente dans $\mathcal{C}^*$ à la relation $\varphi_{E\times F}(z')=(\varphi_E(x'),\varphi_E(y'))$. Or, les relations $x'\in E'$, $y'\in F'$ et $z'\in E'\times F'$ sont vraies, et $\varphi_{E\times F}=[\varphi_E,\varphi_F]$; il en résulte que R' entraîne R'' dans $\mathcal{C}^*$; on verrait de même que R'' entraîne R'.

3. Supposons qu'on ait des relations R et S pour lesquelles on sache déjà que les relations $R'\Longleftrightarrow R''$ et $S'\Longleftrightarrow S''$ sont vraies. Il est alors clair que (non R') est non R', que (non R)'' est non R'', que $(R\Longrightarrow S)'$ est $R'\Longrightarrow S'$ et que $(R\Longrightarrow S)''$ est $R''\Longrightarrow S''$; de plus, les relations (non R')$\Longleftrightarrow$(non R'') et $(R'\Longrightarrow S')\Longleftrightarrow(R''\Longrightarrow S'')$ sont vraies.

4. Supposons qu'on ait une relation R pour laquelle on sait déjà que la relation $R'\Longleftrightarrow R''$ est vraie. Soit x une lettre de Σ de type E ; nous voulons montrer que $((\exists_E x)R)'\Longleftrightarrow((\exists_E x)R)''$ est vraie (dans $\mathcal{C}^*$). Nous allons d'abord mettre les deux termes de cette équivalence sous des formes équivalentes. Soit $\bar{x}$ une lettre qui n'a pas encore été utilisée (en particulier, $\bar{x}$ ne figure pas dans R, est différente des lettres y' et y'' que l'on a fait correspondre aux lettres de Σ et n'intervient dans aucun des termes que l'on a considérés jusqu'ici). Soit $\bar{R}$ la relation (Sub $x/\bar{x}$)R. La relation $(\exists_E x)R$ est identique à $(\exists_E \bar{x})\bar{R}$, donc encore à $(\exists\bar{x})(\bar{x}\in E$ et $\bar{R})$. On en déduit que $((\exists_E x)R)'$ et $((\exists_E x)R)''$ sont respectivement identiques à $(\exists\bar{x})(\bar{x}\in E'$ et $\bar{R}')$ et $(\exists\bar{x})(\bar{x}\in E''$ et $\bar{R}'')$. Par ailleurs, R' est (Sub $\bar{x}/x'$)$\bar{R}'$ et R'' est (Sub $\bar{x}/x''$)$\bar{R}''$.

Ceci dit, supposons que $((\exists_E x)R)'$ soit vrai dans $\mathcal{C}^*$. On peut alors introduire une constante auxiliaire ξ' (on choisit une lettre qui n'a pas encore été utilisée) avec l'axiome introducteur

" $\xi' \in E'$ et (Sub $\bar{x}/\xi'$)$\bar{R}'$ ". Soit $\mathcal{C}^*_1$ la théorie ainsi formée. Désignons par $\mathcal{C}^*_2$ la théorie qui se déduit de $\mathcal{C}^*_1$ en en supprimant les axiomes $x' \in E'$, $x'' \in E''$ et $x'' = \varphi_{E_x}(x')$. Les lettres x' et x'' ne sont alors plus des constantes de $\mathcal{C}^{*x}_2$, et la relation

$$(x' \in E' \text{ et } x'' \in E'' \text{ et } x'' = \varphi_E(x')) \Longrightarrow (R' \Rightarrow R'')$$

est vraie dans $\mathcal{C}^*_2$. Désignons par ξ'' le terme $\varphi_E(\xi')$; puisque $\xi' \in E'$ est vrai dans $\mathcal{C}^*_2$, il en est de même de $\xi'' \in E''$. La relation " $\xi' \in E'$ et $\xi' \in E''$ et $\xi'' = \varphi_E(\xi')$ " étant vraie dans $\mathcal{C}^*_2$, x'' n'intervenant pas dans R' ni x' dans R'', il résulte de la règle de substitution que (Sub x'/ξ')R' $\Longrightarrow$ (Sub x''/ξ'')R'' est vrai dans $\mathcal{C}^*_2$, donc, <u>a fortiori</u>, dans $\mathcal{C}^*_1$. Or la relation (Sub x'/ξ')R', qui est identique à (Sub $\bar{x}/\xi'$)$\bar{R}'$, est vraie dans $\mathcal{C}^*_1$. Il en est donc de même de (Sub x''/ξ'')R'', qui est identique à (Sub $\bar{x}/\xi''$)$\bar{R}''$. Les relations $\xi'' \in E''$ et (Sub $\bar{x}/\xi''$)$\bar{R}''$ étant vraies dans $\mathcal{C}^*_1$, il en est de même de $(\exists\, \bar{x})(\bar{x} \in E''$) et $\bar{R}''$), c'est-à-dire de $((\exists_E x)R)''$. Cette dernière relation ne contenant pas ξ'' est donc vraie dans $\mathcal{C}^*$. Il résulte alors du théorème de la déduction qu'en tout état de cause $((\exists_E x)R)' \Longrightarrow ((\exists_E x)R)''$ est vraie dans $\mathcal{C}^*$. On verrait de même, en utilisant $\overset{-1}{\varphi}_E$ au lieu de φ_E, que $((\exists_E x)R)'' \Longrightarrow ((\exists_E x)R)'$ est vrai ~~qx~~ dans $\mathcal{C}^*$; il en résulte que $((\exists_E x)R)' \Longleftrightarrow ((\exists_E x)R)''$ est vrai dans $\mathcal{C}^*$.

5. Supposons que l'on ait une relation R pour laquelle on sait que $R' \Longleftrightarrow R''$ est vrai dans $\mathcal{C}^*$, et que l'on ait une relation S telle que $R \Longleftrightarrow S$ soit vrai dans la théorie déduite de $\mathcal{S}$ en y typifiant les lettres de Σ. On sait alors que les relations $R' \Longleftrightarrow S'$ et $R'' \Longleftrightarrow S''$ sont vraies dans $\mathcal{C}^*$; il en résulte aussitôt que $S' \Longleftrightarrow S''$ est vraie dans $\mathcal{C}^*$.

Si on se reporte à la définition de la notion de relation structurale, on voit qu'il résulte de ce que nous avons établi que, pour toute relation structurale R qui peut être reconnue telle en ne typifiant que les lettres de Σ , la relation $R' \Longleftrightarrow R''$ est vraie dans $\mathcal{E}^*$.

Le théorème de transport est donc démontré. De plus, on observera que les ensembles E', E'' des échelles construites sur les ensembles de $\mathcal{E}$ qui correspondent aux ensembles de base de $\mathcal{S}$ dans nos deux incarnations sont tous non vides. On établit alors sans difficulté que la relation $R' \Longleftrightarrow R''$ est encore vraie dans la théorie qui se déduit par adjonction à $\mathcal{E}$ des seuls axiomes $x' \in E'_x$, $x'' \in E''_x$, $x'' = \varphi_{E_x}(x')$ relatifs aux lettres x de Σ qui figurent dans R . En particulier, si R ne contient que des constantes de $\mathcal{S}$, et est structurale, la relation $R' \Longleftrightarrow R''$ est vraie dans $\mathcal{E}$.

Montrons maintenant que, si T est un terme structural de type E , ~~sx~~ les relations $T' \in E'$, $T'' \in E''$ et $\varphi_E(T') = T''$ sont vraies dans $\mathcal{E}^*$. En ce qui concerne les deux premières, cela résulte simplement du fait que $T \in E$ est une relation vraie de la théorie $\mathcal{S}$, munie au besoin de variables typiques. Soit par ailleurs t une lettre typique de type E n'intervenant pas dans E ; on peut supposer que t appartient à Σ (sinon, on l'y adjoindrait, ce qui, comme on l'a vu, ne change rien). Il résulte alors du théorème de transport que les relations $t' = T'$ et $t'' = T''$ sont équivalentes dans $\mathcal{E}^*$. Or la relation $t'' = \varphi_E(t')$ est vraie dans $\mathcal{E}^*$; on en conclut tout de suite qu'il en est de même de $T'' = \varphi_E(T')$.

Le dernier énoncé que nous venons de démontrer s'appelle le théorème de transport pour les termes.

§ 4. THÉORIES STRUCTURALES.

On appelle <u>théorie structurale</u> une théorie $\mathcal{S}$ constituée par un squelette typique $\mathcal{S}_0$, dont les constantes sont exactement les mêmes que celles de $\mathcal{S}$, et auquel on adjoint un certain nombre d'axiomes qui sont des <u>relations structurales de</u> $\mathcal{S}_0$ (ne contenant naturellement que les constantes de $\mathcal{S}_0$) ; ces nouveaux axiomes sont appelés les <u>axiomes spécifiques</u> de la théorie structurale $\mathcal{S}$.

Les ensembles de base et objets constitutifs de $\mathcal{S}_0$ sont aussi appelés ensembles de base et objets constitutifs de $\mathcal{S}$; l'échelle des types de $\mathcal{S}_0$ est aussi appelée l'échelle des types de $\mathcal{S}$. Dans l'étude d'une théorie structurale $\mathcal{S}$, on utilise des variables typiques de la même manière que dans l'étude de $\mathcal{S}$.

<u>Exemples</u>.

1. <u>Théorie de l'ordre</u>. Elle comporte un ensemble de base A , un objet constitutif Ω avec l'axiome typique

$$\Omega \in \underline{P}(A \times A)$$

et les axiomes spécifiques suivants :

$$\Omega \circ \Omega \subset \Omega \; ; \quad \Omega \circ \overset{-1}{\Omega} = I$$

où I est l'application identique de A . On vérifie tout de suite que cette théorie est structurale. On désigne le plus souvent la relation $(x,y) \in \Omega$ par "$x \leqslant y$" ; cette relation s'appelle la <u>relation d'ordre</u>. Les relations

$$(x \leqslant y) \text{ et } (y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$$
$$(x \leqslant y) \text{ et } (y \leqslant x) \Longrightarrow x = y$$

sont vraies dans la théorie de l'ordre.

2. <u>Lois de composition</u>. Si A,B et C sont des ensembles, une application de $A \times B$ dans C est appelée une <u>loi de composition entre éléments de</u> A <u>et de</u> B <u>à valeurs dans</u> C ; une loi de composition entre éléments de A et de A à valeurs dans A est appelée une <u>loi de composition dans</u> A .

Considérons un squelette typique dans lequel les axiomes typiques des objets constitutifs f sont de la forme

$$f \in \underline{P}((A \times B) \times C)$$

où , pour chaque objet constitutif f, A,B et C sont des ensembles de base du squelette, distincts ou non. Adjoignons à ce squelette typique tous les axiomes

f est une application de $A \times B$ dans C

où f parcourt le système des objets constitutifs et où A,B et C sont les ensembles de base qui figurent dans l'axiome typique de f . Nous obtenons ainsi une théorie structurale ; une théorie définie de cette manière s'appelle la théorie d'un certain système de lois de composition.

3. <u>Topologie</u>. C'est une théorie qui comporte un seul ensemble de base A , un seul objet constitutif $\underline{U}$ avec l'axiome typique

$$\underline{U} \in \underline{P}(\underline{P}(A)) ,$$

et les axiomes suivants :

$$\bigcup_{U \in \underline{U}} U = A$$

$$(\forall_{\underline{P}(\underline{P}(A))}\underline{X})(\underline{X} \subset \underline{U} \Rightarrow \bigcup_{U \in \underline{X}} U \in \underline{U})$$

$$(\forall_{\underline{P}(A)}U)(\forall_{\underline{P}(A)}U')((U \in \underline{U} \text{ et } U' \in \underline{U}) \Rightarrow U \cap U' \in \underline{U})$$

On vérifie sans difficulté que cette théorie est structurale. La relation $U \in \underline{U}$ s'énonce "U est ouvert" ; $\underline{U}$ s'appelle l'ensemble des ensembles ouverts.

Relations et termes intrinsèques.

Soit $\mathcal{S}$ une théorie structurale, et soit $\mathcal{S}_0$ le squelette typique de $\mathcal{S}$. Il peut arriver qu'une relation R, sans être structurale dans $\mathcal{S}_0$, soit équivalente dans la théorie $\mathcal{S}$, à une relation structurale de $\mathcal{S}_0$. Toute relation qui est équivalente dans $\mathcal{S}$ à une relation structurale de $\mathcal{S}_0$ est appelée une relation intrinsèque de $\mathcal{S}$. Si T est un terme et E un type de $\mathcal{S}$, T est appelé un terme intrinsèque de type E de $\mathcal{S}$ si les conditions suivantes sont satisfaites : a) la relation $T \in E$ est vraie dans $\mathcal{S}$; b) si x est une variable typique de type E ne figurant pas dans T, la relation $x=T$ est intrinsèque.

Remarque. Quand nous parlons de relations vraies dans $\mathcal{S}$, et que ces relations contiennent des variables typiques, nous voulons naturellement dire que ces relations sont vraies dans la théorie déduite de $\mathcal{S}$ en y typifiant ces variables.

Supposons par exemple que $\mathcal{S}$ soit la théorie d'un système de lois de composition, et soit f une de ces lois, qui est une loi de composition entre éléments de A et de B à valeurs dans C, A, B et C étant des ensembles de base. Soient x et y des variables typiques de types respectifs A et B ; si on emploie le symbole $f(x,y)$ dans le squelette typique de $\mathcal{S}$, il faut naturellement supposer que ce symbole est défini au moyen d'une définition universelle (cf. Théorie des ensembles, § 10), c'est-à dire que c'est le terme $\varepsilon_z(((x,y),z)\in f)$. Ce terme n'est alors pas un terme structural de $\mathcal{S}_0$; mais c'est un terme intrinsèque de $\mathcal{S}$, car, u et u' étant des variables typiques de type C, les relations $(\exists_C u)(((x,y),u)\in f)$ et $((((x,y),u)\in f) \text{ et } (((x,y),u')\in f)) \Rightarrow u=u'$

sont vraies dans $\mathcal{S}$, de sorte que la relation $u=f(x,y)$ est équivalente dans $\mathcal{S}$ à la relation structurale $((x,y),u) \in f$. D'une manière générale, on peut dire, grosso modo, qu'un objet dont l'existence et l'unicité résultent des axiomes de $\mathcal{S}$ pourra être représenté par un terme intrinsèque de $\mathcal{S}$.

Il est clair que toute relation structurale est intrinsèque, et que tout terme structural de type E est un terme intrinsèque de type E .

Particularisation d'une théorie structurale.

Soit $\mathcal{S}$ une théorie structurale. Formons une théorie qui se déduise de $\mathcal{S}$ en lui adjoignant un certain nombre d'axiomes dont chacun est une relation intrinsèque de $\mathcal{S}$ ne contenant que les constantes de $\mathcal{S}$. Nous obtenons alors une théorie $\mathcal{S}_1$ qui est appelée une particularisation de la théorie $\mathcal{S}$. La théorie $\mathcal{S}_1$ n'est plus nécessairement structurale au sens que nous avons donné plus haut à ce terme. Cependant, chacun des nouveaux axiomes que nous avons adjoints est équivalent dans $\mathcal{S}$ à une relation structurale, et la théorie $\mathcal{S}_1$ est donc équivalente à la théorie structurale qui se déduirait de $\mathcal{S}$ en lui adjoignant certaines relations structurales comme nouveaux axiomes. Nous conviendrons d'appeler encore structurale toute théorie qui est une particularisation d'une théorie structurale.

Exemples. 1. Partons de la théorie de l'ordre, et adjoignons-lui l'axiome $\Omega \cup \overset{-1}{\Omega} = A \times A$; nous obtenons alors une théorie structurale qui s'appelle la théorie de l'ordre total.

2. Partons de la théorie d'une seule loi de composition f dans un ensemble de base A , et ajoutons-y l'axiome

$$(\exists_A e)((\forall_A x)(f(x,e) = x \text{ et } f(e,x)=x)$$

qui s'énonce "la loi de composition f admet un élément unité" ; nous obtenons alors ce qu'on appelle la <u>théorie du monoïde à élément unité</u>. Dans cette théorie, le terme $\varepsilon_e(e \in A \text{ et } (\forall_A x)(f(x,e)=x \text{ et } f(e,x)=x)$ est intrinsèque ; en effet, les relations $e \in A$ et $e' \in A$ $(\forall_A x)(f(x,e)=x \text{ et } f(e,x)=x)$ et $(\forall_A x)(f(x,e')=x \text{ et } f(e',x)=x)$ entraînent $f(e,e')=e'$ et $f(e,e')=e$, d'où $e=e'$, d'où notre assertion découle facilement. Le terme en question s'appelle l'<u>élément unité</u>.

3. Partons de la topologie, et adjoignons-lui l'axiome

$$(\forall_A x)(\forall_A y)(x \neq y \Rightarrow (\exists_{\underline{P}(A)} U)(\exists_{\underline{P}(A)} V)(U \in \underline{U} \text{ et } V \in \underline{U} \text{ et } x \in U \text{ et } y \in V \text{ et } U \cap V = \emptyset) .$$

Nous obtenons alors une théorie qui s'appélle la <u>topologie séparée</u>.

$$(\forall_A x)(\forall_A y)(\forall_A z)(f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z))$$

qui s'énonce "la loi de composition f est associative". Nous obtenons alors ce que l'on appelle la <u>théorie du monoïde</u>. Adjoignons encore à cette théorie l'axiome

§ 5. STRUCTURES.

Soit $\mathcal{S}$ une théorie structurale, et soit $\mathcal{S}_0$ le squelette typique de $\mathcal{S}$. Supposons donnée une incarnation de $\mathcal{S}_0$ dans une théorie $\mathcal{T}$, définie en associant à chaque ensemble de base A de $\mathcal{S}$ un ensemble A' de $\mathcal{T}$ et à chaque objet constitutif s de $\mathcal{S}$ un terme s' de $\mathcal{T}$. On peut alors associer à toute relation structurale R ne contenant que les constantes de $\mathcal{S}$ une relation R' qu'on déduit de R en substituant aux constantes de $\mathcal{S}$ les termes de $\mathcal{T}$ qu'on leur a fait correspondre. Supposons maintenant que, pour tout axiome R de $\mathcal{S}$, la relation R' correspondante soit vraie dans la théorie $\mathcal{T}$. On dit alors qu'on a défini une <u>structure d'espèce</u> $\mathcal{S}$ sur le système des ensembles A' qui correspondent aux ensembles de base de $\mathcal{S}$, et que cette structure est définie par la donnée des objets s' qui correspondent aux objets constitutifs de $\mathcal{S}$. Les ensembles qui correspondent aux ensembles de base de $\mathcal{S}$ s'appellent les <u>ensembles de base</u> de la structure considérée, et les objets s' qui correspondent aux objets constitutifs s de $\mathcal{S}$ s'appellent les <u>objets constitutifs</u> de la structure.

Une fois définie une structure d'espèce $\mathcal{S}$ dans une théorie $\mathcal{T}$, il est clair que chaque théorème de $\mathcal{S}$ engendrera, par substitution, un théorème de la théorie $\mathcal{T}$. Ainsi, une fois démontré un théorème d'une théorie structurale, on obtient automatiquement des théorèmes de toutes les théories dans lesquelles on peut introduire des structures de l'espèce qui correspond à la théorie structurale considérée.

<u>Exemples</u>. 1. Pour se donner une structure d'ordre sur un ensemble A', il faut se donner une partie Ω' de $A'\times A'$ telle que les relations $\Omega'\circ\Omega'\subset\Omega'$, $\Omega'\cap\overset{-1}{\Omega'} = I'$ (où I' est l'application identique de A')

soient vraies. Au lieu de se donner l'ensemble Ω', on se donne souvent (ce qui revient au même) une relation dont Ω' soit le graphe ; cette relation s'appelle la relation d'ordre de la structure en question. Un ensemble muni d'une structure du type défini par la théorie de l'ordre s'appelle un <u>ensemble ordonné</u>.

2. Pour se donner sur un ensemble A' une structure du type défini par la théorie du monoïde à élément unité, il faut se donner une loi de composition f dans A' telle que les conditions $x \in A'$, $y \in A'$ et $z \in A'$ entraînent $f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)$ et que la relation $(\exists e)(e \in A' \text{ et } (\forall x)(x \in A' \Rightarrow (f(x,e)=x \text{ et } f(e,x)=x)))$ soit vraie. On dit alors que A' est un <u>monoïde à élément unité</u>.

3. Pour se donner sur un ensemble A' une structure du type défini par la théorie de la topologie, il faut se donner un ensemble $\underline{U}'$ de parties de A' qui possède les propriétés suivantes : 1) l'application identique de $\underline{U}'$ est un recouvrement de A' ; 2) pour toute partie $\underline{X}'$ de $\underline{U}'$, la réunion des ensembles de $\underline{X}'$ est dans U' ; 3) l'intersection de deux ensembles de $\underline{U}'$ est dans $\underline{U}'$. On dit alors que A' est un <u>espace topologique</u>, que les ensembles de $\underline{U}'$ sont les <u>ensembles ouverts</u> de cet espace topologique, et que les éléments de A' en sont les points.

<u>Transport de structure</u>.

Supposons donnée une structure d'espèce $\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est une théorie structurale. Faisons correspondre à chaque ensemble de base A de $\mathcal{S}$ une application biunivoque φ_A de l'ensemble de base A' de la structure correspondant à A sur un ensemble A". A chaque type E de la théorie $\mathcal{S}$ correspondent alors un ensemble E' de l'échelle construite sur les ensembles de base de la structure et une application biunivoque de E' sur un ensemble E", qui n'est autre que l'ensemble de l'échelle construite sur les ensembles A" (images des ensembles de base de la structure) qui correspond à E . Si s est un objet constitutif de $\mathcal{S}$ de type E_s , poson $s'' = \varphi_{E_s}(s')$, où s' est l'objet constitutif de la structure qui correspond à s . Les ensembles A" et les objets s" définissent donc une seconde incarnation du squelette typique de $\mathcal{S}$, et le système des applications φ_A est un isomorphisme de l'incarnation réalisée par la structure donnée avec cette seconde incarnation. A chaque relation structurale R de $\mathcal{S}$ ne contenant que les constantes de $\mathcal{S}$ on peut faire correspondre deux relations R' et R" , une pour chacune des deux incarnations du squelette typique de $\mathcal{S}$. Il résulte alors du théorème de transport que ces deux relations sont équivalentes dans la théorie $\mathcal{E}$ En particulier, si R est un axiome de $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$, la relation R' est vraie, puisque nous sommes partis d'une structure d'espèce $\mathcal{S}$. Il en résulte qu'il en est de même de R" ; on en déduit que la <u>donnée des objets</u> s" <u>définit une structure d'espèce</u> $\mathcal{S}$ <u>sur les ensembles</u> A" <u>qui corresponden aux ensembles de base de</u> $\mathcal{S}$. On dit que cette nouvelle structure d'espèce $\mathcal{S}$ est celle qui se déduit de la structure donnée par le <u>transport de structure</u> défini par les applications φ_A .

Supposons maintenant qu'on se donne <u>a priori</u> deux structures $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ d'espèce $\mathcal{S}$. Faisons correspondre à chaque ensemble de base A de $\mathcal{S}$ une application φ_A de l'ensemble de base A' de $\mathcal{S}'$ qui correspond à A . Nous dirons que ce système d'applications est un <u>isomorphisme</u> de $\mathcal{S}'$ avec $\mathcal{S}''$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) pour chaque ensemble de base A de $\mathcal{S}$, φ_A est une application biunivoque de A' sur l'ensemble de base A" de $\mathcal{S}''$ qui correspond à A ;

b) la structure $\mathcal{S}''$ est identique à celle qui se déduit de $\mathcal{S}'$ par le transport de structure défini par les applications φ_A .

Supposons qu'il en soit ainsi. Donnons nous encore un système d'applications ψ_A des ensembles de base A" de $\mathcal{S}''$ qui soit un isomorphisme de $\mathcal{S}''$ avec un troisième structure $\mathcal{S}'''$ d'espèce $\mathcal{S}$. On voit alors tout de suite que le système des applications $\psi_A \circ \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'$ avec $\mathcal{S}'''$. Par ailleurs, le système des applications φ_A^{-1} est un isomorphisme de $\mathcal{S}''$ avec $\mathcal{S}'$, qu'on appelle <u>réciproque</u> de l'isomorphisme défini par les applications φ_A . On appelle <u>automorphisme</u> de la structure $\mathcal{S}'$ tout isomorphisme de $\mathcal{S}'$ avec elle-même.

Deux structures de même espèce sont dites <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme de l'une de ces structures avec l'autre.

Soit maintenant $\mathcal{S}_1$ une particularisation de la théorie structurale $\mathcal{S}$. Supposons données deux structures isomorphes $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ d'espèces $\mathcal{S}$ et un isomorphisme de la première de ces structures avec la seconde. A tout axiome R de $\mathcal{S}_1$ correspondent des relations R' et R" ; si les relations R' qui correspondent aux axiomes de $\mathcal{S}_1$ sont vraies, il en est de même des relations R" , puisque les relations R sont équivalentes dans $\mathcal{S}$ à des relations structurales. On voit donc que, si la structure $\mathcal{S}'$ est aussi une structure d'espèce $\mathcal{S}_1$, il en est de même de $\mathcal{S}''$. Ainsi, tout espace muni d'une structure définie par une loi de composition dans un ensemble et qui est isomorphe à un monoïde (resp.: à un monoïde à élément unité) est un monoïde (resp.: un monoïde à élément unité),. Appelons espace topologique séparé tout ensemble muni d'une structure de l'espèce "topologie séparée" ; on voit alors que tout espace topologique isomorphe à un espace topologique séparé est lui-même séparé.

Soit T un terme intrinsèque d'une théorie structurale $\mathcal{S}$. Donnons-nous deux structures $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ d'espèce $\mathcal{S}$ et un isomorphisme de $\mathcal{S}'$ avec $\mathcal{S}''$. Cet isomorphisme est défini par un système d'applications φ_A des ensembles de base de $\mathcal{S}'$ sur ceux de $\mathcal{S}''$. Soit φ_E l'extension canonique du système des applications φ_A relative à l'échelon E . On déduit (par substitution) de T des termes T' et T"; il résulte du théorème de transport pour les termes que l'on a $\varphi_E(T')=T''$.

Par exemple, si A' est un monoïde à élément unité, il correspond au terme "élément unité" de la théorie du monoïde à élément unité un élément de A' qui s'appelle l'<u>élément unité</u> de A' . Il résulte alors de ce que nous venons de dire que, pour tout isomorphisme φ d'un monoïde à élément unité ~~@~~A' sur un monoïde à élément unité A" , φ applique l'élément unité de A' sur celui de A" .

Si on considère maintenant une relation structurale R qui contient des variables typiques $x,\dots,z$ autres que les constantes de $\mathcal{S}$, pour lui faire correspondre des relations R' et R" , il faudra adjoindre à la théorie $\mathcal{T}$ des axiomes $x'\in E'_x,\dots,z'\in E'_z$, $x''\in E''_x,\dots,z''\in E''_z$ (où $E_x,\dots,E_z$) sont les types de $x,\dots,z$). Il résulte alors du théorème de transport que la relation $R'\Longleftrightarrow R''$ sera vraie dans la théorie qu'on obtient en adjoignant encore les axiomes $x''=\varphi_{E_x}(x'),\dots,z''=\varphi_{E_z}(z')$. Mais on peut donner une autre forme à ce résultat. Supposons donnés des termes $\xi',\dots,\zeta'$ de la théorie $\mathcal{T}$ tels que les relations $\xi'\in E'_x,\dots,\zeta'\in E'_z$ soient vraies ; posons $\xi'=\varphi_{E_x}(\xi'),\dots,\zeta'=\varphi_{E_z}(\zeta')$. Soient R'_1 et R''_1 les relations déduites de R en y substituant aux constantes de $\mathcal{S}$ les ensembles de base et objets constitutifs des structures $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ et aux lettres $x,\dots,z$ les termes $\xi'',\dots,\zeta'$ en ce qui concerne R' et les termes

$\xi'', \dots, \zeta''$ en ce qui concerne R''_1. La relation $R'_1 \Longleftrightarrow R''_1$ sera alors vraie dans $\mathcal{E}$.

Considérons par exemple le cas de la topologie. Soit X une variable typique de type $\underline{P}(A)$; la relation " $\complement_A X \in \underline{U}$ " s'énonce alors " X est fermé ". Si A' est un espace topologique, et $\underline{U}'$ l'ensemble des parties ouvertes de A', une partie X' de A' est dite fermée si le complémentaire de X' par rapport à A' est un ensemble ouvert de A'. On voit alors que, si φ est un isomorphisme de l'espace topologique A' avec un espace topologique A", l'image par φ de tout ensemble fermé de A' est un ensemble fermé de A".

Ensembles de base privilégiés.

Soit $\mathcal{S}$ une théorie structurale. Un isomorphisme d'une structure $\mathcal{S}'$ d'espèce $\mathcal{S}$ avec une structure $\mathcal{S}''$ de la même espèce est défini par la donnée, pour chaque ensemble de base A de $\mathcal{S}$ d'une application biunivoque de l'ensemble de base A' de $\mathcal{S}'$ qui correspond à A sur celui, A", de $\mathcal{S}''$. Cependant, il arrive parfois que l'on désire restreindre le sens du mot isomorphisme en ne considérant comme isomorphismes que les systèmes d'applications tels que, pour un certain nombre d'ensembles de base spécifiés A de $\mathcal{S}$, l'application φ_A soit l'application identique. Si on fait une convention de cette nature, on dit que les ensembles de base sur lesquels porte cette convention sont les ensembles de base privilégiés du type de structure en question. Bien entendu, le fait que certains ensembles de base soient privilégiés ne change rien à l'étude d'une théorie structurale déterminée ni même à celle d'une structure de l'espèce correspondante ; ce n'est que la notion d'isomorphisme de deux structures qui se trouve modifiée.
