COTE : BKI 06-3.4

LIVRE VII
MESURES ET DISTRIBUTIONS
CHAPITRE III (ETAT 5)
PROLONGEMENT
D'UNE INTEGRALE DE RADON.
ESPACES L^P

Rédaction n° 134

Nombre de pages : 125

Nombre de feuilles : 124

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Intégration. Mesure et distributions
Chap. III. $\boxed{\text{Etat 5}}$
Prolongement d'une mesure de Radon
Espaces L^p

$\boxed{134}$

A 134

LIVRE VII

MESURES ET DISTRIBUTIONS

CHAPITRE III (Etat 5)

PROLONGEMENT D'UNE INTEGRALE DE RADON.

ESPACES L^p.

Dans les §§1 à de ce chapitre, E désigne un espace localement compact ; lorsqu'il est question de fonction (sans préciser l'ensemble où cette fonction est définie), il est sous-entendu qu'il s'agit d'une fonction définie dans E .

§1. Intégrale supérieure d'une fonction positive.

1. Intégrale d'une fonction positive semi-continue inférieurement.

Soit E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon positive sur E ; nous désignerons par $\mathcal{K}_+(E)$ (ou simplement $\mathcal{K}_+$) l'ensemble des fonctions numériques finies positives, continues et à support compact dans E ; on sait que μ est une fonction croissante dans l'ensemble ordonné réticulé $\mathcal{K}_+$.

PROPOSITION 1.- Soit H un ensemble de fonctions de $\mathcal{K}_+$, filtrant pour la relation $\leqslant$. Si l'enveloppe supérieure $f = \sup_{g \in H} g$ est une fonction de $\mathcal{K}_+$, on a

$$(1) \qquad \int f \, d\mu = \sup_{g \in H} \int g \, d\mu \, .$$

En effet, d'après le th. de Dini (Top.gén , chap.X, §5,th.1) le filtre des sections $\mathfrak{F}$ de H converge uniformément vers f dans toute partie compacte de E , et en particulier dans le support K de f . Mais comme $0 \leqslant g \leqslant f$ pour toute fonction $g \in H$, le support de toute fonction de H est contenu dans K ; comme μ est continue dans l'espace vectoriel $\mathcal{K}(E,K)$ des fonctions continues à support contenu dans K , pour la la topologie de la convergence uniforme dans K , on a $\mu(f)=\lim_{\mathfrak{F}} \mu(g)$; comme μ est croissante dans H , il résulte du th. de la limite monotone (Top.gén.,chap.IV, § 5,th.2) que l'on a aussi $\mu(f) = \sup_{g \in H} \mu(g)$, c'est-à-dire la relation (1).

Nous désignerons par $\mathcal{J}_+(E)$ (ou simplement $\mathcal{J}_+$) l'ensemble des fonctions numériques finies ou non, positives et semi-continues inférieurement dans E . Rappelons que la somme d'un nombre quelconque de fonctions de $\mathcal{J}_+$ appartient à $\mathcal{J}_+$, ainsi que le produit d'une fonction de $\mathcal{J}_+$ par tout nombre fini $\alpha > 0$; l'enveloppe supérieure d'une famille quelconque de fonctions de $\mathcal{J}_+$, et l'enveloppe inférieure d'une famille finie de fonctions de $\mathcal{J}_+$, appartiennent aussi à $\mathcal{J}_+$ (Top. gén., chap.IV, §6,prop.2 et th.4). Nous utiliserons en outre le lemme suivant :

Lemme 1.- Toute fonction $f \in \mathcal{J}_+$ est l'enveloppe supérieure de l'ensemble (filtrant) des fonctions $g \in \mathcal{K}_+$ telles que $g \leqslant f$.

En effet, pour tout $x \in E$ tel que $f(x) > 0$, et pour tout nombre réel fini a tel que $0 < a < f(x)$, il existe par hypothèse un voisinage V de x tel que $f(y) \geqslant a$ dans V ; d'autre part, il existe une fonction $g \in \mathcal{K}_+$, de support contenu dans V , égale à a au point x ; comme $0 \leqslant g \leqslant f$ et que $g(x) \geqslant a$, le lemme est démontré.

La prop.1 et le lemme 1 suggèrent la définition suivante, qui prolonge une intégrale de Radon positive μ à l'ensemble $\mathcal{J}_+$:

DÉFINITION 1.- Etant donnée une intégrale de Radon positive μ sur E , on appelle intégrale supérieure d'une fonction $f \in \mathcal{J}_+$ (par rapport à μ) le nombre positif (fini ou égal à $+\infty$)

$$\mu^*(f) = \sup_{g \in \mathcal{K}_+,\ g \leqslant f} \mu(g) .$$

La prop.1 montre en effet que pour toute fonction $f \in \mathcal{K}_+$, on a $\mu^*(f)=\mu(f)$, autrement dit, μ^* est un prolongement de μ à $\mathcal{J}_+$.

PROPOSITION 2.- Sur l'ensemble $\mathcal{J}_+$, la fonction μ^* est croissante.

La démonstration est immédiate à partir de la déf.1 .

La prop.1 se généralise comme suit :

THÉORÈME 1.- Soit H un ensemble de fonctions de $\mathcal{J}_+$, filtrant pour la relation $\leqslant$. Pour toute intégrale de Radon positive μ sur E, on a

$$(2) \qquad \mu^*(\sup_{g \in H} g) = \sup_{g \in H} \mu^*(g)$$

Posons $f = \sup_{g \in H}$; il est clair que $\mu^*(g) \leqslant \mu^*(f)$ pour toute fonction $g \in H$. D'après la déf.1, tout revient à montrer que, pour toute fonction $h \in \mathcal{K}_+$ telle que $h \leqslant f$, on a $\mu(h) \leqslant \sup_{g \in H} \mu^*(g)$. Or, pour toute fonction $g \in H$, soit Φ_g l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{K}_+$ telles que $\varphi \leqslant g$; posons $\Phi = \bigcup_{g \in H} \Phi_g$; l'ensemble Φ est filtrant puisque H est filtrant, et on a $f = \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi$. On peut alors écrire $h=\inf(h,f)=\inf(h, \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi) = \sup_{\varphi \in \Phi} (\inf(h,\varphi))$; comme $\inf(h,\varphi)$ appartient à $\mathcal{K}_+$, la prop.1 montre que $\mu(h)= \sup_{\varphi \in \Phi} \mu(\inf(h,\varphi))$; mais chaque $\varphi \in \Phi$ appartient à un ensemble Φ_g, donc $\mu(\inf(h,\varphi)) \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \mu^*(g) \leqslant \sup_{g \in H} \mu^*(g)$, d'où $\mu(h) \leqslant \sup_{g \in H} \mu^*(g)$.

THÉORÈME 2.- Si f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathcal{J}_+$, on a

$$(3) \qquad \mu^*(f_1+f_2) = \mu^*(f_1)+\mu^*(f_2) .$$

En effet, lorsque g_1 (resp. g_2) parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}_+$ telles que $g_1 \leqslant f_1$ (resp. $g_2 \leqslant f_2$), les fonctions g_1+g_2 forment un ensemble filtrant dont l'enveloppe supérieure est f_1+f_2. On a par suite

$$\mu^*(f_1+f_2)=\sup \mu(g_1+g_2)=\sup(\mu(g_1)+\mu(g_2))$$

(g_1, g_2) parcourant l'ensemble des couples de fonctions de $\mathcal{K}_+$ telles que $g_1 \leqslant f_1$ et $g_2 \leqslant f_2$; comme

$$\sup(\mu(g_1)+\mu(g_2))=\sup \mu(g_1)+\sup \mu(g_2)= \mu^*(f_1)+ \mu^*(f_2)$$

(Top.gén., chap.IV, § 5, cor.2 de la prop.12), le théorème est démontré.

COROLLAIRE.- Pour toute famille $(f_\iota)_{\iota \in I}$ de fonctions de $\mathcal{J}_+$, on a

$$(4) \qquad \mu^*(\sum_{\iota\in I} f_\iota) = \sum_{\iota\in I} \mu^*(f_\iota) .$$

En effet, pour toute partie finie J de I, on a, d'après le th.2, $\mu^*(\sum_{\iota\in J} f_\iota) = \sum_{\iota\in J} \mu^*(f_\iota)$; lorsque J parcourt l'ensemble des parties finies de I, les fonctions $g_J = \sum_{\iota\in J} f_\iota$ forment un ensemble filtrant pour $\leqslant$, de fonctions de $\mathcal{J}_+$, dont l'enveloppe supérieure est la fonction $\sum_{\iota\in I} f_\iota$; le corollaire résulte donc du th.1 .

PROPOSITION 3.- Pour tout nombre réel fini $a > 0$ et toute fonction $f \in \mathcal{J}_+$, on a

$$(5) \qquad \mu^*(af) = a\mu^*(f) .$$

La démonstration est immédiate, car si g parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}_+$ qui sont $\leqslant f$, ag parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}_+$ qui sont $\leqslant af$.

PROPOSITION 4.- Pour que $\mu^*(f)=0$ pour une fonction $f \in \mathcal{J}_+$, il faut et il suffit que f soit nulle dans le support de μ .

En effet, si $\mu^*(f)=0$, on a $\mu(g)=0$ pour toute fonction $g \in \mathcal{K}_+$ telle que $g \leqslant f$; il en résulte (chap.II, §2, prop.   ) que g est nulle dans le support S de μ ; comme f est l'enveloppe supérieure des fonctions $g \in \mathcal{K}_+$ telles que $g \leqslant f$, on a $f(x)=0$ dans S . Réciproquement, si $f(x)=0$ dans S, on a $g(x)=0$ dans S pour toute fonction $g \in \mathcal{K}_+$ telle que $g \leqslant f$, d'où (chap.II, §2, prop.   ) $\mu(g)=0$ et la définition de $\mu^*(f)$ montre alors que $\mu^*(f)=0$.

PROPOSITION 5.- Soit f une fonction de $\mathcal{I}_+$. L'application $\mu \to \mu^*(f)$ de l'ensemble $\mathcal{M}_+(E)$ des intégrales de Radon positives dans $\overline{R}$ est semi-continue inférieurement pour la topologie vague sur $\mathcal{M}_+(E)$.

En effet, cette application est l'enveloppe supérieure des fonctions $\mu \to \mu(g)$, où g parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}_+$ telles que $g \leqslant f$; et, par définition de la topologie vague, les fonctions $\mu \to \mu(g)$ sont continues dans $\mathcal{M}_+(E)$.

2. Mesure d'un ensemble ouvert.

Etant donné un ensemble ouvert $G \subset E$, sa fonction caractéristique φ_G (égale à 1 dans G , à 0 dans $\complement G$) est semi-continue inférieurement dans E (Top.gén., chap.IV, §6, cor. de la prop.1). On peut donc poser la définition suivante :

DEFINITION 2.- Etatn donnée une intégrale de Radon positive μ sur E , pour tout ensemble ouvert $G \subset E$, on appelle mesure extérieure de G et on note $\mu^*(G)$ ou $\mu^* G$ l'intégrale supérieure $\mu^*(\varphi_G)$.

La mesure extérieure d'un ensemble ouvert G est donc un nombre $\geqslant 0$, fini ou égal à $+\infty$. On a $\mu^*(\emptyset) = 0$.

PROPOSITION 6.- La mesure extérieure d'un ensemble ouvert relativement compact G est finie.

En effet, il existe alors une fonction $f \in \mathcal{K}_+$ telle que $\varphi_G \leqslant f$, d'où $\mu^*(G) = \mu^*(\varphi_G) \leqslant \mu^*(f) = \mu(f) < +\infty$.

La réciproque de cette proposition est inexacte (cf. prop.11).

PROPOSITION 7.- Si G_1 et G_2 sont deux ensembles ouverts tels que $G_1 \subset G_2$, on a $\mu^* G_1 \leqslant \mu^* G_2$.

En effet, la relation $G_1 \subset G_2$ équivaut à $\varphi_{G_1} \leqslant \varphi_{G_2}$.

PROPOSITION 8.- Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de parties ouvertes de E , filtrant pour la relation $\subset$; on a

(6) $$\mu^*(\bigcup_{G \in \mathfrak{G}} G) = \sup_{G \in \mathfrak{G}} \mu^*(G) .$$

En effet, les fonctions φ_G forment un ensemble filtrant (pour $\leqslant$) dans $\mathcal{I}_+$, et leur enveloppe supérieure est la fonction caractéristique de la réunion des $G \in \mathfrak{G}$; la prop. est donc conséquence du th. 1 .

PROPOSITION 9.- Soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque d'ensembles ouverts ; on a

(7) $$\mu^*(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota) \leqslant \sum_{\iota \in I} \mu^*(G_\iota)$$

En outre, si la relation $\iota \neq \varkappa$ entraîne $G_\iota \cap G_\varkappa = \emptyset$, on a

(8) $$\mu^*(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota) = \sum_{\iota \in I} \mu^*(G_\iota) .$$

En effet, si $G = \bigcup_{\iota \in I} G_\iota$, on a $\varphi_G = \sup_{\iota \in I} \varphi_{G_\iota} \leqslant \sum_{\iota \in I} \varphi_{G_\iota}$, et, lorsqu'en outre $\iota \neq \varkappa$ entraîne $G_\iota \cap G_\varkappa = \emptyset$, $\varphi_G = \sum_{\iota \in I} \varphi_{G_\iota}$; la proposition est donc conséquence du cor. du th. 2 .

PROPOSITION 10.- Le complémentaire du support S de μ est le plus grand ensemble ouvert de E dont la mesure extérieure soit nulle.

En effet, pour que $\mu^* G = 0$, il faut et il suffit d'après la prop. 4, que $G \cap S = \emptyset$.

PROPOSITION 11.- Pour que l'intégrale positive μ sur E soit bornée il faut et il suffit que $\mu^*(E)$ soit finie, et on a alors $\|\mu\| = \mu^*(E)$.

En effet, dire que μ est bornée signifie que lorsque f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}_+$ telles que $f \leqslant 1$, l'ensemble des $\mu(f)$ est majoré ; sa borne supérieure est alors égale à $\|\mu\|$ (chap. II, § 2, prop.); mais par définition cette borne supérieure n'est autre que $\mu^*(1) = \mu^*(E)$, d'où la proposition.

Exemple.- Prenons $E = \mathbb{R}$, et soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (chap. II, § 2, n°2) ; nous allons déterminer la mesure extérieure d'un intervalle ouvert $G =]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}_+$ telle que $f \leqslant \varphi_G$, on a , d'après le th. de la moyenne

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \leqslant b-a$, d'où $\mu^* G \leqslant b-a$. Si G est un intervalle <u>infini</u>, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{K}_+$ telle que $f \leqslant \varphi_G$ et qui prend la valeur 1 sur un intervalle de longueur arbitrairement grande ; on a donc dans ce cas $\mu^* G = +\infty$. Si G est <u>fini</u>, c'est-à-dire si $-\infty < a < b < +\infty$, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in \mathcal{K}_+$ telle que $f \leqslant \varphi_G$ et $f(x)=1$ pour $a+\varepsilon \leqslant x \leqslant b-\varepsilon$, d'où $\mu^* G \geqslant b-a-2\varepsilon$; comme ε est arbitraire, $\mu^* G = b-a$; autrement dit, <u>la mesure extérieure</u> (<u>relative à l'intégrale de Lebesgue</u>) <u>d'un intervalle ouvert de</u> $\mathbb{R}$ <u>est égale à sa longueur</u>. Ceci permet de calculer $\mu^* G$ pour un ensemble ouvert <u>quelconque</u> G dans $\mathbb{R}$; en effet, G est réunion d'un ensemble dénombrable (fini ou infini) d'intervalles ouverts $]a_k, b_k[$ $(k \in I)$ deux à deux sans point commun ; on a donc (prop.9) $\mu^* G = \sum_{k \in I} (b_k - a_k)$; en d'autres termes <u>la mesure extérieure d'un ensemble ouvert dans</u> $\mathbb{R}$ <u>est égale à la somme des longueurs de ses composantes connexes</u>. On notera en particulier que si G est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ tel que $\mu^* G = 0$, G est <u>vide</u>. En d'autres termes (prop. 10) le support de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est la droite $\mathbb{R}$ tout entière.

3. <u>Intégrale supérieure d'une fonction positive</u>.

Pour <u>toute</u> fonction numérique $f \geqslant 0$ (finie ou non) définie dans E , il existe des fonctions $h \in \mathcal{J}_+$ telles que $f \leqslant h$, ne serait-ce que la constante $+\infty$.

DEFINITION 3.- <u>Soit</u> μ <u>une intégrale de Radon positive sur</u> E ; <u>pour toute fonction numérique</u> $f \geqslant 0$ (<u>finie ou non</u>) <u>définie dans</u> E , on <u>appelle intégrale supérieure de</u> f (<u>par rapport à</u> μ) <u>le nombre positif</u> (fini ou égal à $+\infty$)

$$\mu^*(f) = \inf_{h \geqslant f, h \in \mathcal{J}_+} \mu^*(h) .$$

Il est clair que si $f \in \mathcal{J}_+$, le nombre $\mu^*(f)$ ainsi défini est égal au nombre désigné par la même notation ci-dessus (en raison de la prop.2), ce qui justifie la notation adoptée.

Au lieu de la notation $\mu^*(f)$, nous utiliserons aussi les notations $\int^* f\, d\mu$ et $\int^* f(x) d\mu(x)$.

PROPOSITION 12.- <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont deux fonctions numériques</u> $\geqslant 0$ <u>définies dans</u> E <u>et telles que</u> $f \leqslant g$, <u>on a</u> $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$.

PROPOSITION 13.- <u>Pour tout nombre réel fini</u> $a > 0$ <u>et toute fonction numérique</u> $f \geqslant 0$ <u>définie dans</u> E, <u>on a</u>

(9) $$\mu^*(af) = a\,\mu^*(f) .$$

Les démonstrations de ces deux propositions sont immédiates.

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions numériques</u> $\geqslant 0$; <u>si</u> $f(x) \leqslant a$ <u>dans</u> E, <u>on a</u> $\mu^*(fg) \leqslant a\,\mu^*(g)$.

On a en effet $fg \leqslant ag$.

PROPOSITION 14.- <u>Si</u> f_1 <u>et</u> f_2 <u>sont deux fonctions numériques</u> $\geqslant 0$ <u>définies dans</u> E, <u>on a</u>

(10) $$\mu^*(f_1+f_2) \leqslant \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2) .$$

En effet, pour toute fonction $h_1 \in \mathcal{J}_+$ telle que $h_1 \geqslant f_1$ et toute fonction $h_2 \in \mathcal{J}_+$ telle que $h_2 \geqslant f_2$, on a, en vertu du th.2

$$\mu^*(f_1+f_2) \leqslant \mu^*(h_1+h_2) = \mu^*(h_1) + \mu^*(h_2)$$

d'où

$$\mu^*(f_1+f_2) \leqslant \inf_{h_1 \geqslant f_1, h_1 \in \mathcal{J}_+} \mu^*(h_1) + \inf_{h_2 \geqslant f_2, h_2 \in \mathcal{J}_+} \mu^*(h_2)$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (10).

Nous verrons plus loin que si f_1 et f_2 sont deux fonctions positives quelconques, les deux membres de (10) ne sont pas nécessairement égaux (§ 3, exerc. 6c).

PROPOSITION 15.- <u>Pour toute suite croissante</u> (f_n) <u>de fonctions numériques</u> $\geqslant 0$ <u>définies dans</u> E , <u>on a</u>

$$(11) \qquad \mu^*(\sup_n f_n) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n) .$$

La relation (11) est évidente si le second membre est égal à $+\infty$. Dans le cas contraire, on a $\mu^*(f_n) < +\infty$ pour tout n ; étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe donc une fonction $h_n \in \mathcal{J}_+$ telle que $f_n \leqslant h_n$ et $\mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(h_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Si $g_n = \sup(h_1, h_2, \ldots h_n)$, on a $g_n \in \mathcal{J}_+$, et $g_n \geqslant f_n$; nous allons montrer qu'on a $\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon(1-\frac{1}{2^n})$. Raisonnons par récurrence sur n ; on a $g_{n+1} = \sup(g_n, h_{n+1})$, $g_n \geqslant f_n$ et $h_{n+1} \geqslant f_{n+1} \geqslant f_n$, d'où $\inf(g_n, h_{n+1}) \geqslant$ $\geqslant f_n$; comme on a $\inf(g_n, h_{n+1}) + \sup(g_n, h_{n+1}) = g_n + h_{n+1}$, il résulte du th.2 que $\mu^*(g_{n+1}) = \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(\inf(g_n, h_{n+1})) \leqslant$

$$\leqslant \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \varepsilon(1-\frac{1}{2^n}) =$$

$$= \mu^*(f_{n+1}) + \varepsilon(1-\frac{1}{2^{n+1}}) .$$ Cela étant, la suite (g_n) est croissante ; si g est son enveloppe supérieure, on a $g \in \mathcal{J}_+$ et $\sup_n f_n \leqslant g$; mais en vertu du th.1, on a $\mu^*(g) = \sup_n \mu^*(g_n) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n) + \varepsilon$, d'où

$$\mu^*(\sup_n f_n) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n) + \varepsilon \quad ;$$

comme ε est arbitraire, la proposition est démontrée.

On déduit aussitôt de cette proposition que si $\mathcal{F}$ est un ensemble filtrant (pour $\leqslant$) <u>dénombrable</u> de fonctions numériques $\geqslant 0$ définies dans E , on a

$$(12) \qquad \mu^*(\sup_{f \in \mathcal{F}} f) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} \mu^*(f) .$$

Il existe en effet en vertu de l'hypothèse, une suite croissante (f_n) de fonctions de $\mathcal{F}$, ayant même enveloppe supérieure que $\mathcal{F}$. Par contre, nous verrons plus tard que la relation (12) est <u>inexacte</u> lorsque $\mathcal{F}$ est un ensemble filtrant <u>non dénombrable</u> de fonctions $\geqslant 0$ quelconques (§ 3, remarque suivant la prop.7) .

COROLLAIRE 1.- Pour toute suite (f_n) de fonctions numériques $\geqslant 0$ définies dans E , on a

(13) $$\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f_n) .$$

Il suffit d'appliquer l'inégalité (11) à la suite des fonctions $g_n = \sum_{p=1}^{n} f_p$, en tenant compte de ce que, d'après (10), on a $\mu^*(g_n) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \mu^*(f_p)$.

COROLLAIRE 2 (lemme de Fatou).- Pour toute suite (f_n) de fonctions numériques $\geqslant 0$, on a

(14) $$\mu^*(\lim_{n\to\infty}.\inf\ f_n) \leqslant \lim_{n\to\infty}.\inf\ \mu^*(f_n) .$$

En effet, pour tout n , posons $g_n = \inf_{p\geqslant 0} f_{n+p}$; la suite (g_n) est croissante, et on a $\lim_{n\to\infty}.\inf\ f_n = \sup_n g_n$ d'où, en vertu de (11) $\mu^*(\lim_{n\to\infty}.\inf\ f_n) \leqslant \sup_n \mu^*(g_n)$; mais comme $g_n \leqslant f_{n+p}$ pour $p \geqslant 0$, on a $\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_{n+p})$, d'où $\mu^*(g_n) \leqslant \inf_{p\geqslant 0} \mu^*(f_{n+p})$, et finalement $\mu^*(\lim_{n\to\infty}.\inf\ f_n) \leqslant \sup_n(\inf_{p\geqslant 0} \mu^*(f_{n+p})) = \lim_{n\to\infty}.\inf\ \mu^*(f_n)$.

PROPOSITION 16.- Soient μ et ν deux intégrales de Radon positives sur E ; on a

(15) $$(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^* .$$

Posons $\lambda = \mu + \nu$, et montrons d'abord que pour toute fonction $f \in \mathcal{I}_+$, on a $\lambda^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f)$. Par définition, on a $\lambda^*(f) = \sup_{g\in\mathcal{K}_+, g\leqslant f} (\mu(g) + \nu(g)) \leqslant \mu^*(f) + \nu^*(f)$; d'autre part, pour tout couple de nombres $a > 0$, $b > 0$ tels que $a < \mu^*(f)$, $b < \nu^*(f)$, il existe deux fonctions g_1, g_2 de $\mathcal{K}_+$ telles que $g_1 \leqslant f$, $g_2 \leqslant f$ et $\mu(g_1) \geqslant a$, $\mu(g_2) \geqslant b$; a fortiori, si $g = \sup(g_1, g_2)$, on a $g \in \mathcal{K}_+$, $g \leqslant f$ et $\mu(g) \geqslant a$, $\mu(g) \geqslant b$, d'où $\lambda(g) \geqslant a+b$, ce qui prouve que $\lambda^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f)$. Montrons maintenant que cette égalité est vraie pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$. Par définition on a $\lambda^*(f) = \inf_{h\in\mathcal{J}_+, h\geqslant f} \lambda^*(h) = \inf_{h\in\mathcal{J}_+, h\geqslant f} (\mu^*(h) + \nu^*(h))$

d'après ce qui précède, d'où $\lambda^*(f) \geqslant \mu^*(f) + \nu^*(f)$. Si l'un des nombres $\mu^*(f)$, $\nu^*(f)$ est infini la proposition est démontrée. Dans le cas contraire, pour tout couple de nombres réels finis $c > \mu^*(f)$, $d > \nu^*(f)$, il existe deux fonctions h_1, h_2 de $\mathcal{I}_+$ telles que $h_1 \geqslant f$, $h_2 \geqslant f$ et $\mu^*(h_1) \leqslant c$, $\nu^*(h_2) \leqslant d$; alors, si $h = \inf(h_1, h_2)$, on a $h \in \mathcal{I}_+$, $h \geqslant f$ et $\mu^*(h) \leqslant c$, $\nu^*(h) \leqslant d$, d'où $\lambda^*(h) = \mu^*(h) + \nu^*(h) \leqslant c+d$, ce qui prouve que $\lambda^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f)$.

On voit aussitôt qu'on a aussi $(a\mu)^* = a\,\mu^*$ pour tout $a > 0$.

COROLLAIRE.- <u>Si μ et ν sont deux intégrales de Radon positives sur E telles que $\mu \leqslant \nu$, on a $\mu^* \leqslant \nu^*$.</u>

En effet, on a $\nu = \mu + (\nu - \mu)$, où $\nu - \mu$ est positive, d'où $\nu^* = \mu^* + (\nu - \mu)^*$.

4. <u>Mesure extérieure d'un ensemble quelconque.</u>

DÉFINITION 3.- <u>Etant donnée une intégrale de Radon positive μ sur E, pour toute partie A de E, on appelle mesure extérieure de A (pour l'intégrale μ) et on note $\mu^*(A)$ ou μ^*A l'intégrale supérieure $\mu^*(\varphi_A)$.</u>

La mesure extérieure d'un ensemble est donc un nombre $\geqslant 0$, fini ou infini, qui coïncide pour les ensembles ouverts avec la mesure extérieure définie par la déf.2 .

PROPOSITION 17.- <u>Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, on a $\mu^*A \leqslant \mu^*B$.</u>

PROPOSITION 18.- <u>Si (A_n) est une suite croissante de parties de E, on a</u> $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sup_n \mu^* A_n$.

PROPOSITION 19.- <u>Pour toute suite (A_n) de parties de E, on a</u>
$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$.

Ces propositions sont les traductions des prop.12 et 15 et du cor. de la prop.15 pour les fonctions caractéristiques d'ensembles.

PROPOSITION 20.- <u>Pour toute partie</u> A <u>de</u> E , $\mu^* A$ <u>est la borne inférieure des mesures extérieures des ensembles ouverts contenant</u> A .

La proposition est évidente si $\mu^* A = +\infty$. Dans le cas contraire, pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, il existe une fonction $f \in \mathcal{J}_+$ telle que $\varphi_A \leqslant f$ et $\mu^* A \leqslant \mu^*(f) \leqslant \mu^* A + \varepsilon$. Soit G l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) > 1-\varepsilon$. Comme f est semi-continue inférieurement, G est <u>ouvert</u> (<u>Top.gén</u>.,chap.IV, § 6,prop.1) et contient A ; on a d'autre part $f \geqslant (1-\varepsilon)\varphi_G$ d'où $\mu^* G \leqslant \frac{\mu^*(f)}{1-\varepsilon} \leqslant \frac{\mu^* A+\varepsilon}{1-\varepsilon}$; comme ε est arbitraire, on voit que $\mu^* G$ diffère d'aussi peu qu'on veut de $\mu^* A$, d'où la proposition.

<u>Exemple</u>.- Lorsque $E = \mathbb{R}$ et que μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, la mesure extérieure d'un intervalle <u>quelconque</u> I d'extrémités a,b $(-\infty \leqslant a < b < +\infty)$ est égale à la <u>longueur</u> b-a de cet intervalle : en effet, tout ensemble ouvert contenant I contient l'intervalle ouvert $]a,b[$, donc $\mu^* I \geqslant b-a$; si $b-a = +\infty$, on a donc $\mu^* I = b-a$; sinon, pour tout $\varepsilon > 0$, I est contenu dans l'intervalle ouvert $]a-\varepsilon\ ,\ b+\varepsilon[$, donc $\mu^* I \leqslant b-a+2\varepsilon$, ce qui prouve que $\mu^* I = b-a$.

COROLLAIRE.- <u>Tout ensemble relativement compact dans</u> E <u>est de mesure extérieure finie</u>.

En effet, un tel ensemble est contenu dans un ensemble <u>ouvert</u> relativement compact, dont la mesure extérieure est finie (prop. 6) .

§ 2. Les semi-normes N_p
Fonctions et ensembles négligeables.

1. Les inégalités de Hölder et de Minkowski.

Soient E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon positive sur E . Dans l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions numériques (finies ou non) positives, définies dans E , la fonction $\mu^*(f)$ est positive, positivement homogène (§ 1, prop. 13), croissante (§ 1, prop. 2) et convexe (§ 1, prop. 14). Par suite (chap. I, § 3), pour tout nombre réel $p > 1$, on a d'une part l'inégalité de Hölder.

$$\mu^*(fg) \leq (\mu^*(f^p))^{1/p}(\mu^*(g^{p'}))^{1/p'} \tag{1}$$

pour tout couple de fonctions numériques positives f,g définies dans E et telles que le produit fg ait un sens, p' étant tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; d'autre part, l'inégalité de Minkowski

$$(\mu^*((f+g)^p))^{1/p} \leq (\mu^*(f^p))^{1/p} + (\mu^*(g^p))^{1/p} \tag{2}$$

pour tout couple de fonctions numériques positives f,g définies dans E

Il résulte de la démonstration de l'inégalité de Hölder que cette inégalité est encore valable lorsque le produit $f(x)g(x)$ n'est pas défini pour certains $x \in E$, où l'un des facteurs prend la valeur 0 et l'autre la valeur $+\infty$; il suffit de convenir de remplacer la fonction fg par la fonction égale à $f(x)g(x)$ aux points où ce nombre est défini, et à 0 partout ailleurs.

Nous aurons encore à utiliser l'inégalité élémentaire suivante : si $p \geq 1$, quels que soient les nombres $a \geq 0$, $b \geq 0$, on a

$$a^p + b^p \leq (a+b)^p \tag{3}$$

En effet, l'inégalité est évidente si $a=b=0$; si $a+b > 0$, elle s'écrit $\left(\frac{a}{a+b}\right)^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \leq 1$, et résulte de ce que

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^p \leq \frac{a}{a+b} \quad , \quad \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \leq \frac{b}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1 \ .$$

2. Les semi-normes $N_p(f)$.

Dans tout ce qui suit, F désignera un espace vectoriel normé complet (espace de Banach) sur le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$; la norme d'un élément $x \in F$ se notera $|x|$. Etant donnée une application f d'un ensemble E dans F , on désignera par $|f|$ l'application $x \to |f(x)|$ de E dans $\mathbb{R}_+$.

DÉFINITION 1.- Soit E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon quelconque (resp. réelle) sur E . Pour toute application f de E dans un espace de Banach complexe (resp. réel) F , et tout nombre p tel que $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $N_p(f, \mu)$, ou simplement par $N_p(f)$, le nombre positif (fini ou égal à $+\infty$) $\left(\int^* |f|^p d|\mu|\right)^{1/p}$.

D'après cette définition, on a donc $N_p(f, \mu) = N_p(f, |\mu|)$ pour toute intégrale de Radon μ sur E .

PROPOSITION 1.- Si f et g sont deux applications de E dans F , et a un scalaire quelconque, on a

(4) $$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$$

(5) $$N_p(a f) = |a| \, N_p(f).$$

En effet, la relation (5) découle aussitôt de la définition 1 et du fait que $|\mu|^*$ est positivement homogène ; d'autre part, comme $|f+g| \leq |f| + |g|$, l'inégalité (4) résulte de l'inégalité de Minkowski (2) et du fait que $|\mu|^*$ est croissante.

Nous désignerons par la notation $\mathcal{F}^p_F(E, \mu)$, ou simplement $\mathcal{F}^p_F(E)$ ou même $\mathcal{F}^p_F$ l'ensemble des applications f de E dans F telles que $N_p(f) < +\infty$. La prop.1 entraîne aussitôt la conséquence suivante :

PROPOSITION 2.- Si F est un espace de Banach complexe (resp. réel), μ une intégrale de Radon quelconque (resp. réelle) sur E , l'ensemble $\mathcal{F}_F^p(E,\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), et $N_p(f)$ est une semi-norme sur cet espace.

Nous étendrons la notation précédente au cas des fonctions numériques, finies ou non, définies dans E , en posant encore $N_p(f) = (\int^* |f|^p d|\mu|)^{1/p}$ pour une telle fonction f . Avec cette notation, on a le théorème suivant :

THEOREME 1 (théorème de convexité dénombrable).- Soit (f_n) une suite de fonctions $\geqslant 0$ (finies ou non) définies dans E . Pour $1 \leqslant p < +\infty$ on a

$$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) \quad . \tag{6}$$

Posons en effet $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$; f est l'enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, d'où, par la définition précédente et la prop.15 du § 1, il suit que

$$N_p(f) \leqslant \sup_n N_p(g_n)$$

Mais d'autre part, on a $N_p(g_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} N_p(f_k)$ d'après l'inégalité de Minkowski, d'où l'inégalité (6) .

3. Fonctions négligeables.

DEFINITION 2.- Soit E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon sur E . On dit qu'une fonction numérique f (finie ou non) définie dans E est négligeable pour l'intégrale μ (ou est μ-négligeable) si $N_1(f) = \int^* |f|\, d|\mu| = 0$. On dit qu'une application f de E dans un espace de Banach F est négligeable (pour μ) si $|f|$ est négligeable.

Les notions de fonction négligeable sont donc les mêmes pour les intégrales de Radon μ et $|\mu|$.

PROPOSITION 3.- Si f est une fonction négligeable $\geqslant 0$, toute fonction numérique g telle que $|g| \leqslant f$ est négligeable.

En effet, on a $0 \leqslant N_1(g) \leqslant N_1(f) = 0$.

PROPOSITION 4.- Si f et g sont deux fonctions négligeables $\geqslant 0$, $f+g$ et αf $(\alpha > 0)$ sont négligeables.

En effet $N_1(f+g) \leqslant N_1(f)+N_1(g)=0$, et $N_1(\alpha f)=\alpha N_1(f)=0$.

COROLLAIRE 1.- Pour qu'une fonction numérique f soit négligeable il faut et il suffit que f^+ et f^- le soient.

En effet, on a $f^+ \leqslant |f|$, $f^- \leqslant |f|$ et $|f| = f^+ + f^-$.

COROLLAIRE 2.- L'ensemble des fonctions négligeables prenant leurs valeurs dans un espace de Banach F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}^1_F$.

On désignera ce sous-espace par la notation $\mathcal{N}_F(E, \ )$, ou simplement $\mathcal{N}_F(E)$, ou même $\mathcal{N}_F$.

PROPOSITION 5.- La somme d'une suite (f_n) de fonctions négligeables $\geqslant 0$ est négligeable.

C'est une conséquence immédiate du th. de convexité dénombrable.

COROLLAIRE 1.- L'enveloppe supérieure d'une suite (f_n) de fonctions négligeables $\geqslant 0$ est négligeable.

En effet, on a $\sup\limits_n f_n \leqslant \sum\limits_n f_n$.

COROLLAIRE 2.- Si (f_n) est une suite simplement convergente de fonctions négligeables à valeurs dans un espace de Banach F (resp. dans $\overline{R}$) la limite f de cette suite est négligeable.

En effet, $|f|$ est limite de la suite $(|f_n|)$, et comme $|f| \leqslant \sup\limits_n |f_n|$, le corollaire 1 montre que f est négligeable.

On a vu (§ 1,prop.4) que pour qu'une fonction $f \geqslant 0$, semi-continue inférieurement dans E , soit négligeable, il faut et il suffit que f soit nulle dans le support de μ . On en déduit que :

18

PROPOSITION 6.- Pour qu'une application continue f de E dans un espace de Banach F (resp. dans $\overline{\mathbb{R}}$) soit négligeable, il faut et il suffit qu'elle soit nulle dans le support de μ.

En effet, $|f|$ est continue et $\geqslant 0$ dans E.

4. Ensembles négligeables.

DÉFINITION 3.- Soit E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon sur E. On dit qu'une partie A de E est négligeable pour l'intégrale μ (ou est μ-négligeable) si la mesure extérieure de A pour l'intégrale $|\mu|$ est nulle.

Il revient au même de dire que la fonction caractéristique φ_A est μ-négligeable.

PROPOSITION 7.- Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable.

En effet, si N est négligeable et $M \subset N$, on a $\mu^* M \leqslant \mu^* N = 0$.

PROPOSITION 8.- Toute réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

La proposition résulte aussitôt de la prop. 19 du §1.

Exemple.- Soit μ l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Tout ensemble $\{x_0\}$ réduit à un point est négligeable, car l'ensemble ouvert $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ a une mesure extérieure arbitrairement petite 2ε. Il en résulte que toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeable par rapport à la mesure de Lebesgue. La réciproque de cette proposition est inexacte (exerc. 1).

2

5. Propriétés vraies presque partout.

Soit E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon sur E. Si $\overline{P}\{x\}$ est une propriété contenant un seul argument libre $x \in E$, la propriété " $\overline{P}\{x\}$ presque partout (par rapport à μ)" sera par définition synonyme de la propriété "l'ensemble des $x \in E$ tels que (non $\underline{P}\{x\}$) est négligeable (par rapport à μ)".

THEOREME 2.- Pour qu'une fonction f, à valeurs dans un espace de Banach F (resp. dans $\overline{R}$) soit négligeable, il faut et il suffit qu'elle soit nulle presque partout.

On peut se borner à examiner le cas d'une fonction numérique $f \geqslant 0$ (finie ou non).

La condition est nécessaire. En effet, supposons f négligeable et soit N l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \neq 0$; on a $\varphi_N \leq \sup_n (nf)$ donc φ_N est négligeable (cor.1 de la prop.5).

La condition est suffisante. D'après la prop.3, il suffit de montrer qu'une fonction f égale à $+\infty$ aux points d'un ensemble négligeable N, à 0 aux points de $\complement N$, est négligeable. Or, on a $f = \sup_n n\varphi_N$, donc la proposition résulte encore du cor.1 de la prop.5 .

COROLLAIRE 1.- Si f est une fonction négligeable à valeurs dans F g une fonction numérique finie quelconque, gf est négligeable.

COROLLAIRE 2.- Soit u une application linéaire de F dans un espace de Banach G . Si f est une fonction négligeable à valeurs dans F , $u \circ f$ est négligeable.

COROLLAIRE 3.- Soit p un nombre tel que $1 \leq p < +\infty$. Pour que deux fonctions f, g à valeurs dans un espace de Banach F soient égales presque partout il faut et il suffit que $N_p(f-g)=0$.

En effet, cette relation signifie que $|f-g|^p$ est nulle presque partout, donc que $f-g$ est nulle presque partout.

On notera que toutes les relations $N_p(f)=0$ ($1 \leq p < +\infty$) sont équivalentes.

PROPOSITION 9.- Si f et g sont deux fonctions $\geqslant 0$ définies dans E et égales presque partout, on a $N_p(f) = N_p(g)$.

En effet, soit N l'ensemble négligeable des points x où $f(x) \neq g(x)$. Les fonctions $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$ étant égales sauf aux points de N, il suffit de démontrer la proposition lorsque $f \leqslant g$. Soit h la fonction égale à $+\infty$ aux points de N, à 0 dans $\complement N$; on a $f \leqslant g \leqslant f+h$, et $N_p(f) \leqslant N_p(g) \leqslant N_p(f+h) \leqslant N_p(f)+N_p(h)=N_p(f)$, d'où la proposition.

PROPOSITION 10.- <u>Si</u> f <u>est une fonction</u> $\geqslant 0$ <u>définie dans</u> E <u>et d'intégrale supérieure finie</u> (par rapport à $|\mu|$), f <u>est finie presque partout.</u>

En effet, soit N l'ensemble des points $x \in E$ où $f(x)=+\infty$; pour tout entier n, on a $n\varphi_N \leqslant f$, d'où $n.|\mu|^*(N) \leqslant |\mu|^*(f)$; comme n est arbitrairement grand, on a $|\mu|^*(N) = 0$.

THEOREME 3.- <u>Soit</u> (f_n) <u>une suite de fonctions à valeurs dans un espace de Banach</u> F, <u>telle que</u> $\sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) < +\infty$ (avec $1 \leqslant p < +\infty$). <u>Dans ces conditions, la série de terme général</u> $f_n(x)$ <u>est presque absolument convergente. En outre, si on pose</u> $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ <u>aux points où la série converge, et</u> $f_n(x)=0$ <u>ailleurs, on a</u>

$$N_p(f) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n). \tag{7}$$

Considérons en effet la fonction positive (finie ou non) $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. D'après le th. de convexité dénombrable, on a $N_p(g) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(|f_n|) < +\infty$, donc (prop.10), $g(x)$ est finie presque partout, ce qui signifie que la série de terme général $f_n(x)$ est presque partout absolument convergente. Comme F est complet, cette série est presque partout convergente, et on a, pour tout $x \in E$,
$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = g(x)$, d'où $N_p(f) \leqslant N_p(g) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n)$.

<u>Exercices</u>.- 1) Montrer que, dans R, l'ensemble triadique de Cantor (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, §2,n°5) est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

2) Soient μ et ν deux intégrales de Radon sur E .

a) Montrer que si $|\mu| \leqslant |\nu|$, tout ensemble ν-négligeable est aussi μ-négligeable.

b) Montrer que tout ensemble qui est à la fois μ-négligeable et ν-négligeable, est aussi $(\mu + \nu)$-négligeable.

§ 3. Espaces L^p et fonctions intégrables.

1. Classes de fonctions équivalentes.

Soient E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon quelconque (resp. réelle) sur E , F un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ (resp. sur $\mathbb{R}$) ; nous désignerons par $\mathcal{F}_F(E)$, ou simplement $\mathcal{F}_F$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) de toutes les applications de E dans F . On a vu (§ 2,cor.2 de la prop.4) que l'ensemble des fonctions μ-négligeables à valeurs dans F est un sous-espace vectoriel $\mathcal{N}_F$ de l'espace $\mathcal{F}_F$. Nous désignerons par $\Phi_F(E, \mu)$, ou simplement $\Phi_F(E)$, ou même Φ_F, l'<u>espace vectoriel quotient</u> $\mathcal{F}_F(E) / \mathcal{N}_F(E, \mu)$, par $f \to \tilde{f}$ l'<u>application canonique</u> de $\mathcal{F}_F$ sur Φ_F ; nous dirons que $\tilde{f}$ est la <u>classe</u> de la fonction f (par rapport à μ) : c'est donc (§ 2,th.2) l'ensemble des fonctions <u>égales presque partout</u> à f (par rapport à μ). On notera que $\mathcal{N}_F(E, \mu)$ (et par suite $\Phi_F(E, \mu)$) dépend de μ ; toutefois $\mathcal{N}_F(E, \mu)$ est le même pour deux intégrales de Radon μ , ν telles que $|\mu| = |\nu|$; en particulier, $\Phi_F(E, \mu)$ est défini même lorsque μ est une intégrale de Radon <u>complexe</u> et F un espace de Banach <u>réel</u> ; il suffit en effet de remarquer qu'il est identique à l'espace vectoriel <u>réel</u> $\Phi_F(E, |\mu|)$.

Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{F}_F$, $\tilde{f} + \tilde{g}$ est donc la classe de la fonction $f+g$, $a\tilde{f}$ (a scalaire) la classe de la fonction af. Pour tout nombre p tel que $1 \leqslant p < +\infty$, on a vu (§ 2,prop.9) que $N_p(g) = N_p(f)$ pour toute fonction g appartenant à la classe $\tilde{f}$;

la valeur commune des nombres $N_p(f)$ pour toutes les fonctions de la classe f se notera $N_p(\tilde{f})$. D'après la prop.1 du § 2, on a donc

(1) $$N_p(\tilde{f}+\tilde{g}) \leqslant N_p(\tilde{f})+N_p(\tilde{g})$$

(2) $$N_p(\alpha\tilde{f}) = |\alpha|\, N_p(\tilde{f})$$

pour tout scalaire α et tout couple de classes $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ de Φ_F.

Lorsque $F=\mathbb{C}$ ou $F=\mathbb{R}$, on a vu (§ 2,cor.1 du th.2) que $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$) est un <u>idéal</u> de l'algèbre $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$) ; $\Phi_{\mathbb{C}}$ (resp. $\Phi_{\mathbb{R}}$) est donc muni d'une structure d'<u>algèbre</u> sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), le produit $\tilde{f}\tilde{g}$ de deux classes quelconques étant la classe à laquelle appartient la fonction fg.

Enfin, si $F=\mathbb{R}$, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^E$ est un <u>espace de Riesz</u>, et $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ un <u>sous-espace de Riesz</u> tel que les relations $f\in\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$, $|g|\leqslant|f|$ entraînent $g\in\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ (§ 2,prop.3) ; on peut donc définir sur l'espace quotient $\Phi_{\mathbb{R}}$ une structure d'<u>espace de Riesz</u>, une classe $\tilde{f}$ étant <u>positive</u> lorsqu'elle contient une fonction $f\geqslant 0$; toutes les fonctions de la classe $\tilde{f}$ sont alors <u>presque partout</u> $\geqslant 0$. Pour tout élément $\tilde{f}$ de $\Phi_{\mathbb{R}}$, $(\tilde{f})^+$ est la classe des fonctions f^+, où f parcourt la classe $\tilde{f}$. Si F est un espace de Banach quelconque, pour toutes les fonctions f d'une même classe $\tilde{f}$, les fonctions numériques $|f|$ appartiennent à une même classe qu'on note $|\tilde{f}|$; dans l'espace de Riesz $\Phi_{\mathbb{R}}$, on a $|\tilde{f}+\tilde{g}| \leqslant |\tilde{f}|+|\tilde{g}|$.

2. <u>Définition des espaces</u> L^p_F.

On a vu (§ 2,prop.2) que l'ensemble $\mathcal{F}^p_F$ des fonctions f à valeurs dans F, telles que $N_p(f)<+\infty$, est un <u>sous-espace vectoriel</u> de $\mathcal{F}_F$, sur lequel N_p est une <u>semi-norme</u> ; il est clair qu'on a $\mathcal{N}_F\subset\mathcal{F}^p_F$. Comme $\mathcal{N}_F$ est défini par la relation $N_p(f)=0$, on voit que sur l'espace quotient $\Phi^p_F = \mathcal{F}^p_F / \mathcal{N}_F \subset \Phi_F$, la fonction $N_p(\tilde{f})$ est une **norme**, qu'on notera encore $\|\tilde{f}\|_p$.

PROPOSITION 1.- L'espace normé Φ^p_F est complet.

Il suffit de prouver que toute série absolument convergente dans Φ^p_F est convergente (Esp.vect.top.,chap.III, §) ; en d'autres termes, il suffit de montrer que, si (f_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{F}^p_F$, telle que $\sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) < +\infty$, il existe une fonction $f \in \mathcal{F}^p_F$ telle que $\lim_{n\to\infty} N_p(f - \sum_{k=1}^{n} f_k) = 0$. Or, l'hypothèse montre, en vertu du th.3 du §2, qu'il existe un ensemble négligeable N tel que la série de terme général $f_n(x)$ soit absolument convergente dans $\complement N$; en outre, si on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour $x \notin N$ et $f(x)=0$ pour $x \in N$, on a $N_p(f) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) < +\infty$, ce qui prouve que $f \in \mathcal{F}^p_F$. Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier m tel que $\sum_{n=m+1}^{\infty} N_p(f_n) \leqslant \varepsilon$; en remplaçant la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ par son reste $\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$, le raisonnement précédent montre que cette dernière série est presque partout absolument convergente vers $f(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$, et qu'on a $N_p(f - \sum_{k=1}^{m} f_k) \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} N_p(f_n) \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

DÉFINITION 1.- Etant donné un espace localement compact E et un espace de Banach F , on désigne par $\Lambda_F(E)$ (ou Λ_F) le sous-espace de Φ_F (contenu dans tous les Φ^p_F) formé des classes des fonctions continues à support compact. On désigne par $L^p_F(E,\mu)$ (ou $L^p_F(E)$, ou même L^p_F) l'adhérence, dans l'espace normé complet Φ^p_F , du sous-espace vectoriel Λ_F . On désigne par $\mathcal{L}^p_F(E,\mu)$ (ou $\mathcal{L}^p_F(E)$, ou $\mathcal{L}^p_F$) l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}^p_F$ dont la classe appartient à L^p_F .

Il est clair que $\mathcal{L}^p_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}^p_F$, contenant l'espace $\mathcal{K}_F$ des fonctions continues à support compact, et que toute fonction égale presque partout à une fonction de $\mathcal{L}^p_F$

appartient aussi à $\mathcal{L}^p_F$. En outre, la déf.1 se transforme aussitôt dans le critère suivant :

PROPOSITION 2.- <u>Pour qu'une fonction</u> f <u>à valeurs dans</u> F <u>appartienne à</u> $\mathcal{L}^p_F$, <u>il faut et il suffit que, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une fonction</u> g <u>continue et à support compact, telle que</u> $N_p(f-g) \leq \varepsilon$.

COROLLAIRE 1.- <u>Si deux intégrales de Radon</u> μ , ν <u>sur</u> E <u>sont telles que</u> $|\nu| \leqslant |\mu|$, <u>on a</u> $\mathcal{L}^p_F(E, \mu) \subset \mathcal{L}^p_F(E, \nu)$.

En effet, d'après la prop.2, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p_F(E, \mu)$, il existe $g \in \mathcal{K}_F$ telle que $\int^* |f-g|^p d|\mu| \leq \varepsilon^p$; a fortiori on aura $\int^* |f-g|^p d|\nu| \leq \varepsilon^p$, d'où le corollaire.

En particulier, si $|\mu| = |\nu|$, on a $\mathcal{L}^p_F(E, \mu) = \mathcal{L}^p_F(E, \nu)$.

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> μ <u>est une intégrale de Radon complexe,</u> μ_1 <u>et</u> μ_2 <u>ses parties réelle et imaginaire, toute fonction appartenant à</u> $\mathcal{L}^p_F(E, \mu)$ <u>appartient aussi à</u> $\mathcal{L}^p_F(E, \mu_1)$ <u>et à</u> $\mathcal{L}^p_F(E, \mu_2)$.

De même, si μ est une intégrale de Radon réelle, toute fonction appartenant à $\mathcal{L}^p_F(E, \mu)$ appartient aussi à $\mathcal{L}^p_F(E, \mu^+)$ et $\mathcal{L}^p_F(E, \mu^-)$.

Nous démontrerons plus tard (chap.IV) que si une fonction appartient à la fois à $\mathcal{L}^p_F(E, \mu)$ et $\mathcal{L}^p_F(E, \nu)$, où μ et ν sont deux inttégrales de Radon quelconques, f appartient à $\mathcal{L}^p_F(E, \mu + \nu)$.

On étend la définition de $\mathcal{L}^p_F$ au cas où F est la <u>droite achevée</u> $\overline{R}$ (qui n'est plus un espace vectoriel) : l'ensemble $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$ est par définition l'ensemble des fonctions numériques f (<u>finies ou non</u>) telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g de $\mathcal{K}_R$ (donc <u>finie</u>) telle que $N_p(f-g) \leq \varepsilon$. De cette définition résulte immédiatement (§2,prop.10) que f-g , et par suite f , est <u>finie presque partout</u> ;

si f_1 est une fonction finie égale à f en tous les points où f est finie, on a donc $N_p(f_1-g)\leq\varepsilon$, ce qui montre que $f_1\in\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$; la réciproque est immédiate, et on voit que les fonctions de $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$ sont les fonctions numériques (finies ou non) *égales presque partout à une fonction de* $\mathcal{L}^p_{R}$. Pour une telle fonction f, $\tilde{f}$ désignera encore la classe d'équivalence de toutes les fonctions égales presque partout à f ; l'ensemble de ces classes peut être évidemment *identifié à* L^p_R. On notera que la somme et le produit de deux fonctions de f,g $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$ sont *définis presque partout* ; les classes $\widetilde{f+g}$ et $\widetilde{fg}$ sont les classes des fonctions égales presque partout à la somme (resp. au produit) de f et de g.

Lorsqu'une fonction à valeur dans F (resp dans $\overline{R}$) est *définie presque partout* dans E (c'est-à-dire dans le complémentaire d'un ensemble négligeable) et égale presque partout à une fonction de $\mathcal{L}^p_F$ (resp. $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$), on la considèrera souvent, par abus de langage, comme une fonction de $\mathcal{L}^p_F$ (resp. $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$) : dans tout raisonnement où on fait cet abus de langage, il doit être sous-entendu que ce n'est pas de la fonction considérée f elle-même qu'il s'agit, mais d'une fonction quelconque de $\mathcal{L}^p_F$ (resp. $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$) *presque partout égale* à f (par exemple la fonction égale à $f(x)$ aux points où f est définie, à 0 ailleurs). C'est ainsi que si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$, la somme $f(x)+g(x)$ (resp. le produit $f(x)g(x)$) a un sens presque partout ; par abus de langage $f+g$ (resp. fg) désignera toute fonction de $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$ égale presque partout à $f(x)+g(x)$ (resp. $f(x)g(x)$). Cet abus de langage n'a pas d'inconvénient tant qu'il ne s'agit que de propriétés de *classes* de fonctions (qu'il est souvent plus commode d'exprimer pour les fonctions appartenant à ces classes).

3. Prolongement d'une intégrale de Radon. Fonctions intégrables.

Comme l'espace vectoriel L^p_F est l'adhérence du sous-espace vectoriel Λ^p_F, toute fonction linéaire continue, définie dans Λ^p_F et prenant ses valeurs dans un espace normé complet se prolonge par continuité à L^p_F. En particulier, pour toute fonction f de $\mathcal{K}_F$, nous avons défini (chap. II, § 2, n°) l'intégrale $\mu(f) = \int f \, d\mu$ qui est un élément de F, et nous avons vu qu'on a l'inégalité

$$(3) \qquad \left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d|\mu| = N_1(f) .$$

Cette inégalité montre que lorsque est negligeable, on a $\int f \, d\mu = 0$; on peut donc définir par passage au quotient la fonction $\mu(\tilde{f})$ dans Λ_F, comme égale à la valeur commune de $\mu(f)$ pour toutes les fonctions continues à support compact de la classe $\tilde{f}$; en outre, l'inégalité (3) montre que $|\mu(\tilde{f})| \leq \|\tilde{f}\|_1$, autrement dit, dans Λ_F considéré comme sous-espace partout dense de L^1_F, la fonction linéaire $\mu(\tilde{f})$, à valeurs dans F, est continue. Elle se prolonge par suite à L^1_F par continuité ; nous noterons encore $\mu(\tilde{f})$ les valeurs de cette fonction prolongée.

DÉFINITION 2.- <u>On dit que les fonctions appartenant à</u> $\mathcal{L}^1_F$ <u>sont intégrables</u> (ou <u>sommables</u>) <u>pour l'intégrale de Radon</u> μ (ou encore, sont μ-<u>intégrables</u>). <u>L'intégrale de la fonction intégrable</u> f <u>est par définition, la valeur</u> $\mu(\tilde{f})$ <u>du prolongement de</u> μ <u>à</u> L^1_F <u>pour la classe</u> $\tilde{f}$ <u>de</u> f.

On étend aussitôt ces définitions au cas où $F = \overline{R}$.

L'intégrale d'une fonction intégrable f se notera encore $\mu(f)$, $\int f \, d\mu$ ou $\int f(x) d\mu(x)$, puisqu'elle coïncide avec l'élément de F désigné par ces notations lorsque f est continue et à support compact.

Exemple. Familles absolument sommables. Soit A un espace discret quelconque, μ la mesure définie par la masse +1 en chaque point de A. Toute fonction $\alpha \to u_\alpha$ définie dans A est continue, et elle n'est à support compact que si $u_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices α. On déduit d'abord de là que, pour toute fonction positive $\alpha \to u_\alpha$, on a $\mu^*(u) = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha$ (Top.gén., chap.IV, § 7,n°5). Par suite, les fonctions $\alpha \to u_\alpha$ appartenant à l'espace $\mathcal{L}^1_F$ sont celles pour lesquelles la famille (u_α) est absolument sommable (Top.gén.,chap. IX, § 3,n°6). En outre, pour une telle famille, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie H de A telle que $\sum_{\alpha \in \complement H} |u_\alpha| \leq \varepsilon$; cela montre aussitôt, compte-tenu de la définition de la somme d'une famille sommable (Top.gén., chap.III, § 4,n°1), qu'on a $\mu(u) = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha$.

THEOREME 1.- Si une fonction f appartient à $\mathcal{L}^p_F$, la fonction numérique $|f|$ appartient à $\mathcal{L}^p_R$, et l'application $\tilde{f} \to |\tilde{f}|$ de L^p_F dans L^p_R est continue. En particulier, si f est intégrable, il en est de même de $|f|$, et on a

$$(3) \qquad \left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d|\mu| = N_1(f) .$$

En effet, si $f \in \mathcal{L}^p_F$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \mathcal{K}_F$ telle que $N_p(f-g) \leq \varepsilon$; comme $||f| - |g|| \leq |f-g|$, on a aussi $N_p(|f| - |g|) \leq \varepsilon$, ce qui (prop.2) démontre la première partie du théorème. Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^p_F$, on a $||\tilde{f}| - |\tilde{g}|| \leq |\tilde{f} - \tilde{g}|$, donc $\| |\tilde{f}| - |\tilde{g}| \|_p \leq \| \tilde{f} - \tilde{g} \|_p$, ce qui prouve que l'application $\tilde{f} \to |\tilde{f}|$ est uniformément continue dans L^p_F. Enfin, si p=1, les relations (3) qui s'écrivent $|\mu(\tilde{f})| \leq |\mu|(|\tilde{f}|) = \|\tilde{f}\|_1$ sont valables dans Λ_F (chap.II, § 2,n°) donc dans L^1_F par application du principe de prolongement des inégalités.

La seconde partie du théorème est valable de façon évidente pour les fonctions numériques intégrables, finies ou non.

COROLLAIRE 1.- Si μ est une intégrale de Radon positive et f une fonction numérique $\geqslant 0$ et intégrable, on a

$$(4) \qquad \int f \, d\mu = \int^{*} f \, d\mu \geqslant 0$$

l'égalité n'ayant lieu que si f est négligeable.

Lorsque μ est une intégrale positive, $\int f \, d\mu$ est donc une fonction croissante dans l'ensemble $\mathcal{L}^1_{\overline{R}}$ des fonctions intégrables.

COROLLAIRE 2.- Pour que deux fonctions intégrables f, g soient égales presque partout, il faut et il suffit que $\int |f-g| \, d|\mu| = 0$; on a alors $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

En particulier, toute fonction négligeable f est intégrable, et on a $\int f \, d\mu = 0$.

COROLLAIRE 3.- Soit μ une intégrale de Radon complexe, μ_1 et μ_2 ses parties réelle et imaginaire ; si f est μ-intégrable, elle est μ_1-intégrable et μ_2-intégrable, et on a

$$(4 \text{ bis}) \qquad \int f \, d\mu = \int f \, d\mu_1 + i \int f \, d\mu_2 .$$

La première partie n'est autre qu'un cas particulier du cor.2 de la prop.2 . Si $\tilde{f} \in L^1_F$ est adhérent à Λ_F pour la topologie de $L^1_F(E, \mu)$, $\tilde{f}$ est aussi adhérent à Λ_F pour chacune des topologies de $L^1_F(E, \mu_1)$ et $L^1_F(E, \mu_2)$, en raison des relations $|\mu_1| \leqslant |\mu|$ et $|\mu_2| \leqslant |\mu|$; on en déduit aussitôt que la relation (4 bis), qui a lieu dans $\mathcal{K}_F$, est encore vraie pour toute fonction de $\mathcal{L}^1_F$.

On montre de même que si μ est une intégrale réelle, toute fonction μ-intégrable f est aussi μ^+-intégrable et μ^--intégrable, et que l'on a $\int f \, d\mu = \int f \, d\mu^+ - \int f \, d\mu^-$.

THÉORÈME 2.- Soient F et G deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de F dans G . Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p_F$,

$u\circ f$ *appartient à* $\mathcal{L}^p_G$. *En particulier si* f *est intégrable,* $u\circ f$ *est intégrable, et on a*

(5) $$\int u(f(x))\,d\mu(x) = u\left(\int f(x)\,d\mu(x)\right).$$

En effet, si $f\in\mathcal{L}^p_F$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction $g\in\mathcal{K}_F$ telle que $N_p(f-g)\leqslant\varepsilon$; comme on a $|u\circ f-u\circ g|\leqslant\|u\|\cdot|f-g|$, on a $N_p(u\circ f-u\circ g)\leqslant\|u\|.N_p(f-g)\leqslant\|u\|\varepsilon$, et $u\circ g$ est continue et à support compact, ce qui établit la première partie du théorème. On voit en outre (pour p=1) que les deux membres de (5) diffèrent de moins de $\|u\|\varepsilon$ de $\int u(g(x))\,d\mu(x)$ et de $u\left(\int g(x)\,d\mu(x)\right)$ respectivement, et on sait que ces deux vecteurs sont égaux (chap. II, §2, n°) ; d'où la relation (5).

COROLLAIRE 1.- *Soit* a' *une forme linéaire continue quelconque sur* F ; *si* $f\in\mathcal{L}^p_F$, *la fonction* $\langle f, a'\rangle$ *appartient à* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$. *En particulier, si* f *est intégrable,* $\langle f, a'\rangle$ *est intégrable, et on a*

(6) $$\int\langle f(x), a'\rangle\,d\mu(x) = \left\langle\int f(x)\,d\mu(x), a'\right\rangle.$$

COROLLAIRE 2.- *Soient* a_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ *des points de* F, f_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ *des fonctions de* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$; *alors la fonction* $f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ *appartient à* $\mathcal{L}^p_F$. *En particulier, si les* f_k *sont intégrables,* f *est intégrable, et on a*

(7) $$\int f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k\int f_k\,d\mu .$$

Cela résulte de ce que l'application $x\to a x$ de $\mathbb{C}$ dans F est une application linéaire continue.

COROLLAIRE 3.- *Pour qu'une fonction* $f(x)=(f_k(x))_{1\leqslant k\leqslant n}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}^n$ *appartienne à* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}^n}$, *il faut et il suffit que chacune des fonctions* f_k *appartienne à* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$. *En particulier pour que* f *soit intégrable, il faut et il suffit que chacune des fonctions* f_k *le soit, et on a*

(8) $$\int \mathbf{f}\, d\mu = \left(\int f_k\, d\mu\right)_{1 \leq k \leq n}.$$

Ce corollaire résulte aussitôt des cor.1 et 2.

PROPOSITION 3.- <u>Dans l'espace</u> L^p_F, <u>le sous-espace vectoriel formé des classes des combinaisons linéaires</u> $\sum_k \mathbf{a}_k f_k$, <u>où</u> $\mathbf{a}_k \in F$ <u>et</u> $f_k \in \mathcal{L}^p_R$, <u>est partout dense</u>.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_F$, il existe une fonction continue $\mathbf{g}$ à support compact telle que $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) \leq \varepsilon$. D'autre part, il existe une fonction $\sum_k \mathbf{a}_k f_k$, où les f_k sont des fonctions continues numériques, de support contenu dans un voisinage compact U du support de $\mathbf{g}$, et qui approchent uniformément $\mathbf{g}$ (chap.II, §2, lemme); il en résulte que $|\mu|(|\mathbf{g} - \sum_k \mathbf{a}_k f_k|^p)$ est arbitrairement petit, d'où la proposition.

4. <u>Séries et suites convergentes dans</u> L^p_F.

Quand nous parlerons de notions topologiques dans l'espace L^p_F, il sera toujours entendu, sauf mention expresse du contraire, qu'il s'agit de la topologie définie par la <u>norme</u> $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_p$.

Lorsqu'une suite $(\mathbf{f}_n)$ de fonctions de $\mathcal{L}^p_F$ est telle que la suite $(\tilde{\mathbf{f}}_n)$ converge vers une classe $\tilde{\mathbf{f}}$ dans L^p_F, on dit que la suite $(\mathbf{f}_n)$ <u>converge en moyenne d'ordre</u> p vers $\mathbf{f}$; cela signifie donc que $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{f}_n)$ tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment.

THEOREME 3.- <u>L'espace normé</u> L^p_F <u>est complet</u>.

En effet, c'est par définition un sous-espace <u>fermé</u> de l'espace normé Φ^p_F, qui est complet (prop.1).

Nous allons préciser ce résultat dans deux directions :

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> $(\mathbf{f}_n)$ <u>une suite de fonctions de</u> $\mathcal{L}^p_L$, <u>telle que</u> $\sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty$. <u>Alors la série de terme général</u> $\tilde{\mathbf{f}}_n$ <u>converge absolument dans l'espace normé</u> L^p_F ; <u>la série de terme général</u> $\mathbf{f}_n(x)$ <u>est presque partout absolument convergente</u> (dans l'espace F) et pour toute fonction f égale presque partout à $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, on a $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n$.

Ce résultat découle aussitôt du th.3 du § 2, compte-tenu du fait que L^p_F est complet.

PROPOSITION 5.- Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p_F$, telle que $(\tilde{f}_n)$ soit une suite de Cauchy dans l'espace normé L^p_F ; alors il existe une suite (f_{n_k}) extraite de (f_n) telle que :

1° la suite $(f_{n_k}(x))$ converge presque partout ;

2° il existe une fonction $g \geqslant 0$ semi-continue inférieurement, telle que $N_p(g) < +\infty$ et que $|f_{n_k}(x)| \leqslant g(x)$ presque partout pour tout k ;

3° si f est une fonction égale presque partout à la limite de la suite $(f_{n_k}(x))$, f appartient à $\mathcal{L}^p_F$ et $\tilde{f}$ est la limite de la suite $(\tilde{f}_n)$ dans l'espace normé L^p_F .

En effet, comme $(\tilde{f}_n)$ est une suite de Cauchy, on peut définir par récurrence une suite (n_k) d'entiers, strictement croissante, et telle que $N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \leqslant 2^{-k}$; on a donc $\sum_{k=1}^{\infty} N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) < +\infty$. La série de terme général $f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$ est donc presque partout absolument convergente, et si $f(x)$ est presque partout égale à la somme de cette série, f appartient à $\mathcal{L}^p_F$, et sa classe $\tilde{f}$ est somme de la série de terme général $\tilde{f}_{n_{k+1}} - \tilde{f}_{n_k}$ (prop.4). D'autre part, si $h(x)$ est la somme de la série de terme général $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$, la prop.4 montre que h appartient à $\mathcal{L}^p_R$; il existe donc une fonction semi-continue inférieurement $g \geqslant h$ telle que $N_p(g) < +\infty$,
ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- Si une suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{L}^p_F$ est telle que $(\tilde{f}_n)$ soit une suite de Cauchy dans L^p_F et que la suite $(f_n(x))$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$, f appartient à $\mathcal{L}^p_F$, et $\tilde{f}$ est limite de la suite $(\tilde{f}_n)$ dans L^p_F.

En effet, il existe une suite (f_{n_k}) extraite de (f_n) qui converge presque partout vers une fonction $g(x)$ appartenant à $\mathcal{L}^p_F$ et telle que $\tilde{g}$ soit limite de la suite $(\tilde{f}_n)$ dans L^p_F ; d'après les hypothèses, $f(x)=g(x)$ presque partout, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.- Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de fonctions de $\mathcal{L}^p_F$ tel que les classes des fonctions de $\mathcal{P}$ forment un ensemble partout dense dans L^p_F. Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p_F$, il existe une suite (g_n) de fonctions de $\mathcal{P}$ telle que la suite $(g_n(x))$ converge presque partout vers $f(x)$, et que la suite $(\tilde{g}_n)$ converge vers $\tilde{f}$ dans L^p_F.

En effet, par définition, il existe dans L^p_F une suite de Cauchy $(\tilde{f}_n)$ formée de classes de fonctions $f_n \in \mathcal{P}$ et convergente vers $\tilde{f}$; il suffit d'appliquer la prop.5 à la suite (f_n).

Le cor.2 s'applique en particulier au cas où $\mathcal{P} = \mathcal{K}_F$ (ensemble des fonctions continues à support compact).

COROLLAIRE 3.- Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_1$, il existe un ensemble négligeable $H \subset E$ tel que le sous-espace vectoriel fermé de F engendré par $f(\complement H)$ soit de type dénombrable (Esp.vect.top., chap.III).

En effet, d'après la prop.3 et le cor.2 de la prop.5, il existe une suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{L}^p_F$, telles que $f(E)$ soit contenu dans un sous-espace F_n de F, de dimension finie, et que $f_n(x)$ tende vers $f(x)$ sauf aux points d'un ensemble négligeable H.

Pour tout $x \in \complement H$, $f(x)$ appartient donc au sous-espace vectoriel fermé de F engendré par $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$, qui est de type dénombrable.

Les propositions 4 et 5 et leurs corollaires sont valables pour les fonctions de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$: en effet, si (f_n) est une suite de telles fonctions chacune d'elles est finie dans le complémentaire d'un ensemble négligeable H_n : l'ensemble $H = \bigcup_n H_n$ est donc négligeable, et dans le complémentaire de H, toutes les fonctions f_n sont finies donc la somme d'un nombre fini quelconque d'entre elles est définie.

Remarques.- 1) Une suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{L}^p_F$ peut être telle que la suite $(\tilde{f}_n)$ soit une suite de Cauchy dans L^p_F sans que la suite $(f_n(x))$ soit convergente en aucun point de E (ex.1).

2) Si f est une fonction de $\mathcal{L}^p_F$, il n'est pas toujours possible de trouver une suite (f_n) de fonctions continues à support compact telle que la suite $(f_n(x))$ converge partout vers une fonction égale presque partout à $f(x)$ (§ 4, exerc.3c).

5. Ensembles filtrants dans $L^p_{\mathbb{R}}$ et suites croissantes dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$.

PROPOSITION 6.- Pour qu'une fonction numérique f (finie ou non) appartienne à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, il faut et il suffit que chacune des fonctions f^+ et f^- appartiennent à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$.

On peut se borner au cas où f est finie. La condition est évidemment suffisante, puisque $f=f^+-f^-$; pour voir qu'elle est nécessaire, remarquons que si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, on a aussi $|f| \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ (th.1) et $f^+ = \frac{1}{2}(f+|f|)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$.

COROLLAIRE 1.- L'enveloppe supérieure (resp. inférieure) d'une famille finie de fonctions de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ appartient à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$.

COROLLAIRE 2.- L'espace $L^p_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace de Riesz propre (chap.I, § 1) de l'espace de Riesz $\Phi_{\mathbb{R}}$.

COROLLAIRE 3.- Dans l'espace de Riesz L^1_F, l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ est fermé.

En effet, c'est l'ensemble des éléments $\tilde{f}$ tels que $|\tilde{f}| = \tilde{f}$, et l'application $\tilde{f} \to |\tilde{f}|$ est continue dans $L^p_{\mathbb{R}}$ (th.1).

PROPOSITION 7.- <u>Soit H une partie de l'espace</u> $L^p_{\mathbb{R}}$, <u>formée de classes</u> $\geqslant 0$; <u>et filtrante pour la relation</u> $\leqslant$; <u>pour que H ait une borne supérieure dans</u> $L^p_{\mathbb{R}}$, <u>il faut et il suffit que</u> $\sup\limits_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p < +\infty$. <u>La borne supérieure de H dans</u> $L^p_{\mathbb{R}}$ <u>est alors la limite, dans l'espace normé</u> $L^p_{\mathbb{R}}$, <u>du filtre des sections de H</u>.

La condition est nécessaire, puisque $\|\tilde{f}\|_p$ est une fonction croissante dans $L^p_{\mathbb{R}}$. Pour démontrer qu'elle est suffisante, nous établirons d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme</u>.- <u>Si f et g sont deux fonctions de</u> $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ <u>telles que</u> $0 \leqslant f \leqslant g$ <u>on a</u>

$$(9) \qquad (N_p(f-g))^p \leqslant (N_p(g))^p - (N_p(f))^p .$$

Cette relation s'écrit en effet, lorsque f et g sont dans $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$

$$\int (g-f)^p d\mu \leqslant \int g^p d\mu - \int f^p d\mu$$

et résulte alors de l'inégalité élémentaire $(g-f)^p \leqslant g^p - f^p$ (§ 2, formule (3)). Pour passer de là au cas général, il suffit de remarquer que la fonction $\|\tilde{f}\|_p$ est continue dans $L^p_{\mathbb{R}}$, et que, lorsque la suite $(\tilde{f}_n)$ de classes de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ tend vers une classe $\tilde{f} \geqslant 0$, la suite des classes $\tilde{f}_n^+ \geqslant 0$ tend vers $\tilde{f}^+ = \tilde{f}$ (th.1).

Ce lemme étant démontré, soit $M = \sup\limits_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p < +\infty$; par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{f}_0 \in H$ tel que $M^p - \frac{\varepsilon^p}{2} \leqslant (N_p(f_0))^p \leqslant M^p$; pour toute classe $\tilde{f} \in H$ telle que $\tilde{f} \geqslant \tilde{f}_0$, on aura a fortiori $M^p - \frac{\varepsilon^p}{2} \leqslant (N_p(f))^p \leqslant M^p$, et en vertu du lemme, on en déduit que

$$(N_p(f-f_0))^p \leqslant (N_p(f))^p - (N_p(f_0))^p \leqslant \varepsilon^p$$

ce qui prouve que le filtre des sections $\mathcal{G}'$ de H est un <u>filtre de Cauchy</u> dans $L^p_{\mathbb{R}}$. Soit $\tilde{g}$ sa limite ; pour tout $\tilde{f} \in H$, $\tilde{g}$ est adhérent à l'ensemble des éléments $\geqslant \tilde{f}$ de $L^p_{\mathbb{R}}$, donc (cor.3 de la prop.6) on a $\tilde{g} \geqslant \tilde{f}$; en d'autres termes, $\tilde{g}$ est un ~~maj~~ majorant de H . Par ailleurs, si $\tilde{h} \in L^p_{\mathbb{R}}$ est un majorant de H , $\tilde{h}-\tilde{g}$ est adhérent à l'ensemble des $\tilde{h}-\tilde{f}$, où $\tilde{f} \in H$, et comme $\tilde{h}-\tilde{f} \geqslant 0$, on a $\tilde{h}-\tilde{g} \geqslant 0$ (cor.3 de la prop.6) ; $\tilde{g}$ est donc la <u>borne supérieure</u> de H , ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- <u>Si $\tilde{g}$ est la borne supérieure de H dans $L^p_{\mathbb{R}}$, on a</u>

(10) $$N_p(g) = \sup_{\tilde{f} \in H} N_p(f) .$$

Cela résulte de la continuité de $\|\tilde{f}\|_p$ dans $L^p_{\mathbb{R}}$ et du théorème de la limite monotone.

COROLLAIRE 2.- <u>L'espace de Riesz $L^p_{\mathbb{R}}$ est absolument réticulé</u>.

En effet, tout ensemble H filtrant (pour $\leqslant$) dans $L^p_{\mathbb{R}}$, formé de classes $\geqslant 0$, admet une borne supérieure, puisque, si $\tilde{g}$ est un majorant de H , on a $N_p(f) \leqslant N_p(g)$ pour toute classe $\tilde{f} \in H$.

<u>Remarque</u>.- La proposition analogue à la prop.7, formulée pour les <u>fonctions</u> de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, et non plus pour leurs <u>classes</u>, est <u>inexacte</u> en général : de façon précise, si M est une partie de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ filtrante pour la relation $\leqslant$, et telle que $\sup_{f \in M} N_p(f) < +\infty$, <u>l'enveloppe supérieure g de M n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, et même lorsque $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, la relation $N_p(g) = \sup_{f \in M} N_p(f)$ n'est pas nécessairement vérifiée</u>.

Par exemple, prenons $E = \mathbb{R}$, et prenons pour μ la mesure de Lebesgue. Toute fonction nulle sauf en un nombre <u>fini</u> de points de $\mathbb{R}$ est négligeable ; mais, si f est une fonction numérique <u>arbitraire</u> $\geqslant 0$, f est l'enveloppe supérieure de l'ensemble filtrant des fonctions négligeables $f_A = \sum_{x \in A} f(x)\varphi_{\{x\}}$, où A parcourt l'ensemble de toutes les parties finies de $\mathbb{R}$; on a donc $\sup N_p(f_A)=0$, et par suite $\sup N_p(f_A) \neq N_p(f)$ lorsque par exemple f est une fonction continue à support compact non identiquement nulle ; par ailleurs, il existe des fonctions $\geqslant 0$ non intégrables, par exemple la constante 1 (cf. §4 exerc.2).

On a toutefois le théorème suivant :

THEOREME 4.- Soit (f_n) une suite croissante de fonctions $\geqslant 0$ de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$. Pour que l'enveloppe supérieure f de cette suite appartienne à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, il faut et il suffit que $\sup_n N_p(f_n) < +\infty$. On a alors $\lim_{n \to \infty} N_p(f-f_n)=0$ et

$$N_p(f) = \sup_n N_p(f_n) \tag{11}$$

La condition étant évidemment nécessaire, tout revient à prouver qu'elle est suffisante. Or, si elle est remplie, la prop.7 montre que dans $L^p_{\mathbb{R}}$, la suite $(\tilde{f}_n)$ converge vers sa borne supérieure. Comme d'autre part la suite $(f_n(x))$ converge en tout point x vers f(x), le théorème est une conséquence du cor.1 de la prop.5 .

COROLLAIRE 1.- Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions $\geqslant 0$ de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$; l'enveloppe inférieure f de cette suite appartient à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ et on a $\lim_{n \to \infty} N_p(f-f_n)=0$ et $N_p(f)= \inf_n N_p(f_n)$.

Il suffit d'appliquer le th.4 à la suite croissante et majorée des $g_n=f_1-f_n$.

COROLLAIRE 2.- Soit (f_n) une suite croissante (resp. décroissante) de fonctions numériques intégrables. Pour que l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) f de cette suite soit intégrable, il faut et il suffit que $\sup_n N_1(f_n) < +\infty$; on a alors

(12) $$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu .$$

En effet, supposons par exemple la suite (f_n) croissante ; alors la suite (f_n^+) est croissante, la suite (f_n^-) décroissante, f^+ est l'enveloppe supérieure de (f_n^+), f^- l'enveloppe inférieure de (f_n^-). D'après la prop.6 et le cor.1 du th.4, f^- est intégrable ; comme $f_n^+ \leqslant |f_n| \leqslant f_n^+ + f_1^-$, la condition $\sup_n N_1(f_n) < +\infty$ est nécessaire et suffisante pour que f^+ soit intégrable, d'après le th.4 . Alors, $\tilde{f}_n^+$ (resp. $\tilde{f}_n^-$) tend vers $\tilde{f}^+$ (resp. $\tilde{f}^-$) dans $L^1_{\mathbb{R}}$ donc $\int f_n^+ d\mu$ (resp. $\int f_n^- d\mu$) tend vers $\int f^+ d\mu$ (resp. $\int f^- d\mu$).

COROLLAIRE 3.- <u>Soit</u> (f_n) <u>une suite de fonctions de</u> $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$. <u>Pour que l'enveloppe supérieure</u> f <u>de la suite</u> (f_n) <u>appartienne à</u> $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, <u>il faut et il suffit qu'il existe une fonction</u> $g \geqslant 0$ <u>telle que</u> $\int^* g^p d|\mu| < +\infty$ <u>et</u> $f_n \leqslant g$ <u>pour tout</u> n .

La condition est évidemment nécessaire, en prenant $g = f^+$. Inversement, supposons-la vérifiée, et posons $g_n = \sup_{k\leqslant n} f_k$; la suite (g_n) est croissante et formée de fonctions de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ (cor.1 de la prop.6) ; comme $g_n^+ \leqslant g$, on a $\sup_n N_p(g_n^+) \leqslant N_p(g) < +\infty$; le th.4 montre donc que $\sup_n g_n^+$ appartient à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$; comme $\inf_n g_n^-$ appartient à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ (cor.1), il en est de même de $\sup f_n = \sup g_n = \sup g_n^+ - \inf g_n^-$.

COROLLAIRE 4.- <u>Soit</u> A <u>un ensemble dénombrable</u>, $\mathfrak{F}$ <u>un filtre sur</u> A <u>ayant une base dénombrable</u>, $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ <u>un ensemble de fonctions de</u> $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$; <u>on suppose qu'il existe une fonction</u> $g \geqslant 0$ <u>telle que</u> $N_p(g) < +\infty$ <u>et</u> $|f_\alpha| \leqslant g$ <u>pour tout</u> $\alpha \in A$; <u>alors la fonction</u> $\limsup_{\mathfrak{F}} f_\alpha$ <u>appartient à</u> $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, <u>et on a</u>

(13) $$\limsup_{\mathfrak{F}} N_p(f_\alpha) \leqslant N_p(\limsup_{\mathfrak{F}} f_\alpha) .$$

En effet, soit (A_n) une base décroissante de $\mathfrak{F}$, et posons $g_n = \sup_{\alpha \in A_n} f_\alpha$; comme A_n est dénombrable, il résulte du cor.3 que g_n appartient à $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$; et on a $N_p(g_n) \geqslant \sup_{\alpha \in A_n} N_p(f_\alpha)$. Cela étant, $\lim.\sup_{\mathfrak{F}} f_\alpha$ est l'enveloppe inférieure de la suite décroissante (g_n) ; comme $g_n \geqslant -g$ pour tout n, $\lim.\sup_{\mathfrak{F}} f_\alpha$ appartient à $\mathcal{L}^p_{\overline{R}}$ d'après le cor.3, et on a $N_p(\lim.\sup_{\mathfrak{F}} f_\alpha) = N_p(\lim_{n\to\infty} g_n) = \lim_{n\to\infty} N_p(g_n) \geqslant$ $\geqslant \lim_{n\to\infty}(\sup_{\alpha\in A_n} N_p(f_\alpha)) = \lim.\sup_{\mathfrak{F}} N_p(f_\alpha)$.

<u>Remarque</u>.- Les hypothèses du th.4 ou de son corollaire 3 impliquent en particulier que $\sup_n f_n(x) < +\infty$ presque partout ; mais il ne faudrait pas croire que cette condition soit suffisante pour assurer la validité des conclusions correspondantes. Par exemple, si $E = R$, si μ est la mesure de Lebesgue, f_n la suite de fonctions continues définies par les conditions $f_n(x)=0$ pour $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 2$, f_n linéaire dans les intervalles $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $[1,2]$, et enfin $f_n(x)=1/x$ pour $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1$, on a $\sup_n f_n(x) < +\infty$ pour tout x, mais l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$ tend vers $+\infty$, et l'enveloppe supérieure de la suite (f_n) n'est pas intégrable.

2

6. Le théorème de Lebesgue.

THÉOREME 5 (Lebesgue).- <u>Soient</u> F <u>un espace de Banach</u>, $(\mathbf{f}_n)$ <u>une suite de fonctions de</u> $\mathcal{L}^p_F$ <u>telles que</u> : 1° <u>la suite</u> $(\mathbf{f}_n(x))$ <u>converge presque partout vers</u> $\mathbf{f}(x)$; 2° <u>il existe une fonction numérique</u> $g \geqslant 0$ <u>telle que</u> $\int^* g^p d|\mu| < +\infty$ <u>et</u> $|\mathbf{f}_n(x)| \leqslant g(x)$ <u>presque partout pour tout entier</u> n. <u>Alors</u> $\mathbf{f}$ <u>appartient à</u> $\mathcal{L}^p_F$, <u>et on a</u> $\lim_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f}-\mathbf{f}_n)=0$. <u>En particulier, si toutes les fonctions</u> $\mathbf{f}_n$ <u>sont intégrables</u>, $\mathbf{f}$ <u>est intégrable et on a</u>

$$\int \mathbf{f}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n\, d\mu \tag{14}$$

Considérons la suite "double" de fonctions numériques $g_{mn} = |f_m - f_n|$ qui appartiennent à $\mathcal{L}^p_R$ (th.1). Par hypothèse, on a $\limsup_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} g_{m,n}(x)=0$ presque partout, et d'autre part $|g_{mn}| \leqslant 2g$; par application du cor.4 du th.4, on a

$$\limsup_{m\to\infty, n\to\infty} N_p(f_m - f_n) \leqslant N_p(0) = 0$$

et comme $N_p(f_m - f_n) \geqslant 0$, cela entraîne $\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} N_p(f_m - f_n) = 0$, c'est-à-dire que la suite $(\tilde{f}_n)$ est une <u>suite de Cauchy</u> dans L^p_F ; le cor.1 de la prop.5 montre alors que $f \in \mathcal{L}^p_F$, et que $\tilde{f}$ est limite de la suite $(\tilde{f}_n)$ dans L^p_F. Enfin, la relation (14) provient de la continuité de $\mu(\tilde{f})$ dans L^1_F.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> A <u>un ensemble d'indices filtré par un filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>ayant une base dénombrable. Si</u> $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ <u>est une famille de fonctions de</u> $\mathcal{L}^p_F$ <u>qui, suivant le filtre</u> $\mathfrak{F}$, <u>convergent simplement vers une fonction</u> f, <u>et si en outre il existe une fonction numérique</u> $g \geqslant 0$ <u>telle que</u> $\int^* g^p d|\mu| < +\infty$ <u>et</u> $|f_\alpha| \leqslant g$ <u>pour tout</u> α, <u>la fonction</u> f <u>appartient à</u> $\mathcal{L}^p_F$, <u>et</u> $N_p(f - f_\alpha)$ <u>tend vers</u> 0 <u>suivant</u> $\mathfrak{F}$.

En effet, soit (A_n) une base dénombrable de $\mathfrak{F}$ telle que $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n (<u>Top.gén.</u>, chap.I, §5, prop.10), et soit α_n un élément quelconque de A_n ; la suite (f_{α_n}) converge simplement vers f dans E, donc le th.5 montre que f appartient à $\mathcal{L}^p_F$ et que $\lim_{n\to\infty} N_p(f - f_{\alpha_n}) = 0$. Comme $\mathfrak{F}$ est le filtre intersection des filtres élémentaires associés à toutes les suites (α_n), $\lim_{\mathfrak{F}} N_p(f - f_\alpha)$ existe et est égale à la limite de chacune des suites $(N_p(f - f_{\alpha_n}))$, donc à 0.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> Ω <u>un espace topologique</u>, f <u>une application de</u> $E \times \Omega$ <u>dans</u> F, <u>telle que</u> :

a) <u>pour tout</u> $t \in \Omega$, <u>la fonction</u> $x \to f(x,t)$ <u>appartient à</u> $\mathcal{L}^p_F$;

b) *pour tout* $x \in E$, *la fonction* $t \to f(x,t)$ *est continue en un point* $t_0 \in \Omega$ *admettant un système fondamental dénombrable de voisinages* ;

c) *il existe un voisinage* U *de* t_0 *et une fonction numérique* $g(x) \geqslant 0$ *définie dans* E, *telle que* $\int^* g^p d|\mu| < +\infty$ *et que* $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ *pour* $x \in E$ *et* $t \in U$.

Alors, si on désigne par f_t *l'application* $x \to f(x,t)$, *l'application* $t \to \tilde{f}_t$ *de* Ω *dans* L^p_F *est continue au point* t_0.

Si en outre $p=1$, *l'application* $t \to \int f(x,t)d\mu(x)$ *de* Ω *dans* F *est continue au point* t_0.

Il est clair que le th.5 et ses corollaires sont encore valables pour les fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarques.- 1) Le th.5 ne subsiste pas si on remplace l'hypothèse $|f_n| \leqslant g$ (avec $\int^* g^p d|\mu| < +\infty$) par l'hypothèse plus faible $\sup_n N_p(f_n) < +\infty$. Par exemple si $E = \mathbb{R}$, si est la mesure de Lebesgue, f_n la suite de fonctions continues définies par les conditions $f_n(x)=0$ pour $x \leqslant 0$ et $x \geqslant \frac{2}{n}$ $f_n(\frac{1}{n})=n$, f_n linéaire dans les intervalles $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ on a $\lim_{n \to \infty} f_n(x)=0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais $N_1(f_n)=1$ pour tout n.

2) Le cor.1 du th.5 ne subsiste pas si on ne suppose plus que le filtre $\mathfrak{F}$ ait une base dénombrable (cf. exerc.).

7. *Relations entre les espaces* $\mathcal{L}^p_F$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

Pour tout nombre $\alpha > 0$, l'application $x \to |x|^{\alpha-1}.x$ est définie et continue dans le complémentaire de 0 dans F ; en outre, comme on a $\left||x|^{\alpha-1}.x\right| = |x|^\alpha$, cette fonction tend vers 0 avec x, et on peut donc la prolonger par continuité au point 0 en lui donnant la valeur 0, même si $\alpha < 1$.

THEOREME 6.- <u>Soient p et q deux nombres tels que</u> $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q < +\infty$. <u>Si une fonction</u> f <u>appartient à</u> $\mathcal{L}^p_F$, <u>la fonction</u> $|f|^{\frac{p}{q}-1}.f$ <u>appartient à</u> $\mathcal{L}^q_F$.

Par hypothèse, il existe une suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{K}_F$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) < +\infty$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ presque partout (prop.5). Posons $g_n = |f_1+f_2+\dots+f_n|^{\frac{p}{q}-1}(f_1+f_2+\dots+f_n)$; on a $g_n \in \mathcal{K}_F$; d'autre part $|g_n|^q = |f_1+f_2+\dots+f_n|^p \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|)^p = g^q$, où la fonction numérique g (finie ou non), vérifie l'inégalité

$$(N_q(g))^q = (N_p(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|))^p \leq (\sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n))^p < +\infty$$

en vertu du th. de convexité dénombrable. D'autre part, $g_n(x)$ tend presque partout vers $|f(x)|^{\frac{p}{q}-1}.f(x)$, donc le th. de Lebesgue montre que $|f|^{\frac{p}{q}-1}.f$ appartient à $\mathcal{L}^q_F$.

COROLLAIRE 1.- <u>Pour qu'une fonction</u> f <u>appartienne à</u> $\mathcal{L}^p_F$, <u>il faut et il suffit que la fonction</u> $|f|^{p-1}.f$ <u>soit intégrable</u>.

COROLLAIRE 2.- <u>Pour qu'une fonction numérique positive</u> f <u>appartienne à</u> $\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}$, <u>il faut et il suffit que</u> f^p <u>soit intégrable</u>.

Par contre, si f est une fonction à valeurs dans F (ou dans $\overline{\mathbb{R}}$) telle que $|f|^p$ soit intégrable, f n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{L}^p_F$ (resp. $\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}$)(cf. § ,).

COROLLAIRE 3.- <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{L}^p_F$, <u>la fonction numérique</u> $|f|^p$ <u>est intégrable, et on a</u>

$$N_p(f) = (\int |f|^p \, d|\mu|)^{1/p} \quad (15)$$

En effet, $|f|$ appartient à $\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}$, donc $|f|^p$ est intégrable (cor.2), et comme $\int^* |f|^p d|\mu| = \int |f|^p d|\mu|$ (th.1) la formule (15) est démontrée.

Par abus de langage, on dit encore que les fonctions de $\mathcal{L}^p_F$ sont les fonctions (à valeurs dans F) <u>de puissance p-ème intégrable</u>.

8. __Caractérisation des fonctions numériques intégrables.__

PROPOSITION 8.- __Soit E un espace localement compact,__ μ __une intégrale de Radon sur__ E . __Pour qu'une fonction numérique__ f (__finie ou non__) __semi-continue inférieurement__ (resp. __supérieurement__) __dans__ E __soit intégrable, il faut et il suffit que__ $N_1(f) < +\infty$.

Tout revient à prouver que la condition est suffisante. Supposons par exemple que f soit semi-continue inférieurement ; alors f^+ est semi-continue inférieurement, f^- est semi-continue supérieurement et on a $N_1(f^+) \leqslant N_1(f) < +\infty$, $N_1(f^-) \leqslant N_1(f) < +\infty$. D'après la définition de $N_1(f^+) = |\mu|^*(f^+)$ (§ 1, n°1 déf.1), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g \geqslant 0$, à support compact, telle que $g \leqslant f^+$ et $|\mu|^*(f^+) - \varepsilon \leqslant |\mu|(g) \leqslant |\mu|^*(f^+)$. Mais $f^+ - g$ est semi-continue inférieurement et $\geqslant 0$, donc (§ 1, th.2) $|\mu|^*(f^+) = |\mu|(g) + |\mu|^*(f^+ - g)$, d'où $N_1(f^+ - g) = |\mu|^*(f^+) - |\mu|(g) \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve (prop.2) que f^+ est intégrable.

D'autre part, l'hypothèse $|\mu|^*(f^-) = N_1(f^-) < +\infty$ entraîne l'existence d'une fonction $h \geqslant 0$, semi-continue inférieurement, telle que $f^- \leqslant h$ et $N_1(h) < +\infty$. Soit u la fonction numérique égale à $h(x) - f^-(x)$ aux points où $f^-(x) < +\infty$ et à 0 aux points où $f^-(x) = h(x) = +\infty$; u est une fonction __semi-continue inférieurement__ dans E car elle est semi-continue inférieurement, aux points x où $f^-(x) < +\infty$ (__Top.gén.__, chap.IV, § 6, prop.2), et en un point x_0 où $f^-(x_0) = +\infty$, on a $\liminf_{x \to x_0} u(x) \geqslant 0 = u(x_0)$. On a $u \leqslant h$, donc $N_1(u) < +\infty$. D'après la première partie du raisonnement, h et u sont intégrables, donc presque partout finies, et on a presque partout $f^-(x) = h(x) - u(x)$, donc f^- est intégrable, ce qui achève la démonstration (prop.6) .

Remarque.- Soit H un ensemble de fonctions semi-continues inférieurement et intégrables, filtrant pour la relation $\leqslant$. Pour que l'enveloppe supérieure $f = \sup_{g \in H} g$ de H (qui est semi-continue inférieurement) soit intégrable, il faut et il suffit que $\sup_{g \in H} N_1(g) < +\infty$, et si $\mathfrak{F}$ est le filtre des sections de H , on a $\int f \, d\mu = \lim_{\mathfrak{F}} \int g \, d\mu$. En effet, on a $f^+ = \sup_{g \in H} g^+$, donc (§ 1, th.1) $N_1(f^+) = \sup_{g \in H} N_1(g^+) < +\infty$, ce qui prouve que f^+ est intégrable ; en outre, la relation $\int f^+ d\mu = \lim_{\mathfrak{F}} \int g \, d\mu$ résulte des quatre relations analogues où μ est remplacé par μ_1^+ , μ_1^- , μ_2^+ et μ_2^- , μ_1 et μ_2 étant les parties réelle et imaginaire de μ ; or, ces quatre relations sont des conséquences du th.1 du §1 . D'autre part, on a $f^- = \inf_{g \in H} g^-$, et par hypothèse, on peut supposer qu'il existe une fonction $h \geqslant 0$, semi-continue inférieurement et intégrable, telle que $g^- \leqslant h$ pour toute fonction $g \in H$. Le raisonnement de la prop.8 montre que si, pour toute fonction $g \in H$, g' est la fonction telle que $g'(x) = h(x) - g^-(x)$ aux points où $g^-(x) < +\infty$, $g'(x) = 0$ aux points où $g^-(x) = +\infty$, g' ~~xdx~~ est semi-continue inférieurement, les fonctions g' forment un ensemble filtrant H' pour la relation $\leqslant$, et leur enveloppe supérieure $f' \leqslant h$ est telle que $f^-(x) = h(x) - f'(x)$ presque partout. D'après la prop.8, f^- est donc intégrable, et en utilisant comme ci-dessus le th.1 du §1 , on obtient $\int f^- d\mu = \lim_{\mathfrak{F}} \int g^- d\mu$, ce qui achève de prouver notre assertion.

THEOREME 7.- <u>Pour qu'une fonction numérique</u> f <u>soit intégrable, il faut et il suffit que, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une fonction intégrable semi-continue inférieurement</u> h <u>et une fonction intégrable semi-continue</u>

<u>supérieurement</u> g , <u>telles que</u> $g \leq f \leq h$ <u>et</u> $\int h\, d|\mu| - \int g\, d|\mu| \leq \varepsilon$.

La condition est <u>nécessaire</u>. En effet, si f est intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse une fonction $u \in \mathcal{H}_R$ telle que $N_1(f-u) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. D'après la définition de N_1 , cela entraîne qu'il existe une fonction $v \geq 0$, semi-continue inférieurement, telle que $|\mu|^*(v) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f-u| \leq v$. On a donc $-v(x) \leq f(x)-u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in E$, et comme u est partout finie, cela s'écrit $u(x)-v(x) \leq f(x) \leq u(x)+v(x)$ pour tout $x \in E$. La fonction $g=u-v$ est semi-continue supérieurement et intégrable (prop.8), la fonction $h=u+v$ est semi-continue inférieurement et intégrable, la différence $h-g$ est partout définie et égale à $2v$, donc $\int (h-g)d|\mu| \leq \varepsilon$.

La condition est <u>suffisante</u>. En effet, si on la suppose remplie la fonction $h-g$ est définie et ≥ 0 presque partout et est intégrale, et on a $\int (h-g)d|\mu| \leq \varepsilon$. La fonction $f-g$ est donc définie et ≥ 0 presque partout, et on a presque partout $f-g \leq h-g$, d'où $N_1(f-g) \leq N_1(h-g) \leq \varepsilon$. Comme g est intégrable et ε arbitraire, cela prouve que la classe $\tilde{f}$ est adhérente à L^1_R , donc appartient à L^1_R , ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> f <u>une fonction numérique</u> ; <u>si, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe deux fonctions intégrables</u> g,h <u>telles que</u> $g \leq f \leq h$ <u>presque partout, et que</u> $\int h\, d|\mu| - \int g\, d|\mu| \leq \varepsilon$, f <u>est intégrable</u>.

En effet, en modifiant au besoin g et h dans un ensemble négligeable, on peut supposer que $g \leq f \leq h$ partout. D'après le th.7, il existe alors une fonction intégrable semi-continue inférieurement h_1 et une fonction intégrable semi-continue supérieurement g_1, telles que

$g_1 \leqslant g$, $h \leqslant h_1$ et $\int g\, d|\mu| - \int g_1\, d|\mu| \leqslant \varepsilon$, $\int h_1 d|\mu| - \int h\, d|\mu| \leqslant \varepsilon$, d'où $\int h_1 d|\mu| - \int g_1 d|\mu| \leqslant 3\varepsilon$, ce qui démontre le corollaire, en vertu du th.7 .

COROLLAIRE 2.- <u>Pour toute fonction numérique intégrable</u> f , <u>il existe une suite décroissante</u> (resp. <u>croissante</u>) (h_n) (resp. (g_n) <u>de fonctions intégrables et semi-continues inférieurement</u> (resp. <u>supérieurement</u>) <u>telles que</u> $g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant h_n(x)$ <u>pour tout</u> $x \in E$ <u>et tout entier</u> n , <u>et que</u> f <u>soit égale presque partout à l'enveloppe inférieure de la suite</u> (h_n) (resp. <u>à l'enveloppe supérieure de la suite</u> (g_n). <u>On a en outre</u>

$$\int f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int g_n d\mu = \lim_{n \to \infty} \int h_n d\mu \ .$$

En effet, d'après le th.7, pour tout n, il existe une fonction v_n intégrable et semi-continue inférieurement et une fonction u_n intégrable et semi-continue supérieurement, telles que $u_n \leqslant f \leqslant v_n$ et $N_1(v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{n}$; si on pose $g_n = \sup(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $h_n = \inf(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, les suites (g_n) et (h_n) répondent à la question; en effet, la suite (g_n) est croissante, et on a $|g_n| \leqslant |f| + |g_1|$; si g est l'enveloppe supérieure de la suite (g_n), g est donc intégrable d'après le th. de Lebesgue ; en outre, comme $N_1(f - g_n) \leqslant N_1(v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{n}$, on a $N_1(f-g) = \lim_{n \to \infty} N_1(f - g_n) = 0$, donc f et g sont égales presque partout. On raisonne de même pour la suite (h_n) .

§ 4. Ensembles intégrables.

1. Ensembles intégrables.

DEFINITION 1.- Soit E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon sur E. On dit qu'une partie A de E est intégrable pour l'intégrale μ (ou encore, est μ-intégrable) si la fonction caractéristique φ_A de A est intégrable ; le nombre $\mu A = \int \varphi_A d\mu$ est alors appelé mesure de A.

Si μ et ν sont deux intégrales de Radon telles que $|\nu| \leqslant |\mu|$, tout ensemble μ-intégrable est aussi ν-intégrable. En particulier, pour qu'un ensemble A soit μ-intégrable, il faut et il suffit qu'il soit $|\mu|$-intégrable, et on a (§ 3, th.1)

$$(1) \qquad |\mu A| \leqslant |\mu|(A)$$

Si $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont des intégrales de Radon réelles tout ensemble A qui est μ-intégrable est aussi μ_1-intégrable et μ_2-intégrable, et on a $\mu A = \mu_1 A + i\mu_2 A$. De même, si μ est une intégrale de Radon réelle, tout ensemble A μ-intégrable est aussi μ^+-intégrable et μ^--intégrable, et on a $\mu A = \mu^+ A - \mu^- A$. Si μ est une intégrale de Radon positive, on a $0 \leqslant \mu A = \mu^* A < +\infty$ pour tout ensemble μ-intégrable.

PROPOSITION 1.- Soit μ une intégrale de Radon positive. Pour qu'un ensemble soit μ-négligeable, il faut et il suffit qu'il soit de mesure nulle.

C'est une conséquence immédiate de la relation $\mu A = \mu^* A$ pour tout ensemble intégrable, et du fait que toute fonction négligeable est intégrable.

PROPOSITION 2.- La réunion d'une famille finie $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'ensembles intégrables est intégrable, et on a

(2) $$|\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu|(A_i).$$

En outre, si les A_i sont deux à deux sans point commun, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu A_i .$$

En effet, si $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, on a $\varphi_A = \sup_i \varphi_{A_i}$, donc (§ 3, cor.1 de la prop.6), si les A_i sont intégrables, il en est de même de A ; la relation (2) est un cas particulier de la relation analogue pour les mesures extérieures, compte-tenu de la relation $\mu^* A = |\mu|(A)$; enfin, si les A_i sont deux à deux sans point commun, on a $\varphi_A = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}$, d'où la relation (3).

PROPOSITION 3.- Si A et B sont deux ensembles intégrables, et si $B \subset A$, l'ensemble $C = A \cap \complement B$ est intégrable, et on a

(4) $$\mu C = \mu A - \mu B .$$

En effet, on a $\varphi_C = \varphi_A - \varphi_B$.

PROPOSITION 4.- L'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles intégrables est intégrable.

En effet, si (A_n) est une suite d'ensembles intégrables, et A son intersection, on a $\varphi_A = \inf_n \varphi_{A_n}$, donc A est intégrable (§ 3, cor.1 du th.4)

COROLLAIRE .- Si (A_n) est une suite décroissante d'ensembles intégrables, on a $\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$.

En effet, si $A = \bigcap_n A_n$, φ_A est l'enveloppe inférieure de la suite décroissante (φ_{A_n}) (§ 3, cor.2 du th.4).

PROPOSITION 5.- Soit (A_n) une suite croissante d'ensembles intégrables ; pour que la réunion $A = \bigcup_n A_n$ soit intégrable, il faut et il suffit que $\sup_n |\mu|(A_n) < +\infty$; on a alors

(6) $$\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu A_n .$$

En effet, les φ_{A_n} forment une suite croissante de fonctions intégrables, et $\varphi_A = \sup_n \varphi_{A_n}$ (§ 3, cor.2 du th.4).

PROPOSITION 6.- Soit (A_n) une suite d'ensembles intégrables, contenus dans un même ensemble intégrable B ; la réunion $A = \bigcup_n A_n$ est intégrable, et on a

(7) $$|\mu|(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) .$$

En outre, si les A_n sont deux à deux sans point commun, on a

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n .$$

En effet, $\varphi_{A_n} \leqslant \varphi_B$, donc $\varphi_A = \sup_n \varphi_{A_n}$ est intégrale (§ 3, cor.3 du th.4) ; la relation (7) est un cas particulier de la relation analogue pour les mesures extérieures ; enfin si les A_n sont deux à deux sans point commun et, si on pose $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ on a $\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu B_n$ d'après (5) et $\mu B_n = \sum_{k=1}^{n} \mu A_k$, d'où la relation (8) .

On exprime encore la relation (8) en disant que la mesure μ est complètement additive dans l'ensemble des parties intégrables de E .

2. Critère d'intégrabilité d'un ensemble.

PROPOSITION 7. Pour qu'un ensemble A , ouvert ou fermé dans E , soit intégrable, il faut et il suffit que $\mu^* A < +\infty$.

En effet, comme φ_A est alors semi-continue inférieurement ou semi-continue supérieurement, la proposition résulte de la prop.8 du § 3 .

COROLLAIRE.- Tout ensemble compact est intégrable ; tout ensemble ouvert relativement compact est intégrable.

PROPOSITION 8.- Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble, filtrant pour la relation $\subset$, d'ensembles ouverts intégrables de E ; si $A = \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} G$ est intégrable, on a $\mu A = \lim_{G \in \mathfrak{G}} \mu G$.

La proposition n'est autre qu'un cas particulier de la prop.8 du § 1 lorsque μ est une intégrale de Radon positive ; pour passer au cas général, il suffit de considérer μ comme combinaison linéaire de quatre intégrales de Radon positives.

COROLLAIRE .- Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble, filtrant pour la relation $\supset$, d'ensembles fermés intégrables dans E ; l'ensemble fermé $B = \bigcap_{H \in \mathfrak{F}} H$ est intégrable, et on a $\mu B = \lim_{H \in \mathfrak{F}} \mu H$.

En effet, soit H_0 un ensemble de $\mathfrak{F}$, comme H_0 est intégrable, il est contenu dans un ensemble ouvert intégrable U (§1, prop.20) ; les ensembles ouverts $U \cap \complement H$ forment alors un ensemble filtrant pour la relation $\subset$, contenus dans U et dont la réunion est $U \cap \complement B$; comme $B \subset H_0 \subset U$, on a $\mu B = \mu U - \mu(U \cap \complement B) = \mu U - \lim_{H \subset H_0} \mu(U \cap \complement H) = \lim_{H \subset H_0} \mu H$, ce qui établit le corollaire.

THEOREME 1.- Pour qu'un ensemble A soit intégrable, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert intégrable G et un ensemble compact K, tels que $K \subset A \subset G$ et que $|\mu|(G) - |\mu|(K) < \varepsilon$.

On peut évidemment se borner au cas où μ est une intégrale positive.

a) La condition est suffisante, car elle signifie que $\varphi_K \leqslant \varphi_A \leqslant \varphi_G$ et $\int(\varphi_G - \varphi_K) d\mu < \varepsilon$; comme φ_G est semi-continue inférieurement, φ_K semi-continue supérieurement, et ε arbitraire, φ_A est intégrable (§ 3, th.7).

b) La condition est nécessaire. Si A est intégrable, il existe un ensemble ouvert $G \supset A$, tel que $\mu^* G$ soit arbitrairement voisin de $\mu^* A = \mu A$ (§ 1, prop.20) ; tout revient donc à prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset A$ tel que $\mu A - \mu K \leqslant \varepsilon$. Comme φ_A est intégrable, il existe une fonction $f \geqslant 0$, semi-continue supérieurement et intégrable, telle que $f \leqslant \varphi_A$ et $\int(\varphi_A - f) d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ (§ 3, th.7). D'autre part, f étant intégrable, il existe une fonction continue $g \geqslant 0$, à support compact, telle que $\int|f-g|\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$; la fonction $h = \inf(f, g)$ est donc semi-continue supérieurement, intégrable, à support compact $S \subset A$, et telle que $\int(\varphi_A - h) d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Soit alors

$\delta > 0$ un nombre arbitraire, et soit K l'ensemble des points x tels que $h(x) \geqslant \delta$; K est fermé et contenu dans S, donc compact ; si on pose $B = A \cap \complement K$, B est un ensemble intégrable contenu dans A, et on a $h \leqslant \varphi_K + \delta . \varphi_B$ et par suite $\int h \, d\mu \leqslant \mu K + \delta . \mu B \leqslant \mu K + \delta . \mu A$, d'où finalement

$$\mu A \leqslant \int h \, d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu K + \frac{\varepsilon}{2} + \delta . \mu A$$

et comme δ est arbitraire, on peut le supposer choisi tel que $\delta . \mu A \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\mu A \leqslant \mu K + \varepsilon$.

COROLLAIRE 1.- <u>Pour tout ensemble intégrable</u> A, <u>il existe</u> :

1° <u>un ensemble négligeable</u> P <u>tel que</u> $A \cup P$ <u>soit intersection dénombrable d'ensembles ouverts intégrables</u> ;

2° <u>un ensemble négligeable</u> $Q \subset A$ <u>tel que</u> $A \cap \complement Q$ <u>soit réunion dénombrable d'ensembles compacts</u>.

En effet, si A est intégrable, pour tout entier n, il existe un ensemble ouvert intégrable G_n et un ensemble compact K_n tels que $K_n \subset A \subset G_n$ et que $\mu G_n - \mu A \leqslant \frac{1}{n}$, $\mu A - \mu K_n \leqslant \frac{1}{n}$; si B est l'intersection des G_n on a $\mu B = \mu A$ (cor. de la prop.5), et comme $A \subset B$, $P = B \cap \complement A$ est négligeable ; de même, si C est la réunion des K_n, on a $\mu C = \mu A$ (prop.5) et comme $C \subset A$, $Q = A \cap \complement C$ est négligeable.

COROLLAIRE 2.- <u>Tout ensemble de mesure extérieure finie est contenu dans la réunion d'un ensemble négligeable et d'une famille dénombrable d'ensembles compacts</u>.

Il suffit d'appliquer le cor.1 à un ensemble ouvert intégrable contenant l'ensemble donné.

3. <u>Fonctions étagées</u>.

PROPOSITION 9.- <u>Soient</u> F <u>un espace de Banach</u>, f <u>une fonction de</u> $\mathcal{L}^p_F$; <u>pour tout nombre</u> $a > 0$, <u>l'ensemble des</u> $x \in E$ <u>tels que</u> $|f(x)| \geqslant a$ <u>est intégrable</u>.

Comme $|f|^p$ est une fonction numérique $\geqslant 0$ et intégrable (§ 3, cor.3 du th.6), tout revient à démontrer la proposition pour une fonction numérique intégrable $f \geqslant 0$. Il existe alors une suite décroissante (h_n) de fonctions semi-continues inférieurement telles que $f \leqslant h_n$ et que $f(x)$ soit presque partout égale à l'enveloppe inférieure de la suite (h_n) (§ 3, cor.2 du th.7). Soient A l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \geqslant a$; si A_n est l'ensemble des points où $h_n(x) \geqslant a$, il existe un ensemble négligeable N tel que $A \cup N$ soit l'intersection des A_n ; il suffit donc de montrer que chacun des A_n est intégrable (prop.3 et 4). Or, si A_{np} est l'ensemble des x tels que $h_n(x) > a - \frac{1}{p}$, A_n est l'intersection des A_{np} (p=1,2,...) ; chacun des A_{np} est *ouvert*, puisque h_n est semi-continue inférieurement, et intégrable dès que $a > \frac{1}{p}$, car on a $h_n \geqslant (a-\frac{1}{p})\varphi_{A_{np}}$ d'où $\mu A_{np} \leqslant \frac{1}{a-\frac{1}{p}} \int h_n d\mu < +\infty$. Les A_n sont donc intégrables (prop.4), ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- *Pour tout* $a > 0$, *l'ensemble des* $x \in E$ *tels que* $|f(x)| > a$ (resp. $|f(x)| = a$) *est intégrable*.

En effet, l'ensemble B des points $x \in E$ tels que $|f(x)| > a$ est la réunion des ensembles intégrables B_n , B_n désignant l'ensemble des x tels que $|f(x)| \geqslant a + \frac{1}{n}$; et ces ensembles sont contenus dans l'ensemble intégrable des points x tels que $|f(x)| \geqslant \frac{a}{2}$, d'où le corollaire (prop.5). Si A est l'ensemble des points x tels que $|f(x)| \geqslant a$, l'ensemble des points x où $|f(x)| = a$ est égal à $A \cap \complement B$, donc intégrable (prop.3) .

On déduit de la prop.9 et de son corollaire que pour tout fonction intégrable $f \geqslant 0$, *l'image réciproque* par f de tout *intervalle d'origine* $a > 0$ est intégrable : par exemple, si $a < b$, l'image réciproque de l'intervalle $]a,b[$ est l'intersection de l'ensemble des x tels que

$f(x) > a$ et du complémentaire de l'ensemble des x tels que $f(x) > b$, d'où la proposition (prop.3) ; démonstration analogue pour les autres intervalles.

PROPOSITION 10.- <u>Soit</u> F <u>un espace de Banach</u> f <u>une application de</u> E <u>dans</u> F. <u>Les trois propositions suivantes sont équivalentes</u> :

a) f <u>est combinaison linéaire (à coefficients dans</u> F) <u>de fonctions caractéristiques d'ensembles intégrables</u> ;

b) f <u>ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est intégrable</u> ;

c) f <u>ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et pour tout</u> $a \neq 0$ <u>de</u> F, <u>l'ensemble des</u> $x \in E$ <u>tels que</u> $f(x) = a$ <u>est intégrable</u>.

Il est immédiat que a) entraîne b), car si $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{A_k}$, où les A_k sont intégrables, f est intégrable et prend au plus 2^n valeurs distinctes. D'autre part, c) entraîne a), car si a_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sont les valeurs $\neq 0$ distinctes que prend f dans E, et A_k l'ensemble (intégrable par hypothèse) des $x \in E$ tels que $f(x) = a_k$, on a $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{A_k}$. Reste à prouver que b) entraîne c). Si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, $f(E)$ est contenu dans le sous-espace G de F de dimension finie, engendré par ces valeurs ; si $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est une base de G, on peut écrire $f = \sum_{i=1}^{m} b_i f_i$, où les f_i sont intégrables (§ 3, cor.3 du th.2) et ne prennent qu'un nombre fini de valeurs ; en outre $f_i = f_i^+ - f_i^-$, donc finalement tout revient à démontrer que b) entraîne c) pour une fonction numérique f, finie, intégrable et $\geqslant 0$; mais cela est une conséquence immédiate du cor. de la prop.9 .

Nous dirons qu'une fonction f qui satisfait à l'une quelconque des trois conditions équivalentes de la prop.10 (et par suite aux trois) est une <u>fonction étagée</u> (relative à l'intégrale μ), à valeurs dans F. Il est clair que l'ensemble des fonctions étagées à valeurs dans F forme un <u>sous-espace vectoriel</u> de chacun des espaces $\mathcal{L}_F^p$.

PROPOSITION 11.- <u>Soit F un espace de Banach. L'ensemble des classes de fonctions étagées à valeurs dans F est partout dense dans chacun des espaces</u> L^p_F.

Nous déduirons cette proposition du résultat plus précis suivant :

PROPOSITION 12.- <u>Toute fonction continue f à support compact et à valeurs dans F peut être approchée uniformément par des combinaisons linéaires (à coefficients dans F) de fonctions caractéristiques d'ensembles compacts contenus dans le support de</u> f.

Commençons par démontrer la proposition pour une fonction numérique $f \geqslant 0$, continue et à support compact. Soit $a = \sup_{x \in E} f(x) < +\infty$, et soit n un entier quelconque ; pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble A_k des $x \in E$ tels que $f(x) \geqslant \frac{k}{n} a$ est fermé et contenu dans le support compact de f, donc est compact ; si on considère la fonction $g = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{A_k}$, on a $|f(x)-g(x)| \leqslant \frac{a}{n}$ pour tout $x \in E$, car si $x \in A_k \cap \complement A_{k+1}$, on a $k\frac{a}{n} \leqslant f(x) < (k+1)\frac{a}{n}$, et $g(x) = k\frac{a}{n}$.

Si maintenant f est continue, à support compact S et à valeurs dans F, elle peut être approchée uniformément par une combinaison linéaire $\sum_k a_k f_k$ de fonctions continues numériques $\geqslant 0$, à support compact ; d'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini d'ensembles compacts A_i et de points b_i tels que $\left| f(x) - \sum_i b_i \varphi_{A_i}(x) \right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in E$; comme $f = f\varphi_S$, on a aussi $\left| f(x) - \sum_i b_i \varphi_{A_i \cap S}(x) \right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in E$, ce qui achève de démontrer la prop. 12.

On déduit de là que $N_p(g - \sum_i b_i \varphi_{A_i \cap S}) \leqslant \varepsilon(\mu S)^{1/p}$; l'ensemble des classes de fonctions étagées est donc <u>dense</u> par rapport à l'ensemble des classes de fonctions continues à support compact, et ce dernier est dense dans L^p_F ~~xx~~ par définition, la prop. 11 est donc démontrée.

COROLLAIRE. - Pour que deux intégrales de Radon μ et ν sur E soient identiques, il suffit que $\mu K = \nu K$ pour toute partie compacte K de E.

En effet, cela entraîne que $\mu(g) = \nu(g)$ pour toute combinaison linéaire g (à coefficients complexes) de fonctions caractéristiques d'ensembles compacts ; il résulte alors de la prop.12 que $\mu(f) = \nu(f)$ pour toute fonction continue à support compact, c'est-à-dire par définition que $\mu = \nu$.

4. Intégrales de Radon sur $\mathbb{R}$ et fonctions à variation bornée.

Nous nous proposons de déterminer toutes les intégrales de Radon sur la droite numérique $\mathbb{R}$. Soit d'abord μ une intégrale de Radon positive sur $\mathbb{R}$; tout intervalle compact et tout intervalle ouvert borné est intégrable pour μ. Définissons sur $\mathbb{R}$ une fonction numérique finie $g(t)$ en posant

$$(9)\qquad \begin{cases} g(t) = \mu([0, t]) & \text{si } t \geqslant 0 \\ g(t) = -\mu(]t, 0[) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Avec cette définition, si t, t' sont deux nombres réels quelconques tels que $t < t'$, on a

$$(10)\qquad g(t') - g(t) = \mu(]t, t'])$$

Cette relation montre donc que g est une fonction croissante ; en outre, comme l'intervalle $]t, t']$ est l'intersection des intervalles $]t, t' + \frac{1}{n}]$, on voit (prop.4) que $g(t')$ est la limite de $g(t'')$ lorsque t'' tend vers t' en restant $> t'$; autrement dit $g(t+) = g(t)$, g est continue à droite dans $\mathbb{R}$, enfin, on a $g(0-) = 0$.

Supposons maintenant que μ soit une intégrale de Radon complexe quelconque sur $\mathbb{R}$, et définissons encore la fonction g par les relations (9) ; comme μ est combinaisons linéaire de quatre intégrales positives, ce qui précède montre que g est combinaison linéaire de de fonctions croissantes, est <u>continue à droite</u> dans $\mathbb{R}$ et que $g(0-)=0$. En outre, si $[a,b]$ est un intervalle compact quelconque dans $\mathbb{R}$, $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite finie croissante quelconque de points de $[a,b]$, on a

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{n-1}\left|g(t_{i+1})-g(t_i)\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\left|\mu(]t_i,t_{i+1}])\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |\mu|(]t_i,t_{i+1}]) \leqslant$$
$$\leqslant |\mu|([a,b]) .$$

DEFINITION 2.- <u>On dit qu'une fonction</u> g <u>définie dans un intervalle</u> $I\subset\mathbb{R}$, <u>et à valeurs complexes, est à variation bornée dans</u> I, <u>si, pour tout intervalle compact,</u> $J\subset I$, <u>il existe un nombre fini</u> $M_J>0$ <u>tel que, pour toute suite finie croissante</u> $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ <u>de points de</u> J, <u>on ait</u> $\sum_{i=1}^{n-1}\left|g(t_{i+1})-g(t_i)\right|\leqslant M_J$.

Nous venons donc de montrer que la fonction g, définie par les relations (9), est à <u>variation bornée dans</u> $\mathbb{R}$. Réciproquement :

PROPOSITION 13.- <u>Pour toute fonction</u> g <u>à valeurs complexes, continue à droite et à variation bornée dans</u> $\mathbb{R}$, <u>il existe une intégrale de Radon</u> μ <u>et une seule sur</u> $\mathbb{R}$ <u>satisfaisant aux relations</u> (10).

Considérons en effet l'espace vectoriel $\mathcal{E}_g$ (sur $\mathbb{C}$) des <u>fonctions en escalier, continues à gauche et à support compact</u> ; si f est une telle fonction, $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ la suite strictement croissante de ses points de discontinuité, et si on pose $\Delta_k=]a_k,a_{k+1}]$, on a $f=\sum_{k=1}^{n-1} f(a_{k+1})\varphi_{\Delta_k}$. Définissons $\mu(f)$ par la relation

$$(12)\qquad \mu(f)=\sum_{k=1}^{n-1} f(a_{k+1})(g(a_{k+1})-g(a_k))$$

La fonction ainsi définie est <u>linéaire</u> dans $\mathcal{E}_g$: en effet, remarquons que, si $(b_h)_{1\leqslant h\leqslant m}$ est une suite strictement croissante de points de $\mathbb{R}$, comprenant tous les points de discontinuité de f, et éventuellement d'autres points, on a aussi, en vertu de (12) et du fait que f est constante dans tout intervalle où elle est continue

(13) $$\mu(f) = \sum_{h=1}^{n-1} f(b_{h+1})(g(b_{h+1})-g(b_h))$$

Si alors f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathcal{E}_g$, il suffit d'appliquer la formule (13) à f_1 et f_2 en prenant pour suite (b_h) la suite des points de discontinuité de l'une au moins des fonctions f_1, f_2 ; cette suite comprend tous les points de discontinuité de f_1+f_2 , et la vérification de $\mu(f_1+f_2)= \mu(f_1)+ \mu(f_2)$ est alors immédiate.

De la formule (12), on tire d'autre part que, si le support de f est contenu dans un intervalle compact J , on a, en vertu de la déf. 2

(14) $$\left|\mu(f)\right| \leqslant \|f\| \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left|g(a_{k+1})-g(a_k)\right| \leqslant M_J \|f\| .$$

Autrement dit, μ est continue (pour la topologie de la convergence uniforme) dans le sous-espace de $\mathcal{E}_g$ formé des fonctions de support contenu dans J .

Cela étant, toute fonction continue f (à valeurs dans $\mathcal{C}$) à support contenu dans J peut être approchée uniformément par une fonction de $\mathcal{E}_g$ à support dans J : en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite croissante $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de points de J , telle que a_1 soit l'origine, a_n l'extrémité de J , et que dans chacun des intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, l'oscillation de f soit $\leqslant \varepsilon$; si $A_k =]a_k, a_{k+1}]$, on a alors $\left|f(x)- \sum_{k=1}^{n-1} f(a_{k+1})\varphi_{A_k}(x)\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les propriétés précédentes permettent donc de prolonger μ à l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions continues à support compact, la forme linéaire prolongée étant une intégrale de Radon, que nous noterons encore μ . Reste à voir que, pour cette intégrale de Radon, on a la relation (10). Soit $]a,b]$ un intervalle borné quelconque dans $\mathbb{R}$; pour tout n , il existe une application continue f_n de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, égale à 1 pour $a+ \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant b$, et à 0 pour $x \leqslant a$ et $x \geqslant b+ \frac{1}{n}$. D'après la définition de $\mu(f)$, tout revient à montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n assez grand tel que, pour

pour toute suite strictement croissante $(c_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ de points de l'intervalle $\left[b,b+\frac{1}{n}\right]$, on ait $\sum_{k=1}^{m-1}\left|g(c_{k+1})-g(c_k)\right|\leqslant\varepsilon$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; compte tenu du fait que la fonction g est continue à droite, il existerait un nombre $\alpha>0$, et, pour tout entier n, une suite croissante $(c_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ de points de l'intervalle $\left[b,b+\frac{1}{n}\right]$, telle que $c_1>b$ et que $\sum_{k=1}^{m-1}\left|g(c_{k+1})-g(c_k)\right|\geqslant\alpha$. Il est alors immédiat de définir par récurrence, une suite strictement décroissante (b_n) de points de $\mathbb{R}$, ayant pour limite b, et une suite croissante d'entiers (n_k) telle que $\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\left|g(b_n)-g(b_{n+1})\right|\geqslant\alpha$; on en conclut que $\sum_{n=1}^{n_{k+1}}\left|g(b_n)-g(b_{n+1})\right|\geqslant k\alpha$, et comme k est arbitrairement grand cela contredit la définition 2.

L'unicité de l'intégrale μ satisfaisant aux conditions de la prop.13 est immédiate, puisque deux intégrales satisfaisant à ces conditions doivent coïncider dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}_g$, et par suite dans $\mathcal{K}$. La prop.13 est donc complètement démontrée.

Il est clair que si g_1 et g_2 sont deux fonctions à variation bornée, continues à droite, et telles que g_2-g_1 soit une constante, les intégrales de Radon correspondant à g_1 et g_2 sont identiques ; la réciproque est immédiate. Il y a donc correspondance biunivoque entre l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ des intégrales de Radon sur $\mathbb{R}$ et l'espace des fonctions g à variation bornée, continues à droite et telles que $g(0-)=0$.

COROLLAIRE.- La partie réelle et la partie imaginaire de toute fonction continue à droite à variation bornée sont à variation bornée ; toute fonction réelle f continue à droite et à variation bornée est différence de deux fonctions croissantes continues à droite.

Dans la correspondance précédente, cela correspond en effet à la décomposition d'une intégrale de Radon en parties réelle et imaginaire, et à la décomposition d'une intégrale de Radon réelle en différence de deux intégrales positives (chap.II, § 2).

Si μ est une intégrale de Radon sur $\mathbb{R}$, g la fonction à variation bornée continue à droite (définie à une constante additive près) qui lui correspond, la valeur d'une intégrale $\int f\,d\mu$ se note souvent $\int f\,dg$ ou $\int f(x)dg(x)$; les intégrales de Radon sur $\mathbb{R}$ sont encore appelées <u>intégrales de Radon-Stieltjes</u>. La mesure d'un intervalle borné quelconque de $\mathbb{R}$ se déduit aisément de la formule (10) ; on a en effet

$$(15)\quad \begin{cases} \mu([a,b]) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(]a-\frac{1}{n},b]) = g(b)-g(a-) \\ \mu(]a,b[) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(]a,b-\frac{1}{n}]) = g(b-)-g(a) \\ \mu([a,b[) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu([a,b-\frac{1}{n}]) = g(b-)-g(a-) \end{cases}$$

et en particulier, pour tout point $x \in \mathbb{R}$

$$(16)\qquad \mu\{x\} = g(x)-g(x-)$$

Si un intervalle non borné, par exemple $]a,+\infty[$, est intégrable, sa mesure doit être égale à la limite de $\mu(]a,a+n])$, donc à $\lim\limits_{n\to\infty}(g(a+n)-g(a))$; cette limite doit donc exister, mais cette condition n'est suffisante pour que l'intervalle $]a,+\infty[$ soit intégrable que lorsque μ est une mesure <u>positive</u>.

Σ

<u>Exemples</u>.- 1) L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ correspond à la fonction croissante $g(t)=t$.

2) Si $g(t)=0$ pour $t \leqslant x$, $g(t)=1$ pour $t \geqslant x$, l'intégrale de Radon correspondant à g n'est autre que l'intégrale ε_x définie par la masse $+1$ placée au point x.

3) Si $g(t)=[t]$ (partie entière de t), l'intégrale correspondante est définie par la masse $+1$ placée en chaque point de $\mathbb{Z}$.

4) Nous verrons au chap. IV que si g est primitive d'une fonction réglée (que nous désignerons par g'), g est à variation bornée, et l'intégrale de Radon μ correspondante est donnée par $d\mu(x) = g'(x)dx$.

PROPOSITION 14.- Pour toute intégrale de Radon μ sur $\mathbb{R}$, toute fonction réglée dans $\mathbb{R}$ et à support compact est intégrable.

En effet, si f est une fonction réglée à support compact S , f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier g_n à support contenu dans S ; ces fonctions sont uniformément bornées, autrement dit, il existe un nombre M tel que $|g_n| \leq M.\varphi_S$; le th. de Lebesgue montre donc que f est intégrable, et que $\int f \, d\mu$ est limite de la suite $\int g_n \, d\mu$.

Il en résulte en particulier que pour toute fonction réglée f à support compact, l'intégrale de Lebesgue $\int f(x)dx$ est égale à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ définie au Livre IV, chap. II, § 1.

Remarque.- Il est aisé d'étendre tous les résultats de ce n° aux intégrales de Radon sur un intervalle quelconque $I \subset \mathbb{R}$ (qui est un sous-espace localement compact) ; nous laissons au lecteur le soin de faire cette extension.

§ 5. Fonctions mesurables et ensembles mesurables.

1. Le théorème de Lusin.

THÉORÈME 1 (Lusin).- Soient E un espace localement compact, F un espace de Banach, μ une intégrale de Radon sur E , f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^p_F$. Pour tout ensemble compact $K \subset E$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K$ tel que la restriction de f à K_1 soit continue et que l'on ait $|\mu|(K \cap \complement K_1) \leq \varepsilon$.

On peut se borner au cas où μ est une intégrale positive.

Soient δ et ε deux nombres > 0 arbitraires. Par définition de $\mathcal{L}^p_F$, il existe une fonction $g \in \mathcal{K}_F$ telle que

(1) $$\int |f(x)-g(x)|^p \, d\mu(x) \leqslant \delta . \varepsilon^p$$

Soit A l'ensemble des $x \in K$ tels que $|f(x)-g(x)| \geqslant \varepsilon$; A est intégrable (§ 4, prop. 9), et comme $\varepsilon^p . \varphi_A \leqslant |f(x)-g(x)|^p$, la relation (1) montre que $\mu A < \delta$. En résumé, quels que soient $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble intégrable $A \subset K$ et une fonction continue g telle que $\mu A \leqslant \delta$ et $|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon$ dans $K \cap \complement A$.

Soit alors ε un nombre > 0 arbitraire. Pour tout entier $n > 0$, il existe un ensemble intégrable $A_n \subset K$ et une fonction continue g_n tels que $\mu A_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ et $|f(x)-g_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$ dans $K \cap \complement A_n$. Soit A la réunion des A_n ; A est intégrable et on a $\mu A \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (§ 4, prop. 6). Dans l'ensemble $B = K \cap \complement A$, f est limite <u>uniforme</u> de la suite de fonctions <u>continues</u> g_n ; la restriction de f à B est donc <u>continue</u> (<u>Top. gén.</u>, chap. X, § 2, th. 1). Comme B est intégrable il existe un ensemble compact $K_1 \subset B \subset K$ tel que $\mu(B \cap \complement K_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (§ 4, th. 1), d'où $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

2. <u>Définition et propriétés des fonctions mesurables.</u>

Le th. de Lusin conduit à la notion suivante :

DÉFINITION 1.- <u>Soient E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon sur E, F un espace topologique quelconque. On dit qu'une application f de E dans F est mesurable pour l'intégrale μ (ou encore, μ-mesurable) si, pour tout ensemble compact K et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K$ tel que la restriction de f à K_1 soit continue et que l'on ait</u> $|\mu|(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$.

Cette définition montre aussitôt que, pour qu'une application f de E dans un espace de Banach F soit mesurable, il suffit que pour toute partie compacte K de E, la fonction $f\varphi_K$ soit mesurable.

Le th. de Lusin peut s'énoncer en disant que <u>toute fonction de puissance</u> p-<u>ème intégrable est mesurable</u>. Il est clair que toute fonction <u>continue</u> dans E est mesurable.

En particulier, une fonction numérique <u>constante</u> et $\neq 0$ est mesurable, mais elle n'appartient à aucun espace $\mathcal{L}^p_R$ si l'intégrale μ n'est pas bornée (cf. th.3).

On notera qu'il résulte aussitôt de la déf.1 que si μ et ν sont deux mesures de Radon sur E telles que $|\nu| \leq |\mu|$, toute fonction μ-mesurable est aussi ν-mesurable.

THEOREME 2.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement compact</u>, μ <u>une intégrale de Radon sur</u> E, (F_n) <u>une suite d'espaces topologiques</u>, $F = \prod_{n=1}^{\infty} F_n$ <u>leur produit</u>. <u>Pour chaque indice</u> n, <u>soit</u> f_n <u>une application mesurable de</u> E <u>dans</u> F_n, <u>et soit</u> $f(x) = (f_n(x)) \in F$; <u>pour toute application continue</u> u <u>de</u> $f(E)$ <u>dans un espace topologique</u> G, <u>la fonction</u> $x \to u(f(x))$ <u>est mesurable</u>.

En effet, soit $K \subset E$ un ensemble compact, et soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Par hypothèse, pour tout n, il existe un ensemble compact $K_n \subset K$ tel que $|\mu|(K \cap \complement K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, et que f_n soit continue dans K_n. L'ensemble $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est intégrable, et on a $|\mu|(K \cap \complement A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(K \cap \complement K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$; il contient donc un ensemble compact K_0 tel que $|\mu|(K \cap \complement K_0) \leq \varepsilon$. Par hypothèse, les f_n sont continues dans K_0, donc il en est de même de f, et par suite de $u \circ f$, ce qui démontre le théorème.

Le théorème ne s'étend pas à un produit <u>quelconque</u> d'espaces topologiques (exerc. 4 b).

COROLLAIRE 1.- <u>L'enveloppe supérieure (resp. inférieure) d'un nombre fini de fonctions numériques mesurables est mesurable.</u>

En effet, $\sup(u,v)$ est continue dans $\overline{R} \times \overline{R}$.

COROLLAIRE 2.- <u>Pour qu'une fonction numérique</u> f <u>soit mesurable, il faut et il suffit que</u> f^+ <u>et</u> f^- <u>le soient.</u>

La condition est nécessaire d'après le cor.1 ; elle est suffisante parce que l'image de E par $x \to (f^+(x), f^-(x))$ dans $\overline{R} \times \overline{R}$ ne contient pas les points où $u+v$ n'est pas défini, et par suite l'application $(u,v) \to u+v$ est continue dans cette image.

COROLLAIRE 3.- <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont deux fonctions mesurables dans</u> E , <u>à valeurs dans un espace normé</u> F , $f+g$ <u>et</u> αf <u>sont mesurables</u> (α scalaire quelconque).

L'ensemble des applications mesurables de E dans un espace normé F (sur $\mathbb{C}$) est donc un <u>espace vectoriel</u> sur $\mathbb{C}$.

Il résulte aussi du th.2 que si f est une application mesurable de E dans un espace normé F , la fonction numérique $|f|$ est mesurable.

COROLLAIRE 4.- <u>Soient</u> F, G, H <u>trois espaces normés</u> $(u,v) \to [u \cdot v]$ <u>une application bilinéaire continue de</u> $F \times G$ <u>dans</u> H . <u>Si</u> f <u>est une application mesurable de</u> E <u>dans</u> F , g <u>une application mesurable de</u> E <u>dans</u> G , $[f \cdot g]$ <u>est une application mesurable de</u> E <u>dans</u> H .

En particulier, si f est une application mesurable de E dans F , g une application mesurable de E dans $\mathbb{C}$, gf est mesurable. Si F est une <u>algèbre normée</u>, f et g deux applications mesurables de E dans F , fg est mesurable.

3. Fonctions et ensembles localement négligeables.

DEFINITION 2.- Soient E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon sur E. On dit qu'une application f de E dans un espace de Banach F est localement négligeable si, pour tout ensemble compact $K \subset E$, l'ensemble des points de K où $f(x) \neq 0$ est négligeable. On dit qu'une partie $A \subset E$ est localement négligeable si sa fonction caractéristique φ_A est localement négligeable.

Cette dernière définition équivaut à dire que pour tout ensemble compact K, $A \cap K$ est négligeable.

Le terme de "localement" se justifie de la façon suivante : si une fonction f est telle que, pour tout point $x \in E$, il existe un voisinage V_x de x tel que l'ensemble des $y \in V_x$ tels que $f(y) \neq 0$ soit négligeable, alors est localement négligeable. En effet, si K est un ensemble compact quelconque, il existe un nombre fini de points $x_i \in K$ tels que les voisinages V_{x_i} forment un recouvrement de K ; l'ensemble des points de K tels que $f(y) \neq 0$ est donc contenu dans une réunion finie d'ensembles négligeables, et est par suite négligeable.

Il est clair que toute fonction négligeable est a fortiori localement négligeable ; la réciproque n'est pas nécessairement vraie (n°6, exer.14).

PROPOSITION 1.- Toute partie d'un ensemble localement négligeable est localement négligeable. Toute réunion dénombrable d'ensembles localement négligeables est localement négligeable.

La proposition résulte aussitôt de la définition 2 et des propriétés des ensembles négligeables (§ 2, prop.7 et 8).

PROPOSITION 2.- Tout ensemble intégrable et localement négligeable est négligeable.

En effet, un tel ensemble A est réunion d'un ensemble négligeable N et d'une suite croissante d'ensembles compacts K_n (§ 4, cor.1 du th.1) ; par hypothèse, $K_n = K_n \cap A$ est négligeable, donc aussi A .

La définition d'une fonction localement négligeable f équivaut à dire que l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \neq 0$ est <u>localement négligeable</u>. On en déduit aussitôt (prop.1) que si f est une fonction numérique $\geqslant 0$ localement négligeable, et g une fonction telle que $|g| \leqslant f$, g est localement négligeable ; de même, si (f_n) est une suite de fonctions numériques $\geqslant 0$ et localement négligeables, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est localement négligeable.

PROPOSITION 3.- <u>Toute fonction localement négligeable</u> f <u>telle que</u> $N_1(f) < +\infty$ <u>est négligeable</u>.

En effet, par hypothèse, il existe une fonction intégrable $g \geqslant 0$ telle que $|f| \leqslant g$, donc l'ensemble localement négligeable A des x tels que $f(x) \neq 0$ est contenu dans l'ensemble B des x tels que $g(x) \neq 0$. Or, si B_n est l'ensemble des points où $g(x) \geqslant 1/n$, B_n est intégrable (§ 4,prop.9) et B est la réunion des B_n ; d'après les prop.1 et 2 , chacun des ensembles $B_n \cap A$ est négligeable, donc il en est de même de $A = B \cap A = \bigcup_n (B_n \cap A)$.

COROLLAIRE.- <u>Pour qu'un ensemble</u> A <u>soit localement négligeable, il faut et il suffit que pour tout ensemble intégrable</u> B , $B \cap A$ <u>soit négligeable</u>.

La condition est en effet nécessaire en vertu de la prop.3, et suffisante en vertu de la déf.2 .

Si $\underline{P}\{x\}$ est une propriété contenant un seul argument libre x E , la propriété " $\underline{P}\{x\}$ <u>localement presque partout</u> (<u>par rapport</u> à μ)" sera par définition synonyme de la propriété "<u>l'ensemble des</u> $x \in E$ <u>tels que</u> (non $\underline{P}\{x\}$) <u>est localement négligeable</u> (<u>par rapport à</u> μ)".

PROPOSITION 4.- Soit f une application mesurable de E dans un espace topologique F. Toute application g de E dans F telle que $f(x)=g(x)$ localement presque partout, est mesurable.

En effet, soit $K \subset E$ un ensemble compact quelconque, $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Par hypothèse, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K$ tel que $|\mu|(K \cap \complement K_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et que f soit continue dans K_1 ; d'autre part, l'ensemble A des points de K_1 tels que $f(x) \neq g(x)$ est négligeable, donc $|\mu|(K_1 \cap \complement A) = |\mu|(K_1)$; il existe par suite un ensemble compact $K_2 \subset A$ tel que $|\mu|(K_1 \cap \complement K_2) = |\mu|(K_1 \cap \complement A \cap \complement K_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc $|\mu|(K \cap \complement K_2) \leqslant \varepsilon$ et g est continue dans K_2, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE.- Toute fonction localement négligeable est mesurable.

4. Suites de fonctions mesurables.

PROPOSITION 5.- Soit (f_n) une suite d'applications mesurables de E dans un espace topologique F. Pour tout ensemble compact $K \subset E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_0 \subset K$ tel que $|\mu|(K \cap \complement K_0) \leqslant \varepsilon$, et que toutes les fonctions f_n soient continues dans K_0.

En effet, par définition, il existe pour tout entier n un ensemble compact $K_n \subset K$ tel que $|\mu|(K \cap \complement K_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$, et que f_n soit continue dans K_n. Si on pose $K_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, K_0 est compact, toutes les fonctions f_n sont continues dans K_0, et comme $K \cap \complement K_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cap \complement K_n)$, on a $|\mu|(K \cap \complement K_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(K \cap \complement K_n) \leqslant \varepsilon$.

THEOREME 3 (Egoroff).- Soit (f_n) une suite d'applications mesurables de E dans un espace topologique métrisable F, qui converge simplement dans E vers une application f. Dans ces conditions :

1° f est mesurable ;

2° __pour tout ensemble compact__ $K \subset E$ __et tout nombre__ $\varepsilon > 0$, __il existe un ensemble compact__ $K_1 \subset K$ __tel que__ $|\mu|(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$, __et que, dans__ K_1 , __la suite__ $(f_n(x))$ __converge uniformément vers__ $f(x)$.

En effet, soit d une distance compatible avec la topologie de F . D'après la prop.5, il existe un nombre compact $K_0 \subset K$ tel que $|\mu|(K \cap \complement K_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et que toutes les fonctions f_n soient continues dans K_0 . Pour tout couple d'entiers $q > 0$, $r > 0$, soit $A_{q,r}$ l'ensemble des points $x \in K_0$ tels que, pour au moins un couple d'entiers $m \geqslant q$, $n \geqslant q$, on ait $d(f_m(x), f_n(x)) \geqslant \frac{1}{r}$; comme, pour m et n fixés, l'ensemble des $x \in K_0$ tels que $d(f_m(x), f_n(x)) \geqslant \frac{1}{r}$ est compact, $A_{q,r}$ est réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles compacts contenus dans K_0 , donc est intégrable (§ 4, prop.6). Lorsque r est fixé, l'intersection des ensembles $A_{q,r}$ $(q=1,2,\ldots)$ est __vide__ en vertu de l'hypothèse ; ces ensembles formant évidemment une suite décroissante, on a donc $\lim_{q \to \infty} |\mu|(A_{q,r})=0$ (§ 4, cor. de la prop.4). Il existe par suite un entier q_r tel que $|\mu|(A_{q_r,r}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{r+2}}$. Soit A la réunion des ensembles $A_{q_r,r}$ $(r=1,2,\ldots)$; A est intégrable et on a $|\mu|(A) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} |\mu|(A_{q_r,r}) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$; si $B = K_0 \cap \complement A$, il existe un ensemble compact $K_1 \subset B$ tel que $|\mu|(B \cap \complement K_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, d'où $|\mu|(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$. Or, par définition, pour tout entier $r > 0$, les relations $m \geqslant q_r$, $n \geqslant q_r$ entraînent $d(f_m(x), f_n(x)) < \frac{1}{r}$ pour __tout point__ $x \in K_1$; cela signifie que la suite $(f_n(x))$ converge __uniformément__ vers $f(x)$ dans K_1 ; comme les f_n sont continues dans K_1 , il en est de même de f , ce qui achève la démonstration.

__Remarque__.- Le théorème ne s'étend pas au cas où F est un espace topologique quelconque (exerc. 4b), ni à un filtre quelconque de fonctions mesurables qui converge simplement.

COROLLAIRE.- Soit (f_n) une suite quelconque de fonctions numériques mesurables. Les fonctions $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$, $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ sont mesurables.

Remarquons d'abord que la droite achevée $\overline{R}$, homéomorphe à un intervalle compact de R , est métrisable. La fonction $\sup\limits_n f_n$ est limite simple de la suite croissante des fonctions $g_n = \sup(f_1,\dots,f_n)$ qui sont mesurables (cor.1 du th.2) ; de même $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$ est limite simple de la suite décroissante des fonctions mesurables $h_n = \sup\limits_{p \geqslant 0} f_{n+p}$.

5. Ensembles mesurables.

DEFINITION 3.- Soient E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon sur E . On dit qu'un ensemble $A \subset E$ est mesurable pour l'intégrale μ (ou encore, est μ-mesurable) si sa fonction caractéristique φ_A est mesurable.

Il est clair que l'espace tout entier E est mesurable. Tout ensemble intégrable est mesurable ; tout ensemble localement négligeable est mesurable (cor. de la prop.4).

PROPOSITION 6.- La réunion et l'intersection d'une famille dénombrables d'ensembles mesurables est mesurable. Le complémentaire de tout ensemble mesurable est mesurable.

En effet, la fonction caractéristique de la réunion (resp. de l'intersection) d'une suite (A_n) d'ensembles mesurables est $\sup\limits_n \varphi_{A_n}$ (resp. $\inf\limits_n \varphi_{A_n}$), donc est mesurable (cor. du th.3) ; d'autre part si A est mesurable, la fonction caractéristique de $\complement A$ est $1-\varphi_A$, donc est mesurable (cor.3 du th.2).

PROPOSITION 7.- Pour qu'un ensemble $A \subset E$ soit mesurable, il faut et il suffit que pour tout ensemble compact $K \subset E$, $A \cap K$ soit intégrable.

La condition est <u>nécessaire</u>. En effet, soit K un ensemble compact quelconque, $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire ; il existe un ensemble ouvert $U \supset K$ tel que $|\mu|(U \cap \complement K) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; d'autre part, il existe par hypothèse un ensemble compact $K_0 \subset K$ tel que $|\mu|(K \cap \complement K_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et que φ_A soit continue dans K_0 ; comme les ensembles $K_1 = A \cap K_0$ et $K_2 = K_0 \cap \complement A$ sont les ensembles où φ_A prend les valeurs 1 et 0 dans K_0, ils sont <u>compacts</u> ; $U_1 = U \cap \complement K_2$ est donc ouvert, et on a $U_1 \cap \complement K_1 = (U \cap \complement K) \cup (K \cap \complement K_0)$, d'où $|\mu|(U_1 \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$; comme $K_1 \subset A \cap K \subset U_1$, $A \cap K$ est intégrable (§4, th.1).

La condition est <u>suffisante</u>. En effet, si elle est remplie, pour tout ensemble compact K, $A \cap K$ et $K \cap \complement A$ sont intégrables. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un ensemble compact $K_1 \subset A \cap K$ et un ensemble compact $K_2 \subset K \cap \complement A$ tels que $|\mu|(A \cap K \cap \complement K_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $|\mu|(K \cap \complement A \cap \complement K_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; l'ensemble $K_0 = K_1 \cup K_2$ est donc compact et comme K_1 et K_2 ne se rencontrent pas, la fonction φ_A est continue dans K_0 ; d'autre part, on a $|\mu|(K \cap \complement K_0) \leqslant \varepsilon$, ce qui achève de montrer que φ_A est mesurable.

COROLLAIRE .- <u>Dans E, les ensembles fermés et les ensembles ouverts sont mesurables</u>.

En effet, si $A \cap E$ est fermé, $A \cap K$ est compact (donc intégrable) pour tout ensemble compact K ; donc A est mesurable, et il en est de même de l'ensemble ouvert $\complement A$ (prop.6).

PROPOSITION 8.- <u>Tout ensemble mesurable contenu dans un ensemble intégrable est intégrable</u>.

En effet, soit A un ensemble intégrable, $B \subset A$ un ensemble mesurable. Il existe une suite croissante (K_n) d'ensembles compacts contenus dans A, telle que A soit réunion des K_n et d'un ensemble négligeable N (§ 4, cor. 1 du th. 1) ; B est donc réunion des ensembles $B \cap K_n$ et de l'ensemble négligeable $B \cap N$. Mais d'après la prop. 7, chacun des ensembles $B \cap K_n$ est intégrable, donc B est intégrable (§ 4, prop. 6).

COROLLAIRE 1.- Pour qu'un ensemble A soit intégrable, il faut et il suffit qu'il soit mesurable et de mesure extérieure finie.

En effet, si A est de mesure extérieure finie, il est contenu dans un ensemble ouvert intégrable.

COROLLAIRE 2.- L'intersection d'un ensemble mesurable et d'un ensemble intégrable est un ensemble intégrable.

THÉORÈME 4.- Pour qu'une application f de E dans un espace de Banach F soit mesurable, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

a) l'image réciproque par f de toute boule fermée de F est mesurable ;

b) pour tout ensemble compact $K \subset E$, il existe un sous-espace vectoriel V de F, de type dénombrable et tel que $f(x) \in V$ presque partout dans K.

1° Les conditions sont nécessaires. En effet, soit B un ensemble fermé dans F, et soit $A = \overset{-1}{f}(B)$; soit K un ensemble compact quelconque dans E ; il existe une suite croissante (K_n) d'ensembles compacts contenus dans K, tels que $|\mu|(K \cap \complement K_n) \leqslant \frac{1}{n}$, et sur chacun desquels f est continue ; $A \cap K_n$, image réciproque de B par la restriction de f à K_n, est donc fermée dans K_n, et par suite compacte ; il en résulte que $A \cap K$ est réunion des ensembles compacts $A \cap K_n$ et d'un ensemble négligeable, donc (§ 4, prop. 6) $A \cap K$ est intégrable, ce qui prouve que A est mesurable (prop. 7).

D'autre part, comme f est continue dans K_n, f est limite uniforme, dans K_n, d'une suite de fonctions étagées g_m ; comme $g_m(K_n)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de F de dimension finie, $f(K_n)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de F de type dénombrable ; il en est par suite de même de $f(\bigcup_n K_n) = \bigcup_n f(K_n)$.

2° Les conditions sont <u>suffisantes</u>. Supposons-les remplies, et soit $K \subset E$ un ensemble compact quelconque. En modifiant au besoin f sur un ensemble négligeable, on peut supposer, d'après b), que $f(K)$ est contenu dans un sous-espace fermé V de F, de type dénombrable. Soit (a_n) une suite partout dense dans V, et soit $A_{n,p}$ l'ensemble des $x \in K$ tels que $|f(x) - a_n| \leq \frac{1}{p}$. D'après b), les $A_{n,p}$ sont intégrables (prop.7). Pour p fixé, définissons par récurrence une suite d'ensembles $C_{n,p} \subset K$ en posant $C_{1,p} = A_{1,p}$ et $C_{n+1,p} = A_{n+1,p} \cap \complement(\bigcup_{k \leq n} A_{k,p}) \cap K$; les $C_{n,p}$ sont intégrables, deux à deux sans point commun et leur réunion est égale à K. Soit $\varphi_{n,p}$ la fonction caractéristique de $C_{n,p}$; la fonction $f_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_{n,p}$ est mesurable (th.3), et on a $|f(x) - f_p(x)| \leq \frac{1}{p}$ en tout point $x \in K$. En d'autres termes, la fonction $f\varphi_K$ est limite uniforme de la suite de fonctions mesurables f_p, et par suite est mesurable (th.3) ; comme K est arbitraire, f est mesurable.

<u>Remarque</u>.- La condition a) seule ne suffit pas pour que f soit mesurable (cf. exerc.5).

COROLLAIRE 1.- <u>Si f est mesurable, pour tout ensemble compact</u> $K \subset E$, <u>il existe une suite</u> (g_p) <u>de fonctions étagées</u> (§ 4, n°3) <u>de support contenu dans</u> K, <u>telles que</u> $|g_p| \leq |f|$ <u>et que</u> $g_p(x)$ <u>tende presque partout dans</u> K <u>vers</u> $f(x)$.

Avec les notations de la démonstration du th.4, il suffit de prendre pour chaque entier p , un nombre n_p tel que

$|\mu|(K \cap \complement(\bigcup_{k=1}^{n_p} c_{k,p})) \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$, et de définir g_p par la condition

$$g_p = \sum_{k=1}^{n_p} a_k (1 - \frac{1}{p|a_k|}) \varphi_{k,p}$$

Si on pose $G_p = \bigcup_{k=1}^{n_p} C_{k,p}$ et $H_p = \bigcap_{n \geqslant p} G_n$, on a $|\mu|(K \cap \complement H_p) \leqslant \frac{1}{2^p}$, et la suite (H_p) est croissante ; si $H = \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p$, $K \cap \complement H$ est négligeable, et tout point $x \in H$ appartient à un H_p , donc on a, pour $n \geqslant p$, $|f(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{2}{n}$, ce qui démontre le corollaire.

COROLLAIRE 2.- <u>Si une fonction f est mesurable, l'image réciproque par f de tout ensemble fermé et de tout ensemble ouvert dans F est mesurable.</u>

La première partie de la démonstration du th.4 démontre en effet que si B est fermé dans F , $\overset{-1}{f}(B)$ est mesurable ; d'autre part, si A est ouvert dans F , $\overset{-1}{f}(A)$ est complémentaire de $\overset{-1}{f}(\complement A)$, qui est mesurable d'après ce qui précède, donc $\overset{-1}{f}(A)$ est mesurable (prop.6).

PROPOSITION 9.- <u>Pour qu'une fonction numérique</u> $f \geqslant 0$ <u>soit mesurable, il faut et il suffit que, pour tout</u> $\alpha \geqslant 0$ <u>et fini, l'ensemble</u> $\overset{-1}{f}([\alpha, +\infty])$ <u>soit mesurable</u>.

En effet, le même raisonnement que dans la première partie de la démonstration du th.4 montre que si f est mesurable, l'image réciproque par f de tout ensemble fermé de $\overline{R}$ est mesurable en particulier $\overset{-1}{f}([\alpha, +\infty])$. Inversement, si cette condition est remplie, $\overset{-1}{f}([0,\alpha[)$, complémentaire de $\overset{-1}{f}([\alpha, +\infty])$ est mesurable, donc aussi $\overset{-1}{f}([0,\alpha])$, intersection des ensembles $\overset{-1}{f}([0,\alpha+\frac{1}{n}[)$, et $\overset{-1}{f}([\alpha,\beta])$ (où $\alpha \leqslant \beta$) ·
~~intersection des ensembles f(0,α + 1/n), et f(α,β) (où α β)~~
intersection de $\overset{-1}{f}([0,\beta])$ et du complémentaire de $\overset{-1}{f}([0,\alpha[)$;

d'autre part, $A = \overset{-1}{f}(+\infty)$, intersection des ensembles $\overset{-1}{f}([n,+\infty])$ est lui aussi mesurable. Soit alors g la fonction égale à 0 dans A, à f dans $\complement A$; le th.4 montre que g est mesurable (la condition b) étant trivialement vérifiée) ; d'autre part, la fonction h égale à $+\infty$ dans A, à 0 dans $\complement A$ est l'enveloppe supérieure des fonctions $n\varphi_A$, donc est mesurable (cor. du th.2) ; et finalement $f=g+h$ est mesurable (th.2)

On voit aisément de la même manière qu'il suffit, pour que f soit mesurable, que les ensembles $\overset{-1}{f}([a_n,+\infty])$ (ou les ensembles $\overset{-1}{f}(]a_n,+\infty])$) soient mesurables, (a_n) désignant une suite de points partout dense dans $[0,+\infty]$.

6. <u>Ensembles dénombrablement mesurables.</u>

DÉFINITION 4.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement compact,</u> μ <u>une intégrale de Radon sur</u> E . <u>On dit qu'une partie</u> A <u>de</u> E <u>est dénombrablement mesurable</u> (pour μ) <u>si elle est réunion dénombrable d'ensembles intégrables</u>.

PROPOSITION 10.- <u>Tout ensemble dénombrablement mesurable est mesurable. Tout ensemble mesurable contenu dans un ensemble dénombrablement mesurable est dénombrablement mesurable</u>.

La première partie de la proposition est une conséquence triviale de la prop.6 . D'autre part, si A est réunion d'une suite (A_n) d'ensembles intégrables, et si $B \subset A$ est mesurable, les ensembles $B \cap A_n$ sont intégrables (cor.2 de la prop.8) et par suite B est réunion de la suite d'ensembles intégrables $B \cap A_n$.

COROLLAIRE 1.- <u>Pour que tout ensemble mesurable dans</u> E <u>soit dénombrablement mesurable, il faut et il suffit que</u> E <u>soit dénombrablement mesurable</u>.

C'est nécessaire, puisque E est mesurable, et c'est suffisant en vertu de la prop. 10.

En particulier, si E est <u>réunion dénombrable d'ensembles compacts</u>, tout ensemble mesurable dans E est dénombrablement mesurable.

COROLLAIRE 2.- <u>Tout ensemble localement négligeable et dénombrablement mesurable est négligeable</u>.

En effet, il est réunion dénombrable d'ensembles localement négligeables et intégrables, donc négligeables (prop.2).

PROPOSITION 11.- <u>Si</u> A <u>est un ensemble dénombrablement mesurable, il existe une suite</u> (K_n) <u>d'ensembles compacts telle que</u> A <u>soit réunion des</u> K_n <u>et d'un ensemble négligeable</u>.

En effet, A est réunion d'une suite d'ensembles intégrables A_n, et chacun des A_n est réunion d'une suite $(K_{mn})_{m \in N}$ d'ensembles compacts, et d'un ensemble négligeable N_n (§ 4, cor.1 du th.1) ; donc A est réunion des K_{mn} et de l'ensemble négligeable $N = \bigcup_n N_n$.

PROPOSITION 12.- <u>Pour toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{L}^p_F$, <u>l'ensemble des points</u> x <u>tels que</u> $f(x) \neq 0$ <u>est dénombrablement mesurable</u>.

En effet, cet ensemble est réunion des ensembles où $|f(x)| \geqslant \frac{1}{n}$, qui sont intégrables (§ 4, prop.9).

7.- <u>Critères d'intégrabilité</u>.

THÉORÈME 5.- <u>Pour qu'une fonction</u> f <u>définie dans</u> E, <u>à valeurs dans un espace de Banach</u> F, <u>soit intégrable, il faut et il suffit qu'elle soit mesurable et qu'on ait</u> $N_1(f) < +\infty$.

Les conditions étant évidemment nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes. Montrons d'abord que l'ensemble A des points où $f(x) \neq 0$ est dénombrablement mesurable. En effet, pour tout $a > 0$, l'ensemble B_a des points où $|f(x)| \geqslant a$ est mesurable (prop.9) et comme $a.\varphi_{B_a} \leqslant |f|$, on a $a.|\mu| B_a \leqslant N_1(f) < +\infty$, ce qui montre (cor.1 de la prop.8) que B_a est intégrable ; or, l'ensemble A est réunion des ensembles $B_{1/n}$. Il existe donc (prop.11) une suite (K_n) d'ensembles compacts, deux à deux sans point commun, telle que A soit réunion des K_n et d'un ensemble négligeable. D'autre part pour chaque ensemble K_n, il existe une suite $(g_{nm})_{m\geqslant 1}$ de fonctions étagées, nulles dans $\complement K_n$, telles que $|g_{nm}|\leqslant|f|$ dans K_n, et que $g_{nm}(x)$ tende presque partout dans K_n vers $f(x)$. Posons, pour tout n, $f_n=g_{1,n}+g_{2,n}+\ldots+g_{n,n}$; f_n est une fonction étagée telle que $|f_n|\leqslant|f|$, et dans chaque ensemble K_q, la restriction de f_n est égale à celle de g_{qn} dès que $n\geqslant q$, donc $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ presque partout dans chacun des K_q, et par suite, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ presque partout dans E ; comme $N_1(f)<+\infty$, il résulte du th. de Lebesgue (§3,th.5) que f est ~~négligea~~ intégrable.

COROLLAIRE 1.- <u>Pour qu'une fonction f appartienne à $\mathcal{L}^p_F$, il faut et il suffit qu'elle soit mesurable et que $N_p(f)<+\infty$.</u>

Les conditions sont évidemment nécessaires. Inversement si elles sont remplies, la fonction $g=|f|^{p-1}.f$ est mesurable (th.2) et $N_1(g)=(N_p(f))^p<+\infty$, donc g est intégrable, ce qui prouve (§3, cor.1 du th.6) que $f\in\mathcal{L}^p_F$.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit f_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ une fonction intégrable définie dans E, à valeurs dans un espace de Banach F_i ; soit u une application continue de $\prod_{i=1}^{n} F_i$ dans un espace de Banach G ; pour que la fonction $g(x)=u(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x))$ soit intégrable, il faut et il suffit que $N_1(g)<+\infty$.</u>

En effet, g est mesurable (th.2).

8. Intégrale étendue à un sous-ensemble.

DEFINITION 5.- Soit $A \subset E$ un ensemble mesurable. On dit qu'une fonction f, définie dans E, à valeurs dans un espace de Banach F, est intégrable dans A si la fonction $f\varphi_A$ est intégrable ; on désigne alors l'intégrale $\int f(x)\varphi_A(x)d\mu(x)$ par la notation $\int_A f(x)d\mu(x)$ ou $\int_A f \, d\mu$, et on dit que c'est l'intégrale de f étendue à A.

Dire qu'une fonction f est intégrable dans E signifie donc qu'elle est intégrable, et on a $\int_E f \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Exemple.- Soit μ l'intégrale de Lebesgue sur R, $I = [a,b]$ un intervalle compact de R, f une fonction définie dans R et réglée dans un intervalle contenant I ; l'intégrale $\int_I f(x)dx$ n'est autre que l'intégrale désignée par cette notation (ou par $\int_a^b f(x)dx$) dans Fonct.var.réelle, chap.II, §1.

Lorsque μ est une mesure sur R définie par une fonction croissante et continue $g(t)$ (§ 4, n°4), pour tout intervalle I d'origine a et d'extrémité b, l'intégrale $\int_I f(x)dg(x)$ d'une fonction intégrable dans I pourra encore se noter $\int_a^b f(x)dg(x)$; en effet, tout point ayant alors une mesure nulle les intégrales étendues aux quatre intervalles d'origine a et d'extrémité b ont la même valeur. Il n'en serait pas de même si g admettait des points de discontinuité, et on se gardera alors d'utiliser la notation précédente, qui est ambigüe.

D'après le th.5, pour que f soit intégralble dans A, il faut et il suffit que $f\varphi_A$ soit mesurable et que $N_1(f\varphi_A) < +\infty$. On a

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| \leq \int_A |f| \, d|\mu| \tag{2}$$

puisque $|f\varphi_A| = |f| \cdot \varphi_A$. En particulier, toute fonction mesurable et bornée est intégrable dans tout ensemble intégrable A.

Si f et g sont toutes deux intégrables dans A , il en est de même de $f+g$ et de af (a scalaire) puisque $(f+g)\varphi_A = f\varphi_A + g\varphi_A$, et $(af)\varphi_A = a(f\varphi_A)$, et on a

$$(3) \qquad \int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu, \qquad \int_A (af)\,d\mu = a\int_A f\,d\mu .$$

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables dans A , et qui convergent simplement vers une fonction f ; s'il existe une fonction $g \geqslant 0$, intégrable dans A et telle que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A$, le th. de Lebesgue montre que f est intégrable dans A et qu'on a

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu .$$

PROPOSITION 13.- *Si* f *est intégrable dans* A , f *est intégrable dans toute partie mesurable* B *de* A , *et on a*

$$(4) \qquad \int_B |f|\,d|\mu| \leqslant \int_A |f|\,d|\mu| .$$

En effet, $f\varphi_B = (f\varphi_A)\varphi_B$ est mesurable (th.2), et on a $|f\varphi_B| \leqslant |f\varphi_A|$ d'où $N_1(f\varphi_B) \leqslant N_1(f\varphi_A) < +\infty$; cette dernière inégalité n'est autre que (4).

PROPOSITION 14.- *Si* f *est intégrable dans* A *et dans* B , f *est intégrable dans* $A\cup B$; *en outre, si* A *et* B *ne se rencontrent pas on a*

$$(5) \qquad \int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu .$$

Comme $A\cup B = A\cup(B\cap \complement A)$, que $B\cap\complement A$ est mesurable et que f est intégrable dans $B\cap\complement A$ (prop.13), on peut se limiter au cas où $A\cap B=\emptyset$; alors $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A+\varphi_B$, d'où aussitôt la proposition.

PROPOSITION 15.- *Soit* (A_n) *une suite de parties mesurables de* E , *deux à deux sans point commun. Soit* f *une fonction intégrable dans chacun des ensembles* A_n ; *pour que* f *soit intégrable dans* $A = \bigcup_n A_n$, *il faut et il suffit que la série de terme général* $\int_{A_n} |f|\,d|\mu|$ *soit convergente ; on a alors*

$$(6) \qquad \int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu \, .$$

La condition est nécessaire, car si f est intégrable dans A, il en est de même de $|f|$, et pour tout entier n, on a (prop. 13 et 14) $\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |f| \, d|\mu| \leq \int_A |f| \, d|\mu|$, ce qui montre que la série de terme général $\int_{A_n} |f| \, d|\mu|$ est convergente. La condition est suffisante en vertu de la prop. 4 du § 3, la fonction $f\varphi_A$ étant somme de la série de terme général $f\varphi_{A_n}$.

9. Fonctions localement intégrables.

DEFINITION 6.- *On dit qu'une fonction* f *définie dans* E, *à valeurs dans un espace de Banach* F, *est localement intégrable dans* E *si, pour tout point* $x \in E$, *il existe un voisinage compact de* x *dans lequel est intégrable.*

PROPOSITION 16.- *Toute fonction* f *localement intégrable est mesurable et intégrable dans tout ensemble mesurable relativement compact, et réciproquement.*

En effet, soit K un ensemble compact quelconque dans E ; par hypothèse pour tout $x \in K$, il existe un voisinage compact V_x de x dans lequel f est intégrable ; comme K peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles V_x, f est intégrable dans K (prop. 13 et 14), et par suite dans tout ensemble mesurable contenu dans K. En outre, comme $f\varphi_K$ est mesurable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K$ tel que $|\mu|(K \cap \complement K_1) \leq \varepsilon$ et que $f\varphi_K$ soit continue dans K_1 ; comme $f\varphi_K$ est égale à f dans K, cela montre que f est mesurable, et achève la démonstration de la première partie de la proposition.
La réciproque est immédiate.

COROLLAIRE 1.- *Si* f *est une fonction localement intégrable, toute fonction mesurable* g *telle que* $|g| \leq |f|$ *est localement intégrable.*

En effet, pour tout ensemble compact $K \subset E$, $|g\varphi_K| \leq |f\varphi_K|$, donc (th. 5) $g\varphi_K$ est intégrable.

COROLLAIRE 2.- <u>Si f est une fonction localement intégrable, g une fonction scalaire mesurable et bornée, fg est localement intégrable.</u>

En effet, fg est mesurable (th.2) et si $|g(x)| \leq M$ dans E, on a $|fg| \leq M|f|$.

PROPOSITION 17.- <u>Pour qu'une fonction localement intégrable f soit intégrable, il faut et il suffit que l'ensemble P des $x \in E$ tels que $f(x) \neq 0$ soit dénombrablement mesurable et que l'ensemble des nombres $\int_K |f|\, d\mu$, où K parcourt l'ensemble des parties compactes de E, soit majoré dans $\mathbb{R}$.</u>

Les conditions sont évidemment nécessaires (cf.prop.12). Réciproquement, si elles sont vérifiées, P est réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite (K_n) d'ensembles compacts (prop.11) ; donc $|f|$ est presque partout égale à l'enveloppe supérieure de la suite de fonctions sommables $|f|\varphi_{K_n}$; la proposition est donc conséquence du cor.2 du th.4 du § 3.

PROPOSITION 18.- <u>Toute fonction f mesurable, à valeurs dans un espace de Banach F, est limite simple d'une suite de fonctions localement intégrables.</u>

En effet, pour tout entier $n > 0$, définissons une fonction f_n par les conditions : $f_n(x) = f(x)$ si $|f(x)| \leq n$, $f_n(x) = n\dfrac{f(x)}{|f(x)|}$ si $|f(x)| \geq n$; il est clair que pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$. Les fonctions f_n sont évidemment bornées ; reste à montrer qu'elles sont mesurables, ce qui revient à voir que si f est continue dans un espace compact K, il en est de même de f_n : or, cela résulte du fait que l'application $u \to n.\dfrac{u}{|u|}$ de l'ensemble des u tels que $|u| \geq n$ dans F est continue, et égale à u pour tout u sur la sphère $|u| = n$.

La prop.17 s'étend aussitôt, par le même raisonnement, aux fonctions numériques mesurables (finies ou non).

§ 6. Inégalités de convexité.

1. Le théorème de convexité.

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace localement compact μ une mesure de Radon positive sur E.

THEOREME 1.- Soit F un espace de Banach, D un ensemble convexe fermé dans F, f une fonction mesurable telle que $f(E) \subset D$. Pour toute fonction numérique $g \geqslant 0$, intégrable, non négligeable et telle que fg soit intégrable, le point

$$\frac{\int f g \, d\mu}{\int g \, d\mu}$$

appartient à D.

En effet, soit F' le dual de F, et soit $\langle z, a' \rangle \leqslant a$ ($a' \in F'$, $a \in \mathbb{R}$) la relation définissant un demi-espace fermé contenant D. Comme fg est intégrable, il en est de même (§ 3, cor.1 du th.2) de la fonction numérique $\langle fg, a' \rangle = \langle f, a' \rangle g$; par hypothèse, on a $\langle f(x), a' \rangle \leqslant a$ pour tout $x \in E$, donc $\langle f(x)g(x), a' \rangle \leqslant ag(x)$; en intégrant, il vient

$$\left\langle \frac{\int f g \, d\mu}{\int g \, d\mu}, a' \right\rangle \leqslant a$$

Cela prouve que le point $\frac{\int f g \, d\mu}{\int g \, d\mu}$ appartient à tout demi-espace fermé contenant D ; comme D est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent (Esp.vect.top., chap.II, §), le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1.- Si la mesure μ est de masse totale égale à 1, et si f est intégrable, $\int f \, d\mu$ appartient à l'enveloppe fermée convexe dans F de $f(E)$.

Il suffit de prendre pour fonction g la constante 1 .

COROLLAIRE 2.- *Soit* f *une fonction intégrale dans un ensemble* A *intégrale et non négligeable* ; *le point* $\frac{1}{\mu A}\int_A f\,d\mu$ ("moyenne de f dans A") *appartient à l'enveloppe convexe fermée de* $f(A)$ *dans* F .

Il suffit de prendre pour fonction g la fonction caractéristique φ_A .

2. *L'inégalité de la moyenne.*

Nous allons préciser le th.1 pour les fonctions mesurables *numériques* (finies ou non).

DÉFINITION 1.- *Etant donnée une fonction numérique* f (*finie ou non*), *on appelle maximum en mesure, ou* μ-*maximum* (resp. *minimum en mesure, ou* μ-~~maxix~~ *minimum*) *de la fonction* f , *et on désigne par* $M_\infty(f)$ (resp. $m_\infty(f)$), *la borne inférieure* (resp. *supérieure*) *de l'ensemble des nombres* α *tels que l'on ait* $f(x) \leqslant \alpha$ (resp. $f(x) \geqslant \alpha$) *localement presque partout*.

Il résulte aussitôt de la définition que $m_\infty(f)=-M_\infty(-f)$, donc de toute propriété du maximum en mesure on déduit une propriété correspondante du minimum en mesure. On notera aussi que si $f \geqslant 0$ et si on désigne par $1/f$ la fonction égale à $1/f(x)$ pour $0 < f(x) < +\infty$, à 0 pour $f(x)= +\infty$, à $+\infty$ pour $f(x)=0$, on a $m_\infty(f)=1/M_\infty(1/f)$.

Pour tout $\alpha > M_\infty(f)$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) > \alpha$ est localement négligeable ; comme l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) > M_\infty(f)$ est réunion des ensembles où $f(x) > M_\infty(f)+\frac{1}{n}$ (pour n entier $\geqslant 1$), cet ensemble est aussi localement négligeable (§ 5, prop.1). Il en résulte que l'on a $f(x) \leqslant M_\infty(f)$ localement presque partout. La propriété correspondante pour $m_\infty(f)$ est que $f(x) \geqslant m_\infty(f)$ localement presque partout ; on en déduit que

81

$m_\infty(f) \leqslant M_\infty(f)$ (si la mesure μ n'est pas nulle) ; en outre, la relation $m_\infty(f) = M_\infty(f)$ équivaut à dire que f est <u>localement presque partout égale à une constante</u>. Il est clair que l'on a

$$\inf_{x\in E} f(x) \leqslant m_\infty(f) \leqslant M_\infty(f) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) .$$

Si deux fonctions f,g sont égales localement presque partout, on a $m_\infty(f) = m_\infty(g)$ et $M_\infty(f) = M_\infty(g)$.

Enfin, si f et g sont deux fonctions, telles que f+g soit définie localement presque partout, on a

$$(1) \qquad M_\infty(f+g) \leqslant M_\infty(f) + M_\infty(g)$$

si le second membre est défini, comme il résulte aussitôt de la déf.1 ; de même, si f et g sont toutes deux $\geqslant 0$, on a

$$(2) \qquad M_\infty(fg) \leqslant M_\infty(f)\, M_\infty(g)$$

si les deux membres sont définis.

PROPOSITION 1.(inégalité de la moyenne).- <u>Soit</u> f <u>une fonction numérique mesurable et finie presque partout</u>, <u>telle que</u> $m_\infty(f)$ <u>et</u> $M_\infty(f)$ <u>soient finis</u>. <u>Pour toute fonction numérique intégrable</u> $g \geqslant 0$, <u>la fonction</u> fg (<u>définie presque partout</u>) <u>est intégrable, et on a</u>

$$(3) \qquad m_\infty(f)\int g\,d\mu \leqslant \int fg\,d\mu \leqslant M_\infty(f)\int g\,d\mu$$

<u>En outre</u>, <u>deux des trois membres de</u> (3) <u>ne peuvent être égaux que si, dans l'ensemble</u> $x \in E$ <u>où</u> $g(x) \neq 0$, f <u>est presque partout égale à</u> $M_\infty(f)$, <u>ou presque partout égale à</u> $m_\infty(f)$.

En effet, fg est mesurable (§5, cor.4 du th.2), et on a presque partout $m_\infty(f)g(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant M_\infty(f)g(x)$ puisque l'ensemble des points $x \in E$ où $g(x) \neq 0$ est dénombrablement mesurable ; il en résulte que fg est intégrable (§5, th.5) et on a l'inégalité (3). D'autre part, la fonction $M_\infty(f)g - fg$ est presque partout définie et égale à $(M_\infty(f) - f)g$; elle est donc presque partout $\geqslant 0$ dans E ;

comme la relation $M_\infty(f)\int g\,d\mu = \int fg\,d\mu$ est équivalente à $\int (M_\infty(f)-f)g\,d\mu = 0$, elle ne peut avoir lieu que si la fonction $(M_\infty(f)-f)g$ est négligeable, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> f <u>une fonction mesurable numérique finie presque partout et telle que</u> $m_\infty(f)$ <u>et</u> $M_\infty(f)$ <u>soient finis. Alors</u> f <u>est intégrable dans tout ensemble intégrable</u> A, <u>et on a</u>

$$m_\infty(f).\mu A \leq \int_A f\,d\mu \leq M_\infty(f).\mu A \tag{4}$$

<u>En outre, deux des trois membres de</u> (4) <u>ne peuvent être égaux que si</u> f <u>est constante presque partout dans</u> A.

Il suffit de prendre $g=\varphi_A$ dans la prop. 1.

3. <u>Les espaces</u> L^∞_F.

DÉFINITION 2.- <u>Etant donnée une fonction</u> f <u>à valeurs dans un espace de Banach</u> F, <u>on pose</u> $N_\infty(f) = M_\infty(|f|)$, <u>et on désigne par</u> $\mathcal{L}^\infty_F(E,\mu)$ (ou $\mathcal{L}^\infty_F(E)$, ou $\mathcal{L}^\infty_F$) <u>l'ensemble des fonctions mesurables</u> f, <u>à valeurs dans</u> F, <u>et telles que</u> $N_\infty(f)$ <u>soit finie</u>.

En d'autres termes, $\mathcal{L}^\infty_F$ est l'ensemble des fonctions dont chacune est <u>localement presque partout égale à une fonction bornée</u>. Il est clair que toute fonction de $\mathcal{L}^\infty_F$ est <u>localement intégrable</u> (§ 5, n°9).

Il résulte aussitôt de (1) que $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f)+N_\infty(g)$; on a d'autre part $N_\infty(\lambda f) = |\lambda|.N_\infty(f)$ pour tout scalaire λ. L'ensemble $\mathcal{L}^\infty_F$ est donc un <u>sous-espace vectoriel</u> de l'espace $\mathcal{F}_F$ de toutes les applications de E dans F, et $N_\infty(f)$ est une <u>semi-norme</u> sur $\mathcal{L}^\infty_F$. Les fonctions f telles que $N_\infty(f)=0$ ne sont autres que les fonctions <u>localement négligeables</u> (§ 5, n°3) ; elles forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{N}^\infty_F$ de $\mathcal{L}^\infty_F$. Nous désignerons par $L^\infty_F(E,\mu)$ (ou $L^\infty_F(E)$, ou L^∞_F) l'<u>espace quotient</u> $\mathcal{L}^\infty_F/\mathcal{N}^\infty_F$; par passage au quotient, $N_\infty(f)$ définit une <u>norme</u> sur L^∞_F.

PROPOSITION 2.- <u>L'espace normé</u> L^{∞}_F <u>est complet</u>.

Soit en effet (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^{\infty}_F$ dont les images canoniques dans L^{∞}_F forment une suite de Cauchy et qu'on peut supposer <u>bornées</u> dans E ; pour tout entier n , il existe donc un entier k_n tel que, pour $p > k_n$ et $q > k_n$, on ait $N_{\infty}(f_p - f_q) \leq \frac{1}{n}$; autrement dit, il existe un ensemble localement négligeable A_{pq} tel que l'on ait $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \notin A_{pq}$. Si A_n est la réunion des ensembles A_{pq} $(p > k_n , q > k_n)$ A_n est localement négligeable (§ 5, prop. 1) et pour tout $x \notin A_n$, on a $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour $p > k_n$ et $q > k_n$. Soit A l'ensemble localement négligeable réunion des A_n , et posons $g_n(x) = f_n(x)$ pour $x \notin A$, $g_n(x) = 0$ pour $x \in A$; g_n appartient à $\mathcal{L}^{\infty}_F$, et d'après la définition de A , la suite (g_n) converge <u>uniformément</u> dans E vers une fonction g . Il en résulte que est mesurable (§ 5, th. 3) et bornée, donc appartient à $\mathcal{L}^{\infty}_F$; en outre, en faisant tendre q vers $+\infty$, dans l'inégalité $|g_p(x) - g_q(x)| \leq \frac{1}{n}$ (valable pour $x \in E$, $p > k_n$ et $q > k_n$), on a $|g_p(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in E$ et tout $p > k_n$, ce qui montre que, dans L^{∞}_F , la classe de g est limite de la suite des classes des f_n .

On définit de la même manière l'ensemble $\mathcal{L}^{\infty}_{\overline{R}}$ des fonctions numériques (finies ou non) dont chacune est localement presque partout égale à une fonction bornée ; le quotient de cet espace par la relation d'équivalence "f et g sont égales localement presque partout" peut évidemment être identifié à l'espace $L^{\infty}_{\overline{R}}$.

Remarque.-Supposons que le support de la mesure μ soit égal à E . Alors, si f est une fonction continue et bornée dans E , f appartient à $\mathcal{L}^{\infty}_{F}$ et on a $N_{\infty}(f)=\|f\| = \sup_{x\in E}|f(x)|$; en effet, si $a < \|f\|$, l'ensemble des $x\in E$ tels que $|f(x)| > a$ est ouvert et non vide, donc de mesure > 0 . On voit donc qu'on peut identifier l'espace normé $\mathcal{C}b_F(E)$ des fonctions continues et bornées dans E , muni de la topologie de la convergence uniforme, à un sous-espace fermé de l'espace normé L^{∞}_{F} . En général, ce sous-espace est distinct de L^{∞}_{F} , et on voit en particulier que l'espace $\Lambda_F(E)$ des classes de fonctions continues à support compact n'est pas partout dense dans L^{∞}_{F} en général, alors que par définition, il est partout dense dans tous les espaces L^p_F pour $1\leqslant p<+\infty$ (§ 3, déf.1).

4. L'inégalité de Hölder.

Dans ce n°, p et q désigneront deux nombres réels tels que $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $1\leqslant q\leqslant+\infty$, liés par la relation $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, avec la convention $1/+\infty=0$; on a donc $q=p/(p-1)$ si $1<p<+\infty$, $q=+\infty$ si $p=1$ et $q=1$ si $p=+\infty$; p et q seront appelés des exposants conjugués. On remarquera que la relation $1\leqslant p\leqslant 2$ équivaut à $2\leqslant q\leqslant+\infty$ on n'a $p=q$ que lorsque p et q sont égaux à 2 .

THEOREME 2 (inégalité de Hölder).- Soient f et g deux fonctions numériques telles que $f\in\mathcal{L}^p_R$ et $g\in\mathcal{L}^q_R$; on suppose en outre que, si $p=+\infty$ (resp. $q=+\infty$) la fonction f (resp.g) est finie presque partout. Alors la fonction fg (définie presque partout) est intégrable, et on a

(5) $$N_1(fg)\leqslant N_p(f)N_q(g) .$$

En premier lieu, la fonction fg est mesurable (§ 5,cor.4 du th.2). Si $1<p<+\infty$, l'inégalité de Hölder pour l'intégrale supérieure (§ 2,n°1) montre que fg est intégrable, et qu'on a l'inégalité (5) .

Si $p=1$, $q=+\infty$, le fait que fg soit intégrable et l'inégalité (5) sont des conséquences immédiates de l'inégalité de la moyenne (prop.1) ; le théorème est donc démontré dans tous les cas.

COROLLAIRE 1.- Soient F,G,H trois espaces de Banach, et $(x,y)\to\Phi(x,y)$ une application bilinéaire continue de $F\times G$ dans H telle que $|\Phi(x,y)|\leqslant|x|\cdot|y|$. Si $f\in\mathcal{L}_F^p$ et $g\in\mathcal{L}_G^q$, la fonction $\Phi(f,g)$ est intégrable, et on a

$$(6)\qquad \left|\int\Phi(f,g)d\mu\right|\leqslant\int|\Phi(f,g)|d\mu\leqslant N_p(f)N_q(g).$$

En effet, $\Phi(f,g)$ est mesurable (§5,cor.4 du th.2) ; comme $|\Phi(f,g)|\leqslant|f|\cdot|g|$, le corollaire résulte aussitôt du th.2 .

Deux cas particuliers du cor.1 sont importants dans les applications :

COROLLAIRE 2.- Soit F un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, F' son dual fort (Esp.vect.top.,chap.III, §), et soit $(x,x')\to\langle x,x'\rangle$ la forme bilinéaire canonique sur $F\times F'$. Si $f\in\mathcal{L}_F^p$ et $g\in\mathcal{L}_{F'}^q$, la fonction numérique $\langle f,g\rangle$ est intégrable, et on a

$$(7)\qquad \int|\langle f,g\rangle|d\mu\leqslant N_p(f)N_q(g).$$

COROLLAIRE 3.- Soit F un espace de Banach, f une fonction de $\mathcal{L}_F^p$, g une fonction numérique appartenant à $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q$; la fonction gf est intégrable, et on a

$$(8)\qquad \int|gf|\,d\mu\leqslant N_p(f)N_q(g).$$

COROLLAIRE 4.- Soient $f_1,f_2,\dots,f_n$ n fonctions positives et intégrables, $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ n nombres >0 tels que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$; dans ces conditions la fonction $f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}\dots f_n^{\alpha_n}$ est intégrable et on a

$$\int f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}\dots f_n^{\alpha_n}d\mu\leqslant\left(\int f_1d\mu\right)^{\alpha_1}\left(\int f_2d\mu\right)^{\alpha_2}\dots\left(\int f_nd\mu\right)^{\alpha_n}$$

En effet, pour $n=2$, l'inégalité n'est autre qu'une autre forme de (5); pour n quelconque, l'inégalité se démontre par récurrence ; en effet, posons

$$f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_{n-1}^{\alpha_{n-1}} = g^{1-a_n}$$

On a, d'après (5) $\int g^{1-a_n} f_n^{a_n} d\mu \leq (\int g\, d\mu)^{1-a_n} (\int f_n d\mu)^{a_n}$

Mais comme on a $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} = 1$, l'hypothèse de récurrence entraîne

$$(\int g\, d\mu)^{1-a_n} \leq (\int f_1 d\mu)^{a_1} (\int f_2 d\mu)^{a_2} \cdots (\int f_{n-1} d\mu)^{a_{n-1}}$$

d'où le corollaire.

Nous allons voir qu'on peut préciser le cor.2 dans le cas où F est un <u>espace de Hilbert</u> (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) :

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> F <u>un espace de Hilbert</u> (<u>sur</u> $\mathbb{R}$ <u>ou</u> $\mathbb{C}$), <u>et soit</u> $(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$ <u>le produit scalaire dans</u> F . <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{L}_F^p$, <u>on a</u>

(7) $$N_p(f) = \sup_{N_q(g) \leq 1} \left| \int \langle f, g \rangle d\mu \right| .$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme.- Si</u> u <u>est une fonction mesurable à valeurs dans un espace de Banach</u> F , <u>la fonction</u> v <u>égale à</u> 0 <u>lorsque</u> $u(x)=0$, <u>à</u> $u(x)/|u(x)|$ <u>lorsque</u> $u(x) \neq 0$, <u>est mesurable</u>.

En effet, soit K un ensemble compact quelconque dans E , A la partie de K où $u(x) \neq 0$, $B = K \cap \complement A$ le complémentaire de A dans K ; A et B sont des ensembles intégrables ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc deux ensembles compacts $K_1 \subset A$, $K_2 \subset B$ tels que $\mu(A \cap \complement K_1) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\mu(B \cap \complement K_2) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Dans K_2, v est nulle, donc continue, il existe d'autre part dans K_1 un ensemble compact K_3 tel que $\mu(K_2 \cap \complement K_3) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, et que u soit continue et $\neq 0$ dans K_3 ; il en résulte que v est continue dans $K_2 \cup K_3$, et comme $\mu(K \cap \complement(K_2 \cup K_3)) \leq \varepsilon$, cela prouve que v est mesurable.

Par abus de langage, nous désignerons par $u/|u|$ la fonction v définie dans le lemme précédent.

Cela étant, considérons d'abord le cas où $1<p<+\infty$; posons $r=p/q$, et considérons la fonction $g = \frac{|f|^r}{(N_p(f))^r} \cdot \frac{f}{|f|}$; elle est mesurable d'après le lemme, et on a $|g|^q = |f|^p/(N_p(f))^p$; par suite (§ 5, cor.1 du th.5) on a $g \in \mathcal{L}^q_F$, et $N_q(g)=1$; d'autre part, on a $\langle f,g\rangle = |f|^{r+1}/(N_p(f))^r$; or, on a $r+1 = \frac{p+q}{q} = p$, donc $\int \langle f,g\rangle d\mu = (\int |f|^p d\mu)/(N_p(f))^r = (N_p(f))^{p-r} = N_p(f)$, ce qui dans ce cas démontre (9).

En second lieu, supposons que $p=1$; si on prend $g = f/|f|$, on a évidemment $|g(x)| \leq 1$ pour tout $x \in E$, donc $N_\infty(g) \leq 1$; d'autre part $\langle f,g\rangle = |f|$ et par suite $\int \langle f,g\rangle d\mu = \int |f| d\mu = N_1(f)$, ce qui démontre encore (9).

Enfin, supposons $p=+\infty$, et soit a un nombre quelconque tel que $0 \leq a < N_\infty(f)$; par hypothèse, l'ensemble des $x \in E$ tels que $|f(x)| > a$ est mesurable et n'est pas localement négligeable, donc contient un ensemble intégrable A de mesure $\mu A > 0$. La fonction $g = \frac{1}{\mu A}\varphi_A \cdot \frac{f}{|f|}$ est mesurable d'après le lemme, et on a $|g| = \frac{1}{\mu A}\varphi_A$, donc g est intégrable, et $N_1(g)=1$; d'autre part, on a $\langle f,g\rangle = \frac{1}{\mu A}\varphi_A \cdot |f|$, donc $\int \langle f,g\rangle d\mu = \frac{1}{\mu A}\int_A |f| d\mu \geqslant a$; comme a est un nombre quelconque $< N_\infty(f)$, la relation (9) est encore démontrée dans ce cas.

COROLLAIRE.- Soit F un espace de Hilbert. Pour cette fonction $f \in \mathcal{L}^p_F$, l'application $\tilde{g} \to \int \langle f,g\rangle d\mu$ est une forme linéaire continue sur l'espace de Banach L^q_F, dont la norme est égale à $N_p(f)$.

5. Application : relations entre les espaces L_F^p ($1 \leq p \leq +\infty$).

PROPOSITION 4.- Soit f une fonction mesurable à valeurs dans un espace de Banach F ; l'ensemble des nombres $p \geqslant 1$ (finis ou non) tels que $N_p(f)$ soit finie est vide ou est un intervalle I . Si I n'est pas réduit à un point, l'application $p \to N_p(f)$ est continue dans $[1,+\infty]$ et $\log N_p(f)$ est une fonction convexe de $1/p$ dans I si f n'est pas négligeable.

Nous savons déjà (chap.I, §3,prop.4) que l'ensemble J des nombres $p \geqslant 1$ finis tels que $N_p(f) < +\infty$ est vide ou un intervalle, et que $\log N_p(f)$ est fonction convexe de $1/p$ dans J (lorsque J n'est pas réduit à un point et que f n'est pas négligeable) ; cela entraîne bien entendu la continuité de $p \to N_p(f)$ dans J . Il reste donc seulement à démontrer que cette fonction est continue en une extrémité $r \geqslant 1$ de J , lorsque r est fini et $N_r(f) = +\infty$, et au point $+\infty$.

Dans le premier cas, désignons par A l'ensemble (mesurable) des points ou' $|f(x)| \geqslant 1$; on a $\int |f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu + \int_{\complement A} |f|^p d\mu$; supposons par exemple que $N_p(f)$ soit finie pour $p > r$. Lorsque p tend vers r à droite, $|f|^p$ tend vers $|f|^r$ en décroissant dans A , en croissant dans $\complement A$; l'application du th.4 du §3 montre que $\int |f|^p d\mu$ tend vers $+\infty$, donc que $N_p(f)$ est continue au point r.

Pour montrer que $p \to N_p(f)$ est continue au point $+\infty$ (lorsque I n'est pas réduit à un point), remarquons d'abord que $\lim_{p\to\infty} N_p(f)$ existe toujours ; c'est évident si l'extrémité s de J est finie, car alors $N_p(f) = +\infty$ pour $p > s$; et si $s = +\infty$, cela résulte de la convexité de $\log N_p(f)$ en fonction de $1/p$ dans J . Cela étant, montrons d'abord que $\lim_{p\to\infty} N_p(f) \leqslant N_\infty(f)$; l'inégalité étant évidente si $N_\infty(f) = +\infty$, nous nous bornerons au cas où $N_\infty(f)$ est finie.

Si $r \in J$, on a, pour tout nombre fini $p > r$, $|f|^p = |f|^r \cdot |f|^{p-r}$, et l'inégalité de la moyenne donne donc

$$N_p(f) \leqslant (N_r(f))^{r/p}(N_\infty(f))^{(p-r)/p}$$

ce qui montre en premier lieu que $N_p(f) < +\infty$ pour $r < p < +\infty$; en outre, en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient $\lim\limits_{p\to\infty} N_p(f) \leqslant N_\infty(f)$.

Reste à prouver que $\lim\limits_{p\to\infty} N_p(f) \geqslant N_\infty(f)$. Soit a un nombre quelconque tel que $0 < a < N_\infty(f)$, et soit A l'ensemble (mesurable) des $x \in E$ tels que $|f(x)| \geqslant a$. Si A n'est pas intégrable, on a $N_p(f) = +\infty$ pour tout p fini ; comme par hypothèse I n'est pas réduit au point $+\infty$, on a aussi $N_\infty(f) = +\infty$, et l'inégalité est démontrée dans ce cas. Si A est intégrable, on a $\mu A > 0$ par définition de $N_\infty(f)$; pour tout p fini, on a $N_p(f) \geqslant a.(\mu A)^{1/p}$: c'est évident si $N_p(f) = +\infty$ et sinon cela résulte de l'inégalité de la moyenne. Faisant tendre p vers $+\infty$, il vient donc $\lim\limits_{p\to\infty} N_p(f) \geqslant a$, ce qui achève la démonstration, puisque a est un nombre arbitraire tel que $0 < a < N_\infty(f)$.

<u>Remarque</u>.- Pour <u>tout</u> intervalle I contenu dans $[1,+\infty]$ on peut donner des exemples de mesures μ et de fonctions f telles que I soit identique à l'ensemble des nombres $p \geqslant 1$ tels que $N_p(f) < +\infty$ (exerc.).

COROLLAIRE.- <u>Si</u> r, s, p <u>sont trois nombres</u> $\geqslant 1$ <u>tels que</u> $r < p < s$, <u>l'intersection</u> $\mathcal{L}^r_F \cap \mathcal{L}^s_F$ <u>est contenue dans</u> $\mathcal{L}^p_F$.

On notera qu'en général, les topologies induites sur $L^r \cap L^s$ par celles des L^p $(r < p < s)$ sont <u>distinctes</u> ; si on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur E, aucune des deux topologies induites sur $L^r \cap L^s$ par celles de L^r et de L^s n'est en général plus fine que l'autre (en d'autres termes, le rapport $N_r(f)\ N_s(f)$ peut prendre des valeurs arbitrairement petites

90

et des valeurs arbitrairement grandes dans $\mathcal{L}^r \cap \mathcal{L}^s$; cf. exerc.).

La prop.4 peut être précisée si E est intégrable :

PROPOSITION 5.- Soit f une fonction mesurable à valeurs dans un espace de Banach F . Si E est intégrable, l'ensemble I des nombres $p \geqslant 1$ tels que $N_p(f)$ soit fini, est vide ou est un intervalle d'origine $p=1$ et contenant ce point ; en outre, $(\mu E)^{-1/p} N_p(f)$ est fonction croissante de p dans I .

C'est une conséquence immédiate de la prop.4 ci-dessus, et de la prop.5 du chap.I, § 3 .

Ici encore, pour tout intervalle I do'origine 1 et contenant ce point, on peut donner des exemples de mesures μ et de fonctions f telles que E soit intégrable et que I soit identique à l'ensemble des nombres $p \geqslant 1$ tels que $N_p(f) < +\infty$

COROLLAIRE 1.- Si E est intégrable, la relation $r < s$ entraîne $\mathcal{L}^s_F \subset \mathcal{L}^r_F$; en outre, la topologie de l'espace L^s_F est plus fine que la topologie induite sur L^s_F par celle de L^r_F .

On peut montrer qu'en général la topologie de L^s_F est strictement plus fine que la topologie induite par celle de L^r_F (exerc.).

COROLLAIRE 2.- L'espace E étant supposé intégrable, soit $\mathcal{P}$ un ensemble d'applications mesurables et bornées de E dans F , dense par rapport à l'ensemble des applications continues bornées de E dans F , pour la topologie de la convergence uniforme ; alors l'ensemble P des classes de fonctions de $\mathcal{P}$ est partout dense dans chacun des espaces L^p_F pour $1 \leqslant p < +\infty$.

C'est une conséquence du cor.1 et du fait que l'ensemble des classes d'applications continues bornées de E dans F , est partout dense dans chacune des L^p_F ($1 \leqslant p < +\infty$).

6. Théorèmes de Thorin et M. Riesz ; applications.

Voir la rédaction Etat 4, p.101-111, qui n'a pas été discutée ; la Thèse de Thorin n'apporte rien de nouveau.

§ 7. Image d'une mesure.

1. Image d'une mesure par une application mesurable.

Soient E et F deux espaces localement compacts, μ une mesure de Radon positive sur E , θ une application μ-mesurable de E dans F ; pour toute fonction numérique continue f définie dans F , $f\circ\theta$ est mesurable (§ 5, th.2). Nous supposerons dans tout ce qui suit, que θ est telle que, pour toute partie compacte $K \subset F$, $\overset{-1}{\theta}(K)$ est intégrable ; cette condition est en particulier vérifiée lorsque θ est une application continue propre de E dans F .

PROPOSITION 1.- Si , pour toute partie compacte $K \subset F$, $\overset{-1}{\theta}(K)$ est intégrable, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$, $f\circ\theta$ est intégrable.

En effet, soit S le support de f , et soit $A = \overset{-1}{\theta}(S)$ qui, par hypothèse est intégrable ; f est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles compacts contenus dans S (§ 4, prop.12) ; il en résulte aussitôt que $f\circ\theta$ est limite uniforme de fonctions étagées à support contenu dans A , donc $f\circ\theta$ est intégrable.

Remarque.- La réciproque de cette proposition est vraie lorsque F est métrisable ; en effet, pour toute partie compacte $K \subset F$, la fonction caractéristique φ_K est limite simple d'une suite décroissante de fonctions de $\mathcal{K}(F)$ car K est intersection d'une suite décroissante (A_n) d'ensembles ouverts relativement compacts, et si f_n est une application continue de F dans $[0,1]$, égale à 0 dans $\complement A_n$ et à 1 dans K, φ_K est limite de la suite f_n ; on peut supposer la suite (f_n) décroissante, en remplaçant éventuellement f_n par $\inf(f_1,f_2,\ldots,f_n)$. Cela étant, la fonction caractéristique de $\overset{-1}{\theta}(K)$ est limite de la suite décroissante des fonctions intégrables $f_n \circ \theta$, donc est intégrable. Si θ est <u>continue</u>, la réciproque de la prop.1 est vraie aussi, car alors $\overset{-1}{\theta}(K)$ est fermé et sa fonction caractéristique est majorée par une fonction intégrable.

En raison de l'hypothèse faite sur θ , pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$, le nombre $\vartheta(f) = \int (f\circ\theta)d\mu$ est défini et fini, et la relation $f \geqslant 0$ entraîne $\vartheta(f) \geqslant 0$; ϑ est donc une <u>mesure de Radon</u> positive sur F , que nous désignerons par $\theta(\mu)$.

PROPOSITION 2.- <u>Pour toute fonction</u> $g \geqslant 0$ <u>semi-continue inférieurement dans</u> F <u>et à support compact,</u> $g\circ\theta$ <u>est mesurable, et on a</u> $\vartheta^*(g) = \mu^*(g\circ\theta)$.

Nous commencerons par considérer le cas où g est <u>bornée</u> ; soit S le support compact de g , et $A = \overset{-1}{\theta}(S)$, qui est intégrable par hypothèse ; on posera $M = \sup_{x\in S} g(x)$. La fonction g est l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante $x \in S$ (f_α) de fonctions continues $\geqslant 0$, à support contenu dans S , et on a $\vartheta^*(g) = \sup_\alpha \vartheta(f_\alpha) = \sup_\alpha \mu(f_\alpha\circ\theta)$ par définition. Il faut donc prouver que $\sup_\alpha \mu(f_\alpha\circ\theta) = \mu^*(g\circ\theta)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse un ensemble compact $K \subset A$ tel que $\mu(A \cap \complement K) \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$, et que la fonction mesurable θ soit <u>continue</u> dans K ; la restriction de $g\circ\theta$ à K est donc l'enveloppe supérieure des fonctions $f_\alpha\circ\theta$, continues dans K , et elle est par suite semi-continue inférieurement dans K ; on en conclut que $g\circ\theta$ est intégrable <u>dans</u> K , et qu'on a (mesure induite!) $\int_K (g\circ\theta)d\mu = \sup_\alpha \int_K (f_\alpha\circ\theta)d\mu$. Comme $g(\theta(x)) \leqslant M$ dans A , on a

$$\mu^*(g\circ\theta)\leqslant\int_K(g\circ\theta)d\mu+M.\,\mu(A\cap\complement K)\leqslant\int_K(g\circ\theta)d\mu+\varepsilon$$

et comme pour toute fonction f_α , $\int_K(f_\alpha\circ\theta)d\mu\leqslant\mu(f_\alpha\circ\theta)$, on a $\mu^*(g\circ\theta)\leqslant\sup\limits_\alpha\int(f_\alpha\circ\theta)d\mu+\varepsilon$; comme ε est arbitraire et qu'on a évidemment par ailleurs $\mu^*(g\circ\theta)\geqslant\int(f_\alpha\circ\theta)d\mu$ pour tout α , on a bien $\mu^*(g\circ\theta)=\sup\limits_\alpha\mu(f_\alpha\circ\theta)$. En outre, si $h=(1-\varphi_K)(g\circ\theta)$, on a $\mu^*(h)\leqslant M\varepsilon$, ce qui montre que $g\circ\theta$ est <u>intégrable</u>, puisque $\varphi_K.(g\circ\theta)$ l'est.

Passons au cas général ; alors en posant $g_n=\sup(g,n)$, g_n est semi-continue inférieurement et on a $g=\sup g_n$, donc $g\circ\theta=\sup\limits_n(g_n\circ\theta)$; comme $g_n\ \theta$ est intégrable et $(g_n\ \theta)=(g_n)$, g est mesurable (§ 5, cor. du th.3) et en vertu du th. de Lebesgue, on a

$$\nu^*(g)=\lim_{n\to\infty}\nu(g_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(g_n\circ\theta)=\mu^*(g\circ\theta)\ .$$

COROLLAIRE.- <u>Pour tout ensemble ouvert relativement compact</u> $U\subset F$, <u>l'ensemble</u> $\overset{-1}{\theta}(U)$ <u>est intégrable</u>.

PROPOSITION 3.- <u>Pour toute fonction numérique</u> $f\geqslant 0$, <u>définie dans</u> F , <u>bornée et à support compact, on a</u> $\nu^*(f)=\mu^*(f\circ\theta)$.

Soit S le support de f , U un voisinage ouvert relativement compact de S ; par définition, $\nu^*(f)$ est la borne inférieure des $\nu^*(g)$ pour toutes les fonctions semi-continues inférieurement g telles que $g\geqslant f$; on peut se borner à considérer des fonctions semi-continues $g\geqslant f$ dont le support est contenu dans U , car si $g\geqslant f$, la fonction h égale à g dans U , à 0 ailleurs, est semi-continue inférieurement et on a $f\leqslant h\leqslant g$. Il est clair alors qu'on a $g\circ\theta\geqslant f\circ\theta$, et par suite $\nu^*(g)=\mu^*(g\circ\theta)\geqslant\mu^*(f\circ\theta)$, donc $\nu^*(f)\geqslant\mu^*(f\circ\theta)$; tout revient à démontrer l'inégalité $\nu^*(f)\leqslant\mu^*(f\circ\theta)$. Soit M la borne supérieure de f ; pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction u

semi-continue inférieurement dans E , telle que $f\circ\theta \leqslant u \leqslant M$, et $\mu^*(u) \leqslant \mu^*(f\circ\theta)+\varepsilon$. Par hypothèse, $A = \overset{-1}{\theta}(u)$ est intégrable, et il existe un ensemble compact $K \subset A$ tel que $\mu(A \cap \complement K) \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$, et que la fonction θ soit continue dans K ; pour tout $x \in K$, soit $H(x)$ l'ensemble des $y \in K$ tels que $\theta(y)=\theta(x)$, autrement dit l'ensemble $K \cap \overset{-1}{\theta}(\theta(x))$; posons, pour tout $x \in K$, $\bar{u}(x) = \inf_{y \in H(x)} u(y)$; il est clair qu'on a $f\circ\theta \leqslant \bar{u}$. Nous allons voir que $\bar{u}$ est semi-continue inférieurement dans K . En effet, u est semi-continue inférieurement dans K ; pour tout nombre k , soit A_k l'ensemble des points $x \in K$ où $u(x) \leqslant k$, B_k l'ensemble des $x \in K$ tels que $\bar{u}(x) \leqslant k$; par hypothèse, A_k est fermé (Top. gén. , chap. IV, § 6, prop. 1), donc compact. D'autre part, comme chaque ensemble $H(x)$ est compact, $u(x)$ atteint sa borne inférieure dans $H(x)$ (Top. gén., chap. IV, § 6, th. 3) ; donc, si $x \in B_k$, il existe $y \in H(x)$ tel que $u(y) \leqslant k$, autrement dit, tel que $y \in A_k$; la réciproque étant immédiate, on a $B_k = \overset{-1}{\theta}(\theta(A_k)) \cap K$, et comme θ est continue dans K , $\theta(A_k)$ est compact dans F , et B_k fermé dans K ; cela prouve bien que $\bar{u}$ est semi-continue inférieurement dans K (Top. gén. chap. IV, § 6, prop. 1). Le même raisonnement montre en outre qu'on peut écrire $\bar{u} = g_0 \circ \theta$, où g_0 est semi-continue inférieurement dans $\theta(K)$, l'ensemble B_k étant évidemment saturé pour la relation d'équivalence $\theta(x)=\theta(y)$. Il existe une fonction g_1 semi-continue inférieurement dans F , à support dans U , prolongeant g_0 et $\leqslant M$ (il suffit de considérer g_0 comme enveloppe supérieure de fonctions continues dans $\theta(K)$ et de prolonger chacune de ces dernières en une fonction continue à support dans U et $\leqslant M$, par application du th. d'Urysohn ; l'enveloppe supérieure de ces fonctions prolongées est la fonction g_1 cherchée) ; si h est la fonction égale à g_1 (donc à g_0)

dans $\theta(K)$, à M dans $\overline{U} \cap \complement(\theta(K))$, à 0 ailleurs, h est intégrable, on a $f \leqslant h$, donc $\vartheta^*(f) \leqslant \vartheta(h)$, et $\vartheta(h) \leqslant \vartheta(g_1) + M.\vartheta(U \cap \complement(\theta(K))) =$
$= \vartheta(g_1) + M.\mu(A \cap \complement(\overset{-1}{\theta}(\theta(K)))) \leqslant \mu(g_1 \circ \theta) + \varepsilon$ (cor. de la prop.2).
Or, la fonction $g_1 \circ \theta$ est égale à $\overline{u}$ dans K, donc majorée par u dans K ; comme elle est majorée par M dans $A \cap \complement K$, on a $\mu(g_1 \circ \theta) \leqslant \mu^*(u) + \varepsilon$; finalement, il vient $\vartheta^*(f) \leqslant \mu^*(u) + 2\varepsilon \leqslant \mu^*(f \circ \theta) + 3\varepsilon$, et comme ε est arbitraire, la proposition est démontrée.

THÉORÈME 1.- *Soit* f *une fonction définie dans* F , *à valeurs dans un espace de Banach* G ; *pour que* f *soit intégrable pour* ϑ , *dans un ensemble compact* K , ~~dansxxxx(K)~~ *il faut et il suffit que* $f \circ \theta$ *soit intégrable pour* μ *dans* $\overset{-1}{\theta}(K)$; *on a alors*

$$(1) \qquad \int_K f \, d\vartheta = \int_{\overset{-1}{\theta}(K)} (f \circ \theta) \, d\mu .$$

Considérons d'abord le cas où f est *bornée*. Si f est intégrable dans K , on peut supposer que f a son support dans K ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue g à support compact, à valeurs dans G , telle que $\vartheta^*(|f - g|) \leqslant \varepsilon$; d'après la prop.3 , on a aussi $\mu^*(|f \circ \theta - g \circ \theta|) \leqslant \varepsilon$, et comme $g \circ \theta$ est intégrable, il en est de même de $f \circ \theta$.

Pour démontrer la réciproque, on peut se borner au cas où f est une fonction *numérique*. En effet, si $f \circ \theta$ est intégrable dans $\overset{-1}{\theta}(K)$, le raisonnement du th.4, §5 et de son cor.1 montre que $f \circ \theta$ est limite presque partout dans $\overset{-1}{\theta}(K)$ d'une suite de fonctions étagées, dont chacune *est de la forme* $f_p \circ \theta$, a son support contenu dans $\overset{-1}{\theta}(K)$ et est telle que $|f_p| \leqslant |f|$. Si on montre que chacune des f_p est intégrable dans K (pour ϑ), l'application du th. de Lebesgue montrera donc que f est intégrable dans K .

Supposons donc que f soit une fonction numérique bornée telle que $f \circ \theta$ soit intégrable dans $\overset{-1}{\theta}(K)$ et de support contenu dans $\overset{-1}{\theta}(K)$; en ajoutant une constante à f , on peut supposer que $f \geqslant 0$; alors on a $\nu^*(f) = \mu(f \circ \theta)$ (prop.3) ; il existe donc une fonction semi-continue inférieurement $h \geqslant f$ telle que $\mu(h \circ \theta) - \mu(f \circ \theta) \leqslant \varepsilon$; en appliquant le même résultat à la fonction $M.\varphi_K - f$ (si $f \leqslant M.\varphi_K$), on voit qu'il existe une fonction g semi-continue inférieurement telle que $g \leqslant f$ et que $\mu(f \circ \theta) - \mu(g \circ \theta) \leqslant \varepsilon$; d'après la prop.2, on a par suite $\nu(h) - \nu(g) \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve que f est intégrable.

La formule (1) étant valable pour toute fonction f continue à support compact, s'étend par continuité au cas où f est intégrable et bornée, compte tenu de la prop.3 .

Reste à démontrer le théorème lorsque f n'est pas bornée ; on l'établit d'abord lorsque f est une fonction numérique $\geqslant 0$, en considérant f comme enveloppe supérieure des fonctions $f_n = \inf(f, n)$, et en appliquant le th.4 du §3. Si maintenant f prend ses valeurs dans un espace de Banach quelconque, comme on a $|f \circ \theta| = |f| \circ \theta$, on voit d'abord que $|f|$ et $|f \circ \theta|$ sont simultanément intégrables ; on approche ensuite f par une suite de fonctions f_n , f_n étant égale à f si $|f(x)| \leqslant n$, à $nf(x)/|f(x)|$ pour $|f(x)| > n$; comme $|f_n| \leqslant |f|$, le th. de Lebesgue permet de conclure, et donne aussi la relation (1).

COROLLAIRE.- <u>Pour qu'une partie</u> A <u>de</u> F <u>soit mesurable pour</u> ν , <u>il faut et il suffit que</u> $\overset{-1}{\theta}(A)$ <u>soit mesurable pour</u> μ , <u>et pour tout ensemble compact</u> $K \subset F$, <u>on a</u>

$$(2) \qquad \nu(A \cap K) = \mu(\overset{-1}{\theta}(A \cap K)) .$$

Si $\overset{-1}{\theta}(A)$ est mesurable, pour tout ensemble compact $K \subset F$, $\overset{-1}{\theta}(A \cap K) = \overset{-1}{\theta}(A) \cap \overset{-1}{\theta}(K)$ est intégrable, donc (th.1), $A \cap K$ est intégrable, et par suite A est mesurable, et on a la relation (2) .

Pour démontrer la réciproque, considérons un ensemble compact H dans E ; pour tout entier n , il existe dans H un ensemble compact H_n tel que $\mu(H \cap \complement H_n) \leqslant 1/n$ et que θ soit continue dans H_n ; on peut en outre supposer que la suite (H_n) est croissante ; le complémentaire N dans H de la réunion des H_n est donc de mesure nulle. Cela étant, $\theta(H_n)$ est compact, donc $A \cap \theta(H_n)$ est intégrable, et par suite, il en est de même de $\overset{-1}{\theta}(A) \cap \overset{-1}{\theta}(\theta(H_n))$; l'ensemble $H_n \cap \overset{-1}{\theta}(A) = H_n \cap (\overset{-1}{\theta}(A) \cap \overset{-1}{\theta}(\theta(H_n)))$ est donc aussi intégrable. Mais alors $H \cap \overset{-1}{\theta}(A)$ est réunion de l'ensemble négligeable $N \cap \overset{-1}{\theta}(A)$ et de la suite croissante d'ensembles intégrales $H_n \cap \overset{-1}{\theta}(A)$ donc il est lui-même intégrable, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 4.- <u>Soit F un espace localement compact réunion dénombrable d'ensembles compacts. Pour qu'une fonction f, définie dans F, à valeurs dans un espace de Banach G, soit intégrable pour ν, il faut et il suffit que $f \circ \theta$ soit intégrable pour μ, et on a alors</u>

$$\int f \, d\nu = \int (f \circ \theta) \, d\mu .$$

Soit en effet (K_n) une suite croissante d'ensembles compacts dans F, de réunion F ; posons $A_n = K_n \cap \complement K_{n-1}$. Si f est intégrable, f est intégrable dans chacun des ensembles A_n et la série de terme général $\int_{A_n} |f| \, d\nu$ est convergente ; d'après le th.1, $f \circ \theta$ est intégrable dans $\overset{-1}{\theta}(A_n)$, et la série de terme général $\int_{\overset{-1}{\theta}(A_n)} |f \circ \theta| \, d\mu$ est convergente ; donc (§ 5, prop.15) $f \circ \theta$ est intégrable. La réciproque se démontre de la même manière.

2. <u>Image d'une mesure par une application continue.</u>

Si on suppose seulement la fonction θ mesurable et telle que $\overset{-1}{\theta}(K)$ soit intégrable pour tout compact $K \subset F$, et si F n'est pas réunion dénombrable de compacts, il n'est pas nécessaire que $f \circ \theta$ soit

<u>intégrable</u> lorsque f l'est ; en particulier, un ensemble $N \subset F$ peut être <u>négligeable</u> sans que $\overset{-1}{\theta}(N)$ le soit (exerc.). Nous allons voir que ces phénomènes ne peuvent se produire lorsqu'on suppose en outre que θ est <u>continue</u>.

PROPOSITION 5.- <u>Si</u> θ <u>est continue, pour toute fonction</u> $g \geqslant 0$, <u>semi-continue inférieurement dans</u> F , $g \circ \theta$ <u>est semi-continue inférieurement dans</u> E , <u>et on a</u> $\nu^*(g) = \mu^*(g \circ \theta)$.

En effet, g est l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante (f_α) de fonctions continues à support compact, et on a $\nu^*(g) = \sup_\alpha \nu(f_\alpha) = \sup_\alpha \mu(f_\alpha \circ \theta)$. Or, les fonctions $f_\alpha \circ \theta$ sont continues, forment une famille filtrante, et $g \circ \theta$ est leur enveloppe supérieure ; on a donc $\mu^*(g \circ \theta) = \sup_\alpha \mu(f_\alpha \circ \theta) = \nu^*(g)$.

THEOREME 2.- <u>Soit</u> f <u>une fonction définie dans</u> F , <u>à valeurs dans un espace de Banach</u> G ; <u>si</u> θ <u>est continue, et si</u> f <u>est intégrable</u> $f \circ \theta$ <u>est intégrable, et on a</u>

$$\int f \, d\nu = \int (f \circ \theta) \, d\mu \quad . \tag{4}$$

En effet, l'ensemble A des points où $f(x) \neq 0$ est dénombrablement mesurable, donc réunion d'une suite croissante (K_n) d'ensembles compacts deux à deux sans point commun, et d'un ensemble N négligeable. Comme $f \circ \theta$ est intégrable dans $\overset{-1}{\theta}(K_n)$ (th.1) et que $\int_{K_n} f \, d\nu = \int_{\overset{-1}{\theta}(K_n)} (f \circ \theta) d\mu$ $f \circ \theta$ est intégrable dans la réunion des ensembles $\overset{-1}{\theta}(K_n)$ (§ 5, prop.15 et son intégrale dans cet ensemble est égale à $\int f \, d\nu$. Tout revient donc à montrer que $M = \overset{-1}{\theta}(N)$ est <u>négligeable</u>. Or, par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \geqslant 0$ semi-continue inférieurement dans F , telle que $\varphi_N \leqslant g$ et $\nu^*(g) \leqslant \varepsilon$; d'après la prop.5 , la fonction $g \circ \theta$ est semi-continue inférieurement, on a $\varphi_M \leqslant g \circ \theta$ et $\mu^*(g \circ \theta) \leqslant \varepsilon$; il en résulte que M est négligeable, ce qui achève la démonstration.

Remarque.- Lorsque F n'est pas réunion dénombrable d'ensembles compacts, il peut exister dans F des ensembles N non négligeables et tels que $\overset{-1}{\theta}(N)$ soit négligeable, même si θ est continue (exerc.). On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 5.- Soit f une fonction définie dans F, à valeurs dans un espace de Banach G ; si θ est une application propre de E dans F, pour que f soit intégrable, il faut et il suffit que $f\circ\theta$ soit intégrable, et on a la relation (4).

Tout revient à prouver que si $\overset{-1}{\theta}(N)$ est négligeable, N est négligeable. Supposons donc que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction u semi-continue inférieurement dans E, telle que $\varphi_{\overset{-1}{\theta}(N)} \leqslant u$ et que $\mu(u) \leqslant \varepsilon$. Raisonnons comme dans la prop. 3 ; pour tout $x \in E$, soit $H(x)$ l'ensemble $\overset{-1}{\theta}(\theta(x))$, qui est compact par hypothèse ; posons $\bar{u}(x) = \inf_{y \in H(x)} u(y)$; on a encore $\varphi_{\overset{-1}{\theta}(N)} \leqslant \bar{u} \leqslant u$. D'après la prop. 5, tout revient à montrer que $\bar{u}$ est semi-continue inférieurement et de la forme $u_0\circ\theta$, où u_0 est semi-continue inférieurement dans F. Or, pour tout nombre k, si A_k est l'ensemble des $x \in E$ tels que $u(x) \leqslant k$, A_k est fermé, donc aussi $B_k = \overset{-1}{\theta}(\theta(A_k))$, puisque θ est propre. Mais si on a $\bar{u}(x) \leqslant k$, il existe dans l'ensemble compact $H(x)$ un point y où u atteint sa borne inférieure, donc $u(y) \leqslant k$, ce qui prouve que B_k est l'ensemble des $x \in E$ tels que $\bar{u}(x) \leqslant k$; notre assertion est ainsi démontrée.

Le même raisonnement prouve aisément que, pour toute fonction $f \geqslant 0$ définie dans F, on a $\nu^*(f) = \mu^*(f\circ\theta)$.

Remarque.- Même lorsque E et F sont compacts, et θ continue, l'image par θ d'un ensemble mesurable dans E n'est pas nécessairement mesurable dans F (§ 8, exerc.).

Texte de <u>Jerôme Cardan</u>

"S'il est vrai que la face frottée de suif et graisse d'ours fasse augmenter l'entendement, ce ne ~~me~~ semble avoir de cause et raison. Et que la moelle d'une mule quand elle est bue, rende l'homme stupide, quoique ce peut être, je ne l'ai toutefois expérimenté. Mais que la sueur d'icelle mise en la matrice de la femme l'empêche de concevoir, ~~et~~ ce me semble assez vraisemblable

§ 8. Fonctions intégrables pour un produit de mesures.

1. Intégrale supérieure d'une fonction de deux variables.

Soient E_1, E_2 deux espaces localement compacts, μ_1 une mesure positive sur E_1, μ_2 une mesure positive sur E_2, $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ la mesure produit sur $E_1 \times E_2$. Rappelons que, si f est une fonction continue dans $E_1 \times E_2$, à valeurs dans un espace de Banach, et à support compact, la fonction $\int f(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)$ (resp. $\int f(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)$) est une fonction continue à support compact définie dans E_1 (resp. E_2), et qu'on a

$$(1) \quad \iint f(x_1,x_2)d\mu(x_1,x_2) = \int d\mu_1(x_1)\int f(x_1,x_2)d\mu_2(x_2) = \int d\mu_2(x_2)\int f(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)$$

(chap. II, §). Nous nous proposons d'obtenir un résultat analogue pour des fonctions intégrables f quelconques.

PROPOSITION 1.- Soit f une fonction numérique $\geqslant 0$, semi-continue inférieurement dans $E_1 \times E_2$. La fonction $\int^* f(x_1,x_2)d\mu_2$ est semi-continue inférieurement dans E_1, et on a

$$(2) \quad \iint^* f(x_1,x_2)d\mu_1 d\mu_2 = \int^* d\mu_1 \int^* f(x_1,x_2)d\mu_2 .$$

En effet, f est enveloppe supérieure d'un ensemble filtrant (pour la relation $\leqslant$) de fonctions $\varphi_\alpha \geqslant 0$ continue et à support compact. D'après le th. du § 1, $\int^* f(x_1,x_2)d\mu_2$ est l'enveloppe supérieure des fonctions $\int \varphi_\alpha(x_1,x_2)d\mu_2$, qui sont continues et forment un ensemble filtrant pour la relation $\leqslant$; $\int^* f(x_1,x_2)d\mu_2$ est donc une fonction semi-continue inférieurement dans E_1, et on a (§ 1, th. 1)

$$\int^* d\mu_1 \int^* f(x_1,x_2)d\mu_2 = \sup_\alpha \int d\mu_1 \int \varphi_\alpha(x_1,x_2)d\mu_2 = \sup_\alpha \iint \varphi_\alpha(x_1,x_2)d\mu_1 d\mu_2$$

d'après la relation (1) ; mais cette dernière expression est égale à $\iint^* f(x_1,x_2)d\mu_1 d\mu_2$ par une nouvelle application du th. 1 du § 1, d'où la proposition.

PROPOSITION 2.- Soit f une fonction numérique $\geqslant 0$ quelconque définie dans $E_1 \times E_2$; on a

$$\int^* d\mu_1 \int^* f(x_1,x_2)d\mu_2 \leqslant \iint^* f(x_1,x_2)d\mu_1 d\mu_2 . \tag{3}$$

En effet, soit g une fonction semi-continue inférieurement dans $E_1 \times E_2$ telle que $f \leqslant g$; pour tout $x_1 \in E_1$, on a donc $\int^* f(x_1,x_2)d\mu_2 \leqslant \int^* g(x_1,x_2)d\mu_2$; comme $x_1 \to \int^* g(x_1,x_2)d\mu_2$ est semi-continue inférieurement dans E_1 (prop.1), on a $\int^* d\mu_1 \int^* f(x_1,x_2)d\mu_2 \leqslant$ $\leqslant \int^* d\mu_1 \int^* g(x_1,x_2)d\mu_2 = \iint^* g(x_1,x_2)d\mu_1 d\mu_2$; l'inégalité (3) résulte donc de la définition de l'intégrale supérieure de f.

COROLLAIRE.- Soit N un ensemble négligeable dans $E_1 \times E_2$ pour la mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$. Pour presque tout $x_1 \in E_1$, la coupe $N(x_1)$ de N suivant x_1 est négligeable pour la mesure μ_2.

En effet, si on applique l'inégalité (3) à la fonction φ_N, on voit que, pour presque tout $x_1 \in E_1$, l'intégrale supérieure $\int^* \varphi_N(x_1,x_2)d\mu_2$ est nulle, ce qui démontre le corollaire.

Remarque.- Si N est un ensemble localement négligeable pour $\mu_1 \otimes \mu_2$, il peut se faire que la coupe $N(x_1)$ ne soit localement négligeable (pour μ_2) pour aucun $x_1 \in E_1$ (exerc.3)

2. Le théorème de Lebesgue-Fubini.

THEOREME 1 (Lebesgue-Fubini).- Soit f une fonction définie dans $E_1 \times E_2$, à valeurs dans un espace de Banach F, et intégrable pour la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$. Alors, pour presque tout $x_1 \in E_1$ (resp. $x_2 \in E_2$), la fonction $x_2 \to f(x_1,x_2)$ (resp. $x_1 \to f(x_1,x_2)$) est intégrable pour la mesure μ_2 (resp. μ_1) ; la fonction $\int f(x_1,x_2)d\mu_2$ (resp. $\int f(x_1,x_2)d\mu_1$), définie presque partout dans E_1 (resp. E_2) est intégrable pour la mesure μ_1 (resp. μ_2) et on a

$$(4)\quad \iint f(x_1,x_2)d\mu_1 d\mu_2 = \int d\mu_1 \int f(x_1,x_2)d\mu_2 = \int d\mu_2 \int f(x_1,x_2)d\mu_1 .$$

D'après l'hypothèse, il existe une suite (g_n) de fonctions continues à support compact dans $E_1 \times E_2$ telle que la suite $(g_n(x_1,x_2))$ converge vers $f(x_1,x_2)$ sauf aux points d'un ensemble N négligeable pour $\mu_1 \otimes \mu_2$, et que la suite $(\tilde{g}_n)$ soit une suite de Cauchy dans l'espace $L^1_F(E_1 \times E_2)$, convergente vers $\tilde{f}$ (§3, cor. 2 de la prop.5) ; on peut en outre supposer qu'il existe une fonction $\varphi \geqslant 0$, semi-continue inférieurement et intégrable dans $E_1 \times E_2$, et telle que $|g_n| \leqslant \varphi$ pour tout n. D'après le cor. de la prop.2, il existe un ensemble négligeable $N_1 \subset E_1$ tel que, pour tout $x_1 \in \complement N_1$, la coupe $N(x_1)$ soit négligeable pour μ_2; cela signifie que, pour $x_1 \in \complement N_1$, la suite des fonctions continues $x_2 \rightarrow g_n(x_1,x_2)$ tend presque partout vers $x_2 \rightarrow f(x_1,x_2)$. D'autre part la prop.1 montre qu'il existe un ensemble négligeable $N_1' \subset E_1$ tel que pour $x_1 \in \complement N_1'$, l'intégrale supérieure $\int^* \varphi(x_1,x_2)d\mu_2$ soit finie. Il résulte donc du th. de Lebesgue (§3, th.5) que, pour tout $x_1 \in \complement (N_1 \cup N_1')$, $x_2 \rightarrow f(x_1,x_2)$ est intégrable pour μ_2, et on a $\int f(x_1,x_2)d\mu_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n(x_1,x_2)d\mu_2$. En d'autres termes, les fonctions continues $\int g_n(x_1,x_2)\,d\mu_2$ tendent presque partout vers la fonction $\int f(x_1,x_2)d\mu_2$; comme on a partout $\left|\int g_n(x_1,x_2)d\mu_2\right| \leqslant$ $\leqslant \int^* \varphi(x_1,x_2)d\mu_2$, et que cette dernière fonction est intégrable d'après la prop.1, le th. de Lebesgue montre à nouveau que $\int f(x_1,x_2)d\mu_2$ est intégrable pour μ_1 et qu'on a

$$\int d\mu_1 \int f(x_1,x_2)d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int d\mu_1 \int g_n(x_1,x_2)d\mu_2$$

La relation (4) découle alors aussitôt de la relation (1) appliquée à g_n et de la définition de la suite (g_n).

COROLLAIRE 1.- Si un ensemble $A \subset E_1 \times E_2$ est intégrable pour la mesure $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, pour presque tout $x_1 \in E_1$, la coupe $A(x_1)$ suivant x_1 est intégrable pour μ_2, et on a la fonction $\mu_2 A(x_1)$ est intégrable pour μ_1

(5) $$\mu A = \int \mu_2(A(x_1))\,d\mu_1 .$$

Il suffit d'appliquer le th.1 à la fonction φ_A.

COROLLAIRE 2.- Si un ensemble $A \subset E_1 \times E_2$ est dénombrablement mesurable pour $\mu_1 \otimes \mu_2$, pour presque tout $x_1 \in E_1$, la coupe $A(x_1)$ suivant x_1 est dénombrablement mesurable pour la mesure μ_2.

En effet, on a par hypothèse $A = \bigcup_n A_n$, où les A_n sont intégrables. D'après le cor.1, pour tout n, il existe un ensemble H_n négligeable (pour μ_1) tel que pour tout $x_1 \in \complement H_n$, $A_n(x_1)$ soit intégrable. L'ensemble $H = \bigcup_n H_n$ est donc négligeable, et pour tout $x_1 \in \complement H$, $A(x_1) = \bigcup_n A_n(x_1)$ est dénombrablement mesurable.

Remarques.- 1) On notera que si on suppose seulement A mesurable, il peut se faire que $A(x_1)$ ne soit mesurable pour aucun $x_1 \in E_1$ (exerc. 3d).

2) Un ensemble $A \subset E_1 \times E_2$ peut être tel que, pour tout $x_1 \in E_1$, et pour tout $x_2 \in E_2$, $A(x_1)$ et $\overset{-1}{A}(x_2)$ soient intégrables, sans que A soit mesurable.(*)

3. Critères d'intégrabilité.

Nous allons considérer dans ce qui suit des fonctions de la forme $f_1(x_1)f_2(x_2)$, où f_1 et f_2 sont des fonctions numériques $\geqslant 0$ (finies ou non) définies respectivement dans E_1 et E_2 ; lorsque l'un des nombres $f_1(x_1), f_2(x_2)$ est nul et l'autre $+\infty$, nous conviendrons dans ce n° que leur produit est 0.

PROPOSITION 3.- <u>Pour tout couple de fonctions positives</u> f_1, f_2 (<u>définies respectivement dans</u> E_1 <u>et</u> E_2), <u>finies presque partout, on a</u>

$$(6) \qquad \iint^* f_1(x_1)f_2(x_2)d\mu_1 d\mu_2 = \left(\int^* f_1(x_1)d\mu_1\right)\left(\int^* f_2(x_2)d\mu_2\right),$$

<u>sauf lorsqu'un des facteurs du second membre est nul et l'autre infini.</u>

Comme $f_1(x_1)$ est fini pour presque tout $x_1 \in E_1$, on a pour ces valeurs de x_1, $\int^* f_1(x_1)f_2(x_2)d\mu_2 = f_1(x_1)\int^* f_2(x_2)d\mu_2$, en convenant de remplacer le second membre par 0 lorsque $f_1(x_1)=0$ et $\int^* f_2(x_2)d\mu_2 = +\infty$. On en déduit $\int^* d\mu_1 \int^* f_1(x_1)f_2(x_2)d\mu_2 = \left(\int^* f_1(x_1)d\mu_1\right)\left(\int^* f_2(x_2)d\mu_2\right)$, avec la même convention pour le produit du second membre ; le seul cas où la vérification ne soit pas immédiate est celui où $\int^* f_2(x_2)d\mu_2 = +\infty$ et où $\int^* f_1(x_1)d\mu_1 > 0$; mais alors $f_1(x_1)\int^* f_2(x_2)d\mu_2$ est égal à $+\infty$ dans un ensemble non négligeable, d'où la conclusion. Cela étant, la prop.2 montre que l'égalité (6) a lieu lorsque le second membre est $+\infty$. Dans le cas contraire, pour tout couple de fonctions semi-continues inférieurement et intégrables (donc presque partout finies) g_1, g_2 (définies dans E_1 et E_2 respectivement), telles que $f_1 \leq g_1$ et $f_2 \leq g_2$, on a, en vertu de ce qui précède et de la prop.1

$$\iint^* f_1(x_1)f_2(x_2)d\mu_1 d\mu_2 \leq \iint^* g_1(x_1)g_2(x_2)d\mu_1 d\mu_2 = \left(\int^* g_1(x_1)d\mu_1\right)\left(\int^* g_2(x_2)d\mu_2\right)$$

la fonction $g_1(x_1)g_2(x_2)$ étant semi-continue inférieurement dans $E_1 \times E_2$. Or le produit $\left(\int^* f_1 d\mu_1\right)\left(\int^* f_2 d\mu_2\right)$ est la borne inférieure de $\left(\int^* g_1 d\mu_1\right)\left(\int^* g_2 d\mu_2\right)$ lorsqu'on n'est pas dans le cas d'exception de l'énoncé. On a donc bien alors

$$\iint^* f_1(x_1)f_2(x_2)d\mu_1 d\mu_2 \leq \left(\int^* f_1(x_1)d\mu_1\right)\left(\int^* f_2(x_2)d\mu_2\right)$$

ce qui achève la démonstration.

- 104 -

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> A_1 <u>un ensemble négligeable dans</u> E_1, A_2 <u>une partie de</u> E_2 <u>telle que</u> $\mu^*_2 A_2 < +\infty$; <u>alors l'ensemble</u> $A_1 \times A_2$ <u>est négligeable pour</u> $\mu_1 \otimes \mu_2$.

Il suffit d'appliquer la prop.3 en prenant pour f_1 et f_2 les fonctions caractéristiques de A_1 et A_2.

<u>Remarques</u>.- 1) Le corollaire est encore exact si on suppose que A_2 est réunion <u>dénombrable</u> d'ensembles de mesure extérieure finie, mais non si A_2 est un ensemble mesurable <u>quelconque</u> (exerc. 3).

2) On notera que si A est une partie <u>mesurable</u> (et même <u>négligeable</u>) de $E_1 \times E_2$, se projections peuvent fort bien <u>ne pas être mesurables</u>. Par exemple, si A_1 est négligeable et A_2 non mesurable, mais de mesure extérieure finie, le cor. de la prop.3 montre que la projection sur E_2 de l'ensemble négligeable $A_1 \times A_2$ n'est pas mesurable.

PROPOSITION 4.- <u>Soient</u> F_1, F_2, F <u>trois espaces de Banach, et soit</u> $(x, y) \rightarrow [x.y]$ <u>une application bilinéaire continue de</u> $F_1 \times F_2$ <u>dans</u> F, <u>telle que</u> $|[x.y]| \leqslant |x|.|y|$. <u>Soient</u> $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ <u>des fonctions définies dans</u> E_1, E_2 <u>respectivement, à valeurs dans</u> F_1, F_2 <u>respectivement, et intégrables pour</u> μ_1, μ_2 <u>respectivement ; alors</u> $[f_1(x_1).f_2(x_2)]$ <u>est intégrable pour</u> $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, <u>et on a</u>

$$(7) \qquad \iint [f_1(x_1).f_2(x_2)]\, d\mu_1 d\mu_2 = \left[\left(\int f_1(x_1) d\mu_1\right).\left(\int f_2(x_2) d\mu_2\right)\right].$$

Tout revient à démontrer que $[f_1.f_2]$ est intégrable ; la relation (7) s'en déduira par application du th. de Lebesgue-Fubini, et du th.2 du §3. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions g_1, g_2, continues et à support compact, telles que $\int |f_1 - g_1|\, d\mu_1 \leqslant \varepsilon$ et $\int |f_2 - g_2|\, d\mu_2 \leqslant \varepsilon$. On peut écrire

$$\iint^* \big|[f_1\cdot f_2]-[g_1\cdot g_2]\big|\, d\mu_1 d\mu_2 \leqslant \iint^* |f_1|\cdot|f_2-g_2|\, d\mu_1 d\mu_2$$
$$+\iint^* |f_1-g_1|\cdot|g_2|\, d\mu_1 d\mu_2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\left(\int |f_1|\, d\mu_1 + \int |f_2|\, d\mu_2 + \varepsilon\right)$$

en vertu de la prop.3, ce qui prouve que $[f_1\cdot f_2]$ est intégrable, puisque $[g_1\cdot g_2]$ est continue et à support compact.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> $A_1\subset E_1$, $A_2\subset E_2$; <u>si</u> A_1 <u>et</u> A_2 <u>sont intégrables</u> (pour μ_1 et μ_2 respectivement), $A_1\times A_2$ <u>est intégrable pour</u> $\mu=\mu_1\otimes\mu_2$. <u>La réciproque est vraie si aucun des ensembles</u> A_1, A_2 <u>n'est négligeable</u> ; <u>on a en outre</u>

(8) $$\mu(A_1\times A_2)=\mu_1 A_1\cdot\mu_2 A_2 .$$

La première partie est une conséquence immédiate de la prop.4. D'autre part, si $A_1\times A_2$ est intégrable et si A_1 n'est pas négligeable, il résulte du th. de Lebesgue-Fubini que pour au moins un $x_1\in A_1$, la coupe suivant x_1 de l'ensemble $A_1\times A_2$ est intégrable, c'est-à-dire que A_2 est intégrable.

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> f_1 <u>est intégrable dans un ensemble mesurable</u> A_1 <u>et</u> f_2 <u>est intégrable dans un ensemble mesurable</u> A_2, $[f_1\cdot f_2]$ <u>est intégrable dans</u> $A_1\times A_2$, <u>et on a</u>

$$\iint_{A_1\times A_2}[f_1\cdot f_2]\, d\mu_1 d\mu_2=\left[\left(\int_{A_1} f_1\, d\mu_1\right)\cdot\left(\int_{A_2} f_2\, d\mu_2\right)\right].$$

Il suffit d'appliquer la prop.4 aux fonctions $f_1\varphi_{A_1}$, $f_2\varphi_{A_2}$.

PROPOSITION 5.- <u>Avec les mêmes notations que dans la prop.4, si</u> f_1 <u>et</u> f_2 <u>sont mesurables</u>, $[f_1\cdot f_2]$ <u>est mesurable</u>.

En effet, tout ensemble compact $K\subset E_1\times E_2$ est contenu dans un produit $K_1\times K_2$, où K_1 et K_2 sont compacts dans E_1 et E_2 respectivement. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble compact $H_1\subset K_1$

(resp. $H_2 \subset K_2$) tel que $\mu_1 K_1 - \mu_1 H_1 \leqslant \varepsilon$ (resp. $\mu_2 K_2 - \mu_2 H_2 \leqslant \varepsilon$) et que f_1 (resp. f_2) soit continu dans H_1 (resp. H_2) ; la fonction $[f_1 \cdot f_2]$ est alors continue dans l'ensemble compact $H_1 \times H_2$, et d'après le cor.1 de la prop.4, on a $\mu(K_1 \times K_2) - \mu(H_1 \times H_2) \leqslant \varepsilon\,(\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 + \varepsilon)$; a fortiori, $[f_1 \cdot f_2]$ est continue dans l'ensemble compact $K \cap (H_1 \times H_2)$ dont la mesure diffère de celle de K de moins de $\varepsilon(\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 + \varepsilon)$.

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> $A_1 \subset E_1$ <u>et</u> $A_2 \subset E_2$ <u>sont mesurables,</u> $A_1 \times A_2$ <u>est mesurable.</u>

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> $A_1 \subset E_1$ <u>est localement négligeable, pour toute partie</u> A_2 <u>de</u> E_2, $A_1 \times A_2$ <u>est localement négligeable.</u>

En effet, tout ensemble compact dans $E_1 \times E_2$ est contenu dans un ensemble de la forme $K_1 \times K_2$ (K_1 et K_2 compacts), et $(A_1 \times A_2) \cap (K_1 \times K_2) = (A_1 \cap K_1) \times (A_2 \cap K_2)$; il suffit alors d'appliquer le cor. de la prop. 3.

4. Extension à un produit fini de mesures.

Les résultats précédents s'étendent sans peine au produit d'un nombre fini quelconque de mesures. Par exemple, soient E_1, E_2, E_3 trois espaces localement compacts, μ_i une mesure positive sur E_i ($i=1,2,3$), et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ la mesure produit sur $E = E_1 \times E_2 \times E_3$. Soit f une fonction intégrable pour μ ; comme $\mu = (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3$, une première application du th. de Lebesgue-Fubini montre que, pour presque tout point $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, la fonction $x_3 \longrightarrow f(x_1, x_2, x_3)$ est intégrable pour μ_3, que la fonction

$$(x_1, x_2) \longrightarrow \int f(x_1, x_2, x_3)\, d\mu_3$$

définie presque partout dans $E_1 \times E_2$, est intégrable pour $\mu_1 \otimes \mu_2$ et qu'on a

$$\int f\,d\mu = \iint d\mu_1 d\mu_2 \int f(x_1,x_2,x_3)d\mu_3 \quad .$$

Une seconde application du même théorème montre que, pour presque tout $x_1 \in E_1$, la fonction $x_2 \to \int f(x_1,x_2,x_3)d\mu_3$ est définie presque partout dans E_2 et est intégrable pour μ_2 ; en outre, la fonction

$$x_1 \to \int d\mu_2 \int f(x_1,x_2,x_3)d\mu_3$$

définie presque partout, est intégrable pour μ_1, et on a

$$(9) \qquad \int f\,d\mu = \int d\mu_1 \int d\mu_2 \int f(x_1,x_2,x_3)d\mu_3 \quad .$$

On prouverait de même que, pour presque tout $x_1 \in E_1$, la fonction $(x_2,x_3) \to f(x_1,x_2,x_3)$ est intégrable pour $\mu_2 \otimes \mu_3$, que la fonction $x_1 \to \int f(x_1,x_2,x_3)d\mu_2 d\mu_3$, définie presque partout, est intégrable pour μ_1 et qu'on a

$$(10) \qquad \int f\,d\mu = \int d\mu_1 \int f(x_1,x_2,x_3)d\mu_2 d\mu_3 \quad .$$

Nous laissons au lecteur le soin de généraliser de la même manière les autres résultats démontrés ci-dessus pour le produit de deux mesures.

5. Extension au produit d'une infinité de mesures.

Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque d'espaces compacts, et sur chaque E_ι, soit μ_ι une mesure positive de masse totale égale à un ; nous avons défini au chap.II, §   , la mesure produit $\mu = \bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ sur l'espace compact $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$.

D'après la définition de μ, on notera que l'ensemble des classes de fonctions continues définies dans E, à valeurs dans F, et ne dépendant que d'un nombre fini de variables, est partout dense dans chacun des espaces L^p_F $(1 \leq p < +\infty)$.

Pour toute partie non vide J de I, nous poserons $E_J = \prod_{\iota \in J} E_\iota$, $\mu_J = \bigotimes_{\iota \in J} \mu_\iota$, et $x_J = pr_J(x)$ pour tout $x \in E$; on sait alors que, pour toute partition (J,J') de I en deux ensembles, on peut identifier la mesure μ à la mesure $\mu_J \otimes \mu_{J'}$, sur $E_J \times E_{J'}$, et toute fonction

f définie dans E à une fonction $f(x_J, x_{J'})$ sur $E_J \times E_{J'}$; le théorème de Lebesgue-Fubini montre donc qu'on a $\int f \, d\mu = \int d\mu_J \int f(x_J, x_{J'}) d\mu_{J'}$.

PROPOSITION 6.- Pour tout $\iota \in I$, soit K_ι une partie compacte de E_ι ; la mesure de l'ensemble compact $K = \prod_{\iota \in I} K_\iota$ est donnée par

$$\mu K = \prod_{\iota \in I} \mu_\iota K_\iota . \tag{11}$$

En effet, pour toute partie finie J de I, considérons l'ensemble compact $K_J = (\prod_{\iota \in J} K_\iota) \times E_{J'}$, où $J' = \complement J$; K est l'intersection de la famille filtrante (pour la relation $\supset$) des K_J, donc μK est la limite de μK_J suivant l'ordonné filtrant des parties finies de I (§ 4, cor. de la prop. 8). Mais, d'après la remarque précédente et le cor. 1 de la prop. 4, on a $\mu K_J = \prod_{\iota \in J} \mu_\iota K_\iota$, d'ou' la formule (11).

PROPOSITION 7.- Pour tout $\iota \in I$, soit A_ι une partie mesurable de E ; pour que l'ensemble $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ soit mesurable, il faut et il suffit que l'on soit dans l'un des deux cas suivants :

1° $\prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota = 0$;

2° A_ι contient le support de la mesure μ_ι sauf pour les indices ι d'une partie dénombrable de I .

Dans chacun des deux cas, on a $\mu A = \prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota$.

Supposons d'abord que $\prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota = 0$. S'il y a une infinité non dénombrables d'indices $\iota \in I$ tels que $\mu_\iota A_\iota < 1$, il existe un $a < 1$ et un ensemble dénombrable J d'indices ι tels que $\mu_\iota A_\iota \leq a$; nous désignerons par ι_p $(p \in \mathbb{N})$ les indices appartenant à J . L'ensemble A est contenu dans $B = \prod_{\iota \in J} A_\iota \times E_{J'}$ (où $J' = \complement J$) ; nous allons voir que B est mesurable et $\mu B = 0$, d'où résultera dans ce cas la proposition. Or, si J_p est l'ensemble des ι_k d'indice $\leq p$, et $J'_p = \complement J_p$, B est l'intersection des ensembles $B_p = \prod_{\iota \in J} A_\iota \times E_{J'_p}$; or, B_p est

est mesurable et on a $\mu B_p = \prod_{k=0}^{p} \mu_{\iota_k} A_{\iota_k}$ (cor. 1 de la prop.4) donc $\mu B_p \leqslant a^p$; il en résulte bien que B est mesurable et $\mu B=0$ (§ 4, cor. de la prop.4) .

En second lieu, supposons que $\mu_\iota A_\iota = 1$ sauf pour les indices ι d'une partie dénombrable J de I , et que $\prod_{\iota \in J} \mu_\iota A_\iota = 0$; on a encore $A \subset B = \prod_{\iota \in J} A_\iota \times E_{J'}$ (avec $J' = \complement J$), d'où on déduit comme précédemment que B est mesurable et $\mu B=0$.

Si A contient le support S_ι de μ_ι sauf pour les indices ι d'une partie dénombrable J de I, on peut écrire, avec les mêmes notations $A = (\prod_{\iota \in J} A_\iota) \times (\prod_{\iota \in J'} A_\iota)$, et tout revient à démontrer que chacun des deux facteurs est mesurable dans E_J et $E_{J'}$ respectivement. Pour le premier, on voit comme ci-dessus que $\prod_{\iota \in J} A_\iota$ est l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles mesurables et que $\mu_J(\prod_{\iota \in J} A_\iota) = \prod_{\iota \in J} \mu_\iota A_\iota$. D'autre part, $S_{J'} = \prod_{\iota \in J'} S_\iota$ est le support de la mesure $\mu_{J'}$; comme l'ensemble $\prod_{\iota \in J'} A_\iota$ contient $S_{J'}$, il est mesurable et de mesure 1 .

Reste le cas où l'ensemble des $\iota \in I$ tels que A_ι ne contient pas S_ι n'est pas dénombrable, l'ensemble J des $\iota \in I$ tels que $\mu_\iota A_\iota < 1$ étant dénombrable et tel que $\prod_{\iota \in J} \mu_\iota A_\iota > 0$; nous allons voir que dans ce cas A <u>n'est pas mesurable</u>. En premier lieu, montrons que la mesure extérieure de A est >0 ; en effet, pour soit U un ensemble ouvert contenant A ; la projection de l'ensemble fermé $\complement U$ sur E_ι est un ensemble fermé, donc son complémentaire U_ι est un ensemble <u>ouvert</u> contenant A_ι , et on a $A \subset \prod_{\iota \in I} U_\iota \subset U$. Or, pour tout $\iota \in I$ tel que $\mu_\iota A_\iota = 1$, A_ι est nécessairement <u>dense</u> par rapport au support S_ι de μ_ι , et on a donc $S_\iota \subset U_\iota$; cela prouve, d'après ce qui précède, que $\prod_{\iota \in I} U_\iota$ est mesurable, et a une mesure égale à $\prod_{\iota \in I} \mu_\iota U_\iota \geqslant \prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota$; a fortiori, on a $\mu U \geqslant \prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota$, ce qui prouve bien que $\mu^* A > 0$.

Si A était mesurable, il contiendrait donc un ensemble compact K de mesure > 0 ; soit K_ι la projection (compacte) de K sur E_ι ; on a $K \subset \prod_{\iota \in I} K_\iota \subset A$, et $\prod_{\iota \in I} K_\iota$ est un ensemble compact de mesure $\prod_{\iota \in I} \mu_\iota K_\iota$ (prop.6), strictement positive par hypothèse ; or, cela n'est possible que si $\mu_\iota K_\iota = 1$ sauf pour une infinité dénombrable d'indices ; mais la relation $\mu_\iota K_\iota = 1$ entraîne $K_\iota \supset S_\iota$, d'où $A_\iota \supset S_\iota$, contrairement à l'hypothèse. La prop.7 est donc entièrement démontrée.

Par exemple, si I est non dénombrable, K l'intervalle $[0,1]$, $E_\iota = K$ pour tout $\iota \in I$, et si μ est la mesure de Lebesgue pour tout $\iota \in I$, l'ensemble produit des intervalles <u>ouverts</u> $]0,1[$ de chaque facteur <u>n'est pas mesurable</u> dans K^I.

APPENDICE

CHAMPS DE VECTEURS INTÉGRABLES.

1. Ensembles fondamentaux de champs de vecteurs.

Soit E un espace localement compact, et $(F(x))_{x \in E}$ une famille d'espaces de Banach (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ayant comme ensemble d'indices l'espace E. Dans ce qui suit, tout élément f de l'ensemble produit $\mathcal{V} = \prod_{x \in E} F(x)$ sera appelé un champ de vecteurs sur E ; pour tout $x \in E$, la coordonnée $f(x)$ de f, d'indice x, est donc un vecteur appartenant à $F(x)$. Il est clair que $\mathcal{V}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ; on peut aussi le munir d'une structure de module sur l'anneau des fonctions numériques (resp. complexes) définies dans E, le produit d'une telle fonction φ et d'un champ de vecteurs f étant le champ de vecteurs $x \longrightarrow \varphi(x)f(x)$.

Nous allons nous proposer tout d'abord de définir ce qu'il faut entendre par champ de vecteurs continu sur E.

DÉFINITION 1.- On dit qu'un ensemble $\Lambda \subset \mathcal{V}$ de champs de vecteurs sur E est fondamental s'il vérifie les axiomes suivants :

(CF_I) Λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$;

(CF_{II}) pour tout $f \in \Lambda$, la fonction numérique $x \longrightarrow |f(x)|$ est continue dans E ;

(CF_{III}) pour tout $x \in E$, l'ensemble des vecteurs $f(x)$, où f parcourt Λ, est partout dense dans $F(x)$.

Exemples.- [1] Soit F un espace de Banach, et supposons que tous les $F(x)$ soient identiques à F ; les champs de vecteurs sont donc dans ce cas les applications de E dans F. Comme exemples d'ensembles fondamentaux dans ce cas, citons : l'ensemble des applications continues de E dans F, l'ensembles des applications continues de E dans F , à support compact ; l'ensemble des applications constantes de E dans F .

2) Soit E une variété différentiable, G le prolongement de cette variété par les vecteurs tangents à E (Var.diff., chap.II) ; pour tout $x \in E$, soit $F(x)$ l'espace tangent à E au point x (de dimension n , si n est la dimension de la variété E) ; $F(x)$ est donc une partie de G pour tout $x \in E$. Les champs de vecteurs correspondants ne sont autres que les champs de vecteurs tangents à E définis au Livre V, chap.II ; on aura une famille fondamentale en prenant les champs de vecteurs continus (resp. les champs de vecteurs différentiables) pour la structure topologique (resp. différentiable) de G .

2. Champs de vecteurs continus.

Dans ce qui suit, nous supposerons donné une fois pour toutes un ensemble fondamental Λ de champs de vecteurs sur E .

DÉFINITION 2.- On dit qu'un champ de vecteurs f sur E est continu (relativement à Λ) en un point $x \in E$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un champ de vecteurs $g \in \Lambda$ et un voisinage V de x dans E tels que $|f(y)-g(y)| \leq \varepsilon$ pour tout $y \in V$.

Dans l'exemple 1 du n°1, si on prend pour Λ l'ensemble des applications constantes de E dans F , la déf.2 redonne simplement la définition des applications continues de E dans F ; en effet, comme g est constante, la condition $|f(y)-g(y)| \leq \varepsilon$ pour tout $y \in V$ entraîne $|f(y)-f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $y \in V$. On voit de même que dans l'exemple 2 du n°1, la déf.2 (à partir de l'un des deux ensembles fondamentaux considérés) redonne les champs de vecteurs continus (pour la topologie de G).

PROPOSITION 1.- <u>L'ensemble</u> $\mathcal{C}_\Lambda$ <u>des champs de vecteurs continus dans</u> E <u>est un module sur l'anneau des fonctions numériques continues dans</u> E .

En effet, si f_1 et f_2 sont deux champs de vecteurs continus en un point x , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x et deux champs de vecteurs g_1, g_2 appartenant à Λ tels que $|f_1(y)-g_1(y)| \leqslant \varepsilon$ et $|f_2(y)-g_2(y)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $y \in V$, d'où $|f_1(y)+f_2(y)-g_1(y)-g_2(y)| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui démontre que f_1+f_2 est continu au point x, puisque g_1+g_2 appartient à Λ . De même, si le champ de vecteurs f et la fonction numérique φ sont continus au point x , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x et un champ de vecteurs $g \in \Lambda$ tels que $|f(y)-g(y)| \leqslant \varepsilon$ et $|\varphi(y)-\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $y \in V$; en outre il existe un voisinage $W \subset V$ tel que $|g(y)| \leqslant |g(x)| + \varepsilon$ pour tout $y \in W$. Par suite, pour tout $y \in W$, on a

$$\begin{aligned}|\varphi(y)f(y)-\varphi(x)g(y)| &\leqslant |\varphi(y)| . |f(y)-g(y)| + |\varphi(y)-\varphi(x)| . |g(y)| \\ &\leqslant \varepsilon(|\varphi(x)|+\varepsilon)+\varepsilon(|g(x)|+\varepsilon)\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ des champs de vecteurs, on peut définir la <u>topologie de la convergence compacte</u> comme sur un espace vectoriel d'applications de E dans un espace de Banach : pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie compacte K de E , soit $V(K,\varepsilon)$ l'ensemble des champs de vecteurs f tels que $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in K$; les $V(K,\varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie considérée. Il est immédiat que $\mathcal{V}$ est <u>complet</u> pour cette topologie.

PROPOSITION 2.- <u>L'espace</u> $\mathcal{V}$ <u>des champs de vecteurs continus est fermé pour la topologie de la convergence compacte</u>.

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION 3.- <u>L'espace vectoriel des champs de vecteurs de la forme</u> $x \longrightarrow \sum_i \varphi_i(x)g_i(x)$, <u>où les</u> g_i <u>appartiennent à</u> Λ <u>et les</u> φ_i <u>sont des fonctions numériques continues dans</u> E <u>et à support compact, est partout dense dans</u> $\mathcal{C}_\Lambda$ <u>pour la topologie de la convergence compacte</u>.

En effet, soit f un champ de vecteurs continu dans E , K une partie compacte de E , $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire ; d'après la déf.2 et l'axiome de Borel-Lebesgue, il existe un recouvrement fini (V_i) de K et, pour chaque indice i , un champ de vecteurs $g_i \in \Lambda$ tels que $|f(y)-g_i(y)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $y \in V_i$. Soit alors (φ_i) une famille d'applications continues de E dans $[0,1]$, telle que φ_i ait son support contenu dans V_i et que $\sum_i \varphi_i(x)=1$ dans K ; le champ de vecteurs $h(x)= \sum_i \varphi_i(x)g_i(x)$ est alors tel que $|h(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in K$.

PROPOSITION 4.- <u>Pour tout champ de vecteurs continu</u> f <u>sur</u> E , <u>l'application</u> $x \longrightarrow |f(x)|$ <u>est continue dans</u> E .

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x et un champ de vecteurs $g \in \Lambda$ tels que $|f(y)-g(y)| \leqslant \varepsilon$ pour $y \in V$, d'où $\big||f(y)|-|g(y)|\big| \leqslant \varepsilon$ pour $y \in V$; comme par hypothèse l'application $y \longrightarrow |g(y)|$ est continue, il existe un voisinage $W \subset V$ de x tel que $\big||g(y)|-|g(x)|\big| \leqslant \varepsilon$ pour $y \in W$. On en tire $\big||f(y)|-|f(x)|\big| \leqslant 3\varepsilon$ pour $y \in W$, ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 5.- <u>Pour qu'un champ de vecteurs</u> f <u>sur</u> E <u>soit continu il faut et il suffit que, pour tout</u> $g \in \Lambda$, <u>la fonction numérique</u> $x \longrightarrow |f(x)-g(x)|$ <u>soit continue dans</u> E .

La nécessité des conditions résulte des prop.1 et 4 . Réciproquement, si elle est vérifiée, soit x un point quelconque de E , $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. D'après la condition (CF_{III}), il existe $g \in \Lambda$

tel que $|f(x)-g(x)| \leq \varepsilon$; en vertu de l'hypothèse, il existe donc un voisinage V de x tel que $|f(y)-g(y)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $y \in V$ ce qui démontre la proposition.

Remarque.- Les prop.1 et 4 montrent que l'ensemble $\mathcal{C}_\Lambda$ des champs de vecteurs continus (relativement à Λ) forment un ensemble fondamental. En outre, il résulte aussitôt de la prop.5 que les champs de vecteurs continus relativement à $\mathcal{C}_\Lambda$ ne sont autres que les éléments de $\mathcal{C}_\Lambda$; on peut donc dire que $\mathcal{C}_\Lambda$ est un ensemble fondamental "saturé" en un certain sens.

3. Prolongement d'un champ de vecteurs continu.

Soit A une partie fermée de E (ou plus généralement, l'intersection d'une partie ouverte et d'une partie fermée de E) ; A est donc un sous-espace localement compact de E (Top.gén., chap.I, § 10,prop.10). Il est clair que les restrictions à A des champs de vecteurs d'un ensemble fondamental Λ constituent un ensemble fondamental Λ_A de champs de vecteurs sur A , et que la restriction à A de tout champ de vecteurs continu pour Λ est un champ de vecteurs continu pour Λ_A.

PROPOSITION 6.- Soient K une partie compacte de E , f un champ de vecteurs sur K , continu relativement à Λ_K ; il existe alors un champ de vecteurs sur E , continu relativement à Λ , et qui prolonge f

Nous allons démontrer, par récurrence sur n , qu'il existe une suite (f_n) de champs de vecteurs continus dans E , telle que $|f_n(x)-f(x)| \leq 1/2^n$ pour tout $x \in K$ et $|f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leq 1/2^{n-1}$ pour tout $x \in E$. Il en résultera que la suite (f_n) converge uniformément dans E vers un champ de vecteurs g qui est continu (prop.2) et prolonge évidemment f .

Comme K est compact, il résulte des hypothèses qu'il existe un recouvrement ouvert fini (V_i) de K et une famille (g_i) de champs de vecteurs appartenant à Λ tels que $|f(y)-g_i(y)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $y \in V_i \cap K$. Soit (φ_i) une famille d'applications continues de E dans $[0,1]$, telle que φ_i ait son support contenu dans V_i et que $\sum_i \varphi_i(x)=1$ dans K ; le champ de vecteurs $f_1 = \sum_i \varphi_i g_i$, continu dans E, est donc tel que $|f_1(x)-f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ dans K.

Supposons maintenant f_n défini. Pour tout $x \in K$, il existe un voisinage V_x de x et un champ de vecteurs g_x tels que $|g_x(y)-(f(y)-f_n(y))| \leqslant$ $\leqslant 1/2^{n+1}$ pour tout $y \in V_x \cap K$, d'où on tire en particulier $|g_x(x)| \leqslant 3/2^{n+1}$; par suite, il existe un voisinage $W_x \subset V_x$ de x tel que $|g_x(y)| \leqslant 1/2^{n-1}$ pour tout $y \in W_x$. On peut recouvrir K par un nombre fini de voisinages $W_j = W_{x_j}$; nous poserons $h_j = g_{x_j}$. Soit (ψ_j) une famille d'applications continues de E dans $[0,1]$, telles que ψ_j ait son support contenu dans W_j et que $\sum_j \psi_j(x)=1$ dans K ; il est immédiat que le champ de vecteurs $f_{n+1}=f_n+\sum_j \psi_j h_j$ répond à la question.

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>des points distincts de</u> E, <u>et pour chaque indice</u> i, <u>soit</u> a_i <u>un vecteur de</u> $F(x_i)$; <u>il existe alors un champ de vecteurs continu</u> f <u>sur</u> E ~~xxx~~ <u>tel que</u> $f(x_i)=a_i$ <u>pour</u> $1 \leqslant i \leqslant n$.

Il suffit d'appliquer la prop.6 à l'ensemble fini K formé des x_i, en remarquant que le champ de vecteurs f_o défini sur K par les conditions $f_o(x_i)=a_i$ est continu relativement à Λ_K, compte-tenu de la condition (CF_{III}).

4. Indépendance linéaire des champs de vecteurs continus.

PROPOSITION 7.- Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des champs de vecteurs continus sur E ; si, en un point $x \in E$, les n vecteurs $f_i(x)$ sont linéairement indépendants, il existe un voisinage V de x tel que, pour tout $y \in V$, les n vecteurs $f_i(y)$ soient linéairement indépendants.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que, pour tout voisinage V de x, il existe un point $y_V \in V$ et n scalaires λ_{iV} non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{iV} f_i(y_V) = 0$; en divisant par un scalaire, on peut toujours supposer que $\sup_{1 \leq i \leq n} (|\lambda_{iV}|) = 1$. Pour tout indice i, l'ensemble des λ_{iV} est donc borné, et par suite la famille (λ_{iV}), où V parcourt l'ensemble filtrant (pour $\supset$) des voisinages de x, a une valeur d'adhérence suivant tout filtre plus fin que le filtre des sections $\mathfrak{F}$ de cet ensemble. On en déduit aussitôt, par récurrence sur i, qu'il existe un filtre $\mathfrak{G}$ plus fin que $\mathfrak{F}$, suivant lequel chacune des familles (λ_{iV}) tend vers une limite μ_i ; en outre, comme $\sup(|t_1|, |t_2|, \ldots, |t_n|)$ est une fonction continue, on a $\sup_{1 \leq i \leq n} (|\mu_i|) = 1$. Cela étant, on a par hypothèse

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(y_V) = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_{iV}) f_i(y_V)$$

d'où

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(y_V) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu_i - \lambda_{iV}| \cdot |f_i(y_V)|$$

En passant à la limite suivant le filtre $\mathfrak{G}$, il vient donc (en vertu des prop. 1 et 4) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x) = 0$, et comme les μ_i ne sont pas tous nuls, nous aboutissons à une contradiction, ce qui établit la proposition.

COROLLAIRE 1.- L'ensemble E_n des points $x \in E$ où la dimension de F(x) est au plus égale à l'entier n, est fermé dans E.

En effet, si $x \notin E_n$, il existe, d'après (CF_{III}), n+1 champs de vecteurs $f_i \in \Lambda$, linéairement indépendants au point x ; ils sont donc aussi linéairement indépendants en tout point d'un voisinage de x, ce qui montre que le complémentaire de E_n dans E est ouvert.

COROLLAIRE 2.- <u>Pour tout entier</u> $n \geqslant 0$, <u>l'ensemble</u> E'_n <u>des points</u> $x \in E$ <u>où la dimension de</u> $F(x)$ <u>est égale à</u> n, <u>est un sous-espace localement</u> ~~dmxE~~ <u>compact de</u> E.

En effet, on a $E'_n = E_n \cap \complement(E_{n-1})$, donc E'_n est l'intersection d'un ensemble fermé et d'un ensemble ouvert dans E.

On obtient ainsi des conditions <u>nécessaires</u> pour qu'il existe au moins un ensemble fondamental de champs de vecteurs correspondant à une famille donnée d'espaces de Banach $F(x)$; on peut montrer que, moyennant certaines hypothèses supplémentaires sur les $F(x)$, ces conditions sont suffisantes (par exemple, lorsqu'on suppose que tous les $F(x)$ sont des espaces hilbertiens de type dénombrable).

5. <u>Champs de vecteurs intégrables</u>.

Soit μ une mesure sur l'espace E. Pour tout champ de vecteurs $f \in \mathcal{V}$, on pose $N_p(f) = (\int^* |f(x)|^p \, d\mu(x))^{1/p}$ pour tout $p \geqslant 1$; c'est une <u>semi-norme</u> sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{V}^p$ de $\mathcal{V}$, formé des champs f tels que $N_p(f) < +\infty$. Un champ de vecteurs f est dit <u>négligeable</u> si $N_1(f) = 0$; cela signifie (§ 2, th.2) que $f(x)$ est nul presque partout dans E. Cette notion permet de définir, comme au § 3, n°1, la notion de champs de vecteurs <u>équivalents</u> : ce sont deux champs de vecteurs dont la différence est négligeable. Soit V^p l'espace vectoriel des classes des champs appartenant à $\mathcal{V}^p$ (espace quotient de $\mathcal{V}^p$ par le sous-espace des champs négligeables) ; par passage au quotient, $N_p(f)$ définit sur V^p une <u>norme</u>, et le raisonnement de la prop.1 du § 3 prouve que cet espace normé est <u>complet</u>.

Parmi les éléments de $\mathcal{V}^p$ figurent évidemment les champs de vecteurs continus (relativement à un ensemble fondamental Λ) et nuls en dehors d'un ensemble compact, car pour un tel champ f , la fonction numérique $|f(x)|$ est continue dans E et à support compact ; l'ensemble $\mathcal{K}_\Lambda$ de ces champs de vecteurs est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}^p$. Nous désignerons par Γ_Λ son image canonique dans V^p (autrement dit, l'ensemble des classes de champs équivalents aux champs de $\mathcal{K}_\Lambda$), par L^p_Λ <u>l'adhérence</u> de Γ_Λ dans V^p , par $\mathcal{L}^p_\Lambda$ l'ensemble des champs dont la classe appartient à L^p .

On peut alors transporter à $\mathcal{L}^p_\Lambda$ et L^p_Λ la plupart des théorèmes démontrés sur les espaces L^p au § 3, et qui ne font pas intervenir l'intégrale d'une fonction vectorielle. Nous nous bornerons à énoncer les principaux de ces résultats, en laissant le plus souvent au lecteur le soin de calquer leur démonstration sur celles des théorèmes correspondants du § 3 .

Si f appartient à $\mathcal{L}^p_\Lambda$, $|f|$ appartient à $\mathcal{L}^p_R$, et l'application qui, à la classe $\tilde{f}$ de f , fait correspondre la classe $|\tilde{f}|$ de $|f|$, est une application continue de L^p_Λ dans L^p_R .

L'espace L^p_Λ est <u>complet</u> par construction ; si (f_n) est une suite de champs de vecteurs appartenant à $\mathcal{L}^p_\Lambda$, telle que la suite $(\tilde{f}_n)$ des images canoniques des f_n dans L^p_Λ soit une suite de Cauchy, il existe une suite partielle (f_{n_k}) qui converge presque partout dans E , et si f est un champ de vecteurs égal presque partout à la limite de $f_{n_k}(x)$, f appartient à $\mathcal{L}^p_\Lambda$, et sa classe $\tilde{f}$ est la limite de la suite $(\tilde{f}_n)$ dans L^p_Λ . En particulier, pour tout champ de vecteurs $f \in \mathcal{L}^p_\Lambda$, on peut appliquer ce résultat à une suite (f_n) de champs de vecteurs continus nuls hors d'un ensemble compact, telle que la suite $(\tilde{f}_n)$ converge vers $\tilde{f}$ dans L^p_Λ .

Le théorème de Lebesgue (§ 3, th. 5) se généralise comme suit :

THEOREME 1.- Soit (f_n) une suite de champs de vecteurs appartenant à $\mathcal{L}^p_\Lambda$, et telle que : 1° la suite $(f_n(x))$ converge presque partout vers $f(x)$; 2° il existe une fonction numérique $g \geqslant 0$ telle que $\int^* g^p d\mu < +\infty$, et $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ presque partout pour tout entier n. Alors f appartient à $\mathcal{L}^p_\Lambda$, et on a $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f-f_n)=0$.

On déduit de là que pour qu'un champ de vecteurs f appartienne à $\mathcal{L}^p_\Lambda$, il faut et il suffit que le champ de vecteurs $|f|^{p-1}.f$ appartienne à $\mathcal{L}^1_\Lambda$; $|f|^p$ est intégrable et on a $N_p(f)=(\int |f|^p d\mu)^{1/p}$.

En raison de ce dernier résultat, on dit (par abus de langage) que les champs de vecteurs appartenant à $\mathcal{L}^p_\Lambda$ sont les champs de vecteurs de puissance p-ème intégrable.

6. Champs de vecteurs mesurables.

En raison de la prop. 2, le th. de Lusin se généralise aux champs de vecteurs : si f est un champ de vecteurs appartenant à $\mathcal{L}^p_\Lambda$, pour tout ensemble compact $K \subset E$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K$ tel que la restriction de f à K_1 soit continue et qu'on ait $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$.

On dit alors qu'un champ de vecteurs f sur E est mesurable (pour μ et Λ) si, quels que soient la partie compacte $K \subset E$ et le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K$ tel que la restriction de f à K_1 soit continue et que $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$.

Il résulte aussitôt de cette définition que les champs de vecteurs mesurables sur E forment un module sur l'anneau des fonctions scalaires finies et mesurables dans E (en vertu de la prop. 1). Si f est un champ de vecteurs mesurable, la fonction scalaire f est mesurable (d'après la prop. 4).

On dit qu'un champ de vecteurs est <u>localement négligeable</u> s'il est nul localement presque partout ; un champ égal localement presque partout à un champ mesurable est mesurable.

Le th. d'Egoroff se généralise immédiatement aux champs de vecteurs mesurables : si (f_n) est une suite de champs de vecteurs mesurables, qui converge simplement vers un champ de vecteurs f , f est mesurable et, pour tout ensemble compact $K \subset E$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K$ tel que $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ et dans lequel la convergence de la suite $(f_n(x))$ vers $f(x)$ est uniforme.

Le th. 4 du § 5 est remplacé par le critère de mesurabilité suivant :

THÉORÈME 2.- <u>Pour qu'un champ de vecteurs</u> f <u>soit mesurable, il faut et il suffit que</u> :

1° <u>pour tout champ de vecteurs continu</u> g <u>et tout nombre</u> $r > 0$, <u>l'ensemble des</u> $x \in E$ <u>tels que</u> $|f(x)-g(x)| \leqslant r$ <u>soit mesurable</u> ;

2° <u>pour tout ensemble compact</u> $K \subset E$, <u>il existe un ensemble dénombrable de champs de vecteurs continus</u> g_n <u>tels que, pour presque tout</u> $x \in K$, $f(x)$ <u>appartienne au sous-espace vectoriel fermé de</u> $F(x)$ <u>engendré par les vecteurs</u> $g_n(x)$.

1° Les conditions sont <u>nécessaires</u>. En effet, si f est mesurable et g continu, $|f-g|$ est une fonction scalaire mesurable, donc l'ensemble des $x \in E$ tels que $|f(x)-g(x)| \leqslant r$ est mesurable. D'autre part, soit K un ensemble compact dans E ; il existe une suite croissante (K_n) d'ensembles compacts contenus dans K , tels que $\mu(K \cap \complement K_n) \leqslant 1/n$, et que f soit continu dans K_n ; il existe donc (prop.6) un champ de vecteurs g_n continu dans E et qui prolonge la restriction de f à K_n ; pour tout $x \in \bigcup_n K_n = A$, le point $f(x)$ appartient donc au sous-espace vectoriel fermé de $F(x)$ engendré par les $g_n(x)$, et $K \cap \complement A$ est négligeable.

2° Les conditions sont <u>suffisantes</u>. En effet, soit $K \subset E$ un ensemble compact quelconque. En modifiant au besoin f sur un ensemble négligeable, on peut supposer que, pour tout $x \in K$, $f(x)$ appartient au sous-espace fermé $V(x)$ de $F(x)$ engendré par les vecteurs $g_n(x)$. Si (f_n) désigne l'ensemble dénombrable des combinaisons linéaires (finies) des g_n à coefficients rationnels, pour tout $x \in K$, l'ensemble des $f_n(x)$ est donc partout dense dans $V(x)$. Soit $A_{n,p}$ l'ensemble des $x \in K$ tels que $|f(x)-f_n(x)| \leq 1/p$; par hypothèse, les $A_{n,p}$ sont intégrables. Pour tout p fixé, posons $C_{1,p}=A_{1,p}$, $C_{n+1,p} = A_{n+1,p} \cap \complement(\bigcup_{k \leq n} A_{k,p}) \cap K$; les $C_{n,p}$ sont intégrables, deux à deux sans point commun, et leur réunion est égale à K. Si $\varphi_{n,p}$ est la fonction caractéristique de $C_{n,p}$, le champ de vecteurs $g_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\varphi_{n,p}(x)$ est mesurable (en vertu du th. d'Egoroff), et on a $|f(x)-g_p(x)| \leq 1/p$ en tout point de K. La restriction de f à K étant donc limite de la suite des champs mesurables g_p, le th. d'Egoroff montre que f est mesurable.

En modifiant légèrement cette démonstration, comme dans le cor.1 du th.4 du § 5, on montre que pour tout ensemble compact $K \subset E$, il existe une suite (h_p) de champs de la forme $\sum_i \varphi_i u_i$ (somme <u>finie</u>), où les fonctions scalaires φ_i sont intégrables et les champs de vecteurs u_i continus et à support compact, ayant les propriétés suivantes: 1° $|h_p| \leq |f|$ pour tout indice p ; 2° $h_p(x)$ tend presque partout vers $f(x)$ dans K.

Ce dernier résultat permet alors de généraliser le critère d'intégrabilité du § 5 (th.5) : pour qu'un champ de vecteurs f soit de puissance p-ème intégrable, il faut et il suffit que f soit mesurable et que $N_p(f) < +\infty$. Le th. de Lebesgue permet en effet de se ramener à démontrer que lorsque φ est une fonction scalaire intégrable, et u un champ de vecteurs continu, le champ de vecteurs φu est intégrable : or, il existe par hypothèse une fonction numérique continue ψ à support compact, telle que $N_1(\varphi - \psi) \leqslant \varepsilon$, d'où, si $|u| \leqslant M$, $N_1(\varphi u - \psi u) \leqslant M\varepsilon$, ce qui démontre le théorème.

Ce critère permet enfin de montrer, comme au § 6, que si f appartient à $\mathcal{L}^p_\Lambda$ et si la fonction numérique φ appartient à $\mathcal{L}^q_R$ (avec $1/p+1/q=1$; $1 \leqslant p \leqslant +\infty$), le champ de vecteurs φf appartient à $\mathcal{L}^1_\Lambda$ (on définit naturellement $\mathcal{L}^\infty_\Lambda$ comme l'espace vectoriel des champs de vecteurs mesurables f tels que $|f|$ soit localement presque partout égale à une fonction bornée). On a en outre l'inégalité de Hölder $N_1(\varphi f) \leqslant N_p(f) N_q(\varphi)$.
