LIVRE VI
INTEGRATION
CHAPITRE V (ETAT 2)
MESURES DEFINIES PAR DES DENSITES

Rédaction n° 136

Nombre de pages : 96

Nombre de feuilles : 96

A 136 [2]

LIVRE VI

INTÉGRATION

CHAPITRE V (Etat 2)

MESURES DÉFINIES PAR DES DENSITÉS

Sommaire.

- suite -

Commentaires

L'idée émise au Congrès de Pâques 1950 de faire Lebesgue-Nikodym avant l'intégration par rapport à une mesure de base μ s'est révélée impraticable, car il faut avoir la formule $(fg).\mu = f.(g.\mu)$ pour faire L-N. dans le cas général. Par contre, l'idée de reporter la mesure induite après les mesures définies par des densités est excellente à l'usage, car elle permet de montrer que tous les canulars de la mesure induite ont leur source dans les canulars des mesures de base μ (cf. § 3, th.1).

Le rédacteur soulève à nouveau la question de l'étude de la topologie faible de L^1 (actuellement en exercices au § 2), que tous les spécialistes considèrent comme très importante (cf. la revue du Livre de Halmos faite par Kakutani dans Math. Rev.) .

INTÉGRATION

CHAPITRE V (Etat 2)

MESURES DÉFINIES PAR DES DENSITÉS

§ 1. Mesures définies par des densités numériques.

1. Fonctions localement intégrables.

DÉFINITION 1.- On dit qu'une fonction f définie dans E, à valeurs dans un espace de Banach F, est localement intégrable si, pour tout point $x \in E$, il existe un voisinage compact V de x tel que la fonction $f\varphi_V$ soit intégrable.

PROPOSITION 1.- Pour qu'une fonction f soit localement intégrable, il faut et il suffit que f soit mesurable et que pour tout ensemble $A \subset E$ intégrable et relativement compact, $f\varphi_A$ soit intégrable.

La condition étant évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Soit K un ensemble compact quelconque dans E ; par hypothèse, pour tout $x \in K$, il existe un voisinage compact V_x de x tel que $f\varphi_{V_x}$ soit intégrable. Il existe un recouvrement de K par un nombre fini de voisinages V_{x_i}, et une partition de K en un nombre fini d'ensembles intégrables M_j tels que chacun des ensembles $K \cap V_{x_i}$ soit réunion d'un nombre fini des M_j ; comme $f\varphi_{M_j} = f\varphi_{V_{x_i}}\varphi_{M_j}$ si $M_j \subset V_{x_i}$, $f\varphi_{M_j}$ est intégrable, et il en est donc de même de $f\varphi_K = \sum_j f\varphi_{M_j}$; à fortiori, pour tout ensemble intégrable $A \subset K$, $f\varphi_A = f\varphi_K\varphi_A$ est intégrable. En outre, comme $f\varphi_{V_x}$ est intégrable, donc mesurable, le principe de localisation montre que f est mesurable.

On aura soin de noter que si A est un ensemble intégrable non relativement compact, $f\varphi_A$ n'est pas nécessairement intégrable. Par exemple, la fonction $f(x)=x$ est localement intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; si A est la réunion des intervalles $\left[n,n+\frac{1}{2}\right]_n$, A est intégrable mais on voit aussitôt que $\int^* f\varphi_A\,d\mu \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

COROLLAIRE.- Si f est une fonction localement intégrable, toute fonction mesurable g telle que $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ localement presque partout est localement intégrable.

En effet, pour tout ensemble compact $K \subset E$, on a presque partout $|g\varphi_K| \leqslant |f\varphi_K|$, donc (chap.IV, §5, th.5) $g\varphi_K$ est intégrable.

En particulier, toute fonction mesurable f bornée dans chaque ensemble compact, est localement intégrable,. De même, pour tout nombre p tel que $1 \leqslant p < +\infty$, toute fonction $f \in \mathcal{L}^p_F$ est localement intégrable, car pour tout ensemble compact K, φ_K appartient à $\mathcal{L}^q$, donc $f\varphi_K$ est intégrable (chap.IV, §6, th.).

PROPOSITION 2.- Pour qu'une fonction f soit localement intégrable, il faut et il suffit que, pour toute fonction numérique g, continue et à support compact, la fonction fg soit intégrable.

La condition est nécessaire, car fg, produit de fonctions mesurables, est mesurable ; en outre, si K est le support de g, on a $|fg| \leqslant \|g\| \cdot |f\varphi_K|$, donc $|fg|$ est d'intégrale supérieure finie, ce qui prouve que fg est intégrable (chap.IV, §5, th.5).

La condition est suffisante : en effet, si K est un ensemble compact quelconque, il existe une application continue g de E dans $[0,1]$, égale à 1 dans K et à support compact (chap.III, §2, lemme 1) ; on a alors $f\varphi_K = (fg)\varphi_K$, et comme fg est intégrable, il en est de même de $fg\varphi_K$.

PROPOSITION 3.- Pour qu'une fonction localement intégrable f soit intégrable, il faut et il suffit que : 1° l'ensemble P des $x \in E$ tels que $f(x) \neq 0$ soit réunion dénombrable d'ensembles intégrables ; 2° l'ensemble des nombres $\int |f|\varphi_K \, d\mu$, où K parcourt l'ensemble des parties compactes de E, soit majoré dans $\mathbb{R}$.

Les conditions sont évidemment nécessaires, en raison du lemme du th.5 du chap.IV, §5, et de l'inégalité $|f\varphi_K| \leqslant |f|$. Le fait que les conditions sont suffisantes résulte de l'application du critère d'intégrabilité (chap.IV, §5,th.5) une fois établi que l'intégrale supérieure de $|f|$ est finie ; ce dernier point résulte de la proposition plus générale suivante :

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> f <u>une fonction numérique</u> $\geqslant 0$, <u>telle que l'ensemble</u> P <u>des</u> $x \in E$ <u>tels que</u> $f(x) \neq 0$ <u>soit réunion dénombrable d'ensembles intégrables ; alors l'intégrale supérieure</u> $\int^* f \, d\mu$ <u>est la borne supérieure des intégrales supérieures</u> $\int^* f\varphi_K \, d\mu$ <u>lorsque</u> K <u>parcourt l'ensemble des parties compactes de</u> E .

En effet, P est réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite croissante d'ensembles compacts K_n ; donc f est presque partout égale à l'enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions $f\varphi K_n$, ce qui prouve que $\int^* f \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int^* f\varphi K_n \, d\mu$ (chap.IV, §1,th.3).

La condition que P soit réunion dénombrable d'ensembles intégrables est essentielle pour la validité de la prop.4 : par exemple, si f est la fonction caractéristique d'un ensemble A localement négligeable et non négligeable, on a $\mu^*(f) = +\infty$, mais pour tout ensemble compact K , $A \cap K$ est négligeable, donc $\mu^*(f\varphi_K) = 0$.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> f <u>une fonction intégrable à valeurs dans un espace de Banach</u> F ; <u>l'intégrale</u> $\int f \, d\mu$ <u>est la limite des intégrales</u> $\int f \varphi_K \, d\mu$ <u>lorsque</u> K <u>parcourt l'ensemble filtrant</u> (<u>pour</u> $\subset$) <u>des parties compactes de</u> E .

En effet, d'après la prop.4, $\int |f\varphi_K| \, d\mu$ tend vers $\int |f| \, d\mu$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble compact K tel que $\int |f| \varphi_{\complement K} \, d\mu \leqslant \varepsilon$, et a fortiori $\left| \int f\varphi_{\complement H} \, d\mu \right| \leqslant \varepsilon$ pour tout ensemble compact $H \supset K$.

PROPOSITION 5.- Pour qu'une fonction numérique localement intégrable f soit localement presque partout égale à une fonction intégrable, il faut et il suffit que, lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de E, l'ensemble des nombres $\int |f\varphi_K|d\mu$ soit majoré dans $\mathbb{R}$.

La condition est nécessaire, car si f est localement presque partout égale à une fonction intégrable f_1, $f\varphi_K$ et $f_1\varphi_K$ sont égales presque pa-rtout pour tout ensemble compact K, donc $\int |f\varphi_K| d\mu \leqslant \int |f_1| d\mu$. Pour voir que la condition est suffisante, désignons par A_n l'ensemble (mesurable) des points où $|f| \geqslant 1/n$, et soit α_n la borne supérieure (finie par hypothèse) des nombres $\int |f\varphi_K| d\mu$ pour toutes les parties compactes $K \subset A_n$. Il existe donc une suite croissante (K_{nm}) de parties compactes de A_n, telle que $\sup_m \mu(K_{nm}) = \alpha_n$; si B_n est la réunion des K_{mn}, on a donc $\mu(B_n)^m = \alpha_n$; montrons que le complémentaire C_n de B_n par rapport à A_n est localement négligeable. Dans le cas contraire, il contiendrait un ensemble compact H de mesure $\mu(H) = \beta > 0$; il existe d'autre part un entier m tel que $\alpha_n - \mu(K_{nm}) < \beta$; l'ensemble compact $K_{nm} \cup H$, contenu dans A_n, aurait donc une mesure $> \alpha_n$; contrairement à la définition de α_n. Cela étant, soit A la réunion des A_n, et C l'ensemble $(\bigcup_k C_n) \cap \complement A$; il est clair que C est localement négligeable. Soit f_1 la fonction égale à f dans le complémentaire de C, et à 0 dans C ; l'ensemble des points x où $f_1(x) \neq 0$ est identique à A, donc réunion dénombrable d'ensembles intégrables. Comme $f\varphi_K$ et $f_1\varphi_K$ sont égales presque partout pour tout ensemble compact K, la prop.3 montre que f_1 est intégrable, ce qui achève la démonstration.

2. Définition locale des fonctions localement intégrables.

La notion de fonction localement intégrable est de caractère local : si f est une fonction telle que, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage V_x de x et une fonction localement intégrable g_x telle que

$f(y) = g_x(y)$ presque partout dans V_x , f est localement intégrable. En particulier, une fonction égale localement presque partout à une fonction localement intégrable est localement intégrable. Cela permet de dire qu'une fonction définie localement presque partout (resp. une fonction numérique définie et finie localement presque partout) est localement intégrable si elle est égale localement presque partout à une fonction définie (resp. définie et finie) partout et localement intégrable.

Mais le principe de localisation précédent peut être renforcé d'un théorème d'existence : si on se donne les fonctions localement intégrables g_x de sorte que g_x et g_y soient égales presque partout dans $V_x \cap V_y$, <u>il existe</u> une fonction localement intégrable f telle que pour tout x , $f(z) = g_x(z)$ presque partout dans V_x . Ce résultat est conséquence du théorème général suivant :

THEOREME 1.- <u>Soit</u> (G_α) <u>un recouvrement ouvert quelconque de l'espace localement compact</u> E , <u>et pour tout</u> α , <u>soit</u> f_α <u>une application de</u> G_α <u>dans un ensemble</u> F . <u>On suppose que pour tout couple d'indices</u> α, β <u>et tout ensemble compact</u> $K \subset G_\alpha \cap G_\beta$, <u>les fonctions</u> f_α <u>et</u> f_β <u>soient égales presque partout dans</u> K . <u>Dans ces conditions, il existe une application f de E dans</u> F <u>telle que, pour tout indice</u> α , f <u>et</u> f_α <u>soient égales localement presque partout dans</u> G_α .

Soit Φ l'ensemble des fonctions à valeurs dans F , dont chacune φ est définie dans un sous-ensemble <u>ouvert</u> U_φ de E , et qui satisfont à la condition suivante : pour tout indice α et tout ensemble compact $K \subset G_\alpha \cap U_\varphi$, φ et f_α sont égales presque partout dans K . L'ensemble Φ n'est pas vide, car toutes les fonctions f_α lui appartiennent. Nous <u>ordonnerons</u> Φ par la relation "φ est restriction de ψ à U_φ" ; nous allons voir que pour cette relation d'ordre Φ est <u>inductif</u>. En effet, soit Φ_0 une partie totalement ordonnée de Φ , et soit U_0 l'ensemble ouvert réunion des ensembles ouverts U_φ lorsque φ parcourt Φ_0

il existe une fonction φ_o et une seule, définie dans U_o et qui soit un prolongement de toutes les fonctions $\varphi \in \Phi_o$; montrons que $\varphi_o \in \Phi$, ce qui prouvera notre assertion. Soit α un indice quelconque, et K un ensemble compact contenu dans $G_\alpha \cap U_o$; comme les U_φ forment un recouvrement ouvert de K lorsque φ parcourt Φ_o, il existe un nombre fini de $\varphi_i \in \Phi_o$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que K soit contenu dans la réunion des U_{φ_i} ; mais parmi les U_{φ_i} il y en a un par hypothèse qui contient tous les autres, donc il existe $\varphi \in \Phi_o$ tel que $K \subset G_\alpha \cap U_\varphi$; la fonction φ est alors égale à f_α presque partout dans K, et il en est de même de φ_o, qui prolonge φ.

En vertu du th. de Zorn, il existe un élément <u>maximal</u> f de Φ ; nous allons montrer que $U_f=E$, ce qui démontrera le th.1.

Raisonnons par l'absurde en supposant $U_f \neq E$; l'ensemble fermé $A = \complement U_f$ serait non vide, et par suite, il existerait un indice α tel que G_α rencontre A. Nous <u>prolongerons</u> f en une fonction f_o définie dans $U_f \cup G_\alpha$ en posant $f_o(x)=f_\alpha(x)$ pour $x \in A \cap G_\alpha$; si nous prouvons que $f_o \in \Phi$, nous aboutirons à une contradiction et le théorème sera démontré. Or, soit β un indice quelconque, et K un ensemble compact contenu dans $G_\beta \cap (U_f \cup G_\alpha)$; $K \cap A$ est un ensemble compact contenu dans $G_\alpha \cap G_\beta$, et par hypothèse f_α et f_β sont égales presque partout dans $K \cap A$, donc il en est de même de f_o et f_β. D'autre part, $K \cap U_f$ est un ensemble intégrable, donc il existe une partition de $K \cap U_f$ en un ensemble négligeable N et une suite (K_n) d'ensembles compacts ; chacun des K_n est contenu dans $U_f \cap G_\beta$ donc f et f_β sont égales presque partout dans K_n ; il en résulte que f et f_β sont égales presque partout dans $K \cap U_f$, et par suite f_o et f_β sont égales presque partout dans K, ce qui achève la démonstration.

3. Mesures définies par des densités numériques.

PROPOSITION 6. Soit g une fonction numérique localement intégrable ; la forme linéaire $f \to \int gf\, d\mu$, définie sur l'espace $\mathcal{K}(E)$ des fonctions numériques continues à support compact, est une mesure sur E.

En effet, il résulte de la prop.2 que gf est intégrable pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$; d'autre part, si le support de f est contenu dans un ensemble compact K, on a $gf = gf\varphi_K$, et comme $g\varphi_K$ est intégrable, on a $\left|\int gf\, d\mu\right| \leqslant \|f\| \cdot \int |g\varphi_K|\, d\mu$, ce qui prouve la proposition (chap. III, § 2, n°3).

DÉFINITION 2.- On dit que la mesure $f \to \int gf\, d\mu$ sur E est le produit de la mesure μ par la fonction g, ou la mesure de densité g par rapport à μ, et on la note $g.\mu$. Toute mesure produit d'une mesure positive μ par une fonction localement intégrable pour μ est appelée mesure de base μ.

Dans le cas où g est continue, on retrouve la définition donnée au chap.III, § 2, n°4 ; au lieu d'écrire $\nu = g.\mu$, on écrit aussi $d\nu(x) = g(x)\,d\mu(x)$.

PROPOSITION 7.- Pour toute fonction numérique localement intégrable g, on a $|g.\mu| = |g|.\mu$.

Par définition, la mesure positive $|g.\mu|$ est la plus petite mesure positive ν telle que $\left|\int gf\, d\mu\right| \leqslant \nu(f)$ pour toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$. Comme on a évidemment $\left|\int gf\, d\mu\right| \leqslant \int |g| f\, d\mu$, on a $\nu \leqslant |g|.\mu$. Reste à démontrer que $\nu(f) \geqslant \int |g|\, f\, d\mu$ pour toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$. On sait que $\nu(f)$ est la borne supérieure des nombres $\int gf_1\, d\mu$, lorsque f_1 parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}(E)$ telles que $|f_1| \leqslant f$ (chap.III, § 2, formule (4)). Soient K le support de f, et U un voisinage relativement compact de K ; soient A l'ensemble des $x \in U$ tels que $g(x) \geqslant 0$, et B le complémentaire de A dans U ;

comme g est localement intégrable, A et B sont intégrables. Il existe donc une suite croissante d'ensembles compacts $K_n \subset A$ tels que A soit réunion des K_n et d'un ensemble négligeable ; en vertu du th. de Lebesgue, $\int |gf\varphi_{K_n}| d\mu$ tend donc vers $\int |gf\varphi_A| d\mu$, et par suite il existe un ensemble compact $A_1 \subset A$ tel que, si A_2 est le complémentaire de A_1 par rapport à A, on ait $\int |gf| \varphi_{A_2} d\mu \leqslant \varepsilon$. On montre de même qu'il existe dans B un ensemble compact B_1 tel que, si B_2 désigne le complémentaire de B_1 par rapport à B, on ait $\int |gf| \varphi_{B_2} d\mu \leqslant \varepsilon$.

Cela étant, en vertu du th. d'Urysohn, il existe une application continue h de E dans $[-1,+1]$, égale à 1 dans A_1, à -1 dans B_1 et à 0 dans $\complement U$; si on pose $f_1 = fh$, on a $|f_1| \leqslant f$. La différence des deux fonctions f_1 et $f(\varphi_{A_1} - \varphi_{B_1})$ est nulle dans le complémentaire de $A_2 \cup B_2$, et comme chacune de ces deux fonctions est en valeur absolue $\leqslant |f|$, on a

$$\left| \int g(f_1 - f\varphi_{A_1} + f\varphi_{B_1})\, d\mu \right| \leqslant 2 \int |gf| (\varphi_{A_2} + \varphi_{B_2}) d\mu \leqslant 4\varepsilon .$$

D'autre part, on a $gf\varphi_{A_1} = |gf| \varphi_{A_1}$ et $gf\varphi_{B_1} = -|gf|\varphi_{B_1}$, d'où

$$\left| \int gf_1 d\mu - \int |gf| (\varphi_{A_1} + \varphi_{B_1})\, d\mu \right| \leqslant 4\varepsilon .$$

De la même façon, la différence entre $|gf|$ et $|gf|(\varphi_{A_1} + \varphi_{B_1})$ est nulle dans le complémentaire de $A_2 \cup B_2$, et égale à $|gf|$ dans $A_2 \cup B_2$, donc

$$\left| \int |gf| d\mu - \int |gf| (\varphi_{A_1} + \varphi_{B_1})\, d\mu \right| \leqslant 2\varepsilon$$

d'où finalement $\left| \int gf_1 d\mu - \int |gf|\, d\mu \right| \leqslant 6\varepsilon$

et comme ε est arbitraire, cela démontre la proposition.

COROLLAIRE.- <u>On a</u> $(g.\mu)^+ = g^+.\mu$, <u>et</u> $(g.\mu)^- = g^-.\mu$.

PROPOSITION 8.- <u>Pour que la mesure</u> $g.\mu$ <u>soit nulle, il faut et il suffit que</u> g <u>soit nulle localement presque partout</u>.

La condition est évidemment suffisante, puisque si elle est vérifiée, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, gf est nulle presque partout. Pour voir que la condition est nécessaire, on peut se borner, en vertu de la prop.7, au cas où $g \geqslant 0$. Alors, si l'ensemble A des points x où $g(x) > 0$ n'est pas localement négligeable, il contient un ensemble compact K de mesure > 0 ; soit f une application continue de E dans $[0,1]$, à support compact et égale à 1 dans K ; on a alors $g(x)f(x) > 0$ en tout point de K, et comme $gf \geqslant 0$, on a $\int gf\,d\mu \neq 0$ (chap.IV, § 2, th.1) ce qui est contraire à l'hypothèse.

COROLLAIRE 1.- Si g_1 et g_2 sont deux fonctions localement intégrables, pour que $g_1 . \mu = g_2 . \mu$, il faut et il suffit que g_1 et g_2 soient égales localement presque partout.

COROLLAIRE 2.- Pour que $g.\mu$ soit une mesure positive, il faut et il suffit que $g(x) \geqslant 0$ localement presque partout.

La condition est évidemment suffisante ; elle est nécessaire, car si $g.\mu$ est positive, on a $g.\mu = (g.\mu)^+ = g^+ . \mu$, donc $g = g^+$ localement presque partout.

Il est clair que si f_1 et f_2 sont localement intégrables, il en est de même de $f_1 + f_2$ et qu'on a $(f_1+f_2).\mu = f_1.\mu + f_2.\mu$. En outre :

PROPOSITION 9.- Soient μ et ν deux mesures positives sur E ; pour qu'une fonction numérique f soit localement intégrable pour la mesure $\lambda = \mu + \nu$, il faut et il suffit que f soit localement intégrable à la fois pour μ et ν ; on a alors $f.(\mu+\nu) = f.\mu + f.\nu$.

Tout revient évidemment à prouver que, pour qu'une fonction numérique $g \geqslant 0$ soit intégrable pour $\lambda = \mu + \nu$, il faut et il suffit que g soit intégrable à la fois pour μ et pour ν, et on a alors $\int g\,d(\mu+\nu) = \int g\,d\mu + \int g\,d\nu$. Supposons d'abord que g soit intégrable pour $\mu + \nu$; alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction h, semi-continue inférieurement, telle que $g \leqslant h$ et $\lambda^*(h-g) \leqslant \varepsilon$; comme $\lambda^* = \mu^* + \nu^*$ (chap.IV, §1, prop.), on a aussi $\mu^*(h-g) \leqslant \varepsilon$ et $\nu^*(h-g) \leqslant \varepsilon$, donc (chap.IV, §4, th.) g est à la fois μ-intégrable et ν-intégrable.

Inversement, supposons que g soit à la fois μ-intégrable et ν-intégrable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors deux fonctions semi-continues inférieurement h_1, h_2 telles que $g \leqslant h_1$, $g \leqslant h_2$ et $\mu^*(h_1-g) \leqslant \varepsilon$, $\nu^*(h_2-g) \leqslant \varepsilon$; la fonction $h=\inf(h_1,h_2)$ est semi-continue inférieurement, on a $g \leqslant h$, et comme $\lambda^* = \mu^* + \nu^*$, on a $\lambda^*(h-g) \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve (loc.cit.) que g est λ-intégrable. En outre, on a $\int h\, d(\mu+\nu) = \int h\, d\mu + \int h\, d\nu$ (chap.IV, §1, prop.), donc, comme ε est arbitraire, on a bien $\int g\, d(\mu+\nu) = \int g\, d\mu + \int g\, d\nu$.

COROLLAIRE.- Soient μ et ν deux mesures positives sur E, telles que $\nu \leqslant \mu$; soit f une fonction numérique $\geqslant 0$, localement intégrable pour μ ; alors f est localement intégrable pour ν et pour $\mu-\nu$, , on a $f.\nu \leqslant f.\mu$ et $f.(\mu-\nu) = f.\mu - f.\nu$.

PROPOSITION 10.- Soit $(f_n.\mu)$ une suite croissante de mesure de base μ pour que cet ensemble soit majoré dans l'espace $\mathcal{M}(E)$ des mesures sur E, il faut et il suffit que la fonction $f = \sup_n f_n$ soit localement intégrable ; la borne supérieure dans $\mathcal{M}(E)$ des mesures $f_n.\mu$ est alors la mesure $f.\mu$.

Le cor.2 de la prop.8 montre qu'on a $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ localement presque partout ; on peut donc en modifiant les f_n sur un même ensemble localement négligeable, supposer que la suite (f_n) est croissante. Si les mesures $f_n.\mu$ sont majorées dans $\mathcal{M}(E)$, pour toute fonction $g \geqslant 0$ dans $\mathcal{K}(E)$, on a $\sup_n \int g f_n\, d\mu < +\infty$; il en résulte (chap.IV, § 4, prop.4) que la fonction $gf = \sup_n gf_n$ est intégrable et que

$\int gf\, d\mu = \sup_n \int gf_n\, d\mu$; cela montre que f est localement intégrable (prop.2) et que $f.\mu$ est la borne supérieure des $f_n.\mu$ dans $\mathcal{M}(E)$. Réciproquement, il est clair que si f est localement intégrable, les mesures $f_n.\mu$ sont majorées par $f.\mu$, et le raisonnement précédent montre que $f.\mu$ est leur borne supérieure dans $\mathcal{M}(E)$.

4. Intégration par rapport à une mesure de base μ.

Soit $\nu = f.\mu$ une mesure positive de base μ ; on peut supposer (en modifiant au besoin f dans un ensemble localement négligeable) que la fonction localement intégrable f est $\geqslant 0$ et finie dans E (cor.2 de la prop.8).

THÉORÈME 2.- *Soit g une fonction définie dans E , à valeurs dans un espace de Banach F , et à support compact. Pour que g soit intégrable pour la mesure $\nu = f.\mu$, il faut et il suffit que la fonction gf soit intégrable pour la mesure μ , et on a*

(1) $$\int g\, d\nu = \int gf\, d\mu \ .$$

Nous utiliserons plusieurs lemmes.

Lemme 1.- *Pour toute fonction semi-continue inférieurement* $h \geqslant 0$ *(finie ou non), on a*

(2) $$\nu^*(h) \leqslant \mu^*(fh)$$

en convenant de prendre 0 *pour valeur de* fh *aux points* $x \in E$ *où* $f(x)=0$ *et* $h(x)=+\infty$.

En effet, on a $\nu^*(h)=\sup \nu(\varphi)$, où φ parcourt l'ensemble des fonctions continues à support compact telles que $0 \leqslant \varphi \leqslant h$; comme $\nu(\varphi)= \mu(f\varphi) \leqslant \mu^*(fh)$ par définition, on a l'inégalité (1).

On peut donner des exemples où h n'est pas semi-continue inférieurement et où l'inégalité (2) n'a pas lieu (exerc. 2).

Lemme 2.- *Pour tout ensemble ouvert relativement compact* U *dans* E *on a* $\nu(U) = \int f\varphi_U d\mu$.

Le lemme 1 montre que $\nu(U) \leqslant \int f\varphi_U d\mu$ (la fonction $f\varphi_U$ étant intégrable) ; il suffit donc de prouver que $\int f\varphi_U d\mu \leqslant \nu(U)$. Comme $f\varphi_U$ est intégrable, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f_1 \geqslant 0$ à support compact, telle que $\int |f\varphi_U - f_1| \, d\mu \leqslant \varepsilon$, d'où on tire aussitôt que $\int |f\varphi_U - f_1\varphi_U| d\mu \leqslant \varepsilon$. Pour toute fonction continue ψ à support compact, telle que $0 \leqslant \psi \leqslant \varphi_U$, on a $f\varphi_U \psi = f\psi$ et $\int |f\psi - f_1\psi| \, d\mu \leqslant \varepsilon$. Comme l'enveloppe supérieure des fonctions continues $f_1\psi$ est la fonction semi-continue inférieurement $f_1\varphi_U$, il existe une de ces fonctions ψ telle que
$\int f_1\varphi_U d\mu \leqslant \int f_1\psi d\mu + \varepsilon \leqslant \int f\psi d\mu + 2\varepsilon = \nu(\psi) + 2\varepsilon \leqslant \nu(U) + 2\varepsilon$ (chap.IV, § 1, th.1) ; on en tire que $\int f\varphi_U d\mu \leqslant \nu(U) + 3\varepsilon$, et comme ε est arbitraire, le lemme est démontré.

<u>Lemme 3</u>.- <u>Pour qu'une partie relativement compacte N de E soit ν-négligeable, il faut et il suffit que $f\varphi_N$ soit μ-négligeable</u>.

En effet, on a $\nu^*(N) = \inf \nu(U)$, où U parcourt l'ensemble des ensembles ouverts relativement compacts contenant N ; en vertu du lemme 2 , on a donc $\nu^*(N) = \inf \int f\varphi_U d\mu \geqslant \int^* f\varphi_N d\mu$, et par suite si N est ν-négligeable, $f\varphi_N$ est μ-négligeable. Pour démontrer la réciproque, considérons un ensemble compact K contenant N , et soit A l'ensemble des points de K tels que $f(x)=0$. Tout revient à prouver que $A \cup N$ est ν-négligeable. Or, $N \cap \complement A$ est μ-négligeable, et A est μ-intégrable, donc ~~XXxXXX~~ $A \cup N$ est μ-intégrable, et on a $\int f\varphi_{A \cup N} d\mu = 0$; il existe donc une suite décroissante (U_n) d'ensembles ouverts relativement compacts telle que l'intersection des U_n soit réunion de $A \cup N$ et d'un ensemble μ-négligeable ; la suite des intégrales $\int f\varphi_{U_n} d\mu$ tend donc en décroissant vers $\int f\varphi_{A \cup N} d\mu = 0$. D'après le lemme 2, la suite $(\nu(U_n))$ tend donc vers 0, ce qui prouve que $\nu(A \cup N) = 0$.

Ici encore, on peut donner des exemples d'ensembles N qui sont μ-négligeables et non relativement compacts, mais non ν-négligeables (exerc.2).

Ces lemmes étant démontrés, remarquons d'abord que la relation (1) est vraie lorsque la fonction g est continue et à support compact ; en effet, pour tout vecteur z' dans le dual F' de F , la fonction numérique $x \to \langle g(x), z' \rangle$ est continue et à support compact, donc on a par définition $\langle \int g\, d\nu, z' \rangle = \int \langle g, z' \rangle d\nu = \int \langle g, z' \rangle f\, d\mu =$ $= \langle \int g f\, d\mu , z' \rangle$, ce qui établit (1) dans ce cas.

Passons maintenant à la démonstration du théorème, et prouvons en premier lieu que la condition est <u>nécessaire</u>. Soit g une fonction ν-intégrable à support compact K ; il existe une suite (g_n) de fonctions continues à support compact telle que : 1° la série de terme général $g_n(x)$ converge absolument vers $g(x)$ en tout point x n'appartenant pas à un ensemble ν-négligeable N , évidemment contenu dans la réunion de K et des supports K_n des g_n ; 2° la série de terme général $\int |g_n| d\mu$ est convergente (chap.IV, § 3). Comme $\int |g_n| d\nu = \int |g_n| f\, d\mu$, la série de terme général $g_n(x)f(x)$ est convergente en tout point du complémentaire d'un ensemble μ-négligeable M , et sa somme $h(x)$(définie dans $\complement M$) est μ-intégrable et satisfait à la relation $\int h\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n f\, d\mu$. Or, on a $g(x)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)f(x)$ sauf aux points de la partie N' de N où $f(x) \neq 0$; chacun des ensembles $N' \cap K$, $N' \cap K_n$ est relativement compact et ν-négligeable, donc (lemme 3) il est aussi μ-négligeable, et il en est par suite de même de N' . On voit donc qu'on a $g(x)f(x) = h(x)$ sauf aux points de l'ensemble μ-négligeable $M \cup N'$, ce qui prouve que $g f$ est ~~négligeable~~ μ-intégrable et que

$$\int g f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\nu = \int g\, d\nu .$$

Démontrons enfin que la condition de l'énoncé est <u>suffisante</u>.

Soit donc g une fonction à support compact K , telle que g f soit μ-intégrable. Prouvons d'abord que g est ν-mesurable. Soit A l'ensemble des points $x \in K$ tels que $f(x) \neq 0$; l'ensemble A est μ-intégrable, et $K \cap \complement A$ est ν-négligeable (lemme 3). Il existe une partition de A en une suite (K_n) d'ensembles compacts et un ensemble μ-négligeable N , tels que la restriction de g f à chacun des K_n soit continue. D'autre part, comme f est μ-mesurable, pour tout n , il existe une partition de K_n en une suite (K_{nm}) d'ensembles compacts et un ensemble μ-négligeable P_m , tels que la restriction de f à chacun des K_{nm} soit continue. Comme $f(x) \neq 0$ dans chacun des K_{nm} , g est continue dans chacun des K_{nm} ; d'autre part, N et chacun des ensembles P_m est ν-négligeable (lemme 3), donc $A \cup N \cup \bigcup_m P_m$ est ν-négligeable, ce qui prouve que g est ν-mesurable.

En outre, soit g_1 la fonction égale à g dans A et dans $\complement K$, et égale à un vecteur constant a dans $K \cap \complement A$. Il est clair que g_1 est égale à g sauf dans un ensemble ν-négligeable, et que $g_1 f = g f$; en outre, le raisonnement précédent montre que g_1 est μ-mesurable. Nous pouvons donc supposer que g est aussi μ-mesurable.

Cela étant, supposons d'abord g <u>bornée</u>. Il existe alors une fonction numérique h à support compact, telle que $|g| \leq h$; on a donc $\nu^*(|g|) \leq \nu(h) < +\infty$, et comme g est ν-mesurable, g est ν-intégrable (chap.IV, § 5,th.5), ce qui démontre dans ce cas le théorème.

Dans le cas général, pour tout entier $n > 1$, soit g_n la fonction égale à $g(x)$ lorsque $|g(x)| \leq n$, et à $n.g(x)/|g(x)|$ lorsque $|g(x)| > n$; g_n est μ-mesurable et ν-mesurable (chap.IV, §5).

Comme $|g_n f| \leq |gf|$, $g_n f$ est μ-intégrable, et comme g_n est bornée, g_n est ν-intégrable et on a $\int g_n d\nu = \int g_n f\, d\mu$ d'après ce qui précède. Pour la même raison, on a $\int |g_n| d\nu = \int |g_n f| d\mu$. La suite croissante $(|g_n f|)$ a pour enveloppe supérieure la fonction $|gf|$, qui est μ-intégrable, donc la suite croissante $(|g_n|)$ est telle que $\sup_n \int |g_n|\, d\nu = \sup_n \int |g_n f| d\mu < +\infty$; par suite l'enveloppe supérieure $|g|$ de la suite croissante $(|g_n|)$ est ν-intégrable (chap.IV, § 4, th.   ). Enfin, comme la suite (g_n) converge partout vers g et que $|g_n| \leq |g|$, le th. de Lebesgue prouve que g est ν-intégrable, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- Soit g une fonction définie dans E, à valeurs dans un espace de Banach F. Pour que g soit localement intégrable (resp. localement négligeable) pour la mesure ν, il faut et il suffit que gf soit localement intégrable (resp. localement négligeable) pour la mesure μ.

En effet, dire que g est localement intégrable (resp. localement négligeable) pour ν signifie que pour tout ensemble compact K, $g\varphi_K$ est ν-intégrable (resp. ν-négligeable), ce qui équivaut à dire que $gf\varphi_K$ est μ-intégrable (resp. μ-négligeable), et par suite que gf est localement intégrable (resp. localement négligeable) pour μ.

COROLLAIRE 2.- Soit g une fonction définie dans E, à valeurs dans un espace de Banach F. Pour que g soit ν-mesurable, il faut et il suffit que gf soit μ-mesurable.

Au cours de la démonstration du th.2, nous avons déjà établi que si gf est μ-mesurable, g est ν-mesurable. Inversement, supposons que g soit ν-mesurable, et soit K un ensemble compact quelconque dans E ;

par hypothèse, il existe une partition de K en un ensemble ν-négligeable N et une suite (K_n) d'ensembles compacts, tels que la restriction de g à chaque K_n sont continue. Comme $gf\varphi_N$ est μ-négligeable (lemme 3), et que N est μ-mesurable (comme intersection de deux ensembles μ-mesurables), l'ensemble P des points de N tels que $g(x)f(x)\neq 0$ est μ-mesurable, et $N \cap \complement P$ est μ-négligeable. D'autre part, chacun des K_n possède une partition formée d'un ensemble μ-négligeable Q_n et d'une suite (K_{nm}) d'ensembles compacts tels que la restriction de f à chacun des K_{nm} soit continue. Alors la restriction de gf à chacun des K_{nm} est continue, et comme la réunion de $N \cap \complement P$ et des Q_n est μ-négligeable, gf est μ-mesurable.

COROLLAIRE 3.- <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions numériques positives définies dans</u> E , <u>telles que</u> f <u>et</u> gf <u>soient localement intégrables pour</u> μ. <u>On a alors</u>

$$(3) \qquad g.(f.\mu) = (gf).\mu \ .$$

En effet, d'après le cor.1, g est localement intégrable pour la mesure $f.\mu$. En outre, pour toute fonction numérique h continue et à support compact, on a, en posant $f.\mu = \nu$, $g.(f.\mu) = \lambda$, $\int h\,d\lambda = \int gh\,d\nu$ par définition ; mais comme gh est ν-intégrable et à support compact, gfh est μ-intégrable, et on a $\int gh\,d\nu = \int gfh\,d\mu$, ce qui démontre la relation (3).

COROLLAIRE 4.- <u>Soit</u> f <u>une fonction numérique</u> $\geqslant 0$, <u>mesurable et essentiellement bornée pour</u> μ . <u>Toute fonction</u> μ-<u>intégrable</u> g <u>est aussi</u> ν-<u>intégrable, et on a la relation</u> (1).

En effet, si $a = N_\infty(f) < +\infty$, on a $\nu(h) \leqslant a.\mu(h)$ pour toute fonction continue $h \geqslant 0$ à support compact, autrement dit $\nu \leqslant a.\mu$, et il en résulte que $\nu^* \leqslant a.\mu^*$ (chap.IV, § 1, prop.); comme $\mu^*(|g|)$ est fini, il en est de même de $\nu^*(|g|)$. D'autre part, gf est

μ-mesurable, donc g est ν-mesurable (cor.2) et par suite g est ν-intégrable ; enfin, pour tout ensemble compact K , on a $\int g\,\varphi_K d = \int g\,f\varphi_K d$ en vertu du th.2, d'où la relation (1) en passant à la limite suivant l'ensemble filtrant des parties compactes de E (cor. de la prop.4).

PROPOSITION 11.- *Pour que* g *soit localement presque partout (pour la mesure* ν *) égale à une fonction* ν*-intégrable* g_1 *, il faut et il suffit que* $g.f$ *soit localement presque partout (pour la mesure* μ *) égale à une fonction* μ*-intégrable* f_1 *, et on a* $\int g_1\, d\nu = \int f_1\, d\mu$.

En effet, pour que g soit localement presque partout (pour ν) égale à une fonction ν-intégrable g_1 , il faut et il suffit que g soit ν-mesurable et que l'ensemble des nombres $\int |g\,\varphi_K|\, d\nu$ soit borné lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de E (prop.5); or (th.2 et cor.2 du th.2) cela signifie que $g f$ est μ-mesurable et que l'ensemble des $\int |g f\varphi_K|\, d\mu$ est borné, donc que $g f$ est localement presque partout (pour μ) égale à une fonction μ-intégrable f_1; en outre, on a $\int g_1 \varphi_K d\nu = \int f_1\, \varphi_K d\mu$ pour tout ensemble compact K d'après (1), et en passant à la limite suivant l'ensemble filtrant des parties compactes de K (cor. de la prop.4), on achève la démonstration.

Remarque.- Comme deux fonctions intégrables égales localement presque partout sont égales presque partout, la prop.11 montre en particulier que l'espace $L^1_F(E, \nu)$ peut être identifié (algèbriquement et topologiquement) au sous-espace de l'espace de Banach $L^1_F(E, \mu)$ formé des classes de fonctions μ-intégrables de la forme $g f$.

COROLLAIRE 1.- *Pour que la mesure* f. μ *soit bornée, il faut et il suffit que la fonction f soit localement presque partout (pour la mesure* μ*) égale à une fonction* μ*-intégrable*.

En effet, dire que $\nu = f.\mu$ est bornée signifie que la fonction 1 est ν-intégrable, donc la prop.11 montre que la condition est nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée, et soit f_1 une fonction μ-intégrable telle que $f=f_1$ localement presque partout (pour μ) : on a alors $\nu = f.\mu = f_1.\mu$, et pour toute fonction numérique continue h à support compact, on a $\int h\, d\nu = \int f_1 h\, d\mu \leq \| h \| . \int |f_1| d\mu$, ce qui prouve que la mesure ν est bornée.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> E <u>un espace localement compact dénombrable à l'infini pour que</u> g <u>soit</u> ν-<u>intégrable, il faut et il suffit que</u> gf <u>soit</u> μ-<u>intégrable, et on a</u>

$$\int g\, d\nu = \int g f\, d\mu \quad . \tag{4}$$

En effet, tout ensemble localement négligeable pour ν (resp. μ) est alors négligeable pour ν (resp. μ), donc la première partie du corollaire résulte aussitôt de la prop.11. D'autre part, E est réunion d'une suite croissante (K_n) d'ensembles compacts, et on a $\int g\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int g \varphi_{K_n} d\nu$ et $\int g f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g f \varphi_{K_n} d\mu$; la relation (4) résulte donc du th.2.

PROPOSITION 12.- <u>Soit</u> f <u>une fonction</u> μ-<u>intégrable à support compact</u> : <u>la mesure</u> $\nu = f.\mu$ <u>a un support compact contenu dans le support de</u> f. <u>Pour qu'une fonction</u> g <u>soit</u> ν-<u>intégrable, il faut et il suffit que</u> gf <u>soit</u> μ-<u>intégrable, et on a la relation</u> (4) .

En effet, si h est une fonction continue à support compact dont le support ne rencontre pas celui de f , on a $\int fh\, d\mu = 0$, ce qui prouve la première partie de la proposition. Si K est le support de f , l'ensemble $\complement K$ est ν-négligeable ; pour qu'une fonction g soit ν-intégrable, il faut et il suffit que $g\varphi_K$ soit ν-intégrable, et on a $\int g\, d\nu = \int g \varphi_K d\nu$; la fin de la proposition résulte alors du th. 2 .

<u>Exercices</u>.- 1) Soit f une fonction localement intégrable pour μ, et soit g une fonction numérique $\geqslant 0$ quelconque à support compact. Montrer que, si $\nu = f.\mu$, on a $\nu^*(g) = \mu^*(gf)$ (utiliser le th.2).

2) Soit E le sous-ensemble du plan R^2 formé de la droite x=0 et des points $(1/n, k/n^2)$, où n parcourt l'ensemble des entiers > 0 et k l'ensemble Z des entiers rationnels. On définit sur E une topologie $\mathcal{C}$ de la façon suivante : un système fondamental de voisinages de chacun des points $(1/n, k/n^2)$ est formé de l'ensemble réduit à ce seul point : pour tout point (0,y) de la droite x=0 et tout entier $n > 0$, on désigne par $T_n(y)$ l'ensemble des points (u,v) de E tels que $u \leqslant 1/n$ et $|v-y| \leqslant u$; montrer que si on prend pour système fondamental de voisinages de chaque point (0,y) l'ensemble des $T_n(y)$, on définit sur E une topologie $\mathcal{C}$ pour laquelle E est un espace localement compact non dénombrable à l'infini.

Soit μ la mesure sur E définie par la masse $1/(|k|+1)^2n^2$ placée en chacun des points $(1/n, k/n^2)$; montrer que est une mesure bornée, pour laquelle la droite x=0 est un ensemble négligeable

Montrer qu'en plaçant en chacun des points $(1/n, k/n^2)$ la masse $1/n^3$ on définit une mesure ν sur E, et qu'on peut écrire $\nu = f.\mu$, où f est une fonction localement intégrable pour μ ; mais pour la mesure ν, la droite x=0 a une mesure extérieure infinie (si un ensemble ouvert U contient cette droite, montrer qu'il existe un intervalle $[a,b]$ de la droite x=0, un ensemble B partout dense (pour la topologie usuelle de R) dans cet intervalle et un entier n tel que, pour tout $y \in B$, on ait $T_n(y) \subset U$).

3) Soit μ une mesure positive sur E, f une fonction $\geqslant 0$ localement intégrable pour μ, et soit $\nu = f.\mu$. On suppose que g est une fonction telle que g soit ν-intégrable, gf μ-intégrable et

que l'on ait $\int g\, d\nu = \int gf\, d\mu$. Montrer que si $0 \leqslant h \leqslant g$, pour que h soit ν-intégrable, il faut et il suffit que hf soit μ-intégrable, et on a alors $\int h\, d\nu = \int hf\, d\mu$.

§ 2. Caractérisation des mesures de base μ .

1. Première caractérisation des mesures de base μ .

On sait (chap.III, §) que l'ensemble $\mathcal{M}(E)$ des mesures sur un espace localement compact E est un espace complètement réticulé.

THEOREME 1 (Lebesgue-Nikodym).- Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact E . Pour qu'une mesure sur E soit de base μ , il faut et il suffit qu'elle appartienne à la bande engendrée par dans l'espace complètement réticulé $\mathcal{M}(E)$.

La condition est nécessaire. Supposons en effet que $\nu = f.\mu$ soit une mesure de base μ ; on peut se borner au cas où $f \geqslant 0$. Posons $f_n = \inf(f,n)$; comme on a $f = \sup_n f_n$, ν est la borne supérieure dans $\mathcal{M}(E)$ des mesures $\nu_n = f_n.\mu$; or, on a $\nu_n \leqslant n.\mu$, donc ν_n appartient à la bande engendrée par μ , et il en est de même de ν (chap.III, §).

Pour démontrer que la condition est suffisante, nous procéderons en plusieurs étapes. Si ν appartient à la bande engendrée par μ dans $\mathcal{M}(E)$, il en est de même de ν^+ et de ν^- ; on peut donc se borner au cas où $\nu \geqslant 0$.

a) Supposons d'abord que μ soit une mesure bornée et qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que $\nu \leq k.\mu$; alors ν est bornée et $\nu(1) \leqslant k.\mu(1)$. D'après l'inégalité de Hölder, on a, pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$

(1) $$|\nu(g)|^2 \leq \nu(1)\,\nu(g^2) \leqslant k^2 \mu(1)\,\mu(g^2)$$

Cela prouve tout d'abord que si g est μ-négligeable, $\nu(g)=0$; en outre, la relation (1) montre que la forme linéaire ν sur $\mathcal{K}(E)$ est continue pour la topologie de la convergence en moyenne quadratique.

Par passage au quotient, elle définit donc une forme linéaire <u>continue</u> $\tilde{g} \to \nu(\tilde{g}) = \nu(g)$ dans le sous-espace partout dense $\tilde{\mathcal{K}}$ de l'espace hilbertien $L^2(E,\mu)$; elle se prolonge par suite à l'espace $L^2(E,\mu)$ tout entier par continuité. Or, on sait (<u>Esp.vect.top.</u>,chap.IV, §) que toute forme linéaire continue dans $L^2(E,\mu)$ est de la forme $\tilde{g} \to \mu(\tilde{g}\tilde{f})$, où $f \in \mathcal{L}^2(E,\mu)$; on a donc $\nu(g) = \mu(gf)$ pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$, et comme la fonction f est localement intégrable, le théorème est démontré dans ce cas.

b) Sans faire d'hypothèse sur la mesure μ , supposons encore qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que $\nu \leqslant k.\mu$. Pour tout ensemble ouvert relativement compact V , posons $\mu_V = \varphi_V.\mu$ et $\nu_V = \varphi_V.\nu$; on a alors $\nu_V \leqslant k.\mu_V$ (cor. de la prop.9 du §1), et en outre la mesure μ_V est bornée (§1,prop.12) ; d'après la première partie du raisonnement, il existe donc une fonction f_V , localement intégrable pour μ_V , et telle que $\nu_V = f_V.\mu_V$; on en déduit que $f_V\varphi_V$ est localement intégrable pour μ , et qu'on a $\nu_V = f_V\varphi_V.\mu$ (§1,cor.3 du th.2). Posons $g_V = f_V\varphi_V$; pour tout ensemble ouvert relativement compact $W \subset V$, on a $\nu_W = \varphi_W.\nu = \varphi_W.(\varphi_V.\nu)$ (§1,cor.3 du th.2), donc $\nu_W = \varphi_W.(g_V.\mu) = (\varphi_W g_V).\mu$; comme d'autre part, on a $\nu_W = g_W.\mu$, on en déduit $g_W = g_V\varphi_W$ localement presque partout (pour μ) (§1, cor.1 de la prop.8). On déduit aussitôt de ce résultat que si V_1 et V_2 sont deux ensembles ouverts relativement compacts quelconques, pour tout ensemble compact $K \subset V_1 \cap V_2$, g_{V_1} et g_{V_2} sont égales presque partout (pour μ) dans K. En vertu du th.1 du §1, il existe donc une fonction $f \geqslant 0$, localement intégrable pour μ , telle que pour tout ensemble ouvert relativement compact V , f et g_V soient égales presque partout dans V , ce qui signifie encore que $f\varphi_V$ et g_V sont égales presque partout. Soit alors h une fonction continue à support compact, et soit V un voisinage ouvert relativement compact du support de h ; on a $\int h\,d\nu = \int h\varphi_V\,d\nu = \int h\,d\nu_V = \int hg_V d\mu = \int hf\varphi_V d\mu = \int hf\,d\mu$, ce qui prouve que l'on a $\nu = f.\mu$.

c) Abordons enfin le cas général ; si la mesure $\nu \geqslant 0$ appartient à la bande engendrée par μ dans $\mathcal{M}(E)$, on a $\nu = \sup_n(\inf(n\mu, \nu))$. Comme $\inf(n\mu, \nu) \leqslant n\mu$, il existe une fonction localement intégrable $f_n \geqslant 0$ telle que $\inf(n\mu, \nu) = f_n.\mu$. Comme la suite des mesures $f_n.\mu$ est croissante et a pour borne supérieure ν dans $\mathcal{M}(E)$, la fonction $f = \sup_n f_n$ est localement intégrable pour μ et on a $\nu = f.\mu$ (§ 1, prop. 10), ce qui achève la démonstration du th. 1 .

__Scholie__.- Soit $\mathcal{J}(E, \mu)$ (ou simplement $\mathcal{J}$) l'ensemble des classes $\dot{f}$ des fonctions numériques finies f localement intégrables pour la mesure μ, pour la relation d'équivalence : "f et g sont égales localement presque partout (pour μ)". On sait (chap. IV, § 5) que l'ensemble $\mathcal{J}$ est muni d'une structure d'__espace de Riesz.__ Nous avons vu (§ 1, cor. 1 de la prop. 8) que la mesure $f.\mu$ (pour une fonction localement intégrable f) ne dépend que de la classe $\dot{f}$ de f dans $\mathcal{J}$; le th. 1, joint à la prop. 8 du § 1, montre que l'application $\dot{f} \to f.\mu$ (f fonction quelconque de la classe $\dot{f}$) est __un isomorphisme de l'espace de Riesz__ $\mathcal{J}$ __sur la bande engendrée par__ μ __dans l'espace des mesures__ $\mathcal{M}(E)$. On voit en particulier que la borne supérieure de deux mesures $f.\mu$, $g.\mu$ de base μ , dans l'espace $\mathcal{M}(E)$, est la mesure $(\sup(f,g)).\mu$.

Comme on sait que toute bande dans un espace complètement réticulé est elle-même un espace complètement réticulé, on voit que l'espace $\mathcal{J}$ est __complètement réticulé__ ; mais il convient de rappeler que la borne supérieure dans $\mathcal{J}$ d'une famille __non dénombrable__ $(\dot{f}_\alpha)$ de classes n'est pas identique à la classe de l'enveloppe supérieure des fonctions f_α , où f_α est une fonction quelconque de la classe

Toutefois, nous avons vu que pour une *suite croissante* de fonctions localement intégrables f_n , dont l'enveloppe supérieure f est localement intégrable, $f.\mu$ est la borne supérieure des mesures $f_n.\mu$ dans $\mathcal{M}(E)$ (§1,prop.10).

Notons encore que $\mathcal{J}$ peut être considéré comme un module sur l'anneau $\mathcal{A}$ des classes de fonctions mesurables *bornées sur tout ensemble compact* ; il résulte de la prop.9 et du cor.3 du th.2 du §1 que ce module est *isomorphe* à la bande engendrée par μ dans $\mathcal{M}(E)$, considérée comme module sur $\mathcal{A}$ pour la loi de composition $(\dot{f},\mu) \to f.\mu$ (f fonction quelconque de la classe $\dot{f} \in \mathcal{A}$). Le th.1 se transforme en le critère suivant :

PROPOSITION 1.- *Soit* μ *une mesure positive sur un espace localement compact* E . *Pour qu'une mesure positive* ν *sur* E *soit de base* μ *, il faut et il suffit que pour toute fonction numérique* $g \geqslant 0$, *continue et à support compact, et pour tout nombre* $\varepsilon > 0$ *, il existe un nombre* $\delta > 0$ *tel que pour toute fonction* h *continue à support compact satisfaisant aux conditions* $0 \leqslant h \leqslant g$, $\int h\, d\mu \leqslant \delta$ *, on ait* $\int h\, d\nu \leqslant \varepsilon$.

En effet, on sait que cette condition exprime que dans l'espace $\mathcal{M}(E)$ des mesures sur E , ν appartient à la bande engendrée par μ (chap.II, §2,prop.4).

COROLLAIRE.- *Si la mesure* ν *est de base* μ *, pour tout ensemble compact* K *et tout nombre* $\varepsilon > 0$ *, il existe un nombre* $\delta > 0$ *tel que pour tout ensemble* μ-*intégrable* $A \subset K$ *et tel que* $\mu(A) \leqslant \delta$ *, on ait* $\nu(A) \leqslant \varepsilon$ ("*continuité absolue*" de ν par rapport à μ) .

Cet énoncé a bien un sens, puisque tout ensemble $A \subset K$ qui est μ-intégrable est aussi ν-intégrable d'après le th.2 du §1. Soit g une application continue de E dans $[0,1]$, à support compact et égale à 1 dans K ; d'après la prop.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre

$\eta > 0$ tel que pour toute fonction h continue et à support compact, telle que $0 \leqslant h \leqslant g$ et $\int h\, d\mu \leqslant \eta$, on ait $\int h\, d\nu \leqslant \varepsilon$. Supposons d'abord que $A \subset K$ soit compact et $\mu(A) \leqslant \frac{\eta}{2}$; alors il existe une application continue h de E dans $[0,1]$, à support compact et égale à 1 dans K, et telle que $\int h\, d\mu \leqslant \eta$; a fortiori, si $h_1 = gh \leqslant h$, on a $\int h_1\, d\mu \leqslant \eta$; comme $0 \leqslant h_1 \leqslant g$, $\int h_1\, d\nu \leqslant \varepsilon$ et a fortiori $\nu(A) \leqslant \varepsilon$.

Si maintenant $A \subset K$ est μ-intégrable et tel que $\mu(A) \leqslant \frac{\eta}{2}$, A est réunion d'une suite croissante d'ensembles compacts K_n et d'un ensemble μ-négligeable P, et on a $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(K_n)$; mais comme P est à support compact, il est aussi ν-négligeable (§1,th.2), donc $\nu(A) = \lim_{n \to \infty} \nu(K_n) \leqslant \varepsilon$ en vertu de ce qui précède.

<u>Remarque</u>.- On peut donner une autre démonstration d'une propriété qui généralise ce corollaire. Soit $\nu = f.\mu$ une mesure positive de base μ, et soit g une fonction numérique $\geqslant 0$ à support compact, telle que g et gf soient μ-intégrables ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute fonction μ-intégrable h satisfaisant aux conditions $0 \leqslant h \leqslant g$ et $\int h\, d\mu \leqslant \delta$, on ait $\int h\, d\nu \leqslant \varepsilon$ (on sait que h est alors ν-intégrable, puisque hf est μ-mesurable à support compact, et que $hf \leqslant gf$ (§1,th.2)).

En effet, on a $\int h\, d\nu = \int hf\, d\mu$ (§1,th.2). Soit $f_n = \inf(f,n)$; f_n est μ-mesurable et $\sup_n f_n = f$; donc $gf_n \leqslant gf$ est μ-intégrable et on a $\int gf\, d\mu = \sup_n \int gf_n\, d\mu$; il existe par suite un entier n tel que $\int g(f-f_n)\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; a fortiori, on a $\int h(f-f_n)\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour toute fonction μ-intégrable h telle que $0 \leqslant h \leqslant g$. D'autre part, on a $\int hf_n\, d\mu \leqslant n \int h\, d\mu$; il suffit donc de prendre δ tel que $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2n}$ pour que, pour toute fonction μ-intégrable h satisfaisant aux conditions $0 \leqslant h \leqslant g$ et $\int h\, d\mu \leqslant \delta$, on ait $\int hf_n\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et par suite $\int hf\, d\mu \leqslant \varepsilon$.

2. Seconde caractérisation des mesures de base μ.

THÉORÈME 2.- *Soient μ et ν deux mesures positives sur un espace localement compact E. Pour que ν soit une mesure de base μ, il faut et il suffit que tout ensemble localement négligeable pour μ soit localement négligeable pour ν.*

Nous avons déjà vu (§ 1, cor. 1 du th. 2) que la condition est nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'elle soit remplie et que ν ne vérifie pas la condition de la prop. 1. Il existerait donc une fonction continue $f_0 \geqslant 0$, à support compact, et un nombre $\alpha > 0$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe une fonction continue g_n à support compact, telle que $0 \leqslant g_n \leqslant f_0$, $\int g_n d\mu \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $\int g_n d\nu \geqslant \alpha$. Posons $h_n = \sup\limits_{p \geqslant 0} g_{n+p}$; on a $h_n \leqslant \sum\limits_{p=0}^{\infty} g_{n+p}$ donc $\int h_n d\mu \leqslant \sum\limits_{p=0}^{\infty} \int g_{n+p}\, d\mu \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$; d'autre part $h_n \geqslant g_n$, donc $\int h_n d\nu \geqslant \int g_n d\nu$. La suite (h_n) est décroissante ; soit h son enveloppe inférieure (c'est-à-dire $\limsup\limits_{n \to \infty} g_n$) ; on a $\int h\, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int h_n d\mu = 0$ et $\int h\, d\nu = \lim\limits_{n \to \infty} \int h_n d\nu \geqslant \alpha$; h serait donc négligeable pour μ mais non négligeable pour ν ; comme h est à support compact, cela contredit l'hypothèse, et achève la démonstration.

On rappelle qu'un ensemble μ-négligeable n'est pas nécessairement ν-négligeable lorsque ν est une mesure de base μ (§ 1, exerc. 2).

DEFINITION 1.- *Sur un espace localement compact E, on dit que deux mesures positives μ et ν sont équivalentes si les bandes engendrées par μ et ν dans $\mathcal{M}$(E) sont identiques* (ou, en d'autres termes, si ν est une mesure de base μ et μ une mesure de base ν).

Les critères précédents donnent les deux conditions suivantes pour que deux mesures μ, ν soient équivalentes :

PROPOSITION 2.- Pour que deux mesures positives μ et ν soient équivalentes, il faut et il suffit que les ensembles localement négligeables soient les mêmes pour μ et ν.

On en déduit que les fonctions mesurables (à valeurs dans un espace topologique) sont les mêmes pour deux mesures équivalentes.

PROPOSITION 3.- Pour que deux mesures positives μ et ν soient équivalentes, il faut et il suffit que $\nu = f.\mu$, où f est localement intégrable pour μ et $f(x) > 0$ localement presque partout (pour μ) ; on a alors $\mu = (1/f).\nu$ ($1/f$ étant définie localement presque partout).

En effet, pour qu'un ensemble N soit localement négligeable pour ν, il faut et il suffit que $f\varphi_N$ soit localement négligeable pour μ (§ 1, cor.1 du th.2) ; si $f(x) > 0$ localement presque partout pour μ, cela signifie que N est localement négligeable pour μ ; inversement, si l'ensemble P des $x \in E$ tels que $f(x)=0$ n'est pas localement négligeable pour μ, il existe un ensemble relativement compact A de mesure $\mu(A) > 0$ tel que $f(x)=0$ dans A ; alors $f\varphi_A$ est μ-négligeable, donc A est ν-négligeable, et μ et ν ne sont pas équivalentes.

PROPOSITION 4.- Sur un espace localement compact dénombrable à l'infini E, toute mesure est équivalente à une mesure bornée.

En effet, E est réunion d'une suite croissante (K_n) d'ensembles compacts. Soit μ une mesure quelconque sur E, et posons $A_n = K_n \cap \complement K_{n-1}$ ($A_1 = K_1$) ; définissons une fonction $f \geqslant 0$ dans E en posant $f(x)=1$ dans A_n si $\mu(A_n)=0$, et $f(x) = \dfrac{1}{2^n \mu(A_n)}$ dans A_n si $\mu(A_n) > 0$. Il est clair que f est μ-mesurable, et μ-intégrable en raison de la prop.4 du § 1 ; comme $f(x) > 0$ pour tout x, la mesure $\nu = f.\mu$ est équivalente à μ (prop.3), et elle est bornée en vertu du cor.1 de la prop.11 du § 1.

30

3. Mesures singulières par rapport à μ.

DÉFINITION 2.- Etant donnée une mesure positive μ sur un espace localement compact E , on dit qu'une mesure positive ν sur E est singulière par rapport à μ , si on a $\inf(\mu, \nu)=0$ dans $\mathcal{M}(E)$.

DÉFINITION 3.- Etant donnée une mesure positive μ sur un espace localement compact E , on dit que μ est concentrée sur l'ensemble M si l'ensemble $\complement M$ est localement négligeable pour μ .

Il est clair que si μ est concentrée sur M , pour tout ensemble localement négligeable N , μ est aussi concentrée sur $M \cup N$ et sur $M \cap \complement N$; inversement, si μ est concentrée sur deux ensembles M_1 M_2 , les ensembles $M_1 \cap \complement M_2$ et $M_2 \cap \complement M_1$ sont localement négligeables . On peut dire qu'un ensemble sur lequel est concentrée une mesure μ n'est déterminé qu"à un ensemble localement négligeable (pour μ)près", c'est-à-dire que la classe $\dot{\varphi}_M$ de sa fonction caractéristique (pour la relation d'équivalence "f et g sont égales localement presque partout") est déterminée.

On aura soin de ne pas confondre la notion de support d'une mesure et celle d'ensemble où est concentrée la mesure. Le support de μ est le plus petit ensemble fermé où est concentrée (chap.III, §3,prop.) ; mais il existe en général des parties du support, non identiques à ce dernier, et sur lesquelles μ est aussi concentrée ; par exemple, le support de μ peut être E tout entier, mais il peut exister des parties dénombrables de E sur lesquelles μ est concentrée .

Exemple.- Soit h une fonction numérique finie et $\geqslant 0$, définie dans E , et soit N l'ensemble des points x tels que $h(x) > 0$; supposons que pour tout ensemble compact K , la somme $\sum_{x \in K} h(x)$ soit finie, ce qui entraîne que $N \cap K$ est dénombrable, autrement dit, que N est localement dénombrable.

Nous allons voir que la mesure μ , définie par la relation $\mu(f) = \sum_{x\in E} h(x)f(x)$ pour $f \in \mathcal{K}(E)$, est <u>concentrée sur</u> N .

On sait en effet (chap. IV, § 4) que tout ensemble relativement compact A est intégrable pour μ et que l'on a $\mu(A) = \sum_{x\in A} h(x)$; pour tout ensemble compact K , on a donc $\mu(K \cap \complement N)=0$, ce qui montre que $\complement N$ est localement négligeable pour μ .

On notera que si N est dénombrable et <u>partout dense</u> dans E , le support de μ est E tout entier.

Réciproquement, on voit aisément que toute mesure positive μ concentrée sur un ensemble localement dénombrable N est de cette forme, car si $h(x)=\mu(\{x\})$, on a $\mu(K) = \sum_{x\in K} h(x) < +\infty$ pour tout ensemble compact K .

PROPOSITION 5.- <u>Pour qu'une mesure positive ν soit singulière par rapport à μ , il faut et il suffit qu'il existe dans E deux ensembles M,N sans point commun, tels que μ soit concentrée sur M et ν sur N</u> .

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons que $\inf(\mu,\nu)=0$, et soit $\lambda = \mu+\nu$; comme $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$, $0 \leqslant \nu \leqslant \lambda$, on peut écrire $\mu = f.\lambda$, $\nu = g.\lambda$, où f et g sont positives et localement intégrables pour λ , et la condition $\inf(\mu,\nu)=0$ entraîne que $\inf(f,g)$ est nulle localement presque partout pour λ ; en modifiant f sur un ensemble localement négligeable pour λ , on peut donc supposer que $\inf(f,g)=0$. Soit alors M l'ensemble des points où $f(x)\neq 0$ et N l'ensemble des points où $g(x)\neq 0$; M et N sont sans point commun ; si h est la fonction caractéristique de $\complement M$, on a $hf=0$, donc (§ 1, cor. 1 du th. 2) h est localement négligeable pour $\mu = f.\lambda$, ce qui signifie que $\complement M$ est localement négligeable pour μ ; on montre de même que $\complement N$ est localement négligeable pour ν .

Inversement, supposons que μ et ν soient respectivement concentrées sur des ensembles M et N sans point commun ; avec les mêmes notations, on peut supposer que f (resp. g) est nulle dans $\complement M$ (resp. $\complement N$), donc $\inf(f,g)=0$, et par suite $\inf(\mu,\nu)=0$.

On peut avoir $\inf(\mu,\nu)=0$ pour deux mesures positives ayant <u>même support</u> : c'est ce qui montre l'exemple ci-dessus, quand on prend μ et ν concentrées sur des ensembles dénombrables partout denses dans E et sans point commun.

COROLLAIRE - <u>Pour toute mesure</u> μ <u>sur</u> E , <u>il existe deux ensembles</u> M,N <u>sans point commun tels que</u> μ^+ <u>soit concentrée sur</u> M <u>et</u> μ^- <u>sur</u> N .

<u>Remarque</u>.- Avec les notations de la prop.5, on a $f=\varphi_M$ et $g=\varphi_N$ localement presque partout (pour la mesure λ). En effet, comme $\mu\leqslant\lambda$ et $\nu\leqslant\lambda$, on a $f\leq 1$ et $g\leq 1$ localement presque partout, d'où $f\leqslant\varphi_M$ et $g\leqslant\varphi_N$ localement presque partout. Mais comme $f+g=1$ localement presque partout, on a nécessairement $f=\varphi_M$ et $g=\varphi_N$ localement presque partout.

4. Décompositions canoniques d'une mesure.

THÉORÈME 3.- <u>Soit</u> μ <u>une mesure positive sur un espace localement compact</u> E ; <u>toute mesure positive</u> ν <u>sur</u> E <u>peut s'écrire d'une seule manière sous la forme</u> $\nu'+\nu''$, <u>où</u> ν' <u>est une mesure positive de base</u> μ , <u>et</u> ν'' <u>une mesure positive singulière par rapport à</u> μ .

Cela n'est autre que le th. de Riesz (chap.II, §1,th.1) appliqué à l'espace complètement réticulé $\mathcal{M}(E)$ des mesures sur E , et à la bande engendrée par μ dans cet espace. D'après la prop.5, il existe un ensemble M localement négligeable pour μ et tel que ν soit concentrée sur M .

DÉFINITION 4.- <u>On dit qu'une mesure</u> μ <u>sur un espace localement compact</u> E <u>est non atomique si pour tout</u> $x\in E$ <u>on a</u> $\mu(\{x\})=0$.

PROPOSITION 6.- Si μ est une mesure non atomique, toute mesure de base μ est non atomique ; toute mesure concentrée sur un ensemble localement dénombrable est singulière par rapport à μ .

La première partie de la proposition est évidente, car si μ est non atomique, pour tout point $x \in E$ et toute fonction f localement intégrable pour μ , $f\varphi_{\{x\}}$ est négligeable, donc $f.\mu$ est non atomique. D'autre part, un ensemble localement dénombrable N est localement négligeable pour μ , donc μ est concentrée sur $\complement N$, ce qui prouve que μ est étrangère à toute mesure concentrée sur N (prop.5).

PROPOSITION 7.- Toute mesure positive μ sur un espace localement compact E peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $\mu' + \mu''$, où μ'' est une mesure positive non atomique et où μ' est une mesure positive concentrée sur un ensemble localement dénombrable.

En effet, soit N l'ensemble des $x \in E$ tels que $\mu(\{x\}) \neq 0$, et posons $h(x) = \mu(\{x\})$ pour tout $x \in E$; pour tout ensemble compact K , et toute partie finie F de $K \cap N$, on a $\sum_{x \in F} h(x) \leqslant \mu(K)$, donc $\sum_{x \in K \cap N} h(x)$, qui est la borne supérieure des sommes $\sum_{x \in F} h(x)$ lorsque F parcourt l'ensemble des parties finies de $K \cap N$, est un nombre fini $\leqslant \mu(K)$, ce qui prouve en particulier que $K \cap N$ est dénombrable, donc N localement dénombrable. Soit μ' la mesure définie par $\mu'(f) = \sum_{x \in E} h(x) f(x)$ pour toute fonction continue f à support compact ; la mesure μ' est positive et concentrée sur N ; en outre pour tout ensemble compact K , on a $\mu'(K) = \sum_{x \in K \cap N} h(x) \leqslant \mu(K)$, donc $\mu' \leqslant \mu$; enfin, comme $\mu'(\{x\}) = \mu(\{x\})$ pour tout $x \in N$, et $\mu'(\{x\}) \leqslant \mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \complement N$, $\mu - \mu'$ est une mesure non atomique.

L'unicité de la décomposition considérée résulte de la prop.6 ; en effet, si $\mu'_1 + \mu''_1 = \mu'_2 + \mu''_2$, où μ'_1 et μ'_2 sont positives et concentrées sur des ensembles localement dénombrables, μ''_1 et μ''_2

positives et non atomiques, on a $\mu'_1 \leqslant \mu'_2 + \mu''_2$, donc $\mu'_1 = \inf(\mu'_1, \mu'_2 + \mu''_2) \leqslant \inf(\mu'_1, \mu'_2) + \inf(\mu'_1, \mu''_2)$ (chap. II, § 1, n°1) ; mais comme μ'_1 et μ''_2 sont étrangères, on a $\mu'_1 \leqslant \inf(\mu'_1, \mu'_2) \leqslant \mu'_2$, et on montre de même que $\mu'_2 \leqslant \mu'_1$, donc $\mu'_1 = \mu'_2$, et par suite $\mu''_1 = \mu''_2$.

5. Applications : I. Dualité des espaces L^p.

THÉORÈME 4.- Soit p un nombre réel tel que $1 \leqslant p < +\infty$, et soit q l'exposant conjugué de p. Toute forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^p(E, \mu)$ est de la forme $f \to \int fg\, d\mu$, où g est une fonction de $\mathcal{L}^q(E, \mu)$, dont la classe dans L^q est bien déterminée.

En effet, soit θ une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^p$; il existe donc un nombre $a \geqslant 0$ tel que $|\theta(f)| \leqslant a.N_p(f)$. Comme l'espace $\mathcal{K}(E)$ des fonctions continues à support compact est contenu dans $\mathcal{L}^p$, et que, pour toute partie compacte K de E, la topologie induite sur $\mathcal{K}(E,K)$ (espace des fonctions continues à support dans K) par celle de $\mathcal{L}^p$ est moins fine que la topologie de la convergence uniforme, la restriction de θ à chaque $\mathcal{K}(E,K)$ est continue pour cette dernière topologie, autrement dit, la restriction de θ à $\mathcal{K}(E)$ est une mesure. En outre, cette mesure est de base μ ; en effet, si f_0 est une fonction $\geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$ et si f est une fonction de $\mathcal{K}(E)$ telle que $0 \leqslant f \leqslant f_0$, on a $|\theta(f)| \leqslant a.(\mu(f^p))^{1/p} \leqslant a.\|f_0\|^{(p-1)/p}(\mu(f))^{1/p}$; le critère de la prop. 1 est donc satisfait.

Il existe donc une fonction localement intégrable h telle que $\theta(f) = \int hf\, d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$; nous allons voir que h est localement presque partout égale à une fonction de $\mathcal{L}^q$. Supposons d'abord que $p > 1$, ce qui entraîne que q est fini ; il suffit de prouver que lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de E, l'ensemble des nombres $\int |h|^q \varphi_K d\mu$ est borné.

Pour tout entier $n > 0$, posons $h_n(x)=h(x)\varphi_K(x)$ si $|h(x)\varphi_K(x)| \leqslant n$, $h_n(x)=n$ si $h(x)\varphi_K(x) > n$ et $h_n(x)=-n$ si $h(x)\varphi_K(x) < -n$; soit u la fonction $(\mathrm{sgn}\, h_n)|h_n|^{q-1}/(N_q(h_n))^{q-1}$; comme on a $p(q-1)=q$, on a $N_p(u)=1$. Soit v une fonction continue $\geqslant 0$, à support compact, égale à $n^{q-1}/(N_q(h_n))^{q-1}$ dans K ; comme $|u| \leqslant v$, il existe une suite (w_m) de fonctions continues telles que $|w_m| \leqslant v$, qui convergent en moyenne d'ordre p vers u et sont telles que $w_m(x)$ tende presque partout vers $u(x)$; comme $|hw_m| \leqslant |h|v$, le th. de Lebesgue montre que $\int hu\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int hw_m d$. Comme $\left|\int hw_m d\mu\right| \leqslant a.N_p(w_m)$, et que $N_p(w_m)$ tend vers $N_p(u)$, on a $\left|\int hu\, d\mu\right| \leqslant a.N_p(u)$. Or, on a $|h_n u| \leqslant hu$ en raison du fait que $\mathrm{sgn}\, h = \mathrm{sgn}\, h_n$, donc $\int h_n u\, d\mu \leqslant a.N_p(u)=a$; mais $h_n u=|h_n|^q/(N_q(h_n))^{q-1}$, donc $\int h_n u\, d\mu = N_q(h_n)$, et par suite $N_q(h_n) \leqslant a$. Comme la suite $(|h_n|)$ est croissante et a pour enveloppe supérieure $|h\varphi_K|$, on a

$$\int |h|^q \varphi_K d\mu = \sup_n \int |h_n|^q d\mu \leqslant a^q$$

ce qui démontre que h est localement presque partout égale à une fonction g de $\mathcal{L}^q$. On a donc $\theta(f)=\int gf\, d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$; or, $\mathcal{K}(E)$ est partout dense dans $\mathcal{L}^p$ (pour la topologie de la convergence en moyenne d'ordre p), et la forme linéaire $f \to \int gf\, d\mu$ est continue dans $\mathcal{L}^p$; on a donc $\theta(f)=\int gf\, d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$. D'autre part, si g_1 est une seconde fonction de $\mathcal{L}^q$ telle que $\theta(f) = \int g_1 f\, d\mu$ dans $\mathcal{L}^p$ la relation $\int (g-g_1)f\, d\mu =0$ valable pour toute fonction f de $\mathcal{L}^p$ entraîne $N_q(g-g_1)=0$ (chap. IV, §6, prop.), donc g et g_1 sont égales presque partout.

Supposons maintenant que $p=1$, et montrons que dans ce cas h est essentiellement bornée, autrement dit appartient à $\mathcal{L}^\infty$. Dans le cas contraire, il existerait un ensemble compact K tel que $\mu(K) > 0$ et que dans K , on ait $|h(x)| > a+1$. Soit v une fonction continue $\geqslant 0$, à support compact, égale à 1 dans K ; il existe une suite (w_m) de fonctions continues à support compact, telle que $|w_m| \leqslant v$, que w_m converge en moyenne vers $u=(\text{sgn } h).\varphi_K$ et que $w_m(x)$ tende presque partout vers $u(x)$; en vertu du th. de Lebesgue, $\int hw_m d\mu$ tend vers $\int hu\, d\mu$; comme $\int hw_m d\mu \leqslant a.N_1(w_m)$, on a, à la limite $\int hu\, d\mu \leqslant a.N_1(u)=a.\,\mu(K)$; mais comme $h(x)u(x)=|h(x)|\varphi_K(x)$, on a en vertu de l'hypothèse $\int hu\, d\mu \geqslant (a+1)\,\mu(K)$, ce qui est absurde ; la démonstration s'achève comme dans le premier cas.

COROLLAIRE 1.- Pour $p > 1$ (resp. $p=1$), soit φ l'application qui, à toute classe $\tilde{g} \in L^q$ (resp. $\dot{g} \in L^\infty$) fait correspondre la forme linéaire sur L^p (resp. L^1) obtenue par passage au quotient à partir de la forme linéaire $f \to \int gf\, d\mu$ sur $\mathcal{L}^p$ (resp. $\mathcal{L}^1$), g étant une fonction de la classe $\tilde{g}$ (resp. $\dot{g}$). Alors φ est une isomètrie de l'espace de Banach L^q (resp. L^∞) sur le dual de l'espace de Banach L^p (resp. L^1).

COROLLAIRE 2.- Pour tout nombre p tel que $1 < p < +\infty$, l'espace de Banach L^p est réflexif.

On notera par contre que les espaces L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs en général (cf. exerc.6).

Le th.4 permet de préciser la prop.   du chap.IV, § 6 :

PROPOSITION 8.- Soit p un nombre tel que $1 \leqslant p < +\infty$. Si g est une fonction mesurable finie telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$, la fonction fg soit intégrable, alors g est localement presque partout égale à une fonction de $\mathcal{L}^q$.

Supposons d'abord $p > 1$, et commençons par montrer que pour toute partie compacte K de E , la fonction $g\varphi_K$ appartient à $\mathcal{L}^q$.

On peut se borner au cas où $g \geqslant 0$, puisque $|g|f$ est intégrable pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$. Posons $g_n = \inf(g,n)$; d'après le th. de Lebesgue, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$, on a $\int gf\varphi_K d\mu = \lim_{n \to \infty} g_n f\varphi_K d\mu$; or, comme $g_n\varphi_K$ appartient à $\mathcal{L}^q$, la forme linéaire sur L^p obtenue par passage au quotient à partir de la forme linéaire $f \to \int g_n\varphi_K f\,d\mu$ sur $\mathcal{L}^p$, est continue. On sait (<u>Esp.vect.top</u>., chap.I, §) qu'une suite de formes linéaires continues sur un espace normé, qui converge simplement, a pour limite une forme linéaire continue ; le th.2 montre donc que $g\varphi_K$ appartient à $\mathcal{L}^q$ pour toute partie compacte K de E. En outre, les formes linéaires continues sur L^p déduites par passage au quotient des formes linéaires $f \to \int g\varphi_K f\,d\mu$ sur $\mathcal{L}^p$, forment un ensemble <u>faiblement borné</u> dans L^q (identifié au dual de L^p), puisque, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$ et toute partie compacte K de E, on a $\left|\int g\varphi_K f\,d\mu\right| \leqslant \int |gf|\,d\mu$; cet ensemble est donc aussi <u>fortement borné</u>, autrement dit l'ensemble des nombres $\int |g|^q \varphi_K d\mu$ est borné, ce qui prouve que g est localement presque partout égale à une fonction de $\mathcal{L}^q$.

Si $p=1$, la première partie du raisonnement montre que pour tout ensemble compact K, $g\varphi_K$ est essentiellement bornée, et la seconde partie montre qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que $N_\infty(g\varphi_K) \leqslant a$ pour toute partie compacte K de E. On en déduit que g appartient à $\mathcal{L}^\infty$; sinon, il existerait un ensemble compact K de mesure > 0 tel que $|g(x)\varphi_K(x)| \geqslant a+1$ dans K, ce qui est absurde.

<u>6. Applications : II. Fonctions de mesures.</u>

Soient λ une mesure positive sur un espace localement compact E, et soient μ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n mesures de base λ ; on peut donc écrire $\mu_i = f_i \cdot \lambda$, où les f_i sont des fonctions numériques finies localement intégrables pour λ. Soit $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^n$ et telle que la fonction $u(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ soit localement intégrable pour λ ; on pose alors $u(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)=u(f_1,f_2,\ldots,f_n).\lambda$. Cette définition ne dépend que des mesures λ et μ_i , car si on remplace f_i par une fonction g_i égale localement presque partout à f_i, il est clair que $u(g_1,\ldots,g_n)$ est égale localement presque partout à $u(f_1,\ldots,f_n)$.

Soient u_k $(1\leqslant k\leqslant p)$ p fonctions numériques définies dans $\mathbb{R}^n$ et telles que les p fonctions $u_k(f_1,f_2,\ldots,f_n)=g_k$ soient localement intégrables pour λ ; et soit v une fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^p$ et telle que $v(g_1,\ldots,g_p)$ soit localement intégrable pour λ ; alors si on pose $w=v\circ u$, $w(f_1,\ldots,f_n)$ est localement intégrable pour λ et il est clair qu'on a

$$w(\mu_1,\ldots,\mu_n)=v(u_1(\mu_1,\ldots,\mu_n),\ldots,u_p(\mu_1,\ldots,\mu_n)).$$

Donnons-nous maintenant n mesures <u>arbitraires</u> μ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sur E ; il existe toujours une mesure positive λ telle que $|\mu_i|\leqslant\lambda$ pour $1\leqslant i\leqslant n$, par exemple $\lambda=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|\mu_i|$; on peut donc écrire pour une telle mesure λ , $\mu_i=f_i.\lambda$, où f_i est essentiellement bornée et mesurable pour λ . Si $u(x_1,\ldots,x_n)$ est une fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^n$ et telle que $u(f_1,\ldots,f_n)$ soit localement intégrable pour λ (ce qui sera par exemple toujours le cas si u est <u>continue</u> dans $\mathbb{R}^n$), on peut définir comme ci-dessus la mesure $u(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, mais cette mesure dépend en général de la mesure λ choisie telle que $|\mu_i|\leqslant\lambda$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

Il y a toutefois un cas important où $u(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ <u>ne dépend pas de</u> λ ; c'est celui où la fonction $u(x_1,\ldots,x_n)$ est <u>positivement homogène</u>, autrement dit, telle que $u(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)=\alpha u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ pour tout scalaire $\alpha\geqslant 0$. En effet, soient λ et λ' deux mesures positives telles que $|\mu_i| \leqslant \lambda$ et $|\mu_i| \leqslant \lambda'$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; comme on a alors aussi $|\mu_i| \leqslant \inf(\lambda, \lambda')$, on peut se borner au cas où $\lambda \leqslant \lambda'$. On peut alors écrire $\lambda = g.\lambda'$, où g est $\geqslant 0$ et localement intégrable pour λ', d'où $\mu_i = f_i.(g.\lambda') = (f_i g).\lambda'$, $f_i g$ étant localement intégrable pour λ' (§ 1, cor. 1 et 3 du th. 2). Cela étant, on a $u(f_1 g, \dots, f_n g) = u(f_1, \dots, f_n) g$, et comme $u(f_1, \dots, f_n)$ est localement intégrable pour $\lambda = g.\lambda'$, $u(f_1, \dots, f_n) g$ est localement intégrable pour λ' et on a $u(f_1 g, \dots, f_n g).\lambda' = u(f_1, \dots, f_n).(g.\lambda') = u(f_1, \dots, f_n).\lambda$, ce qui prouve notre assertion.

On notera d'ailleurs que la démonstration précédente s'applique en supposant seulement que λ est de base λ'. On peut donc encore définir $u(\mu_1, \dots, \mu_n)$ en prenant pour λ, non plus une mesure positive telle que $|\mu_i| \leqslant \lambda$ pour toute indice i, mais seulement telle que chacune des mesures μ_i soit de base λ, car alors $\sup_i (|\mu_i|)$ est aussi de base λ, et la remarque précédente s'applique.

Lorsque u est continue (et homogène), on peut donner une définition directe de $u(\mu_1, \dots, \mu_n)$ qui ne fait plus intervenir aucune mesure auxiliaire (exerc. 27).

Dans le cas particulier des fonctions $u(x) = x^+$, $u(x) = x^-$ ou $u(x) = |x|$, les fonctions μ^+, μ^- et $|\mu|$ définies de cette façon coïncident bien avec celles qui ont été désignées par les mêmes notations au chap. III, § 2, en vertu de la prop. 7 du § 1.

L'expression de mesures μ_i en nombre fini comme mesures ayant une même base permet aussi de compléter la prop. 9 du § 1 de la façon suivante

PROPOSITION 9.- <u>Soient</u> μ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>n mesures positives sur</u> E . <u>Pour qu'une application</u> f <u>de</u> E <u>dans un espace de Banach</u> F <u>soit intégrable</u>

<u>pour la mesure</u> $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, <u>il faut et il suffit qu'elle soit intégrable pour chacune des mesures</u> μ_i , <u>et on a alors</u>

(1) $$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f \, d\mu_i .$$

En effet, pour que $|f|$ soit μ-intégrable, il faut et il suffit qu'elle soit intégrable pour chacune des μ_i (§1,prop.9). Montrons que pour que f soit μ-mesurable, il faut et il suffit qu'elle soit μ_i-mesurable pour chaque indice i. Or, on peut écrire $\mu_i = g_i \cdot \mu$, où g_i est localement intégrable pour μ et $0 \leq g_i \leq 1$; dire que f est μ_i-mesurable équivaut à dire que $f g_i$ est μ-mesurable (§1,cor.2 du th.2), d'où notre assertion. Reste à démontrer la relation (1). Or, on a $1 = \sum_{i=1}^{n} g_i$ localement presque partout pour μ ; pour tout ensemble compact K on a donc $\int f \varphi_K d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f g_i \varphi_K d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f \varphi_K d\mu_i$ (§1,th.2) ; en passant à la limite suivant l'ensemble filtrant des parties compactes de E , on obtient (1), (§1, cor. de la prop.4).

<u>Exercices</u>.- 1) Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact E . Soit A un ensemble intégrable pour μ , de mesure $\mu(A) > 0$, tel que pour tout ensemble intégrable B contenu dans A , on ait $\mu(B)=0$ ou $\mu(B)=\mu(A)$. Montrer qu'il existe dans A un point a tel que $\mu(\{a\})=\mu(A)$. (Considèrer l'intersection des ensembles compacts $K \subset A$ tels que $\mu(K)=\mu(A)$; montrer qu'elle n'est pas vide, qu'elle a une mesure égale à $\mu(A)$ et qu'elle se réduit à un seul point).

2) Soit μ une mesure positive non atomique sur un espace localement compact E . Soit A un ensemble intégrable pour , tel que $\mu(A)= a > 0$.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des parties intégrables X de A telles que $0 < \mu(X) \leq \varepsilon$ (en utilisant l'exerc.1 montrer qu'il existe une partie B de A telle que $0 < \mu(B) \leq \frac{a}{2}$).

b) En déduire que l'ensemble des valeurs de $\mu(X)$, lorsque X parcourt l'ensemble des parties intégrables de A, est l'intervalle fermé $[0,a]$ (pour tout nombre β tel que $0<\beta<a$, soit γ la borne supérieure des mesures des parties mesurables X de A telles que $\mu(X)\leq\beta$; montrer tout d'abord qu'on a $\gamma=\beta$, en raisonnant par l'absurde et utilisant a), puis prouver qu'il existe une suite croissante de parties X_n de A telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(X_n)=\beta$).

3) a) Soit ν une mesure positive sur E, concentrée sur un ensemble localement dénombrable, et soit A une partie de E intégrable pour ν. Montrer que l'ensemble des valeurs de $\nu(X)$ lorsque X parcourt l'ensemble des parties intégrables de A, est fermé dans $\mathbb{R}$ (Soit N l'ensemble localement dénombrable sur lequel ν est concentrée. En supposant $A\cap N$ infini, et désignant par a_n les points de $A\cap N$, et par I l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$, considérer l'application φ de l'espace produit $I^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi((\varepsilon_n)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n\,\nu(\{a_n\})$, et montrer qu'elle est continue).

b) Déduire de a) et de l'exerc.2 b) que si μ est une mesure positive quelconque sur E, A une partie intégrable de E, l'ensemble des valeurs de $\mu(X)$ lorsque X parcourt l'ensemble des parties intégrables de A, est fermé dans $\mathbb{R}$.

4) Soit E un espace localement compact non compact et dénombrable à l'infini.

a) Montrer que si μ est une mesure positive non atomique sur E, l'ensemble des valeurs de $\mu(X)$ lorsque X parcourt l'ensemble des parties intégrables de E, est un intervalle fermé $[0,a]$, ou la demi-droite $[0,+\infty[$.

b) Donner un exemple de mesure positive μ sur E tel que l'ensemble des valeurs de $\mu(X)$ lorsque X parcourt l'ensemble des parties intégrables de E, ne soit pas fermé dans $\mathbb{R}$.

5) Soient μ et ν deux mesures positives étrangères sur un espace localement compact E . Montrer que pour tout nombre p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, l'espace vectoriel topologique $L^p(E, \mu + \nu)$ est isomorphe à l'espace produit des deux espaces vectoriels topologiques $L^p(E, \mu)$ et $L^p(E, \nu)$.

6) Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact E . Montrer que si le support de μ est un ensemble infini, l'espace $L^1(E, \mu)$ n'est pas réflexif, ni par suite son dual $L^\infty(E, \mu)$ (examiner séparément le cas où μ est non atomique et le cas où ν est concentrée sur un ensemble localement dénombrable ; dans chaque cas, former une suite bornée $(\tilde{f}_n)$ dans $L_1(E, \mu)$ qui n'admet pas d'adhérence faible).

7) Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact. On désigne par $\mathcal{H}$ le sous-espace de l'espace topologique $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ formé de toutes les fonctions caractéristiques d'ensembles intégrales ; $\mathcal{H}$ est contenu dans tous les $\mathcal{L}^p(E, \mu)$ pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et la topologie induite sur $\mathcal{H}$ par celle de $\mathcal{L}^p(E, \mu)$ est la même pour toutes les valeurs de p telles que $1 \leqslant p < +\infty$. On désigne par H l'image canonique de $\mathcal{H}$ dans l'espace de Banach $L^1(E, \mu)$.

a) Soit f une fonction appartenant à l'un des espaces $\mathcal{L}^p$ au moins ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$) ; montrer que l'application $g \rightarrow \int gf \, d\mu$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$ est continue.

b) Montrer que le sous-espace H de L^1 est fermé, donc complet.:

c) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p$ ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$), telle que, pour tout ensemble intégrable A , la suite des nombres $\int f_n \varphi_A d\mu$ soit bornée. Montrer qu'il existe deux nombres $a > 0$, $b > 0$ tels que la relation $\mu(A) \leqslant a$ entraîne $\int |f_n| \varphi_A d\mu \leqslant b$ pour tout n (utiliser a) et b), en appliquant le th. de Baire à l'espace complet H).

d) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ telle que, pour tout ensemble intégrable A, $\int f_n \varphi_A \, d\mu$ tende vers 0 avec $1/n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la relation $\mu(A) \leqslant \delta$ entraîne $\int |f_n| \varphi_A \, d\mu \leqslant \varepsilon$ (même méthode).

8) Soit B un ensemble mesurable dans E, réunion dénombrable d'une suite croissante (K_n) d'ensembles compacts, et d'un ensemble négligeable. Soit $\mathcal{H}_o$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}^1$ formé des fonctions caractéristiques des ensembles mesurables contenus dans B ; on considère sur $\mathcal{H}_o$ la famille des écarts $\delta_n(f,g) = \int |f-g| \varphi_{K_n} \, d\mu$ et la structure uniforme qu'ils définissent. Soit H_o l'espace des classes des fonctions de $\mathcal{H}_o$, qui est l'espace uniforme séparé associé à $\mathcal{H}_o$.

a) Soit f une fonction intégrable telle que $f(x)=0$ dans $\complement B$; montrer que l'application $g \rightarrow \int gf \, d\mu$ de $\mathcal{H}_o$ dans $\mathbb{R}$ est continue.

b) Montrer que l'espace uniforme métrisable H_o est complet.

c) Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telles que $f_n(x)=0$ dans $\complement B$ pour tout n, et que, pour tout ensemble mesurable A, la suite des nombres $\int f_n \varphi_A d\mu$ soit bornée. Montrer qu'il existe un indice r tel que la suite des nombres $\int |f_n| \varphi_{\complement K_r} \, d\mu$ est bornée (même méthode que dans l'exerc. 7 c)).

d) Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telles que $f_n(x)=0$ dans $\complement B$ pour tout n, et que, pour tout ensemble mesurable A, $\int f_n \varphi_A d\mu$ tende vers 0. Montrer que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un indice r tel que l'on ait $\int |f_n| \varphi_{\complement K_r} \, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour tout indice n (même méthode que dans l'exerc. 7 d)).

9) Déduire des exerc. 7 et 8 les propositions suivantes :

a) Pour qu'une suite (f_n) soit bornée dans l'espace $\mathcal{L}^1$, il suffit que pour tout ensemble mesurable A, l'ensemble des nombres $\int f_n \varphi_A d\mu$ soit borné.

b) Pour qu'une suite (f_n) de fonctions intégrables soit telle que la suite $(\tilde{f}_n)$ converge faiblement vers 0 dans L^1, il suffit que, pour tout ensemble mesurable A, la suite des nombres $\int f_n \varphi_A d\mu$ tende vers 0. (Considérer séparément le cas où μ est non atomique et le cas où μ est concentrée sur un ensemble localement dénombrable ; dans le premier cas, utiliser l'exerc.2).

10) a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p$, où $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. On suppose que $p > 1$. Montrer que pour que la suite $(\tilde{f}_n)$ converge faiblement vers 0 dans L^p, il faut et il suffit qu'elle soit bornée et que, pour tout ensemble intégrable A, $\int f_n \varphi_A d\mu$ tende vers 0.

b) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0,+\infty[$. On suppose $p > 1$, soit k un nombre tel que $1/p < k < 1$. Si on pose $f_n(x) = n^k e^{-nx}$ montrer que pour tout ensemble mesurable A, $\int f_n \varphi_A d\mu$ tend vers 0, mais que la suite $(\tilde{f}_n)$ n'est pas bornée dans L^p.

c) E et μ étant comme dans b), soit f_n la fonction caractéristique de l'intervalle $[n, n+1]$. Montrer que la suite $(\tilde{f}_n)$ tend faiblement vers 0 dans les L^p tels que $1 < p \leqslant +\infty$, est bornée dans L^1 mais ne tend pas faiblement vers 0 dans L^1.

d) E et μ étant comme dans b), soit f_n la fonction caraˇtéristique de l'intervalle $[n, 2n]$. Montrer que pour tout ensemble intégrable A, $\int f_n \varphi_A d\mu$ tend vers 0, mais que la suite $(\tilde{f}_n)$ n'est bornée dans aucun des L^p tels que $1 \leqslant p < +\infty$.

11) a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$. Montrer que, pour que la suite $(\tilde{f}_n)$ converge faiblement vers 0 dans L^1, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient remplies : 1° pour toute fonction continue à support compact g, $\int g f_n d\mu$ tend vers 0 ; 2° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la relation $\mu(A) \leqslant \delta$ entraîne $\limsup_{n \to \infty} \int |f_n| \varphi_A d\mu \leqslant \varepsilon$; 3° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un

un ensemble B de mesure finie tel que $\int |f_n| \varphi_{\complement B} d\mu \leqslant \varepsilon$ pour tout n .
(Montrer d'abord que la suite $(\tilde{f}_n)$ est bornée dans L^1, puis utiliser le fait que $\mathcal{K}(E)$ est dense dans $\mathcal{L}^1$).

b) Donner un exemple de suite $(\tilde{f}_n)$ satisfaisant aux conditions 1° et 2° de a), mais non faiblement convergente vers 0 dans L^1 (cf. exerc. 10 c)).

c) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E=[0,1]$. On désigne par f_n la fonction égale à 2^n dans l'intervalle $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$, à -2^{n+1} dans l'intervalle $[2^{-n-2}, 2^{-n-1}[$, à 0 ailleurs dans E . Montrer que la suite $(\tilde{f}_n)$ satisfait à la condition 1° de a), mais ne converge pas faiblement vers 0 dans L^1 .

d) Montrer qu'une suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{L}^p$ $(p > 1)$ peut satisfaire aux trois conditions de a) sans que la suite $(\tilde{f}_n)$ converge faiblement vers 0 dans L^p (cf. exerc. 10 b)).

12) a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p$ $(p > 1)$ bornée dans $\mathcal{L}^p$ et convergente en mesure (chap.IV, § , exerc.) vers 0 dans tout ensemble intégrable. Montrer que la suite $(\tilde{f}_n)$ converge faiblement vers 0 dans L^p .

b) Donner un exemple de suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{L}^1$, bornée et convergente en mesure vers 0 dans E , mais telle que $(\tilde{f}_n)$ ne tende pas faiblement vers 0 dans L^1 (cf.exerc.11 c)).

c) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E=[0,1]$. Montrer que, si $f_n(x)=\sin nx$, la suite $(\tilde{f}_n)$ converge faiblement vers 0 dans tous les L^p tels que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, mais ne converge pas en mesure vers 0.

13) a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$ telle que : 1° la suite (f_n) converge en mesure vers 0 dans tout ensemble intégrable ; 2° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la relation $\mu(A) \leqslant \delta$ entraîne $\limsup_{n \to \infty} \int |f_n| \varphi_A d\mu \leqslant \varepsilon$; 3° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un

un ensemble B de mesure finie telle que $\int |f_n| \varphi_{\complement B} d\mu \leqslant \varepsilon$ pour tout n . Montrer que la suite (f_n) converge en moyenne vers 0 .

b) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0,1]$. On désigne par f_n la fonction égale à $n^{2/p}$ dans l'intervalle $\left] \frac{1}{n+1} , \frac{1}{n} \right[$ à 0 ailleurs. Montrer que la suite (f_n) satisfait aux trois conditions de a) et que la suite $(\tilde{f}_n)$ converge faiblement vers 0, mais ne converge pas fortement vers 0 dans L^p .

c) Donner un exemple de suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{L}^1$ qui satisfait aux conditions 1° et 2° (ou 1° et 3°) de a), mais telle que la suite $(\tilde{f}_n)$ ne converge pas faiblement vers 0 dans L^1 (cf.exerc.11 b) et 11 c)).

14) a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$, telle que : 1° $\liminf_{n \to \infty} f_n \geqslant 0$ presque partout ; 2° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la relation $\mu(A) \leqslant \delta$ entraîne $\limsup_{n \to \infty} \int |f_n| \varphi_A d\mu \leqslant \varepsilon$; 3° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble B de mesure finie telle que $\int |f_n| \varphi_{\complement B} d\mu \leqslant \varepsilon$ pour tout n .

Montrer que la suite (f_n) converge en moyenne vers 0 .

(Remarquer que, pour tout $\varepsilon > 0$, si C_m est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f_n(x) \leqslant -\varepsilon$ pour un $n \geqslant m$ au moins, la suite (B_m) est décroissante et a une intersection négligeable).

b) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$ telle que : 1° il existe une fonction sommable g telle que $f_n \geqslant g$ pour tout n ; 2° $\liminf_{n \to \infty} f_n \geqslant 0$ presque partout ; 3° $\limsup_{n \to \infty} \int f_n d\mu \leqslant 0$. Montrer que la suite (f_n) converge en moyenne vers 0 (montrer d'abord que pour tout ensemble mesurable A , on a $\liminf_{n \to \infty} \int f_n \varphi_A d\mu \geqslant 0$; puis remarquer que pour tout ensemble mesurable A , on a $\limsup_{n \to \infty} \int f_n d\mu \geqslant \limsup_{n \to \infty} \int f_n \varphi_A d\mu + \liminf_{n \to \infty} \int f_n \varphi_{\complement A} d\mu$).

15) Soit θ une forme linéaire continue sur l'espace L^{∞}. Pour que θ soit <u>faiblement continue</u>, autrement dit, de la forme $\dot{g} \to \int fg\, d\mu$, où $f \in \mathcal{L}^1$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies : 1° pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que la relation $\mu(A) \leqslant \delta$ et $|h| \leq \varphi_A$ entraîne $|\theta(\dot{h})| \leqslant \varepsilon$; 2° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble μ-intégrable B tel que, pour tout ensemble $A \subset \complement B$ on ait $|\theta(\dot{\varphi}_A)| \leqslant \varepsilon$. (Remarquer que, restreinte aux classes de fonctions continues, θ est une mesure bornée sur E, et utiliser le th. d'Egoroff).

16) Pour qu'une partie H de l'espace L^1 soit <u>relativement faiblement compacte</u>, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies : 1° H est bornée ; 2° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la relation $\mu(A) \leqslant \delta$ entraîne $\int |f| \varphi_A\, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour toute fonction f telle que $\tilde{f} \in H$; 3° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble intégrable B tel que l'on ait $\int |f| \varphi_{\complement B}\, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour toute fonction f telle que $\tilde{f} \in H$. (Pour montrer que les conditions sont nécessaires, remarquer, que, dans un espace de Banach, de toute suite relativement faiblement compacte, on peut extraire une suite faiblement convergente (<u>Esp.vect.top.</u>, chap.III, § , exerc.) ; raisonner alors par l'absurde, en utilisant les exerc. 7d) et 8d). Pour voir qu'elles sont suffisantes, montrer que l'adhérence faible de H dans le dual de L^{∞} est identique à son adhérence faible dans L^1, en utilisant l'exerc. 15).

b) Déduire de a) que toute suite de Cauchy pour la topologie faible dans l'espace L^1 est faiblement convergente (raisonner par l'absurde).

17) a) Si u et v sont deux nombres réels quelconques, démontrer, pour $p > 1$, l'inégalité

$$|u+v|^p \leqslant |u|^p + p.v.|u|^{p-1} + a \sum_{r=1}^{[p]} |v|^r |u|^{p-r} + b.|v|^p$$

où a et b sont deux constantes ne dépendant que de p (cf. Fonct.var. réelle, chap.III, § 2, exerc.).

b) Pour $p > 1$, soit (f_n) une suite faiblement convergente vers 0 dans L^p. Montrer qu'il existe une suite (f_{n_k}) extraite de (f_n) telle que, si on pose $s_m = \sum_{k=1}^{m} f_{n_k}$, on ait

$$\left| \int |s_{m-1}|^{p-1} . \mathrm{sgn}\, s_{m-1} . f_{n_k} \, d\mu \right| \leqslant 1$$

En déduire, en utilisant a) que, si $p > 2$, il existe deux constantes a, b telles que

$$\mu(|s_n|^p) \leqslant \mu(|s_{n-1}|^p) + a + b.\mu(|s_{n-1}|^{p-2})$$

et que, si $1 < p \leqslant 2$, il existe une constante c telle que

$$\mu(|s_n|^p) \leqslant \mu(|s_{n-1}|^p) + c .$$

Conclure que l'on a $N_p(s_n) = \underline{O}(n^{\frac{1}{2}})$ pour $p \geqslant 2$ et $N_p(s_n) = \underline{O}(n^{1/p})$ pour $1 < p \leqslant 2$.

18) a) Soit μ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Montrer que, si $r \neq s$ (r et s nombres $\geqslant 1$), les topologies induites sur $L^p \cap L^q$ par les topologies faibles de L^p et de L^q ne sont pas comparables (cf. chap. IV, § 6, exerc.).

b) Soit μ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$. Montrer que, si $p < q$, la topologie faible de L^q est strictement plus fine que la topologie induite sur L^q par la topologie faible de L^p (chap. IV, § 6, exerc.),.

c) Soit μ la mesure définie par la masse +1 en chaque point d'un espace discret infini E . Montrer que, si $p < q$, la topologie faible de L^p est strictement plus fine que la topologie induite sur L^p par la topologie faible de L^q (chap. IV, § 6, exerc.).

19) Soit A un ensemble contenu dans $L^p \cap L^q$ et borné à la fois dans L^p et dans L^q $(1 < p < q)$. Montrer que pour tout r tel que $p \leqslant r \leqslant q$,

A est borné dans L^r , et que les topologies induites sur A par les topologies faibles des L^r sont toutes identiques (remarquer que $\mathcal{K}(E)$ est dense dans tous les espaces $\mathcal{L}^s$, où $1 \leq s < +\infty$). Montrer que la propriété cesse d'être vraie si p=1 (cf. exerc. 10c)).

20) Soit J l'espace vectoriel des classes $\dot{f}$ de fonctions localement intégrables, qu'on peut identifier à la bande engendrée par la mesure μ dans l'espace $\mathcal{M}(E)$. On munit J de la topologie induite par la topologie forte de $\mathcal{M}(E)$ (chap.III, §2,exerc.), c'est-à-dire la topologie définie par les semi-normes $N_g(f)=\int|fg|d\mu$ pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$, ou les semi-normes $N_A(f)= \int|f\varphi_A|d\mu$ pour tout ensemble intégrable et relativement compact A .

a) Montrer que l'espace des classes des fonctions de $\mathcal{K}(E)$ est partout dense dans J .

b) Si E est compact, on a $J=L^1$. Dans le cas contraire, montrer qu'en général, la topologie induite par J sur L^p est strictement moins fine que la topologie forte de L^p pour $1 \leq p \leq +\infty$, et n'est pas comparable à la topologie faible de L^p (pour $p < +\infty$) (cf.exerc. 12c) ; montrer qu'elle est strictement plus fine que la topologie de la convergence en mesure dans les ensembles intégrables .

c) Montrer que le dual J' de J est identique à l'espace des classes de fonctions mesurables et essentiellement bornées, et à support compact

d) Montrer que dans J', tout ensemble faiblement borné est fortement borné et relativement faiblement compact : un tel ensemble se compose des classes de fonctions mesurables dont le support est contenu dans un ensemble compact fixe, et dont la norme XXXXX $N_\infty(f)$ est bornée.

e) Pour qu'un ensemble $H \subset J$ soit faiblement relativement compact, il faut et il suffit que : 1° pour tout ensemble compact $K \subset E$,

$\int |f\varphi_K| \, d\mu$ soit borné lorsque $\dot{f}$ parcourt H ; 2^o pour tout ensemble compact $K \subset E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les relations $A \subset K$, $\mu(A) \leq \delta$ pour un ensemble intégrable A, entraînent $\int |f\varphi_A| \, d\mu \leq \varepsilon$ pour toute classe $\dot{f} \in H$ (cf. exerc. 16).

21) Soit E un espace localement compact dénombrable à l'infini, et soit (μ_n) une suite quelconque de mesures positives sur E. Montrer qu'il existe une mesure μ sur E telle que chacune des mesures μ_n soit une mesure de base ν.

22) Soit (μ_n) une suite croissante de mesures positives sur un espace localement compact E, majorée dans $\mathcal{M}(E)$, et soit μ la borne supérieure de cette suite dans $\mathcal{M}(E)$.

a) Montrer que pour qu'une fonction f à valeurs dans un espace topologique F, soit mesurable pour μ, il faut et il suffit que f soit mesurable pour chacune des mesures μ_n (utiliser le fait que pour tout ensemble compact K et tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice n_0 tel que, pour tout ensemble compact $K_1 \subset K$, la différence entre $\mu(K \cap \complement K_1)$ et $\mu_{n_0}(K \cap \complement K_1)$ est $\leq \varepsilon$).

b) Pour qu'une fonction f soit localement presque partout égale à une fonction μ-intégrable, il faut et il suffit que f soit localement presque partout égale à une fonction μ_n-intégrable pour tout n, et que la suite des intégrales inférieures $(\mu_n)_*(|f|)$ soit bornée supérieurement. Pour tout ensemble compact K, on a alors $\mu(f\varphi_K) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(f\varphi_K)$.

c) Montrer que si E n'est pas dénombrable à l'infini, il peut exister des fonctions f μ_n-négligeables pour tout n, mais non μ-négligeables (cf. § 1, exerc. 2).

23) Soit (μ_n) une suite de mesures positives sur un espace localement compact E, qui converge fortement vers une mesure μ sur E.

a) Montrer que, pour qu'une fonction f à valeurs dans un espace topologique F soit μ-mesurable, il suffit que f soit μ_n-mesurable pour tout n (utiliser l'exerc. 21).

b) Déduire de a) que si f est localement presque partout égale à une fonction μ_n-intégrable pour tout n, et si l'ensemble des nombres $\int |f| \varphi_K d\mu_n$ est borné (pour tout n et tout ensemble compact $K \subset E$), alors f est localement presque partout égale à une fonction intégrable, et pour tout ensemble compact K, $\mu(f \varphi_K) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(f \varphi_K)$ (considèrer d'abord le cas où f est bornée).

24) Montrer que la mesure de Lebesgue sur $E = [0,1]$ est la limite vague d'une suite de mesures μ_n concentrées sur un ensemble dénombrable fixe $A \subset E$ (cf. chap. III, § 3, th. 1 et 2). En déduire qu'une fonction peut être mesurable pour chacune des mesures μ_n, mais non mesmrable pour la mesure de Lebesgue.

25) Soit K l'ensemble triadique de Cantor dans l'intervalle $E = [0,1]$. Montrer qu'il existe sur E une mesure non atomique de support K et de masse totale 1 (considèrer la mesure de Stieltjes définie par l'application continue et monotone de E sur lui-même, constante dans tout intervalle contigu à K (<u>Top. gén.</u>, chap. IV, § 8, exerc. 16).

26) Déduire de l'exerc. 25 qu'il existe sur E une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, non atomique, et dont le support est E tout entier.

27) Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ un nombre fini de mesures sur un espace localement compact E, qu'on écrit sous la forme $\mu_k = f_k \cdot \mu$, où $|f_k| \leq 1$ (n°6).

a) Soit Φ un ensemble de fonctions q définies et positivement homogènes dans $\mathbf{R}^p$ et telles que $q(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ soit localement intégrable pour toute fonction $q \in \Phi$. Montrer que lorsqu'une suite (q_n)

de fonctions de Φ converge uniformément dans toute partie compacte de $\mathbb{R}^p$ vers une fonction q, $q(f_1,f_2,\ldots,f_p)$ est localement intégrable, et la mesure $q(\mu_1,\ldots,\mu_p)$ est limite forte de la suite des mesures $q_n(\mu_1,\ldots,\mu_p)$.

b) On suppose que q est continue dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que l'application $(\mu_1,\ldots,\mu_p) \to q(\mu_1,\ldots,\mu_p)$ de $(\mathcal{M}(E))^p$ dans $\mathcal{M}(E)$ est continue pour la topologie forte (commencer par considérer le cas où q est <u>lipschitzienne</u>, c'est-à-dire telle que $|q(x_1,\ldots,x_n)-q(y_1,\ldots,y_n)| \leqslant k.\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ utiliser ensuite a) et le th. d'approximation de Weierstrass-Stone).

c) On suppose que q est continue dans $\mathbb{R}^p$. Soit g une fonction quelconque de $\mathcal{K}(E)$ et K son support. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un recouvrement ouvert fini (A_i) de K par des ensembles ouverts relativement compacts, tel que pour tout recouvrement ouvert fini (B_j) de K plus fin que (A_i), et toute famille (h_j) d'applications continues de E dans $[0,1]$ telles que h_j ait son support dans B_j et que $\sum_j h_j(x)=1$ dans K, on ait

$$\left|\int g.q(f_1,\ldots,f_n)d\mu - \sum_j q\left(\int gh_jf_1d\mu,\ldots,\int gh_jf_nd\mu\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

(Considérer d'abord le cas où q est lipschitzienne, et où les f_k sont continues, puis passer au cas où q est lipschitzienne et les f_k localement intégrables, et enfin au cas général en utilisant le th. de Weierstrass-Stone).

28) Dans $\mathbb{R}^2$, soit $q(x_1,x_2)$ la fonction positivement homogène égale à $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ quand $x_1\,x_2$ est irrationnel, et égale à 0 dans le cas contraire. Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E=[0,1]$, et soit ν la mesure sur E définie par $d\nu(x)=x.d\mu(x)= x\,dx$. Montrer que si g est une fonction continue et $\geqslant 0$ dans E,

$\sum_j q(\int gh_j d\mu, \int gh_j d\nu)$ ne tend vers aucune limite suivant l'ensemble filtrant des recouvrements ouverts finis du support de g.

29) Soient p et q deux exposants conjugués $\geqslant 1$. Si B (resp. C) est une partie bornée de L^p (resp. L^q), montrer que l'application $(f,g) \to fg$ de $B \times C$ dans L^1 n'est pas faiblement continue (cf. exerc. 12 c)).

§ 3. Mesure induite.

1. Définition de la mesure induite.

Soient E un espace localement compact, A un sous-espace localement compact de E. Pour toute application f de A dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{R}$, nous désignerons par f^A l'application de E dans F égale à f dans A, et à 0 dans $\complement A$. Pour toute application g de E dans F, nous désignerons par g_A la restriction de g à A. On a donc $(f^A)_A = f$.

Soit μ une mesure positive sur E. Pour toute fonction numérique f définie et continue dans A, et à support compact $K \subset A$, la fonction f^A est μ-mesurable (chap. IV, § 5, prop.), bornée et à support compact, donc elle est intégrable (chap. IV, § 5, th. 5), et on a

(1) $$\left| \int f^A d\mu \right| \leqslant \mu(K).\|f\| .$$

Il en résulte que la forme linéaire $f \to \int f^A d\mu$ sur $\mathcal{K}(A)$ est une mesure positive sur A.

DÉFINITION 1.- Etant donné un sous-espace localement compact A d'un espace localement compact E, on appelle mesure induite sur A par une mesure positive μ sur E, et on note μ_A, la mesure positive sur A définie par la formule

(2) $$\int f\, d\mu_A = \int f^A d\mu$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(A)$.

Exemple.- Soient μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et I un intervalle quelconque dans $\mathbb{R}$; I est un sous-espace localement compact, et la mesure induite par μ sur I est la forme linéaire $f \to \int_a^b f(x)dx$ sur $\mathcal{K}(I)$, en désignant par a et b l'origine et l'extrémité (finies ou non) de I.

Dans le cas particulier où A est un sous-espace ouvert de E, la déf.1 coïncide avec la définition de la mesure induite sur A par μ (ou de la restriction de μ à A) donnée au chap.III, §3,no1 car pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(A)$, la fonction f^A est alors continue dans E.

2. Intégration par rapport à une mesure induite.

Soient μ une mesure positive sur E, A un sous-espace localement compact de E. On sait (Top.gén.,chap.I, 2è éd., §10,prop.) que A est l'intersection d'un ensemble ouvert et d'un ensemble fermé dans E, donc est μ-mesurable ; la fonction caractéristique φ_A est par suite localement intégrable, et on peut donc définir sur l'espace E la mesure $\nu = \varphi_A . \mu$ de base μ.

THÉOREME 1.- Pour qu'une application f de A dans un espace de Banach F soit intégrable pour la mesure induite μ_A, il faut et il suffit que la fonction f^A soit intégrable pour la mesure $\nu = \varphi_A . \mu$, et on a

(3)
$$\int f \, d\mu_A = \int f^A d\nu .$$

Nous démontrerons deux lemmes préliminaires.

Lemme 1.- Soit f une fonction numérique $\geqslant 0$ (finie ou non) définie et semi-continue supérieurement dans A. Pour toute fonction $g \geqslant 0$, semi-continue inférieurement dans E et telle que $g_A = f$, on a $\nu^*(g) = \mu_A^*(f)$.

Montrons en premier lieu que si f est une fonction $\geqslant 0$ de $\mathcal{K}(A)$ il existe une fonction $g \geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$ qui prolonge f à E. En effet A est l'intersection d'un ensemble ouvert B et d'un ensemble fermé C dans E.

Soit K le support compact de f , et soit U un voisinage ouvert relativement compact de K dans E , tel que $\overline{U} \subset B$. Dans l'espace compact $\overline{U}$, l'ensemble $\overline{U} \cap A = \overline{U} \cap C$ est fermé, donc, en vertu du th. d'Urysohn, on peut prolonger f en une fonction f_1 continue et $\geqslant 0$ dans $\overline{U}$; si h est une application continue de E dans $[0,1]$, à support contenu dans U et égale à 1 dans K , la fonction g égale à $f_1 h$ dans $\overline{U}$, à 0 dans $\complement \overline{U}$, répond à la question.

Soit maintenant $f \geqslant 0$ une fonction semi-continue inférieurement dans A , et soit Φ l'ensemble (filtrant pour $\leqslant$) des fonctions $h \geqslant 0$ continues dans A et à support compact, telles que $h \leqslant f$; chaque fonction $h \in \Phi$ peut être prolongée en une fonction $h_1 \geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$; soit Φ_1 l'ensemble de ces prolongements, et soit Φ_2 l'ensemble des enveloppes supérieures d'un nombre fini de fonctions de Φ_1 ; il est clair que la restriction à A d'une fonction de Φ_2 appartient encore à Φ . Soit g_0 l'enveloppe supérieure des fonctions de Φ_2 ; c'est une fonction semi-continue inférieurement dans E , dont f est la restriction à A . Cela étant, on a, d'après (2),

$$\nu^*(g_0) = \sup_{u \in \Phi_2} \nu(u) = \sup_{u \in \Phi_2} \mu(u\varphi_A) = \sup_{h \in \Phi} \mu_A(h) = \mu^*_A(f) .$$

Soit d'autre part $g \geqslant 0$ une seconde fonction semi-continue inférieurement dans E , et dont la restriction à A soit f ; pour toute fonction continue u à support compact dans E telle que $u \leqslant g$, la fonction $u\varphi_A$ est intégrable (pour μ et ν) et à support compact, et on a $u\varphi_A \leqslant g_0$; d'où $\nu(u) = \mu(u\varphi_A) = \nu(u\varphi_A) \leqslant \nu^*(g_0)$ (§ 1,th.2), d'où on tire $\nu^*(g) \leqslant \nu^*(g_0)$, et en échangeant les rôles de g et g_0 , on voit que $\nu^*(g) = \nu^*(g_0)$.

<u>Lemme 2</u>.- <u>Pour toute fonction numérique</u> $f \geqslant 0$ <u>définie dans</u> A , <u>on a</u>
$\mu^*_A(f) = \nu^*(f^A)$.

En effet, soit g une fonction définie et semi-continue inférieurement dans A et telle que $f \leqslant g$; il existe alors, d'après le lemme 1, une fonction $h \geqslant 0$, définie et semi-continue inférieurement dans E, et dont g soit la restriction à A ; par suite $\mu^*_A(g) = \nu^*(h)$. Comme $f^A \leq h$, on a $\nu^*(f^A) \leqslant \nu^*(h) = \mu^*_A(g)$, et par définition de l'intégrale supérieure, cela donne $\nu^*(f^A) \leqslant \mu^*_A(f)$. Inversement, si h est une fonction semi-continue inférieurement dans E et telle que $f^A \leqslant h$, la restriction h_A de h à A est semi-continue inférieurement, et on a $f \leq h_A$, donc $\mu^*_A(f) \leqslant \mu^*_A(h_A) = \nu^*(h)$, et par définition de l'intégrale supérieure de f^A, $\mu^*_A(f) \leqslant \nu^*(f^A)$ ce qui achève la démonstration du lemme.

Ces deux lemmes étant établis, remarquons d'abord que la relation (3) est vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{K}_F(A)$, car pour tout z' dans le dual F' de F, on a $\left\langle \int f \, d\mu_A, z' \right\rangle = \int \langle f, z' \rangle \, d\mu_A = \int (\langle f, z' \rangle)^A d\mu$ par définition ; mais il est clair que $(\langle f, z' \rangle)^A = \langle f^A, z' \rangle$, et par suite $\left\langle \int f \, d\mu_A, z' \right\rangle = \int \langle f^A, z' \rangle \, d\mu = \int \langle f^A, z' \rangle \, d\nu$, puisque f^A a son support dans un ensemble compact (§ 1, th.2) ; on en déduit bien la relation (3).

Cela étant, si f est une fonction quelconque définie dans A et à valeurs dans F, on a, en vertu du lemme 2, pour toute fonction $g \in \mathcal{K}_F(A)$, $\int^* |f-g| \, d\mu_A = \int^* |f^A - g^A| \, d\nu$; comme g^A est ν-intégrable, on voit que pour que f soit μ_A-intégrable, il faut et il suffit que f^A soit ν-intégrable ; la relation (3) s'obtient à partir de la même relation pour les fonctions de $\mathcal{K}_F(A)$, en passant à la limite dans $\mathcal{L}^1_F(A)$.

COROLLAIRE 1.- <u>Si une application f de A dans F est telle que f^A soit μ-intégrable, alors f est μ_A-intégrable et on a</u> $\int f \, d\mu_A = \int f^A d\mu$.

En effet, comme $f^A \varphi_A = f^A$, et que φ_A est μ-mesurable et essentiellement bornée, le corollaire résulte de (3) et du cor.4 du th.2 du § 1.

COROLLAIRE 2.- Soit g une application de E dans F. Si $g\varphi_A$ est μ-intégrable, la restriction g_A de g à A est μ_A-intégrable, et on a

$$\int g_A \, d\mu_A = \int g\varphi_A \, d\mu . \tag{4}$$

PROPOSITION 1.- Soient E un espace localement compact, A un sous-espace localement compact de E, F un espace de Banach. Pour qu'une application f de A dans F, à support relativement compact dans E, soit μ_A-intégrable, il faut et il suffit que f^A soit μ-intégrable, et on a $\int f \, d\mu_A = \int f^A d\mu$.

En effet, pour que f^A soit ν-intégrable (avec $\nu = \varphi_A . \mu$), il faut et il suffit alors que $f^A \varphi_A = f^A$ soit μ-intégrable, et on a $\int f^A d\nu = \int f^A d\mu$ (§ 1, th.2).

COROLLAIRE 1.- Pour qu'un ensemble $B \subset A$, relativement compact dans E, soit μ_A-intégrable, il faut et il suffit qu'il soit μ-intégrable, et on a $\mu_A(B) = \mu(B)$.

COROLLAIRE 2.- Pour qu'une application f de A dans F soit localement intégrable (resp. localement négligeable) pour μ_A, il faut et il suffit que f^A soit localement intégrable (resp. localement négligeable) pour μ.

PROPOSITION 2.- Pour qu'une fonction f définie dans A soit localement presque partout (pour μ_A) égale à une fonction μ_A-intégrable, il faut et il suffit que f^A soit localement presque partout (pour μ) égale à une fonction μ-intégrable.

En effet, dire que f est localement égale presque partout (pour μ_A) à une fonction μ_A-intégrable signifie d'après le th.1 et le cor.2 de la prop.1, que f^A est localement presque partout (pour $\nu = \varphi_A \cdot \mu$), égale à une fonction ν-intégrable ; comme $f^A = f^A \varphi_A$, la proposition résulte de la prop.11 du §1.

COROLLAIRE.- *Soit E un espace localement compact dénombrable à l'infini, et A un sous-espace localement compact de E. Pour qu'une application f de A dans F soit μ_A-intégrable, il faut et il suffit que f^A soit μ-intégrable.*

Si E est quelconque, la conduite du corollaire précédent n'est plus nécessaire (exerc.3), mais est encore suffisante en vertu du cor.1 du th.1.

PROPOSITION 3.- *Pour qu'une fonction f définie dans A, à valeurs dans un espace vectoriel topologique F, soit mesurable pour μ_A, il faut et il suffit que f^A soit mesurable pour μ.*

En effet, soit K une partie compacte de A. Si f^A est μ-mesurable, il existe une partition de K en ensembles compacts K_n et un ensemble μ-négligeable P tel que la restriction de f à chacun des K_n soit continue ; comme P est μ_A-négligeable (cor.1 du th.1), f est μ_A-mesurable. Réciproquement, supposons que f soit μ_A-mesurable, et soit H une partie compacte de E ; comme $H \cap A$ est μ_A-intégrable (cor.1 du th.1), il existe une partition de $H \cap A$ en ensembles compacts H_n et un ensemble μ_A-négligeable Q, telle que la restriction de f à chacun des H_n soit continue ; comme Q est relativement compact, il est μ-négligeable (cor.1 du th.1), donc comme f^A est constante dans $\complement A$, f^A est μ-mesurable (chap.IV, §5, prop.).

3. *Propriétés des mesures induites.*

PROPOSITION 4.- *Soit A un sous-espace localement compact d'un espace localement compact E. Pour toute mesure positive μ sur E, si μ est concentrée sur un ensemble M, μ_A est concentrée sur l'ensemble $M \cap A$*

En effet, comme $\complement M$ est localement négligeable pour μ, il en est de même de $A \cap \complement M$, donc $A \cap \complement M$ est localement négligeable pour μ_A, ce qui démontre la proposition.

<u>Remarque</u>.- On notera que si S est le <u>support</u> de μ, $A \cap S$ contient le support de μ_A, mais peut en être distinct. Par exemple, si μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et A le sous-espace de $\mathbb{R}$ réduit au point 0, la mesure induite μ_A est nulle, donc son support est vide.

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> μ <u>une mesure positive sur</u> E, A <u>un sous-espace localement compact de</u> E. <u>Pour que la mesure induite</u> μ_A <u>soit bornée, il faut et il suffit que la borne supérieure des nombres</u> $\mu(K)$, <u>lorsque</u> K <u>parcourt l'ensemble des parties compactes de</u> A, <u>soit finie</u>.

En effet, d'après le cor.1 du th.1, dire que μ_A est bornée signifie que A est ϑ-intégrable, c'est-à-dire que les nombres $\vartheta(K)$ ont une borne supérieure finie lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de A ; comme pour ces parties, on a $\vartheta(K)=\mu(K)$, la proposition est démontrée.

On notera que μ_A peut être bornée sans que A soit μ-intégrable (exerc. 3).

PROPOSITION 6.- <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux sous-espaces localement compacts de</u> E, <u>tels que</u> $B \subset A$, <u>la mesure induite sur</u> B <u>par</u> μ_A <u>est identique à</u>

En effet, pour tout ensemble compact $K \subset B$, on a (cor.1 de la prop.1) $\mu(K)=\mu_A(K)=\mu_B(K)$, ce qui démontre la proposition (chap.IV, § 4, prop.).

PROPOSITION 7.- <u>Soit</u> g <u>une fonction numérique</u> $\geqslant 0$ <u>définie dans</u> E <u>et localement intégrable pour</u> μ. <u>La mesure induite sur</u> A <u>par la mesure</u> $g.\mu$ <u>est identique à la mesure</u> $g_A.\mu_A$.

En effet, pour toute fonction $h \in \mathcal{K}(A)$, hg_A est à support compact et est μ_A-intégrable ; donc (prop.1), on a $\int hg_A \, d\mu_A = \int (hg_A)^A \, d\mu =$ $= \int h^A g \, d\mu$; comme $h^A g$ est à support compact, $\int h^A g \, d\mu$ est égal à l'intégrale de h^A par rapport à la mesure $g.\mu$ (§ 1, th.2) d'où la proposition.

Remarquons enfin qu'une mesure quelconque sur A n'est pas nécessairement induite par une mesure sur E ; de façon précise :

PROPOSITION 8.- Soit A un sous-espace localement compact de E , et soit λ une mesure positive sur A . Pour que λ soit identique à une mesure induite sur A par une mesure sur E , il faut et il suffit que pour toute partie compacte K de E , $A \cap K$ soit λ-intégrable.

La condition est évidemment nécessaire, puisqu'on doit avoir $\lambda(A \cap K) = \mu(A \cap K)$ (cor.1 de la prop.1). Inversement, supposons-la remplie ; alors si f est une fonction quelconque de $\mathcal{K}(E)$, et K son support, f_A est λ-intégrable, car elle est continue dans A et majorée en valeur absolue par un multiple de $\varphi_{A \cap K}$ qui est λ-intégrable par hypothèse. Posons alors $\mu(f) = \int f_A \, d\lambda$; il est clair que μ est une forme linéaire sur $\mathcal{K}(E)$ et qu'on a $|\mu(f)| \leqslant \lambda(A \cap K) \| f \|$, donc μ est une mesure sur E . Reste à voir que $\mu_A = \lambda$; il suffit de prouver que pour toute partie compacte K de A , on a $\mu_A(K) = \lambda(K)$. Or, φ_K est l'enveloppe inférieure d'un ensemble filtrant Φ (pour $\geqslant$) de fonctions $h \in \mathcal{K}(A)$, et chacune des fonctions h peut être prolongée en une fonction $h' \in \mathcal{K}(E)$ dont le support est contenu dans un voisinage arbitraire du support de h (lemme 1) ; il en résulte que φ_K est aussi l'enveloppe inférieure de l'ensemble Φ' des fonctions h' (que l'on peut évidemment supposer filtrant pour $\geqslant$) . On a donc $\mu(K) = \inf_{h' \in \Phi'} \mu(h') = \inf_{h \in \Phi} \lambda(h) = \lambda(K)$, et par suite (cor.1 de la prop.1) $\lambda(K) = \mu_A(K)$.

COROLLAIRE.- Soit A un sous-espace fermé de E . Toute mesure λ sur A est identique à une mesure induite sur A par une mesure sur E .

En effet, pour toute partie compacte K de E , $A \cap K$ est fermé dans E, donc compact, et par suite λ-intégrable.

Exercices.- 1) Soit A un sous-espace localement compact d'un espace localement compact E . Montrer que pour toute mesure μ sur E , le support de la mesure μ_A est la trace sur A du support de la mesure $\nu = \varphi_A \cdot \mu$.

2) Soit A un sous-espace localement compact d'un espace localement compact E , et λ une mesure positive sur A telle que pour toute partie compacte $K \subset E$, $A \cap K$ soit λ-intégrable. Montrer que la mesure μ sur E définie dans la démonstration de la prop.8 est la plus petite des mesures ν sur E telles que $\nu_A = \lambda$, et que son support est l'adhérence dans E du support de λ .

3) Soit E l'espace localement compact et ν la mesure sur E définies dans l'exerc. 2 du §1 . Soit A le sous-espace fermé de E constitué par la droite d'équation $x=0$. Montrer que la mesure induite ν_A est nulle, bien que A ne soit pas ν-intégrable.

§ 4. Fonctions faiblement intégrables.

1. Définition des fonctions faiblement intégrables.

Soient E un espace localement compact, et μ une mesure positive sur E . Soient F,F' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ en dualité faible (Esp.vect.top., chap.III) ; considérons une application f de E dans F telle que, pour tout $z' \in F'$, la fonction numérique $x \to \langle f(x), z' \rangle$ (que nous noterons simplement $\langle f, z' \rangle$) soit μ-intégrable ; désignons par $\varphi(z')$ son intégrale. L'application $z' \to \varphi(z')$ est une forme linéaire sur F', donc un élément du dual algèbrique F'^* de F' ;

nous dirons que cet élément est l'<u>intégrale</u> de la dfonction f par rapport à μ , et nous le noterons $\mu(f)$ ou $\int f\,d\mu$ ou $\int f(x)d\mu(x)$. Autrement dit, on a par définition

$$(1) \qquad \left\langle \int f\,d\mu, z' \right\rangle = \int \langle f, z' \rangle\,d\mu$$

pour tout $z' \in F'$.

On sait que F peut être identifié à un sous-espace de F'^* , la topologie induite par $\sigma(F'^*, F')$ sur F étant la topologie faible $\sigma(F, F')$; en général, l'intégrale $\int f\,d\mu$ d'une fonction prenant ses valeurs dans F <u>n'appartient pas nécessairement à</u> F . (chap.III, §4, exerc.1). En outre, si $\langle f, z' \rangle$ est μ-intégrable pour tout $z' \in F'$, et si g est une fonction numérique mesurable et essentiellement bornée, $\langle fg, z' \rangle = g\langle f, z' \rangle$ est intégrable pour tout $z' \in F'$, donc $\int f f\,d\mu$ est définie ; mais il peut se faire que $\int f\,d\mu$ appartienne à F , et que pour certaines fonctions $g \in \mathcal{L}^\infty$, l'intégrale $\int fg\,d\mu$ n'appartienne pas à F (exerc.1).

DÉFINITION 1.- <u>On dit qu'une application</u> f <u>de</u> E <u>dans un espace localement convexe</u> F <u>est faiblement intégrable pour la mesure</u> μ , <u>lorsque les conditions suivantes sont réalisées</u> :

1° <u>pour tout</u> $z' \in F'$, <u>la fonction numérique</u> $\langle f, z' \rangle$ <u>est intégrable</u>.

2° <u>pour toute fonction numérique</u> g <u>mesurable et essentiellement bornée</u>, $\int fg\,d\mu$ <u>appartient à</u> F .

Lorsque la première condition seule est réalisée, on dit que f est <u>improprement faiblement intégrable</u>.

2. <u>Propriétés des fonctions faiblement intégrables</u>.

Il est clair que si f_1 et f_2 sont faiblement intégrables, il en est de même de $f_1 + f_2$, et de fg pour toute fonction numérique $g \in \mathcal{L}^\infty$;

les fonctions faiblement intégrables dans E forment donc un <u>module</u> par rapport à l'anneau $\mathcal{L}^\infty$.

Si f est faiblement intégrable, toute fonction f_1 égale presque partout à f est faiblement intégrable, et on a $\int f_1\, d\mu = \int f\, d\mu$.

PROPOSITION 1.- <u>Soient</u> F,F' <u>et</u> G,G' <u>deux couples d'espaces vectoriels en dualité faible, et soit</u> u <u>une application linéaire de</u> F <u>dans</u> G, <u>continue pour les topologies</u> $\sigma(F,F')$ <u>et</u> $\sigma(G,G')$; <u>pour toute fonction</u> f <u>définie dans</u> E, <u>à valeurs dans</u> F <u>et faiblement intégrable, la fonction</u> $u\circ f$ <u>est faiblement intégrable, et on a</u>

$$\int u\circ f\, d\mu = u\left(\int f\, d\mu\right). \tag{2}$$

En effet, pour tout $z'\in G'$, et toute fonction $g\in\mathcal{L}^\infty$, on a

$$\left\langle u\left(\int f g\, d\mu\right), z'\right\rangle = \left\langle \int f g\, d\mu, {}^t u(z')\right\rangle = \int \left\langle f g, {}^t u(z')\right\rangle d\mu =$$
$$= \int \left\langle u(f g), z'\right\rangle d\mu = \left\langle \int u(f g)\, d\mu, z'\right\rangle = \left\langle \int g\, u(f)\, d\mu, z'\right\rangle$$

ce qui montre que $\int g\, u(f)\, d\mu$ appartient à G pour tout $g\in\mathcal{L}^\infty$ et est égal à $u\left(\int f g\, d\mu\right)$, et par suite établit la proposition.

PROPOSITION 2.- <u>Soit</u> g <u>une fonction numérique finie et</u> $\geqslant 0$, <u>intégrable et non négligeable</u> ; <u>soit</u> f <u>une application de</u> E <u>dans</u> F, <u>telle que</u> $f g$ <u>soit faiblement intégrable</u> ; <u>pour tout ensemble faiblement convexe fermé</u> $D\subset F$ <u>tel que</u> $f(x)\in D$ <u>presque partout dans</u> E, <u>le point</u>

$$\frac{\int f g\, d\mu}{\int g\, d\mu}$$

<u>appartient à</u> D.

En effet, D est l'intersection d'une famille de demi-espaces faiblement fermés définis par des relations $\langle z, a'_\iota\rangle \geqslant \alpha_\iota$, où $a'_\iota\in F'$ et $\alpha_\iota\in\mathbb{R}$; on a donc $\langle f(x), a'_\iota\rangle \geqslant \alpha_\iota$ presque partout dans E, d'où $\langle f(x)g(x), a'_\iota\rangle \geqslant \alpha_\iota g(x)$ presque partout ; cela entraîne que $\int \langle fg, a_i' \rangle d\mu \geqslant a_i \int g\, d\mu$, ou encore $\left\langle \frac{\int fg\, d\mu}{\int g\, d\mu}, a_i' \right\rangle \geqslant a_i$

pour tout indice ι , ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> f <u>une application faiblement intégrable de</u> E <u>dans</u> F ; <u>pour toute semi-norme</u> q <u>sur</u> F , <u>semi-continue inférieurement pour la topologie</u> $\sigma(F,F')$, <u>on a</u>

(3) $$q\left(\int f\, d\mu\right) \leqslant \int^* q(f)\, d\mu .$$

En effet, l'ensemble des points $z \in F$ tels que $q(z) \leqslant 1$ est faiblement fermé, donc (<u>Esp.vect.top.</u>, chap.II) peut être défini comme l'ensemble des points satisfaisant à une famille d'inégalités $|\langle z, z_\iota' \rangle| \leqslant \alpha_\iota$ où $z_\iota' \in F'$ et $a_\iota \geqslant 0$; en outre les relations $\langle z, z_\iota' \rangle = 0$ pour tout ι entraînent $q(z)=0$. Pour tout $x \in E$ et tout indice ι , on a $|\langle f(x), z_\iota' \rangle| \leqslant a_\iota\, q(f(x))$, d'où

$$\left| \int \langle f, z_\iota' \rangle d\mu \right| \leqslant a_\iota \int^* q(f(x))\, d\mu(x)$$

ou encore $$\left| \left\langle \int f\, d\mu, z_\iota' \right\rangle \right| \leqslant a_\iota \int^* q(f(x))\, d\mu(x)$$

On en déduit que si $\int^* q(f(x))\, d\mu(x) = 0$, on a $q(\int f\, d\mu) = 0$; sinon, en divisant les deux membres, de la dernière inégalité par $\int^* q(f)\, d\mu$ pour chaque ι , on obtient, d'après ce qui précède, l'inégalité (3).

On notera que la fonction $q(f(x))$ n'est pas nécessairement mesurable (exerc.3).

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> f <u>une fonction faiblement intégrable pour la mesure positive</u> μ ; <u>pour toute fonction positive</u> $g \in \mathcal{L}^\infty$, f <u>est faiblement intégrable pour la mesure</u> $\nu = g.\mu$, <u>et on a</u> $\int f\, d\nu = \int f g\, d\mu$

En effet, pour toute fonction $h \in \mathcal{L}^\infty$, $\langle f hg, z' \rangle = gh \langle f, z' \rangle$ est μ-intégrable, donc (§1, cor.4 du th.2), $h\langle f, z' \rangle = \langle f h, z' \rangle$ est ν-intégrable et on a $\int \langle f h, z' \rangle d\nu = \int \langle f gh, z' \rangle d\mu$, ce qui prouve que $\int f h\, d\nu = \int f gh\, d\mu$, et établit par suite la proposition.

3. Critères d'intégrabilité faible.

PROPOSITION 5.- Toute application intégrable f de E dans un espace de Banach F est faiblement intégrable, et les intégrables de f définies au chap. IV, § 4 et au chap. V, § 4, n° 1 sont identiques.

En effet, si $\int f\,d\mu$ désigne l'intégrale définie au chap. IV, § 4, on sait que fg est intégrable pour toute fonction numérique g et que, pour tout $z' \in F'$, $\langle fg, z' \rangle$ est intégrable et vérifie la relation $\int \langle fg, z' \rangle\, d\mu = \langle \int fg\, d\mu\ , z' \rangle$ (chap. IV, § 4, prop.).

2

Remarque.- Une application f de E dans un espace de Banach peut être faiblement intégrable sans être intégrable. Par exemple, soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0,1]$, et soit F un espace hilbertien ayant une base orthonormale (e_x) $(x \in E)$ équipotente à E (Esp. vect. top., chap. IV, §). Soit f l'application $x \to e_x$ de E dans F ; on a ici $F' = F$, et tout $z' \in F'$ s'écrit $z' = \sum_{x \in E} \lambda(x) e_x$, où $\sum_{x \in E} (\lambda(x))^2 < +\infty$, ce qui entraîne que $\lambda(x) = 0$ sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de $x \in E$. On a donc $\langle f(x), z' \rangle = \lambda(x)$ pour tout $x \in E$ et par suite $\langle f, z' \rangle$ est une fonction numérique négligeable ; a fortiori, pour toute fonction $g \in \mathcal{L}^\infty$, $\langle fg, z' \rangle$ est négligeable. On en déduit que f est faiblement intégrable, et que $\int fg\, d\mu = 0$ pour toute fonction $g \in \mathcal{L}^\infty$; mais f n'est pas mesurable, car pour tout ensemble $A \subset E$ dont le complémentaire est négligeable, $f(A)$ engendre un sous-espace de F qui n'est pas de type dénombrable (A n'étant pas dénombrable) (cf. chap. IV, § 5, prop.).

THÉORÈME 1.- Soit F, F' deux espaces en dualité faible, tels que tout ensemble borné et faiblement fermé dans F soit faiblement complet. Soit f une application de E dans F telle que, pour tout $z' \in F'$, $\langle f, z' \rangle$ soit intégrable et bornée dans E ; dans ces conditions, f est faiblement intégrable

En effet, si g est une fonction quelconque de $\mathcal{L}^{\infty}$, en modifiant g aux points d'un ensemble localement négligeable, on peut supposer que fg vérifie les mêmes conditions que f , donc tout revient à prouver que $\int f\,d\mu$ appartient à F . Or, l'hypothèse entraîne que $f(E)$ est <u>borné</u> dans F , donc son enveloppe convexe faiblement fermée C dans F est aussi bornée, et par suite est <u>faiblement complète</u>. Cela entraîne que C est l'enveloppe convexe faiblement fermée de $f(E)$ <u>dans l'espace</u> F'^{*} . Soit alors K une partie compacte quelconque de E ; la prop. 2 (où on considère que f prend ses valeurs <u>dans</u> F'^{*}) montre que $\int f\varphi_K d\mu$ appartient, dans F'^{*} , à l'ensemble $\mu(K).C$, donc <u>appartient à</u> F . D'autre part, pour tout $z' \in F'$, $\int \langle f, z'\rangle \varphi_K d\mu$ tend vers $\int \langle f, z'\rangle d\mu$ suivant l'ensemble filtrant Φ des ensembles compacts dans E ; cela signifie que, dans F'^{*} , $\int f\varphi_K d\mu$ converge faiblement vers $\int f\,d\mu$ suivant Φ ; mais, pour tout $z' \in F'$, on a

$$\left|\left\langle \int f\varphi_K d\mu, z'\right\rangle\right| = \left|\int \langle f, z'\rangle \varphi_K d\mu\right| \leqslant \int \left|\langle f, z'\rangle\right| d\mu$$

ce qui prouve que l'ensemble des points $\int f\varphi_K d\mu$ est <u>borné</u> dans F donc contenu dans une partie de F <u>faiblement complète</u> ; la limite $\int f\,d\mu$ de $\int f\varphi_K d\mu$ suivant Φ appartient donc à F . La proposition suivante généralise le th. de Lebesgue.:

PROPOSITION 6.- <u>On suppose que tout ensemble borné et faiblement fermé dans</u> F <u>soit faiblement complet</u> <u>Soit</u> (f_n) <u>une suite d'applications faiblement intégrables de</u> E <u>dans</u> F , <u>qui converge presque partout vers une fonction</u> f (<u>pour la topologie</u> $\sigma(F,F')$) ; <u>on suppose en outre que, pour tout</u> $z' \in F'$, <u>il existe une fonction numérique intégrable</u> $h_{z'} \geqslant 0$ <u>telle que</u> $|\langle f_n, z'\rangle| \leqslant h_{z'}$ <u>presque partout pour tout entier</u> n. <u>Dans ces conditions</u>, f <u>est faiblement intégrable, et pour toute fonction</u> $g \in \mathcal{L}^{\infty}$ $\int f g\,d\mu$ <u>est limite faible dans</u> F <u>de la suite des</u> $\int f_n g\,d\mu$.

Comme $\left|\langle f_n g, z'\rangle\right| \leqslant |g| h_{z'}$ presque partout pour tout n, on peut se borner à montrer que $\int f d\mu$ appartient à F et est limite faible de la suite des $\int f_n d\mu$. Pour tout $z' \in F'$, les fonctions numériques $\langle f_n, z'\rangle$ tendent presque partout vers $\langle f, z'\rangle$; en vertu du th. de Lebesgue, $\langle f, z'\rangle$ est intégrable, et $\int\langle f, z'\rangle d\mu$ est limite de $\int\langle f_n, z'\rangle d\mu$; cela signifie que, dans F'^*, $\int f d\mu$ est limite faible de la suite des intégrables $\int f_n d\mu$. Or, ces dernières appartiennent à F, et forment une suite de Cauchy pour la topologie faible $\sigma(F,F')$; leur ensemble est donc borné dans F, et par suite contenu dans un ensemble faiblement complet ; la limite faible $\int f d\mu$ de la suite $(\int f_n d\mu)$ appartient donc à F.

Exemples.- 1) Soit A un espace localement compact, $F = \mathcal{M}(A)$ l'espace des mesures sur A, muni de la topologie vague ; si $F' = \mathcal{K}(A)$ est l'espace des fonctions numériques continues dans A et à support compact, la topologie vague sur F n'est autre que la topologie faible $\sigma(F,F')$; on sait en outre que toute partie bornée de F est relativement compacte pour la topologie vague (chap.III, §2, prop.9) ; on peut donc appliquer le th.1 et la prop.6 pour montrer qu'une application $x \rightarrow \lambda_x$ de E dans $\mathcal{M}(A)$ est faiblement intégrable.

2) Soit G un espace localement convexe séparé et tonnelé (Esp.vect.top., chap.II, §4), et soit G' son dual. On sait que, dans G' muni de la topologie faible $\sigma(G',G)$, tout ensemble borné est relativement faiblement compact (Esp.vect.top., chap.III). On peut donc appliquer le th.1 et la prop.5 aux applications de E dans G'.

Remarque.- L'exemple 1 peut être considéré comme un cas particulier de l'exemple 2, $F' = \mathcal{K}(A)$ pouvant être muni d'une topologie d'espace tonnelé pour laquelle $F = \mathcal{M}(A)$ est son dual (cf. chap.III, §2, exerc.1 et Esp.vect.top., chap.II, §4, exerc.).

3) Soient G et H deux espaces séparés et <u>tonnelés</u>, et considérons l'espace $F = \mathcal{L}(G,H')$ des applications linéaires continues de G dans le <u>dual</u> H' de H (pour les topologies <u>faibles</u> $\sigma(G,G')$ et $\sigma(H',H)$). Considérons l'espace $F' = G \otimes H$, produit tensoriel (non topologique) de G et de H ; on sait que si, pour tout $z = \sum_k a_k \otimes b_k$ de $G \otimes H$ et tout $\underline{U} \in \mathcal{L}(G,H')$, on pose $\langle z, \underline{U} \rangle = \sum_k \langle b_k, \underline{U}(a_k) \rangle$, la forme bilinéaire $\langle z, \underline{U} \rangle$ met les espaces $G \otimes H$ et $\mathcal{L}(G,H')$ en <u>dualité faible</u> (<u>Esp.vect.top.</u>,chap.I,Appendice) ; en outre, l'hypothèse que G et H sont tonnelés entraîne que tout ensemble borné dans F est <u>relativement faiblement compact</u> pour la topologie $\sigma(F,F')$ (<u>Esp.vect. top.</u> , chap.III, §). On peut donc appliquer le th.1 et la prop.6 aux fonctions définies dans E et à valeurs dans $F = \mathcal{L}(G,H')$; si $x \to \underline{U}_x$ est une telle fonction faiblement intégrable, $\int \underline{U}_x \, d\mu(x)$ appartient à $\mathcal{L}(G,H')$; quels que soient $a \in G$ et $b \in H$, la fonction numérique $x \to \langle b, \underline{U}_x(a) \rangle$ est intégrable et on a

$$(4) \qquad \int \langle b, \underline{U}_x(a) \rangle \, d\mu(x) = \langle b, (\int \underline{U}_x \, d\mu(x))(a) \rangle .$$

L'exemple 2 correspond au cas particulier où $G = R$ (l'espace $\mathcal{L}(R,H')$ étant alors identifié avec H').

Lorsque, dans ce dernier exemple, on suppose en outre que G et H sont des espaces localement convexes <u>métrisables et complets</u>, nous allons voir en outre que toute fonction à valeurs dans $F = \mathcal{L}(G,H')$ qui est improprement faiblement intégrable, est ipso facto faiblement intégrable ; en d'autres gtermes :

THÉORÈME 2 (Gelfand-Dunford).- <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux espaces localement convexes, métrisables et complets</u> ; <u>soit</u> $F = \mathcal{L}(G,H')$ <u>l'espace des applications linéaires de</u> G <u>dans</u> H' , <u>continues pour les topologies faibles</u> $\sigma(G,G')$ <u>et</u> $\sigma(H',H)$. <u>Soit</u> $x \to \underline{U}_x$ <u>une application de</u> E <u>dans</u>

dans F telle que, pour tout $a \in G$ et tout $b \in H$, la fonction numérique $x \to \langle b, \underline{U}_x(a) \rangle$ soit intégrable. Dans ces conditions, il existe un élément et un seul $\int \underline{U}_x d\mu(x)$ de $\mathcal{L}(G,H')$ satisfaisant à la relation (4) quels que soient $a \in G$ et $b \in H$.

Remarquons d'abord que les éléments de $\mathcal{L}(G,H')$ peuvent être caractérisés comme les applications $\underline{V}$ de G dans le dual algébrique H^* de H, telles que toutes les formes linéaires $y \to \langle z, \underline{V}(y) \rangle$ et $z \to \langle z, \underline{V}(y) \rangle$ soient continues dans G (resp. H). Tout revient donc à montrer que les formes linéaires $y \to \int \langle z, \underline{U}_x(y) \rangle \, d\mu(x)$ et $z \to \int \langle z, \underline{U}_x(y) \rangle \, d\mu(x)$ sont continues. L'élément $z \in H$ étant fixé, pour tout $z \in G$, désignons par f_y la fonction scalaire $x \to \langle z, \underline{U}_x(y) \rangle$ définie dans E ; par hypothèse cette fonction est intégrable, autrement dit, sa classe $\tilde{f}_y$ appartient à l'espace de Banach $L^1(E)$; nous allons montrer que l'application linéaire $y \to \tilde{f}_y$ de G dans $L^1(E)$ est continue (pour les topologies fortes de G et de $L^1(E)$) ; il en résultera évidemment que la forme linéaire $y \to \int f_y \, d\mu$ est continue dans G.

Il suffit pour cela de prouver que le graphe de l'application $y \to \tilde{f}_y$ est fermé dans l'espace produit $G \times L^1(E)$ (Esp.vect.top., chap.I, § 5, cor.4 du th.1). En d'autres termes, il suffit de montrer que si la suite (y_n) tend vers y dans G, et si la suite $(\tilde{f}_{y_n})$ tend vers $\tilde{g}$ dans $L^1(E)$, alors $\tilde{g} = \tilde{f}_y$; or, en extrayant une suite partielle de la suite (y_n), on peut supposer que la suite des fonctions f_{y_n} converge presque partout vers une fonction g de la classe $\tilde{g}$; mais par ailleurs l'hypothèse sur $\underline{U}_x$ entraîne que pour tout $x \in E$, $y \to f_y(x)$ est continue ; donc la suite (f_{y_n}) converge partout vers f_y, ce qui prouve que $f_y = g$ presque partout, d'où $\tilde{f}_y = \tilde{g}$.

On raisonne de même pour la forme linéaire $z \to \int \langle z, \underline{U}_x(y) \rangle \, d\mu(x)$ et le théorème est ainsi démontré.

Comme pour toute fonction numérique $g \in \mathcal{L}^\infty(E)$, il est clair que $x \to g(x)\underline{U}_x$ satisfait aux mêmes conditions que $x \to \underline{U}_x$, on a bien montré que $x \to \underline{U}_x$ est <u>faiblement intégrable</u>.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> H <u>un espace localement convexe</u>, <u>métrisable et complet</u>. <u>Pour qu'une application</u> f <u>de</u> E <u>dans le dual</u> H' <u>de</u> H <u>soit faiblement intégrable</u> (pour la topologie $\sigma(H',H)$), <u>il suffit que pour tout</u> $z \in H$, <u>la fonction numérique</u> $\langle z, f \rangle$ <u>soit intégrable</u>.

Il suffit en effet d'appliquer le th.2 au cas où $G = \mathbb{R}$.

Z Au contraire, si F est un espace de Banach non réflexif, il peut se faire qu'une fonction f à valeurs dans F soit telle que $\langle f, z' \rangle$ soit intégrable pour tout $z' \in F'$, sans que l'intégrale $\int f \, d\mu$ appartienne à F (exerc. 1).

Remarquons qu'avec les hypothèses du th.2, $\mathcal{L}(G,H')$ est aussi l'espace des applications <u>fortement continues</u> de G dans H', et peut par ailleurs être identifié à l'espace des formes bilinéaires <u>fortement continues</u> dans $G \times H$ (<u>Esp.vect.top</u>., chap.III).

Dans le cas particulier où G et H sont des espaces de Banach (et par suite H' un espace de Banach pour la topologie forte), on a en outre le critère suivant :

PROPOSITION 7.- <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux espaces de Banach</u>, <u>et soit</u> $F = \mathcal{L}(G,H')$ <u>l'espace vectoriel des applications linéaires fortement continues de</u> G <u>dans le dual</u> H' <u>de</u> H. <u>Soient</u> A (resp. B) <u>un sous-espace partout dense de</u> G (resp. H), <u>et soit</u> $x \to \underline{U}_x$ <u>une application de</u> E <u>dans</u> F, <u>satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

a) <u>quels que soient</u> $a \in A$ <u>et</u> $b \in B$, <u>la fonction numérique</u> $x \to \langle b, \underline{U}_x(a) \rangle$ <u>est mesurable</u> :

b) l'intégrale supérieure $\int^* |\underline{U}_x| d\mu(x)$ est finie.

Dans ces conditions, il existe un élément $\int \underline{U}_x d\mu(x)$ et un seul de F satisfaisant à la relation (4) quels que soient $a \in G$ et $b \in H$.

Comme $|\langle z, \underline{U}_x(y)\rangle| \leq |\underline{U}_x| \cdot |y| \cdot |z|$, la fonction numérique $x \to \langle z, \underline{U}_x(y)\rangle$ est intégrable quels que soient $y \in A$ et $z \in B$; en outre, on a

$$(5) \qquad \left|\int \langle z, \underline{U}_x(y)\rangle \, d\mu(x)\right| \leq |y| \cdot |z| \cdot \int^* |\underline{U}_x| d\mu(x) .$$

L'élément $y \in A$ étant fixé, la relation (5) prouve que l'application $z \to \int \langle z, \underline{U}_x(y)\rangle d\mu(x)$ est une forme linéaire continue dans B, qui se prolonge donc par continuité en une forme linéaire continue $\underline{V}(y)$ sur H ; on a par définition $\int \langle z, \underline{U}_x(y)\rangle d\mu(x) = \langle z, \underline{V}(y)\rangle$ pour $y \in A$ et $z \in B$. Cette relation s'étend d'abord lorsque z est quelconque dans H et $y \in A$: en effet, si (z_n) est une suite de points de B tendant vers z, les fonctions $x \to \langle z_n, \underline{U}_x(y)\rangle$ convergent simplement vers $x \to \langle z, \underline{U}_x(y)\rangle$ dans E ; d'ailleurs la suite (z_n) est bornée, donc il existe une constante a telle que $|\langle z_n, \underline{U}_x(y)\rangle| \leq a|\underline{U}_x|$ pour tout n ; le th. de Lebesgue montre donc que $\langle z, \underline{U}_x(y)\rangle$ est intégrable, et qu'on a $\int \langle z, \underline{U}_x(y)\rangle d\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \langle z_n, \underline{V}(y)\rangle = \langle z, \underline{V}(y)\rangle$. Cela étant, la relation (5) montre que l'on a

$$(6) \qquad |\underline{V}(y)| \leq |y| \cdot \int^* |\underline{U}_x| d\mu(x)$$

pour tout $y \in A$; cela signifie que $\underline{V}$ est une application linéaire fortement continue de A dans H' ; elle se prolonge donc en une application fortement continue $\underline{V}$ de G dans H'. En outre, si (y_n) est une suite de points de A tendant vers $y \in G$, les fonctions $x \to \langle z, \underline{U}_x(y_n)\rangle$ convergent simplement vers $x \to \langle z, \underline{U}_x(y)\rangle$ dans E ; en appliquant le th. de Lebesgue comme ci-dessus, on voit que la fonction $x \to \langle z, \underline{U}_x(y)\rangle$ est intégrable et que l'on a

$\int \langle z, \underline{U}_x(y) \rangle \, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \langle z, \underline{V}(y_n) \rangle = \langle z, \underline{V}(y) \rangle$ puisque $\underline{V}$ est continue ; la proposition est ainsi complètement démontrée, et on a prouvé en outre que

(7) $$\left| \int \underline{U}_x d\mu(x) \right| \leqslant \int^* \left| \underline{U}_x \right| d\mu(x) \quad .$$

COROLLAIRE.- Soit H un espace de Banach, A un sous-espace partout dense dans H . Soit f une application de E dans H' telle que

1° pour tout $a \in A$, la fonction numérique $\langle a, f(x) \rangle$ est mesurable ;

2° l'intégrale supérieure $\int^* |f| \, d\mu$ est finie.

Alors f est faiblement intégrable (pour la topologie $\sigma(H',H)$) et on a

(8) $$\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \int^* |f| \, d\mu \quad .$$

Il suffit d'appliquer la prop.7 au cas où $G = R$.

Remarques.- 1) Si on ne suppose pas que $\int^* |f| \, d\mu$ soit finie le corollaire précédent n'est plus exact (exerc.4).

2) On peut d'autre part donner des exemples d'applications faiblement intégrables f de E dans un espace de Banach réflexif F , telles que l'intégrale supérieure $\int^* |f| \, d\mu$ soit infinie (exerc. 2).

4. Fonctions faiblement mesurables.

Soient F et F' deux espaces vectoriels sur R en dualité faible. On dit qu'une application f de E dans F est faiblement mesurable si, pour tout $z' \in F'$, la fonction numérique $x \to \langle f(x), z' \rangle$ est mesurable.

Lorsque F est un espace de Banach, F' son dual, on sait (chap.IV, §5,n°) que toute fonction mesurable f à valeurs dans F est aussi faiblement mesurable ; en outre, la réciproque est vraie lorsque, pour tout ensemble compact $K \subset E$, il existe dans K un ensemble négligeable

H tel que $f(K \cap \complement H)$ soit contenu dans un sous-espace de F *de type dénombrable* (chap.IV, § 5, prop.) ; mais une fonction faiblement mesurable quelconque n'est pas nécessairement mesurable (cf. remarque suivant la prop.5).

Considérons maintenant les fonctions prenant leurs valeurs dans le *dual* d'un espace de Banach.

PROPOSITION 8.- *Soit* F *un espace de Banach de type dénombrable, et soit* f *une fonction définie dans* E , *à valeurs dans le dual* F' *de* F , *et faiblement mesurable* (pour la topologie $\sigma(F',F)$). *Dans ces conditions* :

1° *la fonction numérique* $|f|$ *est mesurable* ;

2° *pour tout ensemble compact* $K \subset E$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble compact* $K_1 \subset K$ *tel que* $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ *et que la restriction de* f *à* K_1 *soit continue pour la topologie* $\sigma(F',F)$.

Soit (a_n) une suite partout dense dans F (pour la topologie forte). On a pour tout $x \in E$, $|f(x)| = \sup_n |\langle a_n, f(x)\rangle| / |a_n|$, et la fonction $|f|$ est donc l'enveloppe supérieure d'une suite de fonctions mesurables, ce qui prouve qu'elle est mésurable.

Etant donnés un ensemble compact $K \subset E$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe tout d'abord un ensemble compact K_0 tel que $\mu(K \cap \complement K_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et que la restriction de $|f|$ à K_0 soit continue, donc *bornée* ; d'autre part, comme les fonctions numériques $\langle a_n, f\rangle$ sont mesurables, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K_0$ tel que $\mu(K_0 \cap \complement K_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et que la restriction de *chacune* des fonctions $\langle a_n, f\rangle$ à K_1 soit continue (chap.IV, § 5, prop.). Comme la restriction de $|f|$ à K_1 est bornée, pour tout $a \in F$, la restriction à K_1 de la fonction $\langle a, f\rangle$ est limite uniforme de restrictions à K_1 de fonctions $\langle a_n, f\rangle$, donc la restriction de $\langle a, f\rangle$ à K_1 est continue.

Ces propriétés ne subsistent plus lorsqu'on ne suppose plus que F soit de type dénombrable (cf. exerc.3).

Il est clair que la somme de deux fonctions faiblement mesurables à valeurs dans un même espace est encore faiblement mesurable, ainsi que le produit $g f$ d'une fonction numérique mesurable g et d'une fonction faiblement mesurable f. Si (f_n) est une suite de fonctions faiblement mesurables à valeurs dans F, telle que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ converge vers une limite $f(x)$ pour la topologie $\sigma(F,F')$, la fonction f est faiblement mesurable, car pour tout $z' \in F'$, la suite des fonctions mesurables $\langle f_n, z' \rangle$ converge simplement vers $\langle f, z' \rangle$.

On dit qu'une fonction f à valeurs dans F est <u>faiblement négligeable</u> (resp. <u>localement faiblement négligeable</u>) si, pour tout $z' \in F'$, la fonction numérique $\langle f, z' \rangle$ est négligeable (resp. localement négligeable). L'exemple qui suit la prop.5 prouve qu'une fonction f peut être faiblement négligeable mais qu'on peut avoir $f(x) \neq 0$ en <u>tout</u> point $x \in E$. Toutefois, s il existe dans F' une suite (a'_n) dense pour la topologie $\sigma(F',F)$ on a vu (chap.IV, §2,prop.) qu'une fonction f à valeurs dans F et faiblement négligeable (resp. localement faiblement négligeable est négligeable (resp. localement négligeable).

Si f est une fonction faiblement intégrable et g une fonction faiblement négligeable, il est clair que $f+g$ est faiblement intégrable et qu'on a $\int f\, d\mu = \int (f+g) d\mu$. Inversement, si f et f_1 sont deux fonctions faiblement intégrables telles que $\int |\langle f - f_1, z' \rangle|\, d\mu = 0$ pour tout $z' \in F'$, $f - f_1$ est faiblement négligeable.

<u>Exercices</u>.- 1) a) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0,1]$. Soit F l'espace des suites $y = (y_n)_{n \in N}$ de nombres réels tendant vers 0, muni de la norme $|y| = \sup_n |y_n|$ (fonctions continues

sur $\mathbb{N}$, tendant vers 0 au point à l'infini) ; le dual F' de l'espace de Banach F est l'espace des suites $z = (z_n)$ telles que $\sum_n |z_n| < +\infty$ avec $\langle y, z \rangle = \sum_n y_n z_n$. Soit $f = (f_n)$ l'application de E dans F définie de la façon suivante ; $f_n(x) = n\varphi_{I_n}$, où $I_n =]0, 1/n[$. Montrer que, pour tout $z \in F'$, $\langle f, z \rangle$ est intégrable, et que f est mesurable, mais que $\int f\, d\mu$ n'appartient pas à F .

b) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E_1 = [-1, +1]$. Soit g l'application de E_1 dans F définie par les conditions $g(x) = f(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $g(x) = -f(-x)$ pour $x \leq 0$. Montrer que g est telle que $\langle g, z \rangle$ soit intégrable pour tout $z \in F'$ et que $\int g\, d\mu$ appartient à F , mais que g n'est pas faiblement intégrable.

2) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0, 1]$, et soit F un espace hilbertien ayant une base orthonormale dénombrable (e_n). Soit f l'application de E dans F telle que $f(0) = 0$, et $f(x) = 2^n e_n / n$ dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$ $(n \in \mathbb{N})$. Montrer que f est mesurable et faiblement intégrable, mais que $\int^* |f|\, d\mu = +\infty$.

3) a) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0, 1]$, et soit F un espace hilbertien ayant une base orthonormale $(e_x)_{x \in E}$ équipotente à E . Soit A un ensemble non mesurable dans E (chap.IV, §4,exerc.) ; on définit une application f de E dans F en posant $f(x) = 0$ dans $\complement A$ et $f(x) = e_x$ pour $x \in A$. Montrer que f est faiblement intégrable, mais que $|f|$ n'est pas mesurable.

b) Soit g l'application de E dans F définie par $g(x) = e_x$ pour tout $x \in E$. Montrer que la restriction de g à un ensemble compact infini n'est pas continue pour la topologie faible $\sigma(F, F')$.

4) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0, 1]$, et soit F l'espace de Banach des suites $x = (x_n)$ tendant vers 0, avec la norme

$\|x\| = \sup_n |x_n|$; le dual de F est l'espace F' des suites $y=(y_n)$ des suites telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < +\infty$. Soit A le sous-espace de F formé des suites dont un nombre fini seulement de termes sont $\neq 0$. Soit f l'application de E dans F' défini de la façon suivante : si $f(t)=(f_n(t))$, $f_n(t)=n$ pour $1/(n+1) \leqslant t < 1/n$, $f_n(t)=0$ hors de cet intervalle. Montrer que pour tout $a \in A$, $\langle a, f(t) \rangle$ est intégrable, mais que f n'est pas faiblement intégrable.

5) Soit F un espace de Banach, F' son dual. Pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, on désigne par $\Lambda^p_{F'}(E)$ (ou simplement $\Lambda^p_{F'}$) l'ensemble des applications f de E dans F' telles que, pour tout $z \in F$, la fonction numérique $\langle z, f \rangle$ appartienne à $\mathcal{L}^p(E)$. On a $\mathcal{L}^p_{F'} \subset \Lambda^p_{F'}$, et $\Lambda^1_{F'}$ est l'espace des fonctions faiblement intégrables à valeurs dans F' (cf. cor. du th.2).

a) Montrer que si, pour tout $z \in F$, on désigne par f_z la fonction numérique $\langle z, f \rangle$, l'application linéaire $z \to \tilde{f}_z$ de F dans $L^p(E)$ est continue (même raisonnement que dans le th.2). On désigne par $M_p(f)$ la norme de l'application linéaire continue $z \to \tilde{f}_z$; montrer que $M_p(f)$ est une semi-norme sur l'espace $\Lambda^p_{F'}$.

b) Montrer que, pour que f appartienne à $\Lambda^p_{F'}$, il faut et il suffit que, pour toute fonction numérique $g \in \mathcal{L}^q$ $(1/p+1/q=1)$, la fonction gf soit faiblement intégrable ; on a alors $M_1(gf) \leqslant M_p(f) N_q(g)$.

c) Dans l'espace $\Lambda^1_{F'}$, montrer que la semi-norme M_1 est équivalente à la semi-norme $M'_1(f) = \sup_A \left| \int f \varphi_A \, d\mu \right|$, où A parcourt l'ensemble des parties mesurables de E ; de façon précise, on a $M'_1 \leqslant M_1 \leqslant 2M'_1$. En déduire que M_p est une semi-norme équivalente à $M'_p(f) = \sup_{N_q(g) \leqslant 1} M'_1(gf)$.

d) On prend pour F un espace hilbertien ayant une base dénombrable, pour μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0,1]$; montrer que les semi-normes M_1 et N_1 ne sont pas équivalentes sur l'espace $\mathcal{L}^1_{F'}$ des fonctions intégrables, et par suite que la topologie définie par M_1 sur cet espace est strictement moins fine que celle définie par N_1 (donner un exemple de fonction faiblement intégrable mais non intégrable, qui est limite pour la semi-norme M_1 d'une suite de fonctions étagées ; cf.exerc.2). Montrer de même que pour tout p fini et >1, M_p et N_p ne sont pas en général équivalentes sur $\mathcal{L}^p_{F'}$ (former un exemple analogue).

e) Montrer que, sur l'espace $\mathcal{L}^\infty_{F'}$, on a $M_\infty = N_\infty$.

6) Soit F un espace de Hilbert ayant une base orthonormale dénombrable qu'on range en une suite double (e_{ij}). Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0,1]$. Soit u_i la fonction définie dans E, à valeurs dans F, telle que $u_i(x) = e_{ij}$ pour $(j-1)2^{-i} \leqslant x < j2^{-i}$ et $1 \leqslant j \leqslant 2^i$, et $u_i(1)=0$; soit $f_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$. Montrer que, pour $1 \leqslant p < +\infty$, la suite (f_n) est une suite de Cauchy dans Λ^p_F, mais ne converge vers aucune fonction appartenant à Λ^p_F.

7) Soit F un espace de Banach, F' son dual. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans l'espace normé $\Lambda^p_{F'}$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$; on suppose qu'il existe une application f de E dans F' telle que, pour tout $z \in F$, la suite des fonctions $\langle z, f_n \rangle$ converge en mesure vers $\langle z, f \rangle$. Montrer que f appartient à $\Lambda^p_{F'}$ et que la suite (f_n) a pour limite f dans cet espace normé.

8) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0,1]$; soit F l'espace des suites $y = (y_n)$ telles que $\sum_n |y_n| < +\infty$, muni de la norme $\|y\| = \sum_n |y_n|$; le dual F' de F est l'espace des suites bornées $z = (z_n)$, muni de la norme $\|z\| = \sup_n |z_n|$. Pour tout $x \in E$ tel que

$0 \leqslant x < 1$, soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 2^{-n}$ le développement dyadique propre de x ; on désigne par $f(x)$ la suite (ξ_n) dans F', et on pose $f(1)=0$. Montrer que la fonction f appartient à $\Lambda^p_{F'}$ pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, qu'il existe une suite de fonctions étagées qui converge faiblement partout vers f , mais que f n'est pas mesurable (on prouvera que le sous-espace fortement fermé de F' engendré par les valeurs de f dans un ensemble non dénombrable n'est pas de type dénombrable. En déduire que f n'est pas limite d'une suite de fonctions étagées dans l'espace $\Lambda^p_{F'}$ (p fini $\geqslant 1$).

9) Les espaces E,F,F' étant les mêmes que dans l'exerc.8, soit $p \geqslant 1$; soit f l'application de E dans F' telle que $f(0)=0$, et pour $2^{-n-1} < x \leqslant 2^{-n}$, $f(x)$ est la suite dont tous les termes sont nuls, excepté le terme de rang n , égal à $2^{n/p}$. Montrer que f est mesurable et appartient à $\Lambda^p_{F'}$, mais qu'il n'existe aucune suite (f_n) de fonctions étagées qui tende vers f pour la semi-norme M_p .

10) Soit F un espace localement convexe séparé satisfaisant à l'axiome (MC) du chap.III, §4, et soit K un ensemble <u>compact</u> dans F ; soit μ une mesure réelle (de signe quelconque) sur K . L'application canonique $x \rightarrow x$ de K dans F est alors faiblement intégrable (pour $|\mu|$). Montrer que si on a $\int x \varphi_A d\mu = 0$ pour tout ensemble fermé $A \subset K$, le support de μ est vide si $0 \notin K$, ou réduit au point 0 si $0 \in K$.

§ 5. Mesures vectorielles.

1. <u>Définition d'une mesure vectorielle</u>.

DÉFINITION 1.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement compact</u>, F <u>un espace localement convexe séparé sur</u> $\mathbb{R}$. <u>On appelle mesure vectorielle sur</u> E , <u>à valeurs dans</u> F , <u>toute application linéaire</u> $f \longrightarrow m(f)$ <u>de l'espace</u>

$\mathcal{K}(E)$ des fonctions numériques continues dans E et à support compact, dans l'espace F , telle que pour toute partie compacte K de E , la restriction de $f \to m(f)$ à l'espace $\mathcal{K}(E,K)$ des fonctions continues à support dans K , soit continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Exemples.- 1) Soit F un espace localement convexe séparé dans lequel l'enveloppe convexe fermée de tout ensemble compact est compacte (condition (EC) du chap.III, §4). Pour toute fonction continue g définie dans E , à valeurs dans F , l'application $f \to \int g f \, d\mu$ est une mesure vectorielle sur E (à valeurs dans F). En effet, soit q une semi-norme continue sur F ; $q(g)$ est continue dans E . Soit a_K la borne supérieure de $q(g)$ dans K ; pour toute fonction numérique $f \in \mathcal{K}(E,K)$, on a $q(gf)=|f|q(g) \leq a_K|f|$, et par suite
$q(\int g f \, d\mu) \leq \int q(gf) d\mu \leq a_K \mu(K) \|f\|$, ce qui établit notre assertion.

2) Soit F un espace de Banach et g une fonction localement intégrable définie dans E et à valeurs dans F (§1) ; l'application $f \to \int g f \, d\mu$ est une mesure vectorielle sur E à valeurs dans F , car pour tout ensemble compact $K \subset E$, on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E,K)$

$$\left| \int g f \, d\mu \right| = \left| \int g \varphi_K f \, d\mu \right| \leq \|f\| \cdot \int |g \varphi_K| d\mu \,.$$

3) Soient F un espace de Banach, F' son dual fort ; soit g une application de E dans F' telle que, pour tout $a \in F$, $\langle a, g \rangle$ soit localement intégrable et que $\int^* |g| \varphi_K d\mu$ soit finie pour tout ensemble compact $K \subset E$. Alors pour toute partie compacte $K \subset E$, $g\varphi_K$ est faiblement intégrable pour $\sigma(F',F)$ (§ 4, cor. du th.2) ; l'intègrale $\int g \varphi_K f \, d\mu = \int g f \, d\mu$ appartient donc à F' pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E,K)$; en outre (§4,prop.3), on a $\left|\int g f \, d\mu\right| \leq \int^* |g| \cdot |f| d\mu \leq$
$\leq \|f\| \int^* |g| \varphi_K \, d\mu$, ce qui montre que l'application $f \to \int g f \, d\mu$

est une mesure vectorielle sur E , à valeurs dans F' .

4) Les notations étant les mêmes que dans l'exemple précédent, supposons seulement que $\langle z, g \rangle$ soit localement intégrable pour tout $z \in F$; alors gf est faiblement intégrable pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, en vertu du cor. du th.2 du § 4 ; nous dirons dans ce cas que g est localement faiblement intégrable. Le th.2 du § 4 montre en outre que pour tout ensemble compact K , l'application linéaire $z \to \langle z, g\varphi_K \rangle$ de F dans $\mathcal{L}^1(E)$ est continue ; autrement dit, il existe une constante $a_K \geqslant 0$ telle que $\int |\langle z, g\varphi_K\rangle| d\mu \leqslant a_K |z|$ pour tout $z \in F$. On en déduit que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ de support contenu dans K , on a

$$\left| \int \langle z, gf\rangle d\mu \right| = \left| \int \langle z, g\varphi_K\rangle f\, d\mu \right| \leqslant \|f\| \cdot \int |\langle z, g\varphi_K\rangle| \, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant a_K |z| \cdot \|f\|$$

ce qui signifie que $\left| \int gf\, d\mu \right| \leqslant a_K \|f\|$, et montre par suite que $f \to \int gf$ est une mesure vectorielle sur E .

Remarques.- 1) Dans les exemples qui précèdent, on dit que la mesure vectorielle $f \to m(f) = \int gf\, d\mu$ est la mesure de densité g par rapport à la mesure positive μ . Dans l'exemple 2), on a pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, $|m(f)| \leqslant \nu(|f|)$, où ν est la mesure positive $|g| \cdot \mu$; la même inégalité est valable dans l'exemple 3) lorsqu'on suppose que la fonction numérique $|g|$ est mesurable (ce qui est le cas par exemple quand F est de type dénombrable (§ 4, prop.8)). On peut donner des exemples de mesures vectorielles à valeurs dans un espace de Banach et qui ne sont majorées par aucune mesure positive (exerc.4) ; on peut aussi donner des exemples de mesures vectorielles à valeurs dans le dual F' d'un espace de Banach F et qui ne sont pas de la forme $f \to \int gf\, d\mu$ avec g localement faiblement intégrable (exerc. 7).

2) On dit qu'une mesure vectorielle m à valeurs dans un espace de Banach F est __bornée__ s'il existe une constante $a > 0$ telle que $|m(f)| \leqslant a\|f\|$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$: cela signifie donc que m est une application continue de $\mathcal{K}(E)$ dans F, quand on munit $\mathcal{K}(E)$ de la structure d'espace normé définie par la norme $\|f\|$ (topologie de la convergence uniforme). La norme de l'application linéaire $f \to m(f)$ est alors appelée la __norme__ de m et notée $\|m\|$.

2. __Valeur absolue d'une mesure vectorielle__.

Soit F un espace de Banach, m une mesure vectorielle sur E, à valeurs dans F ; nous nous bornerons dans ce qui suit au cas où il existe une mesure positive ν sur E telle que $|m(f)| \leqslant \nu(|f|)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$. Comme $\mathcal{M}(E)$ est un espace complètement réticulé, l'ensemble des mesures positives ν sur E ayant la propriété précédente admet __un plus petit élément__, qu'on note $|m|$ et qu'on appelle la __valeur absolue__ de la mesure vectorielle m. Commençons par étudier le cas où m est la mesure $f \to \int gf\, d\mu$, de densité g par rapport à une mesure positive μ, g étant supposée localement intégrable ; nous écrirons $m = g.\mu$.

PROPOSITION 1.- __Pour toute fonction localement intégrable__ g __à valeurs dans un espace de Banach__ F, __on a__ $|g.\mu| = |g|.\mu$.

En effet, posons $\nu = |g.\mu|$; il est immédiat que $\nu \leqslant |g|.\mu$; en vertu du th. de Lebesgue-Nikodym, on peut donc écrire $\nu = h.\mu$, où h est localement intégrable pour μ, et $h \leqslant |g|$ localement presque partout. D'autre part, soit z' un élément quelconque de norme $\leqslant 1$ dans ~~mm~~ le dual F' de F ; pour toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$, on on peut écrire $\left|\int \langle g, z'\rangle f\, d\mu\right| = \left|\langle \int gf\, d\mu, z'\rangle\right| \leqslant \left|\int gf\, d\mu\right| \leqslant$ $\leqslant \int hf\, d\mu$; cela prouve que $|\langle g, z'\rangle \cdot \mu| \leqslant h.\mu$, et comme $|\langle g, z'\rangle \cdot \mu| = |\langle g, z'\rangle| \cdot \mu$ (§ 1, prop.7) , on a $|\langle g, z'\rangle| \leqslant h$ localement presque partout (§ 1,cor.2 de la prop.8). On déduit aisément de là que $|g| \leqslant h$ localement presque partout, et par suite $|g| = h$ localement presque partout : en effet, dans le cas contraire, il existerait un ensemble compact K de mesure > 0 tel que $|g(x)| > h(x)$ pour tout $x \in K$; par suite, il existerait un ensemble compact $K_1 \subset K$ de mesure > 0 tel que les restrictions de $|g|$ et de h à K_1 soient continues (chap.IV, § 5). Il existe un point $x_0 \in K_1$ appartenant au support de la mesure induite par μ sur K_1 , et un vecteur $z' \in F'$ tel que $\langle g(x_0), z'\rangle > h(x_0)$ et $|z'| \leqslant 1$; par continuité, on a aussi $\langle g(x), z'\rangle > h(x)$ en tous les points d'un voisinage V de x_0 par rapport à K_1 ; mais cela contredit le résultat obtenu ci-dessus, puisque V est de mesure > 0 .

COROLLAIRE.- Pour que la mesure $g.\mu$ soit nulle, il faut et il suffit que g soit localement négligeable.

3. Mesures vectorielles à valeurs dans le dual d'un espace de Banach.

Si F est un espace de Banach, m une mesure vectorielle sur E à valeurs dans F , majorée par une mesure positive μ , la relation $|m(f)| \leqslant \mu(|f|)$ valable pour $f \in \mathcal{K}(E)$, montre que l'application linéaire $f \longrightarrow m(f)$ peut être prolongée par continuité en une application linéaire de $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ dans F , que nous noterons encore m .

Considérons maintenant le cas où m est une mesure vectorielle à valeurs dans le dual fort F' d'un espace de Banach F , majorée par une mesure positive μ . Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1 (Dunford-Pettis).- Soient F un espace de Banach de type dénombrable, F' son dual fort, μ une mesure positive sur E, m une mesure vectorielle sur E à valeurs dans F' et telle que $|m(f)| \leqslant \mu(|f|)$. Dans ces conditions, il existe une fonction g définie dans E, à valeurs dans F', faiblement mesurable pour μ, telle que $|g|$ soit essentiellement bornée et que l'on ait pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$

(1) $$m(f) = \int g f \, d\mu .$$

En outre, si g_1 est une seconde fonction ayant les propriétés précédentes, g et g_1 sont égales localement presque partout. Enfin, on a $|m| = |g| \cdot \mu$.

Comme on l'a remarqué ci-dessus, on peut prolonger m en une application linéaire continue de $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ dans F', telle que $|m(f)| \leqslant \mu(|f|) = N_1(f)$. Soit z un vecteur quelconque de F ; on a

$$|\langle z, m(f)\rangle| \leqslant N_1(f) . |z| \quad ;$$

l'application $f \rightarrow \langle z, m(f)\rangle$ est donc une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{L}^1$, et il résulte du th. de Lebesgue-Nikodym qu'il existe une classe $\dot{g}_z \in L^\infty(E, \mu)$, bien déterminée, et telle que pour toute fonction g_z de la classe $\dot{g}_z$, on ait identiquement en f

(2) $$\langle z, m(f)\rangle = \int f(x) g_z(x) d\mu(x)$$

avec en outre la relation

(3) $$|N_\infty(g_z)| \leqslant |z| .$$

On définit ainsi une application linéaire fortement continue $z \rightarrow \dot{g}_z$ de F sur un sous-espace vectoriel H de $L^\infty(E, \mu)$, de norme $\leqslant 1$.

Cela étant, supposons qu'on ait défini une application linéaire $\dot{g} \longrightarrow g^*$ de H dans l'espace $\mathcal{L}^\infty(E, \mu)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° pour toute classe $\dot{g} \in H$, g^* appartient à la classe $\dot{g}$;

2° on a $\|g^*\| \leq N_\infty(\dot{g})$ (ou, en d'autres termes, $|g^*(t)| \leq N_\infty(\dot{g})$ pour tout $t \in E$).

Alors, pour tout $x \in E$, $z \longrightarrow g_z^*(x)$ est une <u>forme linéaire continue</u> sur F , de norme ≤ 1 ; autrement dit, c'est un élément $\mathfrak{g}(x)$ de F', tel que $|\mathfrak{g}(x)| \leq 1$ pour tout $x \in E$, et que $\langle z, \mathfrak{g}(x) \rangle = g_z^*(x)$ identiquement en x et z . Cette dernière relation montre que l'application $x \longrightarrow \mathfrak{g}(x)$ est <u>faiblement mesurable</u> ; en outre la relation (2) donne, pour tout $z \in F$ et tout $f \in \mathcal{L}^1$

$$\langle z, m(f) \rangle = \int f \langle z, \mathfrak{g} \rangle \, d\mu = \langle z, \int \mathfrak{g} f \, d\mu \rangle$$

c'est-à-dire la relation (1).

Tout revient donc à construire l'application linéaire $\dot{g} \longrightarrow g^*$ de H dans $\mathcal{L}^\infty$, ayant les propriétés énumérées ci-dessus. Or, le sous-espace normé H de L^∞ , image de l'espace de type dénombrable F par l'application continue $z \longrightarrow \dot{g}_z$, est lui-même de type dénombrable. Soit donc $(\dot{g}_n)$ une suite partout dense d'éléments de H ; pour chaque indice n , désignons par g_n une fonction de la classe $\dot{g}_n$. Pour tout système fini $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ de nombres rationnels, on a

$\left|\sum_i r_i g_i(t)\right| \leq N_\infty\left(\sum_i r_i \dot{g}_i\right)$ localement presque partout dans E ; autrement dit, il existe un ensemble localement négligeable $P_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ tel que la relation précédente ait lieu dans le complémentaire de cet ensemble. Soit P la réunion de la famille dénombrable des ensembles $P_{r_1 \ldots r_n}$; P est localement négligeable, et on a

$$\left|\sum_i r_i g_i^*(x)\right| \leq N_\infty\left(\sum_i r_i \dot{g}_i\right)$$

en tous les points du complémentaire de P , et pour <u>tout</u> système fini (r_i) de nombres rationnels. Désignons alors par g_n^* la fonction égale à g_n dans $\complement P$, à 0 dans P ; il est clair que g_n^* appartient à $\dot{g}_n$, et qu'on a

(4) $$\Big|\sum_i r_i g_i^*(x)\Big| \leq N_\infty\Big(\sum_i r_i \dot{g}_i\Big)$$

pour <u>tout</u> $x \in E$ et tout système (r_i) de nombres rationnels. Soit D le sous-ensemble de H formé des combinaisons linéaires des $\dot{g}_n$ à coefficients rationnels. La relation (4) montre en premier lieu que si on a $\sum_i r_i \dot{g}_i = 0$ dans L^∞, on a aussi $\sum_i r_i g_i^*(x) = 0$ pour tout $x \in E$; on définit donc une application de D dans l'espace $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^\infty$ des fonctions bornées dans E, en associant à la combinaison linéaire $\sum_i r_i \dot{g}_i$ la fonction $x \longrightarrow \sum_i r_i g_i^*(x)$. En outre, la relation (4) montre que cette application $\dot{g} \longrightarrow g^*$ est <u>uniformément continue</u> quand on munit D de la norme $N_\infty(\dot{g})$ et $\mathcal{B}$ de la norme $\|g\| = \sup_{x \in E} |g(x)|$. Or D est partout dense dans H pour la norme N_∞ ; l'application $\dot{g} \longrightarrow g^*$ se prolonge donc par continuité à H ; l'application prolongée (que nous noterons encore $\dot{g} \longrightarrow g^*$) est <u>linéaire</u> en vertu du principe de prolongement des identités, et on a $\|g^*\| \leq N_\infty(\dot{g})$; enfin, si $(\dot{h}_n)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers un élément $\dot{h}$ de H, $h_n^*(x)$ tend localement presque partout vers une fonction de la classe $\dot{h}$ (chap.IV, § 6), ce qui prouve que h^* appartient à la classe $\dot{h}$. L'application $\dot{g} \longrightarrow g^*$ a donc toutes les propriétés voulues.

La fin de la démonstration du th.1 est facile. Si on a $\int g f \, d\mu = \int g_1 f \, d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, on a aussi $\int \langle z, g \rangle f \, d\mu = \int \langle z, g_1 \rangle f \, d\mu$ pour tout $z \in F$, d'où $\langle z, g \rangle = \langle z, g_1 \rangle$ localement presque partout pour tout $z \in F$; mais comme F est de type dénombrable, on sait (§ 4, n°4) que cela entraîne que $g = g_1$ localement presque partout.

Enfin, comme F est de type dénombrable, on sait que $|g|$ est mesurable (§ 4, prop.8) ; si $\nu = |m|$, on a $\nu \leq |g| \cdot \mu$. Raisonnant comme dans la prop.1, on peut écrire $\nu = h \cdot \mu$, où h est localement intégrable pour μ et $h \leqslant |g|$ localement presque partout. Si z est un élément de F tel que $|z| \leqslant 1$, on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, $\left|\int \langle z, g\rangle f\, d\mu\right| = |\langle z, m(f)\rangle| \leqslant |m(f)| \leqslant \int hf\, d\mu$, d'où $|\langle z, g\rangle| \leqslant h$ localement presque partout. On conclut que $|g| = h$ localement presque partout en raisonnant comme dans la prop.1 .

Remarque.- Il ne faudrait pas croire que le th. de Lebesgue-Nikodym puisse se généraliser complètement aux mesures vectorielles, même à valeurs dans le dual F' d'un espace de Banach F de type dénombrable. On peut donner des exemples de telles mesures m telles que $m(f)=0$ pour toute fonction f μ-négligeable, et satisfaisant en outre à une condition de "continuité absolue" par rapport à μ (pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$, il existe $\delta > 0$ tel que les conditions $0 \leqslant h \leqslant f$ et $\mu(h) \leqslant \delta$ entraînent $|m(h)| \leqslant \varepsilon$), et qui pourtant ne sont pas de la forme $f \to \int g f\, d\mu$ avec g localement faiblement intégrable (exerc. 7).

4. Application : dual d'un espace L^1_F (F de type dénombrable).

PROPOSITION 2.- Soit F un espace de Banach de type dénombrable. Toute forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{L}^1_F(E, \mu)$ est de la forme $f \to \int \langle f, g\rangle\, d\mu$, où g est une fonction à valeurs dans F', faiblement mesurable et telle que $|g|$ soit essentiellement bornée. En outre, la norme de la forme linéaire sur L^1_F déduite de $f \to \int \langle f, g\rangle\, d\mu$ par passage au quotient, est égale à $N_\infty(|g|)$.

Soit θ une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{L}^1_F$; il existe donc un nombre a tel que $|\theta(f)| \leqslant a.N_1(f)$. Soit z un vecteur quelconque de F , h une fonction numérique intégrable quelconque ; on a $hz \in \mathcal{L}^1_F$, et $|\theta(hz)| \leqslant a.|z|.N_1(h)$. L'application $z \to \theta(hz)$ est donc une forme linéaire continue sur l'espace F , c'est-à-dire un élément du dual F' de F , que nous désignerons par $m(h)$;

on peut donc écrire $\theta(h\,z) = \langle z, m(h)\rangle$, et on a en outre $|m(h)| \leqslant a.N_1(h)$. En d'autres termes, m est une application linéaire continue de $\mathcal{L}^1$ dans F' ; le th.1 est par suite applicable et prouve que $m(h) = \int g\,h\,d\mu$, où g est une fonction à valeurs dans F' , faiblement mesurable, telle que $|g|$ soit essentiellement bornée, et déterminée à une fonction localement négligeable près. On peut donc écrire

$$\theta(h\,z) = \langle z, \int g\,h\,d\mu\rangle = \int \langle z, g\,h\rangle\,d\mu = \int \langle h\,z, g\rangle\,d\mu .$$

On en déduit que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_F$ qui est combinaison linéaire, à coefficients dans F , de fonctions numériques intégrables, on a $\theta(f) = \int \langle f, g\rangle\,d\mu$. Mais les deux membres de cette relation sont définis pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_F$: car f étant limite presque partout d'une suite de combinaisons linéaires de fonctions numériques intégrables, $\langle f, g\rangle$ est limite presque partout d'une suite de fonctions mesurables, et est par suite mesurable ; en outre, comme $|g|$ est essentiellement bornée, on a $|\langle f, g\rangle| \leqslant |f| . N_\infty(|g|)$ presque partout, et par suite $\langle f, g\rangle$ est intégrable. En outre $\left|\int \langle f, g\rangle\,d\mu\right| \leqslant N_1(f) N_\infty(|g|)$, ce qui montre que la forme linéaire $f \longrightarrow \int \langle f, g\rangle\,d\mu$ est continue dans $\mathcal{L}^1_F$; comme cette forme linéaire coïncide avec θ dans l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions numériques intégrables, et que cet ensemble est partout dense dans $\mathcal{L}^1_F$, on a bien $\theta(f) = \int \langle f, g\rangle\,d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_F$.

Pour achever la démonstration, posons $c = N_\infty(|g|)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K de mesure > 0 tel que, pour tout $x \in K$, on ait $|g(x)| \geqslant c - \varepsilon$; en outre, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K$, de mesure > 0 , tel que la restriction de g à K_1 soit continue pour la topologie faible $\sigma(F', F)$ (§ 4, prop. 8). Soit x_0 un point de K_1

appartenant au support de la mesure induite par μ sur K_1 ; comme $|g(x_0)| \geqslant c-\varepsilon$, il existe $z \in F$ tel que $|z|=1$ et $\langle z, g(x_0)\rangle \geqslant c-2\varepsilon$; d'après ce qui précède, il existe un voisinage V de x_0 dans K_1 tel que $\langle z, g(x)\rangle \geqslant c-3\varepsilon$ pour tout $x \in V$. D'après le choix de x_0 , on a $\mu(V) > 0$; si $f = z\varphi_V$, on a $N_1(f) = \mu(V)$ et $\int \langle f, g\rangle d\mu = \int \langle z, g\rangle \varphi_V d\mu \geqslant (c-3\varepsilon)\mu(V)$. Cela montre que la norme de la forme linéaire déduite de $f \to \int \langle f, g\rangle d\mu$ par passage au quotient est $\geqslant c-3\varepsilon$; comme par ailleurs elle est $\leqslant c$ et que ε est arbitraire, la proposition est complètement démontrée.

5. <u>Intégration d'une fonction vectorielle par rapport à une mesure vectorielle</u>.

Soient F,G,H trois espaces de Banach, et soit $(y,z) \to \Phi(y,z)$ une <u>application bilinéaire continue</u> de $F \times G$ dans H ; il existe donc un nombre $a \geqslant 0$ tel que l'on ait identiquement

$$(5) \qquad |\Phi(y,z)| \leqslant a.|y|.|z|.$$

Soit d'autre part m une mesure vectorielle sur E , à valeurs dans G , et majorée par une mesure positive μ ; nous supposerons que m a été prolongée par continuité en une application linéaire de $\mathcal{L}^1(E,\mu)$ dans G . Désignons par $\mathcal{H}_F$ le sous-espace de $\mathcal{L}^1_F$ formé des combinaisons linéaires de fonctions de $\mathcal{L}^1$, à coefficients dans F . Nous allons montrer que, pour toute fonction $f = \sum_k a_k f_k$ de $\mathcal{H}_F$, l'élément $\sum_k \Phi(a_k, m(f_k))$ ne dépend que de f et non de son expression comme combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{L}^1$. Tout revient à voir que la relation $\sum_k a_k f_k = 0$ presque partout entraîne $\sum_k \Phi(a_k, m(f_k)) = 0$. Or, soit $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les a_k ; on a donc

$a_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, e_j$ et la relation $\sum_k a_k f_k = 0$ presque partout signifie que l'on a pour chaque indice j , $\sum_k c_{kj} f_k = 0$ presque partout. On déduit de là que $m(\sum_k c_{kj} f_k) = 0$, c'est-à-dire $\sum_k c_{kj}\, m(f_k) = 0$; par suite $\Phi(e_j, \sum_k c_{kj}\, m(f_k)) = 0$, c'est-à-dire $\sum_k \Phi(c_{kj} e_j, m(f_k)) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$; on en tire $\sum_{j=1}^{n} (\sum_k \Phi(c_{kj}\, e_j, m(f_k))) = 0$, ce qui s'écrit aussi $\sum_k \Phi(\sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, e_j, m(f_k)) = 0$, c'est-à-dire enfin $\sum_k \Phi(a_k, m(f_k)) = 0$.

Nous poserons $\Phi(f, m) = \sum_k \Phi(a_k, m(f_k))$ pour toute expression de f comme combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{L}^1$, et nous dirons que cet élément de H est <u>l'intégrale de la fonction</u> f <u>par rapport à</u> m (pour la fonction bilinéaire Φ). Il n'est pas certain que l'application linéaire $f \to \Phi(f, m)$ de $\mathcal{H}_F$ dans H soit continue lorsqu'on munit $\mathcal{H}_F$ de la topologie définie par la semi-norme $N_1(f)$; mais lorsqu'il en est bien ainsi, c'est-à-dire lorsqu'il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$|\Phi(f, m)| \leqslant c.N_1(f) = c.\mu(|f|) \tag{6}$$

on peut <u>prolonger</u> cette application à $\mathcal{L}^1_F$ par continuité ; pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_F$, on dira encore que $\Phi(f, m)$ est l'intégral de f par rapport à m.

<u>Exemples</u>.- 1) Supposons que G soit le dual F' de F , que $H = R$, et que Φ soit la forme bilinéaire canonique $(y, z) \to \langle y, z\rangle$; soit m la mesure vectorielle $f \to \int g f\, d\mu$, où g est faiblement mesurable et telle que $|g|$ soit essentiellement bornée. Pour toute fonction $f = \sum_k a_k f_k$ de $\mathcal{H}_F$, on a

$$\langle f, m\rangle = \sum_k \langle a_k, \int g f_k\, d\mu\rangle = \sum_k \int \langle a_k, g\rangle f_k\, d\mu = \int \langle f, g\rangle d\mu$$

D'ailleurs, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_F$, f est limite presque partout d'une suite de fonctions de $\mathcal{H}_F$, donc $\langle f, g \rangle$ est mesurable, et comme $|\langle f, g\rangle| \leqslant |f| \cdot N_\infty(|g|)$ presque partout $\langle f \cdot g\rangle$ est intégrable, et on a la relation de la forme (6)

$$\left|\int \langle f, g\rangle \, d\mu\right| \leqslant N_\infty(|g|) N_1(f).$$

L'intégrale $\int \langle f \cdot g\rangle \, d\mu$ est donc le prolongement de $\langle f, m\rangle$ à $\mathcal{L}^1_F$.

2) Si l'un des espaces F,G est de <u>dimension finie</u> sur R, on peut toujours prolonger l'intégrale $\Phi(f, m)$ à $\mathcal{L}^1_F$; c'est évident si F est de dimension finie puisqu'alors $\mathcal{H}_F = \mathcal{L}^1_F$. Si G est de dimension finie, on peut écrire $m = \sum_i \mu_i e_i$, où les μ_i sont des mesures positives majorées par un multiple de μ, et il est clair qu'on a alors pour $f = \sum_k a_k f_k$, $\Phi(f, m) = \sum_{i,k} \Phi(a_k, \mu_i(f_k) e_i) =$
$= \sum_i \Phi(\sum_k \mu_i(f_k) a_k, e_i) = \sum_i \Phi(\mu_i(f), e_i)$, d'où la continuité de $\Phi(f, m)$ et son expression pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_F$.

Lorsqu'une inégalité de la forme (6) a lieu, le th. de Lebesgue s'étend de façon immédiate aux intégrales par rapport à m : si la suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{L}^1_F$ est presque partout convergente vers une fonction f et s'il existe une fonction $g \geqslant 0$ telle que $\int^* g \, d\mu < +\infty$ et $|f_n| \leqslant g$ pour tout n, alors on sait que f appartient à $\mathcal{L}^1_F$, et on a $\Phi(f, m) = \lim_{n \to \infty} \Phi(f_n, m)$ puisque f_n tend en moyenne vers f et que $\Phi(f, m)$ est continue dans $\mathcal{L}^1_F$.

<u>6. Mesures complexes.</u>

On appelle <u>mesure complexe</u> sur E une mesure vectorielle prenant ses valeurs dans le corps C des nombres complexes. Il est clair qu'une telle mesure peut s'écrire d'une seule manière $f \to \mu_1(f) + i\mu_2(f)$, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures réelles sur E , qu'on appelle <u>partie réelle</u> et <u>partie imaginaire</u> de μ respectivement ; on a évidemment $|\mu(f)| \leqslant |\mu_1|(f)+|\mu_2|(f)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ donc μ est majorée par une mesure positive. En outre :

PROPOSITION 3.- <u>Pour toute mesure complexe</u> $\mu = \mu_1+i\mu_2$, <u>on a</u> $|\mu| = \sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}$.

Le sens de la fonction $\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}$ a été défini au §2,n°6 . Soit ν une mesure positive majorant $|\mu_1|$ et $|\mu_2|$. On peut donc écrire, en vertu du th. de Lebesgue-Nikodym , $\mu_1=g_1.\nu$ et $\mu_2=g_2.\nu$, où g_1 et g_2 sont localement intégrables pour ν , d'où $\mu=(g_1+ig_2).\nu$, et par suite (prop.1) $|\mu| = |g_1+ig_2|.\nu = \sqrt{g_1^2+g_2^2}.\nu$; mais cette dernière mesure est par définition $\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}$.

Soit F un espace de Banach sur le corps $\mathbb{C}$; on dit qu'une fonction f à valeurs dans F est <u>intégrable</u> (resp. négligeable) pour la mesure complexe si elle est intégrable (resp. négligeable) pour la mesure positive $|\mu|$. On définit alors l'<u>intégrale</u> $\int f\,d\mu$ suivant le procédé général du n°5 : si $\mu = \mu_1+i\mu_2 = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$, on aura donc

$$\int f\,d\mu = \int f\,d\mu_1^+ - \int f\,d\mu_1^- + i\int f\,d\mu_2^+ - i\int f\,d\mu_2^- .$$

Etant donnée une mesure positive ν sur E , on dit qu'une mesure complexe $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ est <u>de base</u> si tout ensemble localement négligeable pour ν est localement négligeable pour μ . Il est clair alors que μ_1 et μ_2 sont des mesures réelles de base ν , et par suite, en vertu du th. de Lebesgue-Nikodym, la mesure $\mu = g.\nu$, où g est une fonction localement intégrable à valeurs complexes. La réciproque est évidente.

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> $\mu = g.\nu$ <u>une mesure complexe de base</u> ν . <u>Pour que</u> μ <u>soit bornée, il faut et il suffit que</u> g <u>soit localement presque partout égale à une fonction intégrable</u> g_1 ; <u>la norme de l'application linéaire</u> $f \to \int fg\, d\nu$ <u>de l'espace normé</u> $\mathcal{K}_C(E)$ <u>dans</u> $\mathbb{C}$ <u>est alors égale à</u> $\int |g_1|\, d\nu$.

En effet, si $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ est bornée, il en est de même de μ_1 et μ_2 , donc de $|\mu| = |g|.\nu$, et par suite (§ 1, cor. 1 de la prop. 11) g est localement presque partout égale à une fonction intégrable g_1 . Comme $\left|\int fg_1\, d\nu\right| \leqslant \|f\| \int |g_1|\, d\nu$, tout revient à prouver que la norme de $f \to \int fg_1 d\nu$ est <u>au moins égale</u> à $\int |g_1| d\nu$. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset E$ tel que $\int |g_1| \varphi_{\complement K}\, d\nu \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de g_1 à K soit continue et $\neq 0$. La fonction égale à $|g_1|/g_1$ dans K est donc continue et de valeur absolue égale à 1 ; en vertu du th. d'Urysohn, elle se prolonge en une fonction f de $\mathcal{K}_C(E)$ telle que $\|f\| = 1$, et on a évidemment $\left|\int g_1 f\, d\mu\right| \geqslant \int |g_1| d\mu - 2\varepsilon$, ce qui démontre la proposition.

<u>Exercices</u>.- 1) Soient F un espace de Banach, F' son dual fort. Etant donnée une mesure positive μ sur E , on dit qu'une mesure vectorielle m sur E , à valeurs dans F' , est <u>faiblement absolument continue</u> par rapport à μ si, pour tout $z \in F$, la mesure $f \to \langle z, m(f) \rangle$ est de base μ . Soit Φ l'ensemble des fonctions numériques essentiellement bornées (pour μ) et à support compact. Montrer que, si m est faiblement absolument continue par rapport à μ , m peut être prolongée d'une seule manière en une application linéaire $\overline{m}$ de Φ dans F' , telle que la restriction de $\overline{m}$ à l'ensemble des $f \in \Phi$ telles que $|f| \leqslant h$ (où $h \geqslant 0$ est dans Φ) soit continue pour la topologie induite sur cet ensemble par la topologie de $\mathcal{L}^1$, et pour la topologie

$\sigma(F',F)$ sur F' (remarquer que pour tout $z \in F$, il existe une fonction localement intégrable g_z telle que $\langle z, m(f)\rangle = \int g_z f \, d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$).

2) Soient F un espace de Banach, F' son dual fort. Soit m une mesure vectorielle sur E à valeurs dans F', faiblement absolument continue par rapport à μ, et qu'on suppose prolongée à l'ensemble Φ (exerc.1). On dit que m est <u>fortement absolument continue</u> si pour toute fonction $h \geqslant 0$ dans Φ, la restriction de m à l'ensemble des $f \in \Phi$ telles que $|f| \leqslant h$ est continue pour la topologie induite sur cet ensemble par celle de $\mathcal{L}^1$, et pour la topologie <u>forte</u> de F'. Il en est toujours ainsi lorsque m est majorée par une mesure positive de base μ.

Pour que m soit fortement absolument continue, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition suivante : pour tout ensemble compact $K \subset E$ et toute suite (A_n) d'ensembles intégrables contenus dans K, l'image par m de l'adhérence P dans $\mathcal{L}^1$ de l'ensemble des fonctions caractéristiques des ensembles de la phratrie engendrée par les A_n, doit être contenu dans un sous-espace de F' de type dénombrable (pour la topologie forte de F'). (Pour montrer que la condition est suffisante, raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe une suite (a_n) de points de F, de norme $\leqslant 1$, et une suite (A_n) d'ensembles intégrables contenus dans K tels que $\mu(A_n)$ tende vers 0 et que $\langle a_n, m(\varphi_{A_n})\rangle \geqslant \alpha > 0$ pour tout n. Remarquer que l'hypothèse permet d'extraire de (a_n) une suite partielle (a_{n_k}) telle que $\langle a_{n_k}, m(\varphi_A)\rangle$ tende vers une limite lorsque k croît indéfiniment, pour tout ensemble A tel que φ_A soit adhérente dans $\mathcal{L}^1$ à l'ensemble des fonctions caractéristiques des ensembles de la phratrie engendrée par les A_n ; conclure en raisonnant comme dans l'ex. 7 du § 2).

3) Soient F un espace de Banach, F' son dual fort, g une fonction à valeurs dans F', appartenant à l'ensemble $\Lambda^p_{F'}$ (§ 4, exerc.5) pour une valeur de p telle que $1 < p \leq +\infty$. Montrer que la mesure $f \longrightarrow \int g f \, d\mu$ est fortement absolument continue par rapport à μ.

4) Soient F l'espace de Banach $L^1(N, \mu_0)$ des séries absolument convergentes (μ_0 mesure discrète définie par la masse 1 en chaque point de N) ; soit $F' = L^\infty(N, \mu_0)$ son dual (espace des suites bornées). Soit E l'espace compact formé des points 0 et $1/n$ ($n \geqslant 1$) dans R, et soit μ la mesure sur E définie par la mesure 2^{-n} placée au point $1/n$ (pour tout $n \geqslant 1$). Soit g l'application de E dans F' telle que $g(0)=0$, $g(\frac{1}{n})$ étant égale à la suite $(\xi_{mn})_{m \in N}$ telle que $\xi_{mn}=0$ pour $m \neq n$ et $\xi_{nn}=2^n$. Montrer que g est faiblement intégrable, mais que la mesure vectorielle $f \rightarrow \int g f \, d\mu$ n'est pas fortement absolument continue par rapport à μ. En déduire que cette mesure vectorielle n'est majorée par aucune mesure positive sur E.

5) Soient F un espace de Banach, F' son dual fort, g une application localement faiblement intégrable de E dans F'. On suppose en outre que g est (fortement) mesurable. Dans ces conditions, montrer que, pour que la mesure vectorielle $f \rightarrow \int g f \, d\mu$ soit fortement absolument continue, il faut et il suffit que pour tout ensemble compact $K \subset E$, il existe une suite (g_n) de fonctions intégrables étagées telle que $M_1(g\varphi_K - g_n)$ tende vers 0 (cf. § 4, exerc.5). Montrer que cette condition est encore suffisante, mais n'est pas nécessaire, lorsqu'on ne suppose plus que g soit mesurable (cf. § 4, exerc.8).

6) Soient F un espace de Banach, F' son dual fort, F'' son bidual fort. Soit g une application localement faiblement intégrable de E dans F'' (pour la topologie $\sigma(F'', F')$).

a) Montrer que si g prend ses valeurs dans F , ainsi que $\int g f \, d\mu$ pour toute fonction f essentiellement bornée et à support compact (en d'autres termes, si g est localement faiblement intégrable pour la topologie $\sigma(F,F')$), la mesure vectorielle $f \rightarrow \int g f \, d\mu$ à valeurs dans F , est fortement absolument continue (appliquer le critère de l'exerc.2, en remarquant que dans F , tout sous-espace vectoriel fortement fermé est faiblement fermé).

b) On suppose que g prend ses valeurs dans F et est en outre mesurable (fortement). Montrer que si la mesure vectorielle $f \rightarrow \int g f \, d\mu$ est fortement absolument continue, les valeurs de $\int g f \, d\mu$ appartiennent à F pour toute fonction f essentiellement bornée et à support compact (utiliser l'exerc. 6)(*).

c) Montrer que si g est (fortement) mesurable, prend ses valeurs dans F et appartient à $\Lambda^p_{F''}$ (§4, exerc.5) pour un $p > 1$, les valeurs de $\int g f \, d\mu$ appartiennent à F pour toute fonction f essentiellement bornée et à support compact (cf. exerc. 3).

d) On suppose que, dans F , toute suite de Cauchy pour la topologie faible $\sigma(F,F')$ est faiblement convergente. Montrer que si g est (fortement) mesurable, prend ses valeurs dans F et appartient à $\Lambda^1_{F''}$ les valeurs de $\int g f \, d\mu$ appartiennent à F pour toute fonction f essentiellement bornée et à support compact (remarquer que g , sur un ensemble compact, est limite faible de fonctions étagées). Montrer par un exemple que la proposition ne s'étend pas au cas où on ne suppose plus que toute suite faible de Cauchy dans F soit faiblement convergente (cf. exerc. 4).

(*) En admettant l'hypothèse du continu, on peut donner un exemple où $f \rightarrow \int g f \, d\mu$ est fortement absolument continue, g non mesurable, et à valeurs dans F , et où $\int g f \, d\mu$ n'appartient pas à F .

7) Soit F un espace de Hilbert ayant une base orthonormale dénombrable, qu'on range en une suite double (e_{ij}). Soit μ la mesure de Lebesgue sur $E = [0,1]$. Les fonctions u_i à valeurs dans F étant définies comme dans l'exerc.6 du § 4, soit m_n la mesure vectorielle $f \to \sum_{i=1}^{n} \int u_i f \, d\mu$ sur E. Montrer que, dans l'espace normé des applications linéaires continues de $\mathscr{C}(E)$ dans F, les mesures m_n convergent uniformément dans toute partie bornée de $\mathscr{C}(E)$ vers une mesure vectorielle m, qui est fortement absolument continue par rapport à μ : de façon précise, montrer que pour toute partie mesurable A de E, on a $|m(A)|^2 \leqslant \mu(A)$. Montrer qu'il n'existe aucune positive mesure ν sur E telle que l'on ait $m(f) = \int g \, f \, d\nu$ pour $f \in \mathscr{C}(E)$, g étant faiblement intégrable pour ν (remarquer que la mesure ν peut toujours être supposée de base μ, et par suite qu'on peut se ramener au cas où $\nu = \mu$).

8) Soient F un espace de Banach, F' son dual fort, et soit (m_n) une suite de mesures vectorielles à valeurs dans F', fortement absolument continues par rapport à μ. On suppose que pour toute fonction f essentiellement bornée et à support compact, $m_n(f)$ converge fortement dans F' vers $m(f)$. Montrer que pour toute fonction $h \geqslant 0$ essentiellement bornée et à support compact, et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute fonction mesurable f telle que $|f| \leqslant h$ et $\mu(|f|) \leqslant \delta$, on ait, pour tout entier n, $|m_n(f)| \leqslant \varepsilon$ (raisonner comme dans l'exerc.7 du § 2). En déduire que m est une mesure vectorielle fortement absolument continue par rapport à μ.
