INTEGRATION
CHAPITRE IV (ETAT 1+0)

Rédaction n° 133

Nombre de pages : 91

Nombre de feuilles : 91

Intégration Chap. IV. Etat 1+0

Godement

133

A 133 2

I N T E G R A T I O N

Chapitre IV

(Etat 1+0)

Table des Matières

Commentaires

1)De nombreuses questions ont été oubliées;par exemple:on peut toujours mettre simultanément une famille dénombrable de mesures m_n sous la forme f_n.dm ;l'image réciproque d'un ensemble analytique est analytique;si le graphe d'une fonction est un ensemble analytique,cette fonction est mesurable(c'est tout à fait important pour les applications);dans la mesure quotient,si la relation d'équivalence est définie par un groupe bien foutu,et si m est invariante,il en est de même des m_i .

D'autres questions ont été oubliées par principe;notamment:décomposition d'une mesure invariante par un groupe en parties ergodiques(c'est un exemple de relation d'équivalence en général non mesurable);le rédacteur pense qu'il serait aussi justifié de mettre ce théorème ici que dans le Chap. sur la théorie ergodique;toutefois,il serait tout à fait stupide de séparer ces questions de la

-000-

théorie des sommes continues(ou mesurables)d'espaces de Hilbert,vu qu'elles en sont une illustration et un cas particulier tout à la fois.

On n'a pas non plus traité des mesures isomorphes;le rédacteur ignore l'intérêt de cette notion;de plus;en parler obligerait à démontrer que toute mesure(ou presque)est isomorphe à la mesure de Lebesgue sur 0,1 ,théorème dont les méfaits ne sont pas encore terminés .

2)Le § sur les ensembles analytiques a été ajouté d'office au plan prévu;normalement,il aurait dû figurer en Top.Gén.IX ;en ce qui concerne son utilité, on aurait pu la contester en 1948,mais pas en 1950,étant donné que les résultats en question ont été utilisés en 49,de façon essentielle,par von Neumann, Mackey,Rohlin(et même Iwasawa-mais il aurait pu s'en passer).Le fait que ces questions aient été exposées d'une façon horrible par les ressortissants des Démocraties Populaires ne semble pas suffisant pour les vider;quant au fait que Bourbaki a horreur de la séparabilité(comme la Nature a horreur du vide), il ne constitue pas non plus un argument suffisant:que penserait-on d'un chimiste qui,écrivant des "Eléments de Chimie",ne parlerait pas de NH^4OH sous prétexte qu'il a l'odorat sensible? D'ailleurs,c'est une pure question de goût, si l'on peut dire.

Il semble que le théorème sur l'image continue et biunivoque d'un borélien soit moins indispensable que les autres ,en ce sens que,dans beaucoup de cas, une démonstration astucieuse permet de s'en passer;mais il n'est peut être pas mauvais de donner un peu plus que les théorèmes strictement nécessaires,ceci afin de ne pas obliger les gens à faire preuve d'une intelligence infinie (faute de quoi le seul lecteur de Bourbaki sera le Bon Dieu,ce qui serait regrettable pour les distributions d'Armagnac).D'une manière générale,le rédacteur est d'avis que l'on doit,non seulement exposer ce qui est déja connu (et ce par les meilleures méthodes),mais aussi donner les moyens techniques de continuer:or on n'a jamais vu qui que ce soit trouver du premier coup les bonnes démonstrations;il importe donc de fournir plus de moyens qu'il n'en faudrait théoriquement.Bien entendu,ceci n'oblige pas à introduire tout Kuratowski,mais seulement à choisir entre 15 pages(rédaction actuelle),10 pages (rédaction actuelle moins les boréliens),et 400(Kuratowski).

Intégration. Chap. IV

Etat (1+0)

Etat 9

A 133

M. Delsarte

§1-Mesures dénombrables à l'infini.

1-Définition et exemples.

Définition 1-On dit qu'une mesure de Radon positive m définie sur un espace localement compact E est dénombrable à l'infini lorsque E est réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie pour m.

Il est clair que, sur un espace compact, toute mesure est dénombrable à l'infini; il en est de même sur tout espace localement compact dénombrable à l'infini, puisqu'un ensemble compact est toujours de mesure finie; toute mesure bornée est par ailleurs dénombrable à l'infini.

Si m est dénombrable à l'infini, et si (A_n) est une suite d'ensembles mesurables tels que $E=\bigcup A_n$, $m(A_n)<+\infty$ pour tout n, alors, pour chaque n il existe (Chap. III, §4, Th. 2) une suite $(K_{n,p})$ de compacts et un ensemble négligeable N_n tels que l'on ait $A_n=N_n\cup\bigcup K_{n,p}$; il résulte immédiatement de là que, à un ensemble de mesure nulle près, E est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles compacts. La réciproque de cette propriété est triviale (c'est-à-dire, se réduit à la définition).

2-Propriétés élémentaires.

Proposition 1-Soit m une mesure dénombrable à l'infini sur E; pour qu'un ensemble N E soit m-négligeable, il faut et il suffit qu'il soit m-localement négligeable.

Tout revient à montrer que la condition est suffisante; or si $N\subset E$ est localement négligeable, et si l'on écrit $E = N_o\cup\bigcup K_n$, où les K_n sont compacts et N_o de mesure nulle, la formule $N = N\cap N_o \cup \bigcup N\cap K_n$ montre que N est réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle: d'où la Prop. 1

Remarque: on ne sait pas si la dénombrabilité à l'infini est nécessaire pour assurer la conclusion de la Prop.1.

En raison de la Prop.1,il est superflu;quand on a affaire à une mesure dénombrable à l'infini,de distinguer les propriétés valables "presque partout" de celles qui le sont "localement presque partout";par exemple, dire qu'une fonction $f(x)$ est essentiellement bornée relativement à une mesure m dénombrable à l'infini(Chap.III,§5,No.8),c'est dire qu'il existe une constante finie $M>0$ et un ensemble de mesure nulle $N\subset E$ tels que l'on ait $\|f(x)\|\leqslant M$ pour $x\notin N$.Comme on le verra,ces circonstances simplifient fortement l'étude des mesures dénombrables à l'infini.

---

§2- Intégrales induites.

1-<u>Définition</u>.

Soient E un espace localement compact,m une intégrale de Radon définie sur E,et A un sous-espace localement compact de E.Etant donnée une fonction $f(x)$ définie sur A et à valeurs dans un espace de Banach F,nous prolongerons f à E en introduisant la fonction

$$f^*(x) = f(x) \text{ si } x\in A, \quad =0 \text{ si } x\notin A.$$

On obtient ainsi une application linéaire $f\to f^*$ de l'espace $\mathcal{F}_F(A)$ des fonctions définies sur A et à valeurs dans F,dans l'espace analogue relatif à E;cette application est en outre continue au sens suivant:si une f variable converge uniformément vers f_0 en restant nulle en dehors d'un compact fixe $K\subset A$,alors f^* converge uniformément vers f_0^* en restant nulle en dehors d'un compact fixe de E(à savoir K).

Supposons en particulier que f soit,dans l'espace localement compact A,<u>continue et à support compact</u> ;alors d'après le Chap.III,§5,No.4,<u>Lemme</u>, La fonction f^* sera sommable pour m, et il est clair que la formule

$$(1) \qquad I(f) = \int_E f^*(x)dm(x)$$

définit une application linéaire dans F de l'espace $\mathcal{L}_F(A)$ des fonctions définies sur A, à valeurs dans F, et qui sont continues et à support compact; si de plus f est nulle en dehors d'un compact K $\subset$ A, et si M_K est la mesure de K pour l'intégrale $|m|$, on aura évidemment

$$(2) \qquad \|I(f)\| \leqslant M_K . \|f\| \quad :$$

I(f) est donc une fonction continue de f ~~pour~~ au sens: convergence uniforme en restant nulle en dehors d'un compact fixe.

Considérons alors le cas particulier où F=<u>C</u>; de ce qui précède résulte que $f \to I(f)$ <u>est une intégrale de Radon sur</u> ~~XXXXXXXX~~ <u>l'espace localement compact</u> $A \subset E$; nous l'appellerons l'<u>intégrale induite par</u> m <u>dans</u> A (le rédacteur n'a pas le courage de faire une Définition), et nous la désignerons par le symbole m_A; on ne perdra pas de vue que l'intégrale m_A est définie sur l'espace A, et non pas sur E.

<u>Remarque</u>: dans le cas où A est <u>ouvert</u> dans E, la fonction f^* est, pour f continue et à support compact sur A, continue et à support compact sur E; on retrouve donc la notion exposée au Chap. II, §? .

2-<u>Propriétés élémentaires</u>.

<u>Proposition</u> 1-<u>Soit</u> A <u>un sous-espace localement compact de</u> E; <u>l'application</u> $m \to m_A$ <u>de l'espace des intégrales de Radon définies sur</u> E <u>dans l'espace analogue relatif à</u> A <u>est linéaire et positive</u>.

Cette propriété est évidente.

<u>Proposition</u> 2-<u>Si</u> A <u>est relativement compact, la mesure</u> m_A <u>est bornée</u>.

Cela résulte de la relation (2) appliquée à un compact K contenant A.

Remarque-Les intégrales m_A induites sur A par des intégrales définies sur E ne constituent donc pas, en général, toutes les intégrales définies sur A; par exemple, si $E = \underline{R}$ et $A =]0,1[$, la mesure

$$f \longrightarrow \int_0^1 f(x)\frac{dx}{x}$$

ne provient pas d'une intégrale définie sur $\underline{R}$ puisqu'elle est de masse totale infinie alors que A est relativement compact.

On notera d'autre part que la Prop.2 est valable plus généralement dès que $\overline{m}(A)$ est fini.

Proposition 3-Soit A un sous-ensemble fermé de E; alors toute intégrale définie sur l'espace localement compact A est induite par une intégrale définie sur E.

Soit en effet μ une intégrale de Radon sur A, qu'on peut évidemment supposer positive. Pour toute fonction numérique f, définie sur E, continue et à support compact, la restriction de f à A est aussi continue et à support compact puisque A est fermé; on peut donc poser

$$(3) \qquad m(f) = \int_A f(x)d\mu(x) \qquad ,$$

et il est clair qu'on définit de cette façon une intégrale de Radon positive m sur E: nous allons montrer que μ n'est autre que m_A. Pour cela, et g étant une fonction continue et à support compact définie sur A, il faut prouver que l'on a

$$(4) \qquad \int_A g(x)d\mu(x) = \int_E g^*(x)dm(x) \qquad ;$$

on peut du reste se borner au cas ou g est positive; mais alors g^* est une fonction semi-continue supérieurement sur E, en sorte que l'on a

$$\int_E g^*(x)dm(x) = \inf \int f(x)dm(x)$$

le symbole "inf" étant relatif aux fonctions f, continues, positives et à support compact sur E qui majorent g^*, c'est-à-dire qui, sur le support $K \subset A$ de g, sont $\geqslant g$; il vient donc aussi

$$\int_E g^*(x)dm(x) = \inf \int_A f(x)d\mu(x) \quad ,$$

et comme les restrictions à A des f considérées forment, dans l'espace $\mathcal{L}_C(A)$, un filtrant décroissant dont la borne inférieure est la fonction continue g, on a

$$\int_E g^*(x)dm(x) = \int_A g(x)d\mu(x) \quad ,$$

ce qui démontre la Proposition.

On voit donc que, si A est fermé dans E, $m \to m_A$ est une application de l'espace des mesures définies sur E <u>sur</u> l'espace analogue relatif à A.

Remarque: on obtiendrait une démonstration plus courte par Urysohn.

<u>3-Ensembles mesurables pour une intégrale induite.</u>

<u>Proposition 4-Soient</u> E <u>un espace localement compact</u>, m <u>une mesure de Radon positive définie sur</u> E, A <u>un sous-espace localement compact de</u> E, m' <u>la mesure induite par</u> m <u>dans</u> A. <u>Si un ensemble</u> $X \subset A$ <u>est relativement compact dans</u> A, <u>on a</u>

$$(5) \qquad \overline{m}(X) = \overline{m}'(X) \quad ; \quad \underline{m}(X) = \underline{m}'(X).$$

Supposons tout d'abord X compact dans A, donc aussi dans E. Par définition, on a (Chap. III, §3, No. 10, Prop. 18)

$$m'(X) = \inf \int_A f.dm' = \inf \int_E f^*.dm$$

où le symbole "inf" est étendu aux $f \in \mathcal{L}_+(A)$ qui sont $\geqslant 1$ sur X; mais les fonctions f^* correspondantes forment alors un filtrant décroissant dans l'ensemble des fonctions positives, semi-continues supérieurement et à support compact, définies sur E; la borne inférieure de ce filtrant étant la fonction caractèristique de X dans E, on a donc $m'(X)=m(X)$, ce qui prouve les relations (5) dans le cas envisagé.

Considérons maintenant le cas général, où $X \subset A$ est supposé contenu dans un compact K de E. Tout d'abord, on a $\underline{m}'(X) = \sup m'(Y)$ où Y varie dans l'ensemble des compacts contenus dans X; d'après ce qui précède, on a donc $\underline{m}'(X) = \underline{m}(X)$, ce qui est la première relation (5) (on notera qu'elle est valable même si X n'est pas relativement compact).

Pour prouver la seconde relation, remarquons tout d'abord que l'ensemble $K \cap A$ est, comme A, localement compact; il est donc mesurable à la fois pour m et pour m'; il est de plus de mesure finie pour m (puisque relativement compact dans E), et aussi pour m' (en effet, la définition de m' implique, comme on le voit immédiatement, que $\overline{m}'(f) \leqslant \overline{m}(f^*)$ pour toute fonction positive f définie sur A); comme pour des ensembles mesurables et de mesure finie il n'y a pas de différence entre mesure et mesure intérieure, la première relation (5) implique donc

$$\overline{m}'(A \cap K) = m(A \cap K) ;$$

en remarquant que (Chap.III, §4, Prop.11) l'on a

$$\overline{m}(X) = m(K \cap A) - \underline{m}(K \cap A - X)$$

et une relation analogue avec m', on obtient la seconde relation (5).

Corollaire 1 de la Proposition 4- Pour qu'une partie X de A soit m'-mesurable, il faut et il suffit que X soit m-mesurable dans E.

Si X est m'-mesurable, et si $K\subset E$ est compact, alors $X\cap K$ étant l'intersection de X avec l'ensemble localement compact (donc m'-mesurable) $K\cap A$ est m'-mesurable; comme il est relativement compact dans E, on a donc $\overline{m}(X\cap K) = \overline{m}'(X\cap K) =$ (puisque $X\cap K$ est m'-mesurable et de mesure finie) $=\underline{m}'(X\cap K) = \underline{m}(X\cap K)$, ce qui prouve que $X\cap K$ est intégrable pour m: donc X est m-mesurable. La réciproque se démontre de la même façon.

Corollaire 2 de la Proposition 4-Pour qu'une partie X de A soit m'-localement négligeable, il faut et il suffit qu'elle soit m- localement négligeable.

Démonstration analogue à celle du Corollaire précédent.

Remarque-On a vu au cours de la démonstration de la Prop.4 que la première relation (5) est vraie quel que soit $X\subset A$; mais il n'en est pas de même en général de la seconde (contre exemple: on choisit A localement négligeable mais non négligeable pour m; alors $m'=0$, en sorte qu'on a $\overline{m}'(A)=0$ et $\overline{m}(A)=+\infty$); toutefois, supposons que A soit la réunion d'une suite croissante de compacts K_n; alors pour tout $X\subset A$ on a (Chap.III, §1, Etat 5) $\overline{m}'(X) = \sup \overline{m}'(X\cap K_n) = \sup \overline{m}(X\cap K_n) = \overline{m}(X)$; donc:

Proposition 4 bis-Si le sous-espace localement compact A est dénombrabel à l'infini, les relations (5) sont vraies pour toute partie X de A.

Dans ce cas, il est visible que, pour qu'un ensemble X A soit intégrable pour $m' = m_A$, il faut et il suffit qu'il le soit pour m, et on a alors $m_A(X)=m(X)$; autrement dit, et si A est dénombrable à l'infini, les parties intégrables de A sont les traces sur A des parties intégrables pour m. C'est en particulier le cas si A est lui-même compact.

4-Fonctions localement sommables pour l'intégrale induite.

On désigne comme dans ce qui précède par A un sous-espace localement compact de E et par m_A ou m' la mesure induite dans A par une mesure positive m définie sur E.

Proposition 5-Soit f une fonction définie sur A et à valeurs dans un espace de Banach F; pour que f soit mesurable pour m', il faut et il suffit que la fonction f^*, égale à f sur A et à 0 sur $E-A$, soit mesurable pour m.

Supposons en effet ~~XX~~ f^* mesurable pour m, et soit K un compact contenu dans A; pour tout $\varepsilon>0$, il existe alors un compact $K_1 \subset K$ sur lequel f^* -et donc aussi f-est continue, et pour lequel on a $m(K-K_1)<\varepsilon$; d'après la Prop.4, ceci s'écrit encore $m'(K-K_1)<\varepsilon$, ce qui prouve que f est mesurable pour m'. Supposons réciproquement f mesurable pour m', et soit K un compact dans E; l'ensemble $K\cap A$ étant (voir No. précédent) intégrable pour m', on peut trouver un compact $K_2 \subset K\cap A$ sur lequel f est continue et tel que $m'(K\cap A-K_2)<\varepsilon$; puis, un compact $K_3 \subset K-K\cap A$ et ne différant de $K-K\cap A$ que par un ensemble de mesure $<\varepsilon$; f^* étant nulle en dehors de A est continue sur K_3, et il est clair, les compacts K_2 et K_3 étant disjoints, que f^* est continue sur $K_1=K_2\cup K_3$; d'après la Prop.4, on a $m(K-K_1)<2\varepsilon$, ce qui prouve que f^* est m-mesurable.

~~Proposition 6-Pour qu'une fonction f définie sur A soit localement sommable pour m', il faut et il suffit que f^* soit localement sommable pour m.~~

~~Supposons tout d'abord f^* localement sommable pour m, et soit K un compact contenu dans A; soit χ_K la fonction caractéristique de K dans A; d'après la Prop.5, tout revient à prouver que la fonction $|f|.\chi_K$ est~~

Proposition 6-Pour qu'une fonction f définie sur A soit localement sommable pour l'intégrale induite m', il suffit que la fonction f^* soit localement sommable pour m; cette condition est aussi nécessaire si A est fermé dans E.

a) supposons f^* localement sommable, et soit K un compact contenu dans A; la fonction $f \cdot \chi_K$ (χ_K :fonction caractéristique de K dans A) est m'-mesurable d'après la Prop.5; d'après la relation générale $\overline{m}'(g) \leqslant \overline{m}(g^*)$ valable pour toute fonction $g \geqslant 0$ définie sur A, on voit tout de suite que $|f| \cdot \chi_K$ est d'intégrale supérieure finie pour m', donc m'-sommable: f est donc localement sommable pour m'.

b) supposons réciproquement f localement sommable et A fermé; soit K un compact dans E; la fonction $f^* \chi_K$ (χ_K :fonction caractéristique de K dans E) est mesurable d'après la Prop.5 ; elle est égale à f sur ~~XX~~ l'ensemble $H = K \cap A$ et à 0 ailleurs; mais A étant fermé, H est compact; donc la fonction $f \cdot \chi_H$ (χ_H :fonction caract. de H dans A) est sommable pour m' ; on peut donc trouver une suite (g_n) de fonctions de $\mathcal{L}(A)$ qui converge m'-presque partout vers $g = |f| \cdot \chi_H$ et qui forment une suite de Cauchy dans l'espace $L^1(A;m')$, tout en restant nulles en dehors d'un compact fixe H' de A. Il est clair en vertu de la relation

$$\int_A |g_p - g_q| \cdot dm' = \int_E |g_p^* - g_q^*| \cdot dm$$

(laquelle est valable puisqu'il s'agit ici de fonctions continues) que les fonctions g_n^* forment une suite de Cauchy dans $L^1(E;m)$; comme d'après la Prop.1 tout ensemble $N \subset A$, relativement compact dans E, et de mesure nulle pour m', l'est aussi pour m, on déduit de ce qui précède que les fonctions g_n^* convergent m-presque partout vers la fonction $f^*.\chi_K$ -laquelle est donc sommable, en sorte que f^* est comme annoncé localement sommable pour m.

On notera qu'on a en outre avec les notations qui précèdent

$$\int_K f^*(x)dm(x) = \lim \int g_n^*(x)dm(x) = \lim \int_A g_n(x)dm'(x)$$

$$= \int_A f(x)\chi_K(x)dm'(x) = \int_{K\cap A} f(x)dm'(x);$$

en particulier:

<u>Proposition</u> 7-<u>Soit</u> K <u>un sous-ensemble compact de</u> E; <u>pour qu'une fonction</u> f <u>définie sur</u> K <u>soit sommable pour l'intégrale induite</u> m_K, <u>il faut et il suffit que la fonction</u> f^*, <u>égale à</u> f <u>sur</u> K <u>et à</u> 0 <u>ailleurs, soit sommable pour</u> m, <u>et on a alors</u>

$$\int_K f(x)dm_K(x) = \int_K f^*(x)dm(x) \quad .$$

Remarque-La Prop. 7 s'étend aux sous-espaces localement compacts <u>dénombrables à l'infini</u> comme on le voit facilement, et même plus généralement ~~xx~~ (?) au cas ou la mesure donnée m est dénombrable à l'infini (A étant alors quelconque); supposons en effet que E soit la réunion des compacts K_n et d'un ensemble négligeable N; alors A sera la réunion des $A\cap K_n$ et de $A\cap N$, en sorte que la mesure m_A est dénombrable à l'infini; dire qu'une fonction f, définie ~~xx~~ sur A et mesurable pour m_A, est sommable pour m_A, revient à dire que la ~~série~~ suite de terme général $\int_{A\cap K_n} |f(x)|dm'(x)$ est convergente (on suppose que les K_n forment une suite croissante);mais d'après ce qui précède on a

$$\int_{A\cap K_n} |f(x)|\,dm'(x) = \int_{K_n} |f^*(x)|\,dm(x) \qquad ,$$

ce qui prouve notre assertion. Il est clair que toutes ces propriétés proviennent de la Proposition suivante, qu'on a implicitement démontrée dans ce qui précède:

Proposition 7 bis- Soit A un sous-espace localement compact quelconque de A; pour qu'une fonction f, définie sur A et nulle en dehors d'une partie compacte de A, soit sommable pour la mesure induite m_A, il faut et il suffit que la fonction f^* soit sommable pour m; on a alors

$$\int_A f(x)dm_A(x) = \int_E f^*(x)dm(x) \qquad .$$

Une autre conséquence de cette proposition est la suivante:

Proposition 8-Soient A et B deux sous-espaces localement compacts de E, tels que $A\subset B$; alors la mesure induite dans A par m_B coincide avec m_A.

En effet, soit m' la mesure induite par m_B dans A; pour $f\in\mathcal{L}(A)$, soit g la fonction (définie sur B) égale à f sur A et à 0 sur B-A; on a par définition $m'(f) = m_B(g)$; mais g étant nulle en dehors d'un compact de B, la Prop. précédente donne $m_B(g) = m(g^*)$; comme on a $g^*=f$ sur A et 0 sur E-A, on a donc bien comme annoncé $m'(f)=m_A(f)$.

§3-Intégrales définies par des fonctions localement sommables.

1-Propriétés caractéristiques des fonctions localement sommables.

Dans tout ce §, et sauf mention expresse du contraire, on désigne par E un espace localement compact et par m une mesure positive sur E, donnés une fois pour toutes.

On a défini (Chap. III, §5, No. 5) la notion de fonction localement sommable comme suit: une fonction f, définie sur E et à valeurs dans un espace de Banach F, est localement sommable (relativement à E) si, pour tout compact $K \subset E$, la fonction égale à f sur K et à 0 ailleurs est sommable pour m. Nous allons donner deux autres caractérisations de ces fonctions.

Proposition 1-Pour qu'une fonction f définie sur E soit localement sommable pour m, il faut et il suffit que, pour tout compact $K \subset E$, la restriction de f à K soit sommable pour l'intégrale induite m_K.

C'est une conséquence immédiate de la Prop. 7 du §2.

Proposition 2-Pour qu'une fonction f définie sur E soit localement sommable pour m, il faut et il suffit que, pour toute fonction numérique g, continue et à support compact, la fonction g.f soit sommable pour m.

La condition est nécessaire; car g.f, comme produit de fonctions mesurable, est mesurable; si de plus g est nulle en dehors du compact K, on a

$g.f = g . f . \varphi_K$, en sorte que $|gf|$ est d'intégrale supérieure finie: donc gf est sommable. Réciproquement, supposons réalisée cette condition; K étant un compact, on peut trouver une fonction g numérique, continue et à support compact, telle que g prenne la valeur un sur K; on a alors $f.\varphi_K = gf.\varphi_K$, ce qui met en évidence la sommabilité de $f.\varphi_K$.

Rappelons que toute fonction continue est localement sommable, de même que toute fonction de puissance $p^{è}$ sommable, ou que toute fonction mesurable qui reste bornée sur chaque compact.

2-Intégrale définie par une fonction localement sommable.

Nous aurons besoin de la notion suivante:

Définition 1-Soient E un espace localement compact et F un espace vectoriel topologique; on appelle intégrale à valeurs dans F définie sur E toute application $f \to I(f)$ de l'espace $\mathcal{L}(E)$ ~~des~~ (fonctions numériques continues et à support compact définies sur E) dans F, qui vérifie la condition suivante: si une f variable de $\mathcal{L}(E)$ converge uniformément vers une fonction limite $f_o \in \mathcal{L}(E)$ en restant nulle en dehors d'un compact fixe, alors I(f) converge dans F vers $I(f_o)$.

Il est clair que cette définition contient celle des intégrales de Radon, lesquelles correspondent au cas où F est le corps réel ou complexe Dans la suite, nous étudierons principalement le cas où F est un espace de Banach; la condition de continuité figurant dans la Déf. 1 signifie alors que, pour tout compact $K \subset E$, il existe une constante M_K positive et finie telle que l'on ait

$$|I(f)| \leqslant M_K \cdot \|f\|$$

pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$ qui est nulle en dehors de K. Si les diverses constantes M_K en question ont, lorsque K varie, une borne supérieure finie, nous dirons, comme dans le cas des intégrales numériques, que l'intégrale vectorielle I est bornée.

La méthode la plus intéressante pour construire des intégrales vectorielles est indiquée par le théorème suivant:

Théorème 1-Soit f une fonction localement sommable à valeurs dans un espace de Banach F; pour toute fonction $g\in\mathcal{L}(E)$ posons

$$(1) \qquad I(g) = \int g(x)f(x)dm(x) \quad ;$$

alors l'application $g\to I(g)$ est une intégrale à valeurs dans F.

Tout d'abord, la formule précédente a un sens d'après la Prop.2; si par ailleurs g est nulle en dehors d'un compact K, il est visible que

$$\left|I(g)\right| \leqslant \|g\| \cdot \int_K |f(x)|\, dm(x) \quad ,$$

ce qui prouve que I vérifie la condition de continuité requise dans la Déf.1: d'où le Théorème.

Définition 2- L'intégrale I définie par la formule (1) se nomme "l'intégrale de densité f par rapport à m"; on la note aussi m^f, ou f.m, ou f.dm; toute intégrale de la forme f.m est dite "de base m".

3-Condition pour qu'une intégrale de base m soit nulle.

Proposition 3-Soit f une fonction localement sommable; pour que l'intégrale f.m soit nulle, il faut et il suffit que la fonction f soit nulle localement presque partout.

Que la condition soit suffisante est évident, car si elle est remplie et si $g\in\mathcal{L}(E)$, la fonction gf, étant nulle presque partout, sera d'intégrale nulle par rapport à m: donc $m^f(g)=0$ pour toute $g\in\mathcal{L}(E)$.

Supposons maintenant que f ne soit pas nulle localement p.p.; il existe alors un ensemble intégrable M sur lequel f est $\neq 0$, puis, par Lusin, un compact non négligeable K sur lequel f est continue et $\neq 0$. Dans l'espace de Banach F où f prend ses valeurs, l'ensemble compact f(K) ne rencontre une certaine boule B de centre 0 et de rayon non nul; par compacité, on peut donc recouvrir f(K) par des boules fermées B_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ en nombre fini et ne rencontrant pas B; il est clair que pour un i au moins, l'ensemble des $x\in K$

tels que $f(x) \in B_i$ (ensemble qui est compact) ne sera pas de mesure nulle; en remplaçant au besoin K par cet ensemble, on voit donc qu'il existe une boule fermée B_0 de F ne contenant pas 0, et un compact $K \subset E$ non négligeable tels que $f(K) \subset B_0$.

Ceci étant, supposons que l'intégrale m^f soit nulle; la fonction caractéristique de K étant m-sommable, on peut l'approcher par une suite presque partout convergente de fonctions g de $\mathcal{L}(E)$ qui ~~convergent aussi~~ restent uniformément bornées; d'après le Théorème de Lebesgue, et $\int gf dm$ étant par hypothèse nul pour toute $g \in \mathcal{L}(E)$, on aura à la limite $\int_K f(x) dm(x) = 0$; mais K n'étant pas négligeable, le point $\int_K f.dm$ est, au facteur $m(K)^{-1}$ près, contenu dans l'enveloppe convexe fermée de $f(K)$ (Chap. III, §6, Th. 1), donc dans B_0, donc n'est pas nul, et cette contradiction achève de démontrer la Proposition.

Corollaire: si f et g sont deux fonctions localement sommables à valeurs dans F, la condition nécessaire et suffisante pour que les intégrales vectorielles f.dm et g.dm soient identiques est que f et g coincident localement presque partout (resp. presque partout si la mesure m est dénombrable à l'infini).

4-Condition pour qu'une intégrale de base m soit bornée.

Si une fonction f à valeurs dans l'espace de Banach F est, non seulement localement localement sommable, mais sommable pour m, l'intégrale f.dm est bornée puisqu'on a alors évidemment, pour toute fonction g continue et à support compact

$$\left| m^f(g) \right| = \left| \int g(x).f(x).dm(x) \right| \leq \| g \| . \int \left| f(x) \right| .dm(x) \quad ;$$

d'après ce qui précède, il en est donc de même lorsque f coincide localement presque partout avec une fonction sommable; nous allons maintenant (dans le cas où f est numérique, démontrer la réciproque de cette propriété, et ceci en plusieurs étapes.

Proposition 4-Soit f une fonction localement sommable positive;pour que f coincide localement presque partout avec une fonction sommable,il faut et il suffit que les nombres $\int_K f(x)dm(x)$ (K:partie compacte variable de E) soient bornés supérieurement.

Tout revient évidemment à prouver que la condition est suffisante.Pour cela,remarquons que cette condition implique que l'intégrale f.dm est bornée;cette intégrale est par ailleurs positive,puisque f est à valeurs positives;donc la fonction 1 est sommable pour f.dm,ce qui prouve l'existence d'une suite croissante de fonctions $g_n \in \mathcal{L}_+(E)$ telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ pour tout n et

$$\sup m^f(g_n) = m^f(1) < +\infty .$$

Le premier membre de cette relation étant,par définition de m^f,égal à $\sup\ m(g_n f)$,et les $g_n f$ constituant une suite croissante de fonctions positives m-sommables,on voit d'après le Théorème de Lebesgue sur les suites croissantes,que la fonction $h = \sup(g_n f)$ est m-sommable et que $m(h)=m^f(1)$. Soit alors $k \in \mathcal{L}_+(E)$;de $kh = \sup(kg_n f)$ résulte en intégrant par rapport à m $m^h(k) = \sup m^f(kg_n)$;mais par construction des g_n on a $\sup(g_n)=1$ m^f-presque partout,donc $\sup m^f(kg_n) = m^f(k)$;les intégrales m^f et m^h sont donc identiques,en sorte que (Coroll.de la Prop.3) f coincide m-presque partout avec la fonction m-sommable h:d'où la Proposition.

Considérons maintenant une fonction localement sommable f à valeurs dans R ou C,mais non nécessairement positive; pour chaque compact $K \subset E$,nous désignerons par M_K le plus petit nombre positif tel que l'on ait $\left|\int gf.dm\right| \leqslant M_K.\|g\|$ pour toute $g \in \mathcal{L}(E)$ nulle en dehors de K;il est clair que,si la mesure f.dm est bornée sa norme est la borne supérieure des nombres M_K .Nous allons montrer que, pour tout compact H <u>intérieur</u> à K, on a

(1) $$\int_H |f(x)|.dm(x) \leqslant M_K \quad .$$

Pour cela, remarquons que si une fonction numérique g, bornée et m-mesurable, est nulle en dehors de H, on a

(2) $$\left| \int gf.dm \right| \leqslant M_K.\|g\| \quad ;$$

en effet, on peut approcher g par une suite g_n de fonctions de $\mathcal{L}(E)$ qui converge presque partout vers g en restant de norme $\leqslant \|g\|$, et l'on peut supposer les g_n nulles en dehors d'un voisinage arbitraire de H -donc, nulles en dehors de K; la relation (2) est alors vraie pour les g_n, et elle se conserve à la limite pour g.

Ceci étant, nous pouvons trouver, d'après le théorème de Lusin, une suite croissante de compacts $H_n \subset H$, sur chacun desquels f est continue, et dont la réunion est H à un ensemble de mesure nulle près; il est clair que si la relation (1) est démontrée pour les H_n, elle le sera aussi pour H: par suite, nous pouvons supposer f <u>continue sur</u> H. L'ensemble f(H) étant compact, il est visible que, pour tout $\varepsilon > 0$, on pourra trouver une partition de H en un nombre fini d'ensembles mesurables M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de telle sorte que, dans chaque M_i, l'oscillation de f soit $< \varepsilon$. Introduisons alors la fonction

$$u(x) = |f(x)|^{-1}.f(x) \quad \text{si } f(x) \neq 0 \quad ; \quad u(x)=0 \text{ dans le cas contraire;}$$

elle prend des valeurs de norme 0 ou 1, et est évidemment mesurable; de plus on a $f(x) = |f(x)|.u(x)$ partout. Désignons maintenant par x_i un point de M_i, choisi une fois pour toutes; χ_M désignant comme toujours la fonction caractéristique d'un ensemble $M \subset E$, on aura l'inégalité

(3) $$\left| f(x) - \sum u(x_i)\chi_{M_i}(x)|f(x)| \right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in H;$$

22

de là résulte que, pour toute fonction numérique g, mesurable, bornée et nulle en dehors de H, on aura

$$\left|\int gf.dm - \sum u(x_i)\int_{M_i} g|f|.dm\right| \leqslant \varepsilon.\|g\| m(H)$$

et donc, d'après (2):

(4) $$\left|\sum u(x_i)\int g|f|.dm\right| \leqslant (M_K+\varepsilon m(H)).\|g\| \quad ;$$

introduisons .... M_i ...alors les nombres

(5) $$a_i = u(x_i)\int |f|.dm \quad ;$$

en appliquant (4)... M_i.. à la fonction g qui dans M_i prend une valeur constante ξ_i arbitrairement donnée (réelle ou complexe suivant le corps considéré), on voit que, quelles que soient les constantes ξ_i on a

(6) $$\left|\sum_i \xi_i a_i\right| \leqslant M.\sup(|\xi_i|)$$

où $M = M_K+\varepsilon m(H)$; si nous prouvons que (6) implique $\sum|a_i| \leqslant M$, on aura, puisque d'après (5) $\int|f|.dm = \sum|a_i|$, la relation $\int|f|.dm \leqslant M_K+\varepsilon m(H)$, et, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, H ...la relation (1) sera dé..H...montrée. Donc tout revient à prouver le

<u>Lemme</u>-<u>Soient</u> a_i <u>des constantes réelles (resp. complexes) en nombre fini; si quels que soient les nombres réels (resp. complexes)</u> ξ_i <u>on a</u> (6), <u>alors</u>

(7) $$\sum|a_i| \leqslant M.$$

On laisse au lecteur le soin de constater par lui-même l'exactitude de cette importante proposition.

Ceci étant, revenons au problème posé, et soit f une fonction localement sommable (réelle ou complexe) pour laquelle l'intégrale $f.dm$ est bornée; si M est la norme de cette intégrale, on aura $M_K \leqslant M$ pour tout compact K; donc, d'après ce qu'on a vu, $\int|f|.dm \leqslant M$ pour tout compact H intérieur à K; K ~~XX~~ pouvant être choisi ....H.. arbitrairement, cette relation est vraie pour n'importe quel compact H; d'après la Prop.4, on peut donc supposer, au besoin en modifiant f sur un ensemble localement négligeable, que $|f|$ est sommable et donc aussi f; de plus, on a dans cette hypothèse

(8) $$M = \|m^f\| = \int |f(x)|.dm(x) \quad ;$$

il est en effet clair que le second membre majore le premier; d'autre part, pour tout compact K on a $\int_K |f|.dm \leqslant M$, car si K est intérieur à un compact H on a, d'après la relation (1): $\int |f|.dm \leqslant M_H \leqslant M$; de là résulte immédiatement, puisque l'intégrale de f ...K... étendue à E est la borne supérieure de ses intégrales sur les compacts, que le premier membre de (8) majore le dernier, ce qui prouve (8).

En définitive, on a le résultat suivant:

Théorème 2-*Soit* f *une fonction localement sommable à valeurs complexes; pour que l'intégrale de Radon* f.dm *soit bornée, il faut et il suffit que* f *coincide, localement presque partout, avec une fonction sommable* g; *la norme de l'intégrale* f.dm *est alors égale à* $\int |g|.dm$.

Corollaire du Théorème 2-*Soit* m *une mesure positive dénombrable à l'infini; pour qu'une fonction complexe* f, *localement sommable pour* m, *soit sommable, il faut et il suffit que l'intégrale de Radon* m^f *soit bornée; on a alors*

$$\|m^f\| = \int |f(x)|.dm(x) \ .$$

Dans ce dernier cas, on voit donc qu'on peut identifier l'espace $L^1_C(E;m)$ à l'espace des intégrales bornées de base m, muni de sa norme naturelle.

Premier Problème mis au concours: étendre le Th.2 aux fonctions vectorielles.

Deuxième Problème mis au concours: démontrer l'intérêt du procédent.

(N.B.: il ne saurait être question de généraliser au cas vectoriel l'égalité $\|m^f\| = \int |f|.dm$, vu qu'elle est trivialement fausse pour 2 dimensions en raison de ceci: le diamètre d'un parallèlogramme n'est pas la demi-somme de ses côtés).

5-Condition pour qu'une intégrale de base m soit positive.

Proposition 5-Soit f une fonction localement sommable complexe;pour que l'intégrale f.dm soit réelle,il faut et il suffit que f ~~xxixxxixxx~~ soit localement presque partout réelle.

En effet,il est clair d'une manière générale que l'intégrale imaginaire conjuguée de f.dm est $\bar{f}$.dm;la Proposition résulte alors du Coroll.de la Prop.3.

Proposition 6-Soit f une fonction localement sommable réelle;pour que l'intégrale f.dm soit positive,il faut et il suffit que f soit positive localement presque partout.

La condition est trivialement suffisante;si par ailleurs elle n'est pas remplie,il existe un ensemble mesurable relativement compact M sur lequel f est <0 (et même $<-\delta$,où δ est un nombre >0 convenable),avec $m(M)\neq 0$. χ_M désignant la fonction caractéristique de M,on a alors $\int\chi_M.fdm<0$;mais χ_M est approchable par une suite presque partout convergente de fonctions $g_n\in\mathcal{L}_+(E)$,lesquelles peuvent être supposées uniformément bornées et nulles en dehors d'un compact fixe,ce qui implique $\int\chi_M.fdm=\lim\int g_n fdm$;donc on a $\int g_n f.dm<0$ pour n assez grand,ce qui prouve que l'intégrale de Radon m^f n'est pas positive.

Remarque:on verra au § suivant un résultat plus précis,à savoir que si f est réelle,on a $(m^f)^+=f^+.dm$.

Corollaire de la Proposition 6-Pour qu'une intégrale réelle de base m soit m-bornée (c'est-à-dire soit majorée par l'intégrale k.m où k est un nombre positif fini convenable)il faut et il suffit qu'elle soit définie par une densité essentiellement bornée relativement à m.

25

6-Suites croissantes d'intégrales de base m.

Proposition 7ø-Soit $f_n.dm$ une suite croissante d'intégrales réelles de base m; pour que ces intégrales possèdent une borne supérieure dans l'ensemble des intégrales de Radon réelles, il faut et il suffit que la fonction $f = \sup(f_n)$ soit localement sommable; la borne supérieure des intégrales $f_n.dm$ est alors l'intégrale $f.dm$.

Remarquons tout d'abord que ,d'après la Prop.6, on a $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ localement presque partout; comme les f_n sont en infinité dénombrable, on peut, au besoin en les modifiant sur un même ensemble localement négligeable, supposer que ces relations ont lieu partout-ce qui ne modifie $f = \sup(f_n)$ que localement presque partout.

Ceci étant fait, supposons tout d'abord f localement sommable; pour toute $g \in \mathcal{L}_+(E)$, on aura alors, d'après le théorème de Lebesgue relatif aux suites croissantes de fonctions sommables:

$$m^f(g) = \int gf.dm = \sup \int gf_n.dm = \sup m^{f_n}(g),$$

ce qui prouve évidemment que m^f est la borne supérieure des m^{f_n}.

Supposons réciproquement que les intégrales de Radon $f_n.dm$ soient majorées supérieurement (ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de leur borne supérieure: Chap.I, ...)); pour toute $g \in \mathcal{L}_+(E)$ on aura

$$\sup \int gf_n.dm < +\infty ;$$

donc, toujours d'après le théorème de Lebesgue, la fonction $gf = \sup(gf_n)$ est sommable, ce qui prouve (Prop.2) que f est localement sommable.

Corollaire de la Proposition 7-Toute intégrale réelle de base m appartient à la bande (Chap.I, §2, Déf.3) engendrée par m dans ~~XXXXX~~ l'espace de Riesz complètement réticulé des intégrales réelles définies sur E.

En effet, soit $f.dm$ une intégrale de base m où f est à valeurs réelles; posant $f_n = \inf(f,n)$, il est clair que toutes les intégrales $f_n.dm$ sont m-bornées, et que $f.dm$ est la borne supérieure de celles-ci: d'où le Corollaire d'après le Chap. I, §2, Th. 1.

7-Intégrale induite par une intégrale de base m.

Proposition 8-Soient m une intégrale positive sur E, f une fonction complexe localement sommable pour m, A un sous-espace localement compact de E, $\tilde{m}$ l'intégrale induite par m dans A; alors l'intégrale induite par $f.dm$ dans A est $\tilde{f}.d\tilde{m}$ où $\tilde{f}$ est la restriction à A de la fonction f.

Soit en effet g une fonction continue et à support compact définie dans A; soit g^* la fonction définie sur E en prolongeant g par 0 en dehors de A; alors (§2, No. 1) l'intégrale I induite par m^f dans A est définie par la relation

$$(1) \qquad I(g) = m^f(g^*).$$

Considérons maintenant la restriction $\tilde{f}$ de f à A; pour toute $g \in \mathcal{L}(A)$, la fonction $g.\tilde{f} = h$ est nulle en dehors d'un compact de A, et c'est la restriction à A de la fonction $h^* = g^*.f$ qui est visiblement sommable pour m; donc (§2, Prop. 7 bis) h est sommable pour $\tilde{m}$, -ce qui prouve déja que $\tilde{f}$ est localement sommable pour $\tilde{m}$ -et l'on a

$$(2) \qquad \int_A g\tilde{f}.d\tilde{m} = \int_E h^*.dm = \int_E g^*f.dm ,$$

i.e.

$$(3) \qquad \tilde{m}^{\tilde{f}}(g) = m(g^*f) \quad ;$$

d'après (3) et (1), tout revient à prouver que l'on a

$$(4) \qquad m^f(g^*) = m(g^*f)$$

pour toute $g \in \mathcal{L}(A)$; on peut du reste se borner au cas où g est positive.

Mais la fonction g^* étant semi-continue supérieurement, bornée et à support compact, est sommable pour toute intégrale, et en particulier pour m et pour m^f; on peut donc trouver une suite décroissante de fonctions h_n (resp. k_n) de $\mathcal{L}_+(E)$, majorant g^*, et dont la borne inférieure vaut m-presque partout (resp m^f-presque partout) g^*; posant $p_n = \inf(f_n, g_n)$, on voit que les $p_n \in \mathcal{L}_+(E)$ convergent vers g^* m- et m^f-presque partout, ce qui permet d'écrire que

$$m^f(g^*) = \lim m^f(p_n) = \lim m(fp_n)$$

d'une part, et, puisque fp_n converge m-presque partout vers fg^*,

$$m(fg^*) = \lim m(fp_n)$$

d'autre part -ce qui prouve (4) et donc la Proposition 8.

8-Fonctions sommables pour une intégrale de base m (espace compact).

Théorème 3-Soient E un espace compact, m une mesure positive définie sur E, f une fonction positive sommable pour m; pour qu'une fonction g, à valeurs dans un espace de Banach F, soit sommable pour l'intégrale m^f, il faut et il suffit que la fonction gf soit sommable pour m; on a alors

$$\int g . dm^f = \int gf . dm \quad .$$

On va démontrer ce théorème en plusieurs étapes.

Lemme 1-Pour qu'une partie N de K soit m^f-négligeable, il faut et il suffit que l'ensemble N' des $x \in N$ où $f(x) \neq 0$ soit m-négligeable.

Posons pour simplifier les notations $m^f = m'$; pour toute fonction positive g on a alors la relation suivante entre intégrales supérieures;

$$(1) \qquad \overline{m}'(g) \leqslant \overline{m}(gf)$$

-en effet, cette relation est triviale si g est continue et à support compact et on passe de là au cas général en utilisant le fait que l'intégrale supérieure est une fonction croissante.

Il résulte de là que si la fonction gf est m-négligeable, la fonction g est à fortiori m'-négligeable; appliquant ceci au cas où g est la fonction caractéristique de N, on voit bien que la relation $m(N')=0$ implique $m'(N)=0$.

Reste à montrer la réciproque. Pour cela, soit E_n l'ensemble des points de E où l'on a $f(x) \geqslant n^{-1}$, et soit χ_n la fonction caractéristique de E_n; pour toute fonction g continue positive on a évidemment

$$m'(g) = m(gf) \geqslant n^{-1}.m(g\chi_n) \quad ;$$

comme ci-dessus, on en déduit que pour toute fonction g positive on a

$$\overline{m}'(g) \geqslant n^{-1}.\overline{m}(g\chi_n) \quad ;$$

appliquant ceci au cas où g est la fonction caractéristique de N, on trouve

$$\overline{m}'(N) \geqslant n^{-1}.\overline{m}(N \cap E_n) \quad ;$$

si donc N est m'-négligeable, les $N \cap E_n$ sont m-négligeables, et comme N' est la réunion de ces ensembles en infinité dénombrable, N' est lui-même m-négligeable, ce qui démontre le Lemme 1.

<u>Lemme</u> 2-<u>Pour toute fonction</u> g <u>continue et à valeurs dans</u> F, <u>on a</u> $m^f(g)=m(gf)$

En effet, cette relation est triviale si g est à valeurs numériques; dans le cas général, soit F' le dual fort de F, et a' un élément quelconque de celui-ci ; on aura alors comme on sait

$$\langle m(gf),a'\rangle = \int \langle gf,a'\rangle.dm \quad ;\text{donc} \quad = \int \langle g,a'\rangle.f.dm \quad ;$$

$$\langle m^f(g),a'\rangle = \int \langle g,a'\rangle.dm^f \quad ;\text{donc} \quad = \int \langle g,a'\rangle.f.dm$$

puisque $\langle g,a'\rangle$ est à valeurs numériques; appliquant le théorème de Hahn-Banach, on parvient immédiatement au résultat cherché.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 3. Soit g une fonction à valeurs dans F, sommable pour m^f ; on peut trouver une suite g_n de fonctions continues à valeurs dans F, telle que g soit, au sens de $L^1_F(E;m^f)$, la somme de la série absolument convergente de terme général g_n ; d'après le

~~Lemme~~ puisque les g_n sont continues, on a

$$\sum m(|g_n|f) = \sum m^f(|g_n|) < +\infty \ ;$$

donc ~~les~~ la série de terme général $g_n f$ converge m-presque partout vers une fonction m-sommable h, et l'on a $m(h) = \sum m(g_n f)$ donc (Lemme 2) $= \sum m^f(g_n) = m^f(g)$. Mais de la relation $g = \sum g_n$ valable m^f-presque partout résulte à fortiori $gf = \sum g_n f$ m^f-presque partout; les points où cette dernière relation est fausse forment un ensemble m^f-négligeable sur lequel on a visiblement $f \neq 0$ -donc cet ensemble est m-négligeable (Lemme 1); en définitive, les fonctions h et gf coïncident m-presque partout, ce qui prouve que gf est m-sommable et que $m(gf) = m(h) = m^f(g)$: la condition énoncée est donc nécessaire.

Réciproquement, soit g une fonction telle que gf soit m-sommable; d'après la relation (1) démontrée ci-dessus, g est d'intégrale supérieure finie pour m^f; tout revient donc à prouver que g est mesurable pour m^f. ~~Or gf étant mesurable pour m, on peut trouver une suite croissante de compacts K_n sur chacun desquels gf soit continue, et dont la réunion coïncide avec E à un ensemble m-négligeable (donc à fortiori m^f-négligeable Lemme 1) près,~~ Or gf étant m-mesurable, on peut recouvrir E à un ensemble m-négligeable (et donc m^f-négligeable) près par une suite croissante de compacts K_n, sur chacun desquels la fonction gf est continue; en prenant n assez grand, le complémentaire de K_n sera de mesure arbitrairement petite pour m^f; on peut de plus -au besoin en coupant K_n par l'ensemble $f \neq 0$ et en prenant un compact un peu plus petit- supposer $f \neq 0$ sur K_n; maintenant, et f étant m-mesurable, on pourra de même recouvrir K_n, à un ensemble m^f-négligeable près, par une suite croissante de compacts K_{np} sur chacun desquels f est continue (et non nulle), en sorte que g sera continue sur chaque K_{np}; prenant p assez grand, on a ainsi construit un compact K_{np} sur lequel g est continue, et dont le complémentaire est de mesure arbitrairement petite pour m^f, ce qui achève la démonstration, à la satisfaction générale des membres fondateurs (et même du rédacteur). Mais ce n'est pas fini; car il faut examiner le

9-Cas localement compact.

Théorème 4-Soient E un espace localement compact, m une mesure positive sur E, f une fonction positive localement sommable pour m; pour qu'une fonction g, à valeurs dans un espace de Banach F, soit localement sommable pour m^f, il faut et il suffit que la fonction gf soit localement sommable pour m; les intégrales de Radon (vectorielles) $gf.dm$ et $g.dm^f$ sont alors identiques.

En effet la proposition "g est localement sommable pour m^f" équivaut à "pour tout compact K, $\varphi_K.g$ est sommable pour m^f" donc (§2, Prop.7) à "pour tout compact K, la restriction de g est sommable pour la mesure induite par m^f dans K", donc puisque cette mesure induite est $\tilde{f}.d\tilde{m}$ (Prop.8), à "pour tout compact K, la restriction de gf à K est sommable pour la mesure $\tilde{m}$" (ceci résultant du Th.3), et finalement, en employant à nouveau la Prop.7 du §2, à "pour tout compact K, la fonction $\varphi_K.gf$ est m-sommable", ce qui veut dire que gf est m-localement sommable. Par ailleurs, si une fonction h est continue, et null en dehors d'un compact K, on aura $(m^f)^g(h) = m^f(gh)$ par définition, donc $= \tilde{m}^f(\tilde{g}\tilde{h})$ où l'on s'induit dans K (§2, Prop.7), donc (Th.3) $=\tilde{m}(\tilde{f}\tilde{g}\tilde{h})$ donc (§2, Prop.7) $= m(fgh) = m^{fg}(h)$, ce qui prouve l'identité des intégrales de Radon $fg.dm$ et $g.dm^f$. OUF.

Corollaire 1 du Théorème 4-Pour que g soit m^f-sommable, il faut et il suffit que gf coincide, localement m-presque partout, avec une fonction m-sommable.

Conséquence facile de ce qui précède et du Th.2.

Théorème 5-Soient E un espace localement compact dénombrable à l'infini, m une mesure positive sur E, f une fonction positive localement sommable pour m ; pour qu'une fonction g, à valeurs dans un espace de Banach F, soit sommable relativement à la mesure f.dm, il faut et il suffit que la fonction gf soit sommable relativement à la mesure dm; on a alors

$$\int g(x)dm^f(x) = \int g(x)f(x)dm(x) \quad .$$

En effet, puisque E est dénombrable à l'infini ainsi par conséquent que les mesures m et m^f, la condition " g est m^f-sommable" équivaut (Corollaire du Th.2) à " g est localement sommable pour m^f, et la mesure $|g|.dm^f$ "est bornée"; ce qui signifie (Th.4) " gf est localement sommable pour m, et la mesure $|gf|.dm$ est bornée", en d'autres termes, en utilisant à nouveau le Coroll. du Th.2 ," gf est sommable pour m" ; en outre, soit a' un élément quelconque du dual de l'espace de Banach F ; puisque les intégrales vectorielles ~~XX~~ $g.dm^f$ et gf.dm sont identiques, il en sera évidemment de même des intégrales de Radon complexe $\langle g,a'\rangle.dm^f$ et $\langle g,a'\rangle.f.dm$; en décomposant la fonction $\langle g,a'\rangle$ en parties positives, et en appliquant le corollaire du Th.2, on voit que ~~xxxxxxxxxxxxxx~~

$$\int\langle g,a'\rangle.dm^f = \int\langle g,a'\rangle.f.dm$$

ce qui s'écrit $\langle m^f(g),a'\rangle = \langle m(gf),a'\rangle$ et démontre la relation $m^f(g) = m(gf)$; d'où le Théorème.

Exemple: supposons que f soit la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $M\subset E$; l'intégrale m^f associe alors à toute fonction g continue et à support compact le nombre $\int_M g(x)dm(x)$; pour qu'un ensemble $A\subset E$ soit mesurable pour cette ..M...nouvelle intégrale, il faut et il suffit que $A\cap M$ soit m-mesurable; on a de plus la relation $m^f(A) = m(A\cap M)$.

§4- Théorème de Lebesgue-Nikodym.

1-Caractérisation locale des intégrales de base m.

Le but de ce § est de résoudre le problème suivant: étant donnés un espace localement compact E et une mesure positive m sur E, caractériser toutes les intégrales (complexes) de base m. Conformément à une méthode qui nous a déja servi dans les §§ précédents, nous allons simplifier le problème en montrant tout d'abord que, pour une intégrale, la propriété d'être de base m est de nature locale; l'intérêt de ceci sera de nous permettre de traiter le problème posé dans le seul cas où E est compact.

Pour cela, il faut tout d'abord préciser la signification de l'expression "l'intégrale I est ~~dm~~ localement de base m" ; par définition, on emploiera cette expression lorsque la circonstance suivante sera réalisée: pour tout x E, il existe un voisinage U de x dans E et une fonction localement sommable f tels que l'on ait

$$(1) \qquad I(g) = m(gf)$$

pour toute $g \in \mathcal{L}(E)$ nulle en dehors de U. Bien entendu, la fonction f peut dépendre de x; pour montrer que "I est localement de base m" implique " I est de base m" , il nous faudra construire une fonction localement sommable f_o telle que la relation (1) soit valable avec f_o au lieu de f, et ceci pour toute $g \in \mathcal{L}(E)$ / .

Or, désignons, pour éviter toute ambiguité, par U(x) et f_x le voisinage ~~et~~ U et la fonction f qui sont associés à x; on peut évidemment supposer U(x) ouvert sans restreindre la généralité; pour deux points $x, y \in E$, considérons alors l'ouvert $U(x) \cap U(y)$; si une $g \in \mathcal{L}(E)$ est nulle en dehors de celui-ci, on aura à la fois $I(g) = m(gf_x) = m(gf_y)$, et ~~donc~~ l'intégrale $(f_x - f_y).dm$

prendra donc la valeur 0 sur toute fonction g continue dont le support est un compact contenu dans $U(x)\cap U(y)$; il suit de là que l'intégrale induite par $(f_x-f_y)dm$ dans cet ouvert est nulle, donc (§3, Prop.3 et Prop.8) que, dans cet ouvert, la fonction f_x-f_y est nulle localement presque partout relativement à l'intégrale induite par m; les ensembles localement négligeables pour la mesure induite étant les traces des ensembles localement négligeables pour m, on en conclut que les fonctions f_x associées aux différents points de E vérifient la relation de compatibilité suivante: quels que soient $x,y\in E$, les points de $U(x)\cap U(y)$ où f_x et f_y ne coincident pas forment un ensemble localement négligeable. Nous allons déduire de là l'existence d'une fonction localement sommable f_0 possédant la propriété suivante : pour tout x, f_0 coincide localement presque partout avec f_x dans $U(x)$; il en résultera aussitôt que l'intégrale I est identique à $f_0.dm$ (donc de base m comme annoncé), car si une $g\in\mathcal{L}(E)$ est nulle en dehors d'un compact K, et si l'on choisit des x_i en nombre fini tels que les $U(x_i)$ recouvrent K, on pourra, à l'aide d'une partition de l'unité, écrire $g=\sum g_i$ où $g_i\in\mathcal{L}(E)$ est nulle en dehors de $U(x_i)$; il viendra alors $I(g)=\sum I(g_i)$ $=\sum m(g_i f_{x_i})=\sum m(g_i f_0)$ puisque f_{x_i} coincide, localement pp dans $U(x_i)$, avec g_0, et finalement on aura bien $I(g)=m(gf)$ pour toute $g\in\mathcal{L}(E)$. Tout revient donc à construire f_0, et il est clair que cela résultera directement du lemme général suivant:

Lemme-Soit E un espace localement compact muni d'une mesure positive m; soit F un ensemble arbitraire; pour chaque $x\in E$, soient $U(x)$ un voisinage de x dans E et f_x une application de E dans F; supposons réalisée la condition suivante: quels que soient x et y, les $z\in U(x)\cap U(y)$ où $f_x(z)\neq f_y(z)$ forment un ensemble localement négligeable pour m; alors il existe une application

f_o de E dans F qui, dans chaque U(x), coincide localement presque partout avec f_x.

Pour une démonstration, voir Chap. III, §5, No. 12 (le Lemme sera mieux à sa place ici qu'au Chap. III).

2-Théorème de Lebesgue-Nikodym: énoncé.

Il est clair que si nous voulons caractériser les intégrales complexes de base m, nous pouvons nous limiter aux intégrales positives; par ailleurs, comme on sait, les intégrales réelles définies sur E forment un espace de Riesz complètement réticulé, ce qui permet de parler de la bande engendrée par m: dans l'ensemble des intégrales positives, c'est la famille des intégrales qu'on peut considérer comme la borne supérieure d'une suite d'intégrales m-bornées (on dit que m' est m-bornée si l'on a $m' \leqslant k.m$ pour un entier positif k convenable); nous avons déja vu (§2, Coroll. de la Prop. 7) que toute intégrale réelle de base m appartient à cette bande; le théorème de Lebesgue-Nikodym (du moins l'une de ses formes) affirme que la réciproque est vraie; en d'autres termes:

Théorème de Lebesgue-Nikodym ($1^{\text{è}}$ forme): pour qu'une intégrale réelle ~~m~~ soit de base m, il faut et il suffit qu'il appartienne à la bande engendrée par m

Une autre forme de ce théorème, également importante, est la suivante:

Théorème de Lebesgue-Nikodym ($2^{\text{è}}$ forme): pour qu'une intégrale positive m' soit de base m, il faut et il suffit que tout ensemble localement négligeable pour m le soit aussi pour m'.

3-Démonstration de la première forme.

Soit m' une intégrale ~~deXBM~~ appartenant à la bande engendrée par m; on ~~peut~~ peut, pour prouver que m' est de base m, supposer m' positive; posons alors $m'_k = \inf(m', k.m)$ où k est entier positif; par hypothèse, m'_1 est dans la bande engendrée par m, et m' est la borne supérieure des m'_k ; si nous prouvons que m'_k est de base m, il en sera donc de même de m' (§2, Prop.7); en d'autres termes, tout revient à démontrer le théorème dans le cas où m' vérifie

$$(1) \qquad 0 \leqslant m' \leqslant m \quad .$$

Nous allons encore réduire le probleme en utilisant les considérations du No.1 ; pour cela, soit x un point quelconque de E, et soit U(x) un voisinage relativement compact de x; désignons par m'_x la mesure obtenue en multipliant m' par la fonction caractéristique de U(x) (on peut par exemple supposer U(x) ouvert de façon à ce que cette fonction soit mesurable pour m'); il est clair que l'on a $0 \leqslant m'_x \leqslant m'$, en sorte que m'_x vérifie (1) comme m'; comme les intégrales m' et m'_x prennent la même valeur sur toute $g \in \mathcal{L}(E)$ nulle en dehors de U(x), on voit que, si nous prouvons que m'_x est de base m, m' sera elle-même de base m "au voisinage de x", ce qui, x étant arbitraire, prouvera le théorème d'après ce qu'on a vu au No.1.

Ceci étant, posons $m'' = m'_x$ (x: point fixé de E); considérons l'espace $L^2_C(E;m)$ des fonctions complexes de carré sommable pour m; les fonctions continues à support compact forment un sous-espace partout dense L de cet espace de Hilbert; pour une $g \in \mathcal{L}(E)$, et m" étant visiblement bornée, on a (Cauchy -Schwarz)

$$|m''(g)|^2 \leqslant m''(1).m''(g\bar{g}) \leqslant m''(1).m(g\bar{g}) \quad ;$$

si donc $g \to \tilde{g}$ désigne l'application canonique de $\mathcal{L}(E)$ dans $L^2(E;m)$, on voit que la formule $\tilde{g} \to m''(g)$ définit une forme linéaire <u>continue</u> sur le sous -espace L ; d'après une propriété connue des espaces de Hilbert, il existe donc un $f_o \in L^2(E;m)$ tel que $m''(g) = \langle g, f_o \rangle = m(g\bar{f}_o)$ pour toute $g \in \mathcal{L}(E)$ -ce qui prouve que m" est de base m, et démontre le théorème de L.N. sous sa première forme.

4-Borne inférieure de deux mesures de base m.

Proposition 1-Soient f et g deux fonctions réelles localement sommables pour une mesure positive m; alors la borne inférieure des intégrales de Radon f.dm et g.dm est l'intégrale inf(f,g).dm, et leur borne supérieure est l'intégrale sup(f,g).dm .

Comme on a $\sup(m^f,m^g) = m^f + (m^g - m^f)^+$ et $\sup(f,g) = f + (g-f)^+$, il est clair que tout revient à prouver ceci: l'intégrale $(m^f)^+$ est m^{f^+}. Or posons $m' = (m^f)^+$; comme m^f, m' appartient à la bande engendrée par m, donc est de la forme m^h où h est localement sommable ; puisque l'intégrale positive m^{f^+} majore visiblement m^f, on a nécessairement $m^h \leqslant m^{f^+}$; mais de $m^h \geqslant 0$ et $m^h \geqslant m^f$ résulte, d'après ce qu'on a vu au §3, $h \geqslant f^+$ localement pp; il s'ensuit nécessairement que $h=f^+$ localement pp., ce qui prouve la Proposition.

Remarque-Considérée comme espace de Riesz complètement réticulé, la bande engendrée par la mesure m peut donc être réalisée comme suit: ses éléments sont les classes de fonctions localement sommables réelles (deux telles fonctions étant identifiées si elles coincident loc.pp.), la relation d'ordre dans cet ensemble se déduisant par identification de la suivante; $f(x) \leqslant g(x)$ loc.pp. .

5-Mesures singulières par rapport à m.

On dit qu'une mesure positive m' est singulière relativement à m si l'on a $\inf(m,m') = 0$ -autrement dit, si m et m' sont des éléments disjoints de l'espace de Riesz des mesures. D'autre part, nous dirons qu'une mesure m est concentrée sur un ensemble M si $\complement M$ est localement négligeable pour m -en sorte que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}(T)$ on aura $m(f) = \int_M f.dm$.

<u>Théorème 3</u>-<u>Pour qu'une mesure positive</u> m' <u>soit singulière relativement à</u> m,<u>il faut et il suffit qu'on puisse concentrer</u> m <u>et</u> m' <u>sur deux ensembles disjoints</u>.

<u>Nécessité</u>-Supposons $\inf(m,m') = 0$,et soit $m'' = m+m'$;comme m'' majore m et m',on a $dm = f.dm''$, $dm' = f'.dm''$ où f et f' sont positives et localement sommables pour m'';d'après la Prop.1,on a $\inf(f,f') = 0$ localement presque partout pour m'' ,ce qui permet de supposer cette relation vraie <u>partout</u>.Soit alors M l'ensemble $f\neq 0$,et M' l'ensemble $f'\neq 0$;ils sont disjoints;g étant la fonction caractéristique de $\complement M'$,on a $gf=0$ partout; donc(§3,Th.4) g est localement sommable pour m,et l'intégrale g.dm est nulle,ce qui signifie que $\complement M$ est localement négligeable pour m :donc m est concentrée sur M,et de même m' est concentrée sur M' .

<u>Suffisance</u>- Supposons m et m' concentrées sur des ensembles disjoints M et M',et posons encore $dm = f.dm''$,$dm' = f'.dm''$ où $m''=m+m'$; on peut supposer f (resp.f')nulle en dehors de M(resp.M');donc $\inf(f,f')=0$,ce qui implique comme annoncé (Prop.1) $\inf(m,m')=0$.

Remarque-on ne confondra pas la condition du Th. avec la suivante,qui est beaucoup plus restrictive:les supports de m et m' sont disjoints.

<u>Corollaire</u>:<u>toute mesure positive</u> m' <u>est de la forme</u> $dm' = f.dm + dm''$ <u>où</u> f <u>est localement sommable pour</u> m,<u>et où</u> m'' <u>est concentrée sur un ensemble localement négligeable pour</u> m;<u>cette décomposition est unique</u>.

Ce n'est pas autre chose en effet que la décomposition de m' en un élément de la bande engendrée par m et un élément étranger à m.

6-<u>Seconde forme du théorème de Lebesgue-Nikodym:démonstration</u>.

Nous allons maintenant démontrer que,pour qu'une mesure positive m' soit de base m,il faut et il suffit que tout ensemble N,localement négligeable pour m,le soit aussi pour m'.

La condition est tout d'abord nécessaire;si en effet $dm' = f.dm$,et si une fonction g est localement négligeable pour m,il en sera de même à plus forte raison de gf;donc(§3,Th.4) g est localement sommable pour m',et la mesure de Radon $g.dm' = gf.dm$ est nulle,ce qui prouve que g est localement négligeable pour m' ;appliquant ce résultat lorsque g est la fonction caractéristique d'un ensemble $N\subset E$,on trouve la condition en question.

Supposons réciproquement cette condition réalisée,et écrivons conformément au Corollaire du Th.3,

$$dm' = f.dm + dm''$$

où m" est concentrée sur un ensemble N localement négligeable pour m ;par hypothèse,N est aussi localement négligeable pour m',donc à fortiori pour m" (car on a $0\leqslant m''\leqslant m'$,donc m" est de base m' ,en sorte que notre assertion résulte de la première partie de la démonstration).Puisque $\complement N$ est localement négligeable pour m",on voit que m" est nulle,et ceci démontre que m' est de base m.

Remarque-La condition pour que m' soit de base m peut évidemment encore s'énoncer comme suit:tout ensemble relativement compact de mesure nulle pour m est de mesure nulle pour m'.On notera d'autre part que,dans le cas d'un espace E dénombrable à l'infini,la condition s'énonce aussi comme suit:pour toute partie N de E,la relation $m(N)=0$ implique $m'(N)=0$.

7-<u>Mesures équivalentes</u>.

On dit que deux mesures positives m et m' définies sur un espace localement compact E sont *équivalentes* si m' est de base m et réciproquement, en d'autres termes si elles engendrent la même bande. Il résulte directement du § précédent que:

Théorème 4-*Pour que deux mesures* m *et* m' *soient équivalentes, il faut et il suffit que la relation* " N *est localement négligeable pour* m " *soit équivalente à* "N *est localement négligeable pour* m' ".

Les mesures équivalentes possèdent des propriétés importantes (qu'on aurait du reste pu énoncer dès le §3). Par exemple:

Proposition 2-*Soient* m *et* m' *deux mesures positives équivalentes sur un espace localement compact* E; *pour qu'une fonction* f, *à valeurs dans un espace de Banach* F, *soit* m-*mesurable, il faut et il suffit qu'elle soit* m'-*mesurable*.

En "tronquant" si nécessaire la fonction f, on peut supposer celle-ci bornée sur E; si $dm' = g.dm$, et si f est mesurable (donc localement sommable) pour m, fg est localement sommable pour m, donc f est localement sommable -et à fortiori mesurable- pour m' (§3, Th.4), et la réciproque se démontre de façon identique: d'où la Proposition.

En particulier, la propriété, pour un ensemble $M \subset E$, d'être mesurable pour m n'est pas altérée si l'on remplace m par une mesure équivalente.

Notons aussi le résultat suivant, qui sera utile pour la suite:

Proposition 3-*Pour qu'une mesure* m *soit dénombrable à l'infini, il faut* ~~XX XXXXXXXXX~~ *qu'elle soit équivalente à une mesure bornée*.

Soit en effet m une mesure dénombrable à l'infini; on peut alors effectuer une *partition* de E au moyen d'une suite (M_n) d'ensembles intégrables pour m; définissons alors une fonction positive f sur tout E en posant

$$f(x) = \frac{1}{2^n . m(M_n)} \qquad \text{pour } x \in M_n \quad ;$$

(on suppose naturellement les M_n non négligeables; si ce n'était pas le cas, on s'y ramènerait en supprimant de la suite donnée ceux des M_n qui sont de mesure nulle, et en les bloquant avec le premier M_n non négligeable). Il est clair que f est sommable pour m, de sorte que la mesure $f.dm = dm'$ est bornée ; si l'on introduit par ailleurs la fonction $g = 1/f$ (partout finie), on a $gf = 1$ en sorte que (§3, Th.4) : 1) g est localement sommable pour m'; 2) la mesure ~~XX~~ $g.dm'$ est identique à $gf.dm$, c'est-à-dire à dm : m est donc équivalente à m', ce qui démontre la Proposition.

Remarque-Malgré ses illusions premières, le rédacteur avoue platement son incapacité à démontrer la réciproque.

§5 - Fonctions faiblement sommables.

1-Définition et exemples.

Définition 1-Soit m une mesure positive sur un espace localement compact E; soient F et F' deux espaces vectoriels sur R(resp. C), mis en dualité faible par une forme bilinéaire $\langle a, a' \rangle$; on dit qu'une fonction f, définie sur E et à valeurs dans F, est faiblement sommable pour m si les conditions suivantes sont réalisées:

(FS_1) : pour tout $a' \in F'$, la fonction scalaire $\langle f, a' \rangle$ est m-sommable;

(FS_2) : il existe un élément $m(f) \in F$ tel que l'on ait

(1) $$\langle m(f), a' \rangle = \int \langle f(x), a' \rangle . dm(x)$$

pour tout $a' \in F'$.

La formule (1) détermine parfaitement l'élément m(f); on le notera, pour des raisons évidentes,

$$m(f) = \int^{w} f(x) dm(x) \quad ,$$

l'indice w étant destiné à rappeler, au besoin par l'intermédiaire d'un dictionnaire français-anglais, qu'il s'agit d'une intégrale "faible".

Exemple 1-Soit F un espace de Banach, F' le dual fort de F; la forme bilinéaire fondamentale définit une dualité faible entre F et F'; il est clair que toute fonction f à valeurs dans F, qui est sommable au sens du Chap. III, est à plus forte raison faiblement sommable; de plus, on a $\int f.dm = \int^{w} f.dm$.

Exemple 2-Les notations restant les mêmes que dans l'Exemple 1, et la mesure m étant supposée bornée, soit f une fonction à valeurs dans F'; supposons réalisées les conditions suivantes:

a) la fonction $|f|$ est bornée sur E ;

b) pour tout $a \in F$, la fonction scalaire $\langle a, f \rangle$ est mesurable pour m.

Il est clair qu'alors $\int \langle a, f \rangle . dm$ a un sens pour tout $a \in F$, et constitue une forme linéaire continue sur F -donc définit un élément $m(f) \in F'$ tel que l'on ait (1).

Il n'est pas difficile de voir que ce résultat n'est qu'un cas particulier du suivant, dont la démonstration est du reste aussi évidente:

Proposition 1-Soit F' le dual d'un espace de Banach F; pour qu'une fonction f, définie sur un espace localement compact E et à valeurs dans F', soit faiblement sommable (relativement à la dualité canonique entre F et F') pour une mesure positive m, il suffit qu'elle possède les propriétés suivantes

a) pour tout $a \in F$, la fonction $\langle a,f \rangle$ est mesurable;

b) la fonction $|f|$ est d'intégrale supérieure finie.

Il est possible, à l'aide de cet exemple, de montrer que la notion que nous avons définie plus haut est plus générale (dans le cas des espaces de Banach) que celle de fonction sommable. Par exemple, prenons pour E le segment $[0,1]$ de $\underline{R}$, pour m la mesure de Lebesgue, pour F l'espace $\mathscr{L}(E)$ des fonctions numériques continues sur E; F' est alors l'espace des mesures de Radon sur E; associons alors à chaque point $x \in E$ la mesure ε_x (masse +1 en x); il est clair qu'on a ainsi une fonction faiblement sommable; il est aussi clair qu'elle ne l'est pas au sens du Chap. III (en effet, si cette fonction était sommable, elle le serait à plus forte raison mesurable; donc il existerait des ensembles $M \subset E$ non vides et même compacts sur lesquels l'application $x \to \varepsilon_x$ serait fortement continue, propriété dont le lecteur constatera tout seul l'absurdité).

Exemple 3-Soit F un espace de Banach; soit G l'espace de Banach formé des endomorphismes continus de F, normé par $|A| = \sup |Ax|/|x|$; soit G' le produit tensoriel (algébrique) de F par son dual F' ; on peut alors établir une dualité entre G et G' en introduisant la forme bilinéaire

$$\left\langle A, \sum a_i \otimes a_i' \right\rangle = \sum \langle Aa_i, a_i' \rangle \quad ;$$

on peut donc appliquer aux fonctions à valeurs dans G la Définition 1. Il est clair que, pour vérifier les conditions (FS_1) et (FS_2), on peut se borner à considérer les éléments de G' qui sont de la forme $a\otimes a'$; par suite, nous poserons la définition suivante:

Définition 2-Soient F un espace de Banach, F' son dual fort, $\mathcal{L}(F)$ l'algèbre des endomorphismes continus de F; on dit qu'une fonction $u(x)$, à valeurs dans $\mathcal{L}(F)$, est faiblement sommable pour une mesure m si:

a) quels que soient $a\in F$ et $a'\in F'$, la fonction scalaire $\langle u(x)a,a'\rangle$ est sommable pour m;

b) il existe un opérateur linéaire continu dans F, noté $\int^{W} u(x)dm(x)$, tel que l'on ait

$$(2)\quad \left\langle \int^{W} u(x)dm(x).a,a'\right\rangle = \int\langle u(x)a,a'\rangle dm(x)$$

quels que soient $a\in F$ et $a'\in F'$.

Bien entendu, une définition analogue s'applique au cas où u prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(F')$. On a à ce sujet le résultat suivant:

Proposition 2-Soit $u(x)$ une fonction à valeurs dans l'espace des opérateurs continus définis dans le dual d'un espace de Banach F; supposons:

a) que quels que soient $a\in F$ et $a'\in F'$, la fonction $\langle a,u(x)a'\rangle$ soit mesurable pour m;

b) la fonction $\|u(x)\|$ soit d'intégrale supérieure finie;

alors la fonction $u(x)$ est faiblement sommable.

En effet, puisque $|\langle a,u(x)a'\rangle|\leq|a|.|a'|.\|u(x)\|$, la fonction $\langle a,u(x)a'\rangle$ est sommable quels que soient a et a'; pour chaque a', son intégrale est une forme linéaire en a, visiblement continue d'après la condition b); on peut donc écrire

$$\int\langle a,u(x)a'\rangle dm(x) = \langle a,a'_1\rangle$$

où $a'_1\in F'$; $a'\to a'_1$ est évidemment un endomorphisme de F', continu puisque

$$|a'_1| = \sup_{|a|\leqslant 1} |\langle a, a'_1\rangle| \leqslant \sup_{|a|\leqslant 1} \int |\langle a, u(x)a'\rangle| dm(x) \leqslant |a'| . \int \|u(x)\| dm(x) \;;$$

donc on peut écrire $a'_1 = u_0 a'$ où u_0 est un endomorphisme continu de F', et il est clair que u est faiblement sommable, son intégrale étant égale à u_0. On notera que d'après ce qui précède on a

$$\left\| \int^{w} u(x)dm(x) \right\| \leqslant \int \|u(x)\| dm(x) \quad .$$

<u>Remarque</u>-Dans la définition 1, on aura soin de ne pas oublier la condition (FS_2); en effet, la condition (FS_1) permet de former les nombres $\int \langle f, a'\rangle dm$ et évidemment d'obtenir ainsi une forme linéaire sur F'; la condition (FS_2) revient à dire que cette forme linéaire est déterminée par un élément de F, c'est-à-dire (Esp. Vect. Top. ???) qu'elle est <u>continue</u> pour la topologie faible associée sur F' à la forme $\langle a, a'\rangle$; il est facile de voir que ce n'est pas toujours le cas, en d'autres termes que la condition (FS_2) n'est pas une conséquence de la précédente.

Certains auteurs définissent la notion de fonction faiblement sommable sans imposer la condition (FS_2): nous ne les suivrons pas, la définition proposée ici étant largement suffisante dans la pratique quand on sait s'en servir (ce qui n'est surement pas le cas du rédacteur).

2-<u>Propriétés élémentaires.</u>

Soient F et F' deux espaces vectoriels en dualité faible. Il est clair que les fonctions faiblement sommables à valeurs dans F forment un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions à valeurs dans F, et que, sur ce sous-espace, l'intégrale $\int^{w} f(x)dm(x)$ dépend linéairement de f.

Le rédacteur aurait aimé étoffer ce No. intéressant; malheureusement, il ne voit pas d'autres propriétés élémentaires à exposer.

3-<u>Un théorème profond.</u>

C'est le suivant, qui constitue un résultat plus fort que la Prop. 1:

<u>Proposition 3-Pour qu'une fonction f à valeurs dans le dual d'un espace de</u>

Banach F soit faiblement sommable, il faut et il suffit que, pour tout $a \in F$, la fonction scalaire $\langle a,f \rangle$ soit sommable.

Supposons en effet la condition réalisée, et posons

$$l(a) = \int \langle a,f \rangle . dm \quad ;$$

on obtient ainsi une forme linéaire sur F, et tout revient à prouver qu'elle est continue. Si l'on associe à chaque $a \in F$ la fonction scalaire $f_a = \langle a,f \rangle$ on obtient une application linéaire de F dans l'espace de Banach $L^1_C(E;m)$; nous allons montrer que cette application est continue, ce qui impliquera évidemment la propriété que nous avons en vue.

Pour cela, et en raison d'un théorème fondamental (E.V.T. ???), il suffit de prouver que le graphe de cette application est fermé; en d'autres termes que si a_n converge vers a et f_{a_n} vers g, alors $g=f_a$; or on peut supposer, au besoin en extrayant une suite partielle, que f_{a_n} converge presque partout vers ~~X~~ g ; comme par ailleurs f_{a_n} converge partout vers f_a, on a $f_a=g$ presque partout, ce qui démontre la Proposition.

4-Le théorème de Lusin pour les fonctions faiblement sommables.

Nous allons étendre en partie le théorème de Lusin aux fonctions faiblement sommables, sous la forme suivante:

Proposition 4-Soit f une fonction faiblement sommable à valeurs dans le ~~dua~~ dual d'un espace de Banach F à base dénombrable; alors pour tout compact K et tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_1 \subset K$, sur lequel f est faiblement continue, et qui vérifie $m(K-K_1) < \varepsilon$.

Démontrons d'abord ceci:

Lemme-La fonction scalaire $|f(x)|$ est mesurable.

En effet, F admettant une base dénombrable, il existe une suite (a_n) partout dense dans F; on a donc $|f(x)| = \sup_n |\langle a_n, f(x) \rangle| / |a_n|$, en sorte que la fonction $|f(x)|$,étant l'enveloppe supérieure d'une <u>suite</u> de fonctions mesurables, est mesurable comme annoncé.

Démontrons maintenant la Prop.4. Pour cela, nous construisons d'abord un compact $K_0 \subset K$, tel que $m(K-K_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$,sur lequel la fonction $|f(x)|$ est continue-donc <u>bornée</u> ; les fonctions $\langle a_n, f\rangle$ étant mesurables, et en infinité dénombrable, on peut former d'autre part un compact $K_1 \subset K_0$, tel que $m(K_0-K_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$,sur lequel toutes ces fonctions soient continues; les a_n étant partout denses dans F, <u>et</u> f <u>restant bornée sur</u> K_1 ,on voit que f est faiblement continue sur K_1 -d'où le résultat.

On ne sait pas si la Prop.4 est valable dans des cas plus généraux.

<u>5-Fonctions faiblement mesurables.</u>

<u>Définition 5-Soient</u> F <u>et</u> F' <u>des espaces vectoriels en dualité faible; on dit qu'une fonction f à valeurs dans</u> F <u>est faiblement mesurable si, pour tout</u> $a' \in F'$, <u>la fonction scalaire</u> $\langle f, a'\rangle$ <u>est mesurable. On dit que</u> f <u>est faiblement mesurable</u> (L) <u>si, pour tout compact</u> $K \subset E$ <u>et tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un compact</u> $K_1 \subset K$ <u>sur lequel</u> f <u>est faiblement continue et tel que</u> $m(K-K_1) < \varepsilon$.

Il est clair que la mesurabilité faible (L) implique la mesurabilité faible tout court; on a le droit de mettre en doute la réciproque; toutefois, il est clair d'après ce qu'on a vu au No. précédent que les deux notions sont identiques lorsque l'on considère des fonctions à valeurs dans le dual d'un espace de Banach à base dénombrable.

Les fonctions faiblement mesurables possèdent de nombreuses propriétés, d'autant plus intéressantes qu'on ne les connait pas toutes; on peut même dire qu'on n'en connait aucune qui ne soit pas triviale ou fausse. On comprendra donc le silence prudent du rédacteur(demerdetur) sur cette question réservée. Donnons toutefois le curieux résultat (vrai) que voici: si F est un Banach, si f(resp. g) est une fonction mesurable(resp. faiblement mesurable) à valeurs dans F(resp. F'), alors la fonction scalaire $\langle f, g\rangle$ est mesurable.

En effet, si K est un compact de E, on peut supposer, au besoin en modifiant f sur un ensemble négligeable, que f est limite sur K de fonctions de la forme $f' = \sum f_i . a_i$ où les $a_i \in F$ sont fixes (pour f' donnée) et où les f_i sont des fonctions scalaires mesurables; la fonction $\langle f, g \rangle$ est alors limite d'un suite de fonctions de la forme $\sum f_i . \langle a_i, g \rangle$, ce qui met en évidence sa mesurabilité.

6-Fonctions faiblement localement sommables.

Définition 4-Soient F et F' deux espaces vectoriels en dualité faible; on dit qu'une fonction f, à valeurs dans F, est faiblement localement sommable lorsque, pour toute fonction scalaire g, continue et à support compact, la fonction gf est faiblement somm-able

Si l'on pose alors

$$I(g) = \int gf dm \quad ,$$

on obtient une application linéaire de l'espace $\mathcal{L}(E)$ dans F; cette application est en outre continue au sens suivant: si g converge uniformément vers g_o en restant nulle en dehors d'un compact fixe, alors $I(g)$ converge faiblement vers $I(g_o)$; en effet, pour tout $a' \in F'$, l'expression $\langle I(g), a' \rangle = \int g . \langle f, a' \rangle . dm$ converge vers $\langle I(g_o), a' \rangle$. Par conséquent, on peut considérer I comme une intégrale vectorielle à valeurs dans l'espace F (muni de la topologie faible définie par F'); cf. §3, Def. 1.

On pourrait croire que toute fonction faiblement sommable est à fortiori localement faiblement sommable: malheureusement, on (= le rédacteur) n'en sait rien, du moins dans le cas général. On va examiner simplement le cas des fonctions prenant leurs valeurs dans le dual d'un Banach F.

Proposition 5-Pour qu'une fonction f à valeurs dans le dual d'un espace de Banach F soit ~~fai~~ localement faiblement sommable, il faut et il suffit que pour tout $a \in F$, la fonction scalaire $\langle a, f \rangle$ soit localement sommable.

Tout revient à prouver que la condition est suffisante, car sa nécessité résulte des définitions posées. Or si cette condition est remplie, pour toute $g \in \mathscr{L}(E)$ et tout $a \in F$, la fonction $\langle a, gf\rangle = g.\langle a, f\rangle$ est sommable; donc (Prop.3) gf est faiblement sommable, ce qui démontre notre assertion.

Corollaire 1 de la Prop.5 - Pour qu'une fonction f à valeurs dans le dual d'un espace de Banach F soit localement faiblement sommable, il faut et il suffit que pour tout compact $K \subset E$, la fonction égale à f sur K et à 0 sur E-K soit faiblement sommable.

En effet, si χ_K est la fonction caractéristique de K, la condition " $\langle a,f\rangle$ est localement sommable pour tout $a \in F$ " équivaut, puisqu'il s'agit ici de fonctions scalaires, à " $\chi_K.\langle a,f\rangle$ est sommable pour tout $a \in F$ " donc, d'après la Prop.3, à " la fonction $\chi_K.f$ est faiblement sommable ".

Corollaire 2 de la Proposition 5 - Pour qu'une fonction f à valeurs dans le dual d'un espace de Banach F soit localement faiblement sommable, il suffit qu'elle soit faiblement sommable.

Corollaire 3 de la Proposition 5 - Pour qu'une fonction f...., il suffit qu'elle soit faiblement mesurable, et reste bornée sur tout compact.

En effet, pour tout $a \in F$ la fonction $\langle a,f\rangle$ est alors mesurable, et borbée sur tout compact - donc localement sommable comme on le sait.

On notera à ce propos que la mesurabilité faible est une condition nécessaire pour qu'une fonction soit loc. faiblement sommable (mais bien entendu non suffisante).

Il résulte du Corollaire 3 que toute fonction faiblement mesurable et bornée à valeurs dans F' est localement faiblement sommable. Une telle fonction f permet de définir une forme linéaire continue sur l'espace L^1_F des fonctions sommables à valeurs dans F; en effet, si $g \in L^1_F$, la fonction $\langle g,f\rangle$ est mesurable comme on l'a vu au No.5, et d'intégrale supérieure finie puisque $|\langle g,f\rangle| \leq K.|g|$ où K est la borne supérieure de $|f(x)|$ sur E; donc on peut considérer l'expression $\int \langle g,f\rangle.dm$;comme fonction de g,il est clair que c'est une forme linéaire continue sur L^1_F ;de façon précise,si l'on appelle $\|f\|_\infty$ le <u>vrai maximum</u> (Chap.III,§5) de $|f(x)|$ sur E,on a

$$\left|\int\langle g,f\rangle.dm\right| \leqslant \|g\|_1.\|f\|_\infty$$

pour toute $g \in L^1_F$ .On verra plus loin que,au moins dans certains cas,on obtient ainsi <u>toutes</u> les formes linéaires continues définies sur L^1_F .

Notons encore que,si f est une fonction faiblement mesurable et <u>bornée</u> à valeurs dans le dual F' d'un espace de Banach F,l'expression

$$I(g) = \int_w gf.dm$$

$(g \in \mathcal{L}(E))$,dont nous savons déja que c'est une intégrale vectorielle à valeurs dans F' muni de la topologie <u>faible</u>,est aussi une intégrale vectorielle quand on regarde F' comme un espace de Banach;on a en effet pour tout $a \in F$

$$|\langle a,I(g)\rangle| = \left|\int\langle a,gf\rangle.dm\right| \leqslant |a|.\|f\|_\infty.\int|g|dm$$

en sorte que

$$|I(g)| \leqslant \|f\|_\infty.\|g\|_1 \quad ;$$

puisque,quand on considère des fonctions nulles en dehors d'un compact fixe,la convergence uniforme implique la convergence dans L^1,notre assertion est démontrée.On voit de plus que,dans le cas envisagé,l'application $g \rightarrow I(g)$ est prolongeable par continuité en une <u>application linéaire continue de l'espace L^1_C dans l'espace de Banach</u> F',application dont il n'est pas difficile de voir qu'elle est encore donnée par $I(g) = \int_w gf.dm$ pour toute fonction numérique sommable g.Ici encore,nous démontrerons que,dans certains cas,on obtient ainsi toutes les applications linéaires continues de l'espace L^1_C dans F' .

Notons enfin la propriété suivante,qui généralise la Prop.3 du §3 :

Proposition 6-Soient F et F' deux espaces vectoriels en dualité faible, et f une fonction localement faiblement sommable à valeurs dans F; supposons qu'il existe dans F' une suite partout dense pour la topologie faible; alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale vectorielle $f.dm$ soit nulle est que l'on ait $f(x)=0$ localement presque partout.

La suffisance de la condition est évidente, même s'il n'existe pas dans F' une suite partout dense. Supposons réciproquement que l'intégrale $f.dm$ soit nulle, et soit (a'_n) une suite partout dense dans F'; quelle que soit la fonction numérique g, continue et à support compact, on aura $\int g.\langle f, a'_n\rangle.dm = 0$; donc(§3, Prop.3) l'ensemble N_n des points où $\langle f(x), a'_n\rangle \neq 0$ est localement négligeable; il en est de même de $N = \bigcap N_n$; pour $x \notin N$, on a $\langle f(x), a'_n\rangle = 0$ pour tout n, donc, puisque les a'_n sont partout denses dans F', $f(x)=0$; d'où la Proposition.

Cette Proposition s'applique en particulier aux deux cas suivants:

a) fonctions à valeurs dans le dual d'un espace de Banach à base dénombrable;

b) fonctions à valeurs dans un espace de Banach F à base dénombrable.

§6-Applications linéaires continues d'espaces L^1.

1-Dual de l'espace L^1_C.

Théorème 1-Soit m une mesure positive sur un espace localement compact E; le dual de l'espace de Banach $L^1_C(E;m)$ (fonctions complexes sommables pour m) est isomorphe à l'espace $L^\infty_C(E;m)$ (fonctions complexes mesurables et essentiellement bornées pour m), la forme bilinéaire réalisant la dualité entre ces deux espaces étant donnée par

$$\langle f,g\rangle = \int f(x)g(x)dm(x) \qquad (f\in L^1_C \;;\; g\in L^\infty_C).$$

Soit en effet l(f) une forme linéaire continue sur L^1; considérons ses parties réelle et imaginaire l' et l", définies par

$$l'(f) = \tfrac{1}{2}(\, l(f)+\overline{l(\bar f)}) \quad ; \quad l''(f) = -\tfrac{1}{2}i(\, l(f)-\overline{l(\bar f)}) \quad ;$$

on a l = l' +il"; l' et l" sont encore des formes linéaires continues, qui sur les fonctions réelles prennent des valeurs réelles.

Considérons par exemple l' ; soit L le sous-espace partout dense de L^1 formé par les fonctions continues à support compact; l' peut être regardée comme une forme linéaire sur L, donc sur l'espace $\mathcal{L}_C(E)$; puisque, pour des fonctions nulles en dehors d'un compact fixe, la convergence uniforme implique la convergence dans L^1, on voit que l' est, sur $\mathcal{L}(E)$, une forme linéaire continue au sens adopté dans la définition des intégrales de Radon; par suite l' définit une intégrale de Radon sur E, réelle, et que nous noterons encore l':

$$l'(f) = \int f(x)dl'(x) \qquad \text{pour } f\in\mathcal{L}(E).$$

Cette intégrale appartient à la bande engendrée par m; soit en effet k la norme (au sens du dual de L^1) de la forme l'; si f et g sont des fonctions positives continues et à support compact, telles que $g\leqslant f$, on aura

$$|l'(g)| \leqslant k.\|g\|_1 = k.m(g) \leqslant k.m(f) \;;$$

on déduit de là, en prenant la borne supérieure du premier membre, que ~~XX~~

l'intégrale de Radon $|l'|$ est majorée par $k.m$,ce qui prouve notre assertion.Ceci étant,on peut donc trouver,d'après le Théorème de Lebesgue-Nikodym,une fonction g' réelle,localement sommable pour m,telle que l'on ait $dl' = g'.dm$;comme l'intégrale $|l'|$ est définie par la densité $|g'|$ (§4, Prop.1),et comme cette intégrale est,ainsi qu'on vient de le voir,majorée par $k.m$,c'est-à-dire par l'intégrale de densité k par rapport à m,on voit (§3,Prop.6) que l'on a $|g'(x)|\leqslant k$ localement pp.Pour toute $f\in L^1$ on peut donc former l'expression $\int fg'dm$,laquelle est une forme linéaire continue sur L^1 ;celle-ci coincide sur L avec l' :donc aussi partout,et en définitive on a la formule $l'(f) = \int fg'.dm$ valable pour toute $f\in L^1_C$.

Appliquant le même raisonnement à l'',on voit en combinant les deux résultats obtenus qu'il existe une fonction g,mesurable et essentiellement borné telle que l'on ait

$$(1) \qquad l(f) = \int f(x)g(x)dm(x)$$

pour toute $f\in L^1_C$;la fonction g est définie à un ensemble localement négligeable près,en sorte que l'on peut considérer le résultat précédent comme définissant une application linéaire du dual de L^1 dans l'espace L^∞ ;bien entendu,il est trivial qu'en fait on a ainsi une application biunivoque sur ;reste à prouver que cette application est isométrique,en d'autres termes que la norme de la forme linéaire (1) est égale à $\|g\|_\infty$;tout revient évidemment à prouver l'inégalité $\|l\|\geqslant\|g\|_\infty$;or on l'a démontré ci-dessus pour g',i.e. dans le cas où g est réelle;dans le cas contraire,on rend g réelle en la multipliant par une fonction de module 1;ceci ne change ,comme on le voit immédiatement,ni $\|g\|_\infty$ ni la norme de l :le théorème est donc entièrement démontré.

Remarque-Une méthode analogue s'applique à la détermination du dual de L^p_C pour $1< p < +\infty$;mais le procédé exposé au Chap.III,§6,permet de donner des résultats plus généraux dans ce cas.

53

2-Dual de L^1_F (F:espace de Banach séparable).

Théorème 2-Soient E un espace localement compact, m une mesure positive sur E, F un espace de Banach à base dénombrable; à toute forme linéaire continue l définie sur l'espace de Banach L^1_F (fonctions sommables à valeurs dans F correspond une fonction g, à valeurs dans le dual F' de F, faiblement mesurable et essentiellement bornée, telle que l'on ait

$$(2)\quad l(f) = \int \langle f(x), g(x) \rangle . dm(x)$$

pour toute $f \in L^1_F$; la norme de la forme linéaire f est de plus donnée par

$$(3)\qquad \| l \| = \operatorname*{vrai\ max}_{x \in E} |g(x)|$$

Démonstration-

a) Pour tout $a \in F$, considérons l'expression $l(f.a)$ où f est une fonction numérique sommable; c'est une forme linéaire continue sur L^1_C, dont la norme est évidemment majorée par $|a|.\|l\|$; donc (Th. 1) il existe une fonction complexe g_a, mesurable et bornée, telle que l'on ait

$$(4)\qquad l(fa) = \int f(x) g_a(x) dm(x) \quad ,$$

et l'on a même $|g_a(x)| \leq |a|.\|l\|$ sauf peut être sur un ensemble localement négligeable N(a).

b) soit (a_n) une suite partout dense dans F, et soit F_o l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des a_n; F_o est dénombrable, et c'est un espace vectoriel sur le corps rationnel. L'ensemble

$$N = \bigcup_{a \in F_o} N(a)$$

est localement négligeable puisque F_o est dénombrable. On a évidemment

$$|g_a(x)| \leq \| l \| . |a| \qquad \text{pour tout } a \in F_o \text{ et tout } x \notin N.$$

Nous allons montrer que, pour chaque x n'appartenant pas à un certain ensemble localement négligeable, $g_a(x)$ est une forme linéaire sur F_o.

Pour cela, supposons qu'on ait entre les a_n une relation $\sum r_n a_n = 0$ à coefficients rationnels r_n ; de (1) résulte aussitôt que l'on a

$$\sum r_n \int f g_{a_n} . dm = \sum r_n l(fa_n) = l(f \sum r_n a_n) = 0$$

pour toute $f \in L^1_C$, et par suite $\sum r_n g_{a_n}(x) = 0$ sauf peut être sur un ensemble localement négligeable N dépendant de la relation considérée; or ces relations forment un ensemble dénombrable (puisqu'elles sont en correspondance biunivoque avec certaines suites finies de nombres rationnels); donc il existe un ensemble localement négligeable N' tel que, pour <u>toute</u> relation $\sum r_n a_n = 0$ on ait $\sum r_n g_{a_n}(x) = 0$ quel que soit $x \notin N'$.

Dans ces conditions, nous voyons que, pour un $x \notin N'$ et un $a = \sum r_n a_n \in F_o$, le nombre $\sum r_n g_{a_n}(x)$ -une fois choisies les g_{a_n} -ne dépend que de a, et non de sa représentation comme combinaison des a_n; dans ces conditions, il est clair qu'on peut supposer les g_a ($a \in F_o$) choisies de telle sorte que

$$a = \sum r_n a_n \quad \text{implique} \quad g_a(x) = \sum r_n g_{a_n}(x) \quad \text{pour tout } x \notin N';$$

l'application $x \to g_a(x)$ définit alors une forme linéaire sur F_o, considéré comme espace vectoriel sur $\underline{Q}$. Au besoin en réunissant N et N', on peut supposer en outre la relation (5) vérifiée sur N'. Finalement, <u>on peut choisir les g_a associées aux points de F_o de telle sorte que, pour tout x n'appartenant pas à un certain ensemble localement négligeable</u> N, <u>le nombre</u> $g_a(x)$ <u>soit une fonction additive et continue de</u> a <u>sur</u> F_o.

c) ceci étant fait, et F_o étant partout dense dans F, on peut, pour chaque $x \notin N$, prolonger la fonction $g_a(x)$ par continuité à tout F; on obtient ainsi sur F une fonction additive et continue-donc une forme linéaire continue-ce qui prouve que: <u>pour chaque</u> $x \notin N$, <u>il existe un élément</u> $g(x) \in F'$ <u>tel que l'on ait</u>

$$g_a(x) = \langle a, g(x) \rangle \qquad \text{pour tout } a \in F_o ;$$

on a en outre d'après (5)

$$|g(x)| \leq \| l \| \qquad \text{pour tout } x \notin N.$$

En convenant de prendre $g(x)=0$ pour $x\in N$, on peut supposer g partout définie, la relation précédente étant vraie quel que soit x.

d) puisque $\langle a,g\rangle$ est mesurable pour tout $a\in F_o$, et donc aussi à la limite pour tout $a\in F$, on voit que g est faiblement mesurable et bornée.

Par construction, on a en outre

$$l(f.a) = \int f(x)\langle a,g(x)\rangle.dm(x)$$

pour tout $a\in F_o$ et toute f numérique sommable; il est clair que ceci est encore valable à la limite pour tout $a\in F$; on en déduit par linéarité que la relation (2) est valable pour toute $f\in L^1_F$ qui prend ses valeurs dans un sous-espace de dimension finie de F; or ~~xxxxx~~ ces f forment (chap. III,) un sous-espace partout dense de L^1_F; par ailleurs, chacun des deux membres de (2) est une forme linéaire continue sur L^1_F -le premier, par hypothèse; le second, d'après ce qu'on a vu au § précédent, No. 6; donc la relation (2) est vraie quel que soit $f\in L^1_F$.

e) enfin, on a obtenu en construisant g la relation $|g(x)|\leq\|l\|$ pour tout x; comme la relation $\|l\|\leq\sup|g(x)|$ est triviale, (3) est démontré, ainsi que le théorème 2.

<u>Problème mis au concours</u>: évacuer la séparabilité!

3-<u>Applications linéaires continues d'un espace L^1 dans le dual d'un Banach</u>.

<u>Théorème</u> 3-<u>Soient</u> F <u>et</u> G <u>deux espaces de Banach séparables; soit</u> L <u>une application linéaire continue de</u> L^1_F <u>dans</u> G'; <u>alors il existe pour tout</u> $x\in E$ <u>une application linéaire continue</u> $u(x)$ <u>de</u> F <u>dans</u> G' <u>telle que l'on ait ce qui suit</u>:

a) <u>pour toute</u> $f\in L^1_F$, <u>la fonction</u> $u(x)f(x)$ (à valeurs dans G') <u>est faiblement sommable</u>;

b) <u>on a</u> $$L(f) = \int^w u(x)f(x)dm(x)\quad;$$

c) <u>on a</u> $$\|L\| = \operatorname*{vrai\ max}_{x\in E}|u(x)|\quad.$$

Démonstration-

a) pour tout $a \in G$, l'expression $\langle a, L(f)\rangle$ est une forme linéaire continue sur L^1_F, dont la norme est majorée par $|a| . \|L\|$; puisque F est séparable, on peut écrire d'après le Th. 2

$$(6) \qquad \langle a, L(f)\rangle = \int \langle f(x), g_a(x)\rangle . dm(x)$$

où g_a est une fonction à valeurs dans F', faiblement mesurable et vérifiant

$$(7) \qquad |g_a(x)| \leqslant \|L\| . |a| \qquad \text{sauf pour } x \in N(a),$$

où N(a) est un ensemble localement négligeable.

b) soit (a_n) une suite partout dense dans G, et G_o l'ensemble dénombrable formé des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des a_n. Choisissons une fois pour toutes les fonctions $g_{a_n}(x)$.

Si $a = \sum r_n a_n \in G_o$, on a d'après (6)

$$\langle a, L(f)\rangle = \int \langle f, \sum r_n g_{a_n}\rangle . dm$$

pour toute $f \in L^1_F$; le premier membre étant majoré par $|a| . \|L\| . \|f\|_1$, on a donc $\left|\sum r_n g_{a_n}(x)\right| \leqslant \|L\| . |a|$ localement presque partout; on déduit de là comme au No. précédent l'existence d'un ensemble N, localement négligeable, tel que, pour $x \notin N$, ~~XXVXX~~ l'élément $\sum r_n g_{a_n}(x)$ soit une fonction additive et continue de l'élément $a = \sum r_n a_n$ de G_o. En conséquence, on peut choisir les g_a associées aux $a \in G_o$ de telle sorte que, pour $x \notin N$, $g_a(x)$ soit fonction additive et continue de $a \in G_o$ -et même de telle sorte qu'on ait, de façon plus précise:

$$(8) \qquad |g_a(x)| \leqslant \|L\| . |a| \qquad \text{pour tout } x \notin N \text{ et tout } a \in G_o .$$

Par conséquent, pour chaque $x \notin N$, l'application $a \to g_a(x)$ de G_o dans F' est prolongeable par continuité à G tout entier; pour chaque $a \in G$, on obtient ainsi une fonction $g_a(x)$ définie sur $\complement N$, à valeurs dans F', vérifiant (8), et dépendant linéairement de a; il est clair qu'on a la formule (6).

c) puisque, pour tout $x \notin N$, $a \to g_a(x)$ est une application linéaire continue de

G dans F',on peut considérer l'application transposée de F dans G';si on la note $u(x)$,on a donc

$$\langle a,u(x)b\rangle=\langle b,g_a(x)\rangle \quad \text{quels que soient } a\in G, b\in F,\ x\notin N\ ;$$

nous prolongerons $u(x)$ à tout E en posant $u(x)=0$ sur N.Dans ces conditions, la formule (6) s'écrit

$$\langle a,L(f)\rangle=\int\langle a,u(x)f(x)\rangle\,dm(x)$$

pour tout $a\in G$ et toute $f\in L^1_F$;il s'ensuit que pour toute $f\in L^1_F$,la fonction $u(x)f(x)$ à valeurs dans G' est faiblement sommable,et que

$$L(f)=\int^w u(x)f(x)\,dm(x)\ ;$$

d'où les points a) et b) du Théorème;quant au dernier,il résulte de (8), qui donne évidemment $\|u(x)\|\leq\|L\|$ pour tout $x\notin N$.

Remarque-Bien entendu,ici comme dans le th.précédent,la fonction $u(x)$ est déterminée à un ensemble localement négligeable près;cela résulte immédiatement de la Prop.6 du § précédent.

4-<u>Exemple d'application du théorème précédent.</u>

Nous allons appliquer le résultat précédent au problème suivant:soient E un espace compact métrisable,m une mesure positive sur E;trouver une réalisation "concrète" de tous les opérateurs continus définis dans l'espace L^1_C des fonctions complexes sommables pour m.

<u>Lemme</u>(à l'usage des membres fondateurs):<u>soit</u> E <u>un espace compact métrisable ;alors l'espace</u> $\mathcal{C}(E)$ <u>des fonctions numériques continues sur</u> E,<u>muni de la topologie de la convergence uniforme sur</u> E,<u>est à base dénombrable -et réciproquement</u>.

En effet,E étant métrisable,il existe une suite (x_n) de points partout denses dans E;soit $d(x,y)$ une distance définissant la topologie de E;et considérons la suite des fonctions $f_n(x)=d(x,x_n)$;ces fonctions séparent évidemment les points de E;donc (Th. de Stone-Weierstrass) ~~xxx~~ l'espace

$\mathcal{L}(E)$ est engendré par les monômes par rapport aux f_n, lesquels sont en infinité dénombrable; d'où la séparabilité de $\mathcal{L}(E)$.

Réciproquement soit E un espace compact, et supposons $\mathcal{L}(E)$ séparable; soit f_n une suite partout dense dans $\mathcal{L}(E)$; il est clair alors que la propriété "x converge vers x_o" équivaut à la suivante: "pour tout n, $|f_n(x)-f_n(x_o)|$ tend vers 0"; par suite la topologie de E peut être définie par une famille dénombrable d'écarts, ce qui prouve comme annoncé que E est métrisable.

Revenons alors au problème posé, et soit T un endomorphisme continu de l'espace L^1. Soit G l'espace de Banach formé des fonctions continues complexes définies sur E; son dual est l'espace G' des intégrales de Radon définies sur E. A toute $f \in L^1$ associons alors l'intégrale de Radon $Tf(x)dm(x)$: nous obtenons une application linéaire continue de L^1 dans G'; comme G est séparable, le théorème 3 est applicable, et nous voyons qu'il existe une fonction u(x), dont la valeur pour chaque x est une application linéaire continue de C dans G', telle que l'on ait $\int g(x).Tf(x).dm(x) = \int \langle g(x), u(x)f(x)\rangle dm(x)$ quelles que soient $f \in L^1$ et $g \in \mathcal{L}(E)$; il est visible qu'on peut identifier u(x) avec une <u>mesure de Radon</u>, que nous notèrons u_x pour éviter toute ambiguité; dans ces conditions la formule précédente s'écrit

$$\int g(x).Tf(x).dm(x) = \int f(x)dm(x) \int g(y)du_x(y) \quad ;$$

si nous introduisons l'opérateur transposé (défini dans le dual L_C de L_C^1, donc en particulier pour les fonctions continues) il vient

$$\int {}^tTg(x).f(x).dm(x) = \int f(x)dm(x) \int g(y)du_x(y) \quad ;$$

en conséquence, <u>on a</u>

$${}^tTg(x) = \int g(y)du_x(y) \qquad \underline{\text{presque partout}}$$

<u>pour chaque fonction continue</u> g. Il est clair que le symbole $du_x(y)$ joue un rôle analogue à celui de la matrice d'un opérateur de dimension finie.

§7-Ensembles boréliens et analytiques.

"Jusqu'à ce que mort s'ensuive"

1-Produits et sommes directes d'espaces polonais.

A titre d'illustration des principes exposés dans le Livre I, nous allons introduire un symbole abréviateur:

Définition 1-On appelle espace polonais tout espace métrique, complet, à base dénombrable.

Remarque-Les Polonais n'ayant pas étudié d'autres espaces, aucune confusion n'est à craindre quand on utilise cette définition.

Lorsque la topologie d'un espace E peut être définie au moyen d'une distance, de telle sorte que E devienne polonais, nous dirons aussi que E est polonisable. Il y a en général une infinité de façons de poloniser un espace polonisable donné.

Proposition 1-Tout produit direct et toute somme ~~dénomb~~ directe dénombrables d'espaces polonisables sont polonisables; si tous les facteurs sont totalement discontinus, il en est de même de leur produit et de leur somme.

Soit en effet $(E_n)_{n\in N}$ une famille dénombrable d'espaces polonais; on peut toujours supposer que la distance d_n définie sur E_n vérifie $d_n(x,y) \leqslant 1$ quels que soient $x,y \in E_n$; on obtient alors une distance dans le produit direct en posant

$$d((x_n),(y_n)) = \sum 2^{-n}.d_n(x_n,y_n) ,$$

et il est visible qu'on a ainsi une distance permettant de définir la topologie du produit; que l'espace obtenu soit complet et à base dénombrable est évident, de même qu'il est totalement discontinu si tous les E_n le sont.

En ce qui concerne la somme directe topologique des E_n, soit E, on peut trouver une partition de E en ensembles E'_n homéomorphes aux E_n, ouverts et fermés dans E; on obtient alors une distance sur E en transportant à E'_n la distance donnée sur E_n, et en convenant que, si deux points de E appartiennent à des E'_n distincts, leur distance est égale à 2 (toujours dans l'hypothèse où l'on a toujours $d_n \leqslant 1$); on a ainsi polonisé E etc...

2-Caractérisation externe des espaces polonisables.

Etant donné un espace polonisable E, il est important (pour la suite) de reconnaitre à quelle condition un sous-espace de E est lui-même polonisable; c'est à quoi répond le théorème suivant:

Théorème 1-Pour qu'un sous-espace P d'un espace polonisable E soit polonisable il faut et il suffit qu'il soit, relativement à E, une intersection dénombrable d'ouverts.

Nécessité-Soit d une distance définie sur P, telle que P soit polonisé par cette distance; pour un $x \in \overline{P}$, soit $\omega(x)$ la borne inférieure des d-diamètres des ensembles de la forme $U \cap P$, où U est un voisinage arbitraire de x dans E; soit G_n l'ensemble des $x \in \overline{P}$ où l'on a $\omega(x) \leqslant 1/n$; dire que $x \in G_n$ équivaut à ceci: dès que, $y, z \in P$ sont assez voisins de x, on a $d(y,z) \leqslant 1/n$; par suite G_n est ~~ouvert~~ fermé dans l'ensemble fermé $\overline{P}$, donc est comme celui-ci une intersection dénombrable d'ouverts dans E. Maintenant, soit $A = \bigcap G_n$; A est d'après ce qui précède une intersection dénombrable d'ouverts; si $x \in A$, les ensembles $U \cap P$ (U: voisinage arbitraire de x dans E) forment dans P un filtre de Cauchy-lequel par hypothèse converge vers un point de P qui est évidemment confondu avec x; finalement $A = P$, et la nécessité de la condition est établie.

Suffisance-Supposons que $P = \bigcap G_n$ où les G_n sont ouverts dans E; soit F_n le complémentaire de G_n, et polonisons E par une distance d; pour tout $x \in P$ on a $d(x, F_n) \neq 0$ puisque F_n est fermé et ne contient pas x; munissons alors P de la structure uniforme définie par la famille dénombrable d'écarts formée de d et des $d_n(x,y) = \left| d(x,F_n)^{-1} - d(y,F_n)^{-1} \right|$; cette structure uniforme est métrisable; la topologie qu'elle définit sur P est identique à celle qui est induite par E (en effet, la convergence au sens de la première topologie implique trivialement la convergence dans E; réciproquement, si une suite x_p de points de P converge dans E vers un point x de P, pour chaque n le nombre $d_M(x_p,F_n)$ tend vers $d(x,F_n)$ en sorte qu'il y a aussi convergence pour la structure uniforme en question); puisque E est à base dénombrable, il en est de même à fortiori de P; enfin, P est <u>complet</u> pour la structure uniforme définie ci-dessus; en effet, soit x_p une suite de Cauchy; elle converge dans E vers un point x; comme, pour n donné, $d_n(x_p,x_q)$ tend vers 0 lorsque p et q augmentent indéfiniment, on voit que, p étant choisi assez grand, x_q reste dans un voisinage de x_p qui ne rencontre pas F_n; donc $x \notin F_n$, et ceci quel que soit n, en sorte finalement que $x \in P$, qui est donc bien complet: d'où le théorème.

<u>Corollaire du Théorème</u> 1-<u>Soit I le segment</u> $[0,1]$ <u>de R; alors tout espace polonisable est homéomorphe à une intersection dénombrable d'ouverts dans le cube I^N, et réciproquement.</u>

Tout revient à prouver la première partie puisque I^N, étant polonisable d'après la Prop. 1, il en est de même de toute intersection dénombrable d'ouverts dans I^N. Par ailleurs, tout revient à montrer qu'un espace polonisable E est homéomorphe à une partie de I^N : cette partie sera une intersection dénombrable de I^N d'après le Th. 1. Pour cela, il suffit de choisir une distance d sur E, telle que $d(x,y) \leqslant 1$ quels que soient x, y, puis une suite (x_n) partout dense dans E, et d'associer à tout $x \in E$ le point de I^N dont les coordonnées sont les nombres $d(x,x_n)$.

3-<u>Dévissages d'un espace métrique séparable.</u>

<u>Définition</u> 2-<u>Soit</u> E <u>un espace métrique; on appelle dévissage de E toute</u> ~~appl~~ <u>application</u> $(n_1,\dots n_p) \to B(n_1,\dots,n_p)$ <u>de l'ensemble des suites finies d'entiers positifs dans l'ensemble des parties de E, possédant les propriétés</u>

suivantes:

a) $B(\emptyset) = E$; quels que soient $n_1,\dots,n_p$, l'ensemble $B(n_1,\dots,n_p)$ est la réunion des $B(n_1,\dots,n_p,m)$;

b) chaque ensemble $B(n_1,\dots,n_p)$ est de diamêtre $\leqslant 1/p$.

Nous dirons que les $B(n_1,\dots,n_p)$ sont les éléments d'ordre p du dévissage.

Proposition 2-Tout espace métrique séparable peut être dévissé au moyen d'ensembles fermés.

Soit en effet d une distance sur l'espace métrique séparable E, et soit (x_n) une suite partout dense dans E. Pour tout entier n positif, soit $B(n)$ la boule fermée de centre x_n et de rayon 1: il est clair que les $B(n)$ sont fermés et recouvrent E; nous allons maintenant définir les éléments d'ordre p du dévissage par récurence.

Supposant définis les $B(n_1,\dots,n_p)$, on choisit dans chacun d'eux une suite partout dense, soit y_n ; et on appelle $B(n_1,\dots,n_p,n_{p+1})$ l'ensemble des $x \in B(n_1,\dots,n_p)$ dont la distance à $y_{n_{p+1}}$ est $\leqslant 1/p+1$; il est clair qu'on obtient ainsi le dévissage cherché de E, et que ses éléments sont des ensembles fermés.

4-Définition et propriétés élémentaires des ensembles analytiques.

Définition 3-On dit qu'un sous-ensemble A d'un espace polonais est analytique si A est l'image d'un espace polonais par une application continue.

Remarque-Il est clair que la Déf? précédente indique en réalité une propriété de l'espace topologique A; en conséquence, on peut parler d'ensembles analytiques dans n'importe quel espace topologique, même non polonais

Proposition 3-L'image d'un ensemble analytique par une application continue est un ensemble analytique.

Proposition 4-Toute réunion dénombrable d'ensembles analytiques est analytique.

Soient en effet A_n des sous-ensembles analytiques d'un espace E, et pour chaque n, soit f_n une application continue d'un espace polonais P_n sur A_n; soit P l'espace polonais somme directe des P_n; définissons une application f de P dans E en convenant que, sur P_n, elle coincide avec f_n: il est clair qu'on a ainsi obtenu une application continue d'un espace polonais sur la réunion des A_n.

Proposition 5-Toute intersection dénombrable d'ensembles analytiques est analytique.

Les notations restant celles de la démonstration précédente, soit P' le produit direct des P_n ; soit P" le sous-ensemble de P' formé des (x_n) tels que $f_n(x_n)$ soit indépendant de n; P" est fermé dans P', donc polonisable d'après le Th.1; en associant à un $(x_n) \in P"$ le point $f_n(x_n)$ de E, on définit une application continue de P" sur l'intersection des A_n -d'où la Proposition.

5-Mesurabilité des ensembles analytiques.

Théorème 2-Soit E un espace localement compact dont tout point possède un système fondamental dénombrable de voisinages; tout sous-ensemble analytique A de E est mesurable pour toute mesure de Radon définie sur E.

Puisque tout sous-ensemble fermé d'un ensemble analytique est évidemment analytique, on peut se ramener, en s'induisant sur un compact, au cas où E est compact.

Soit alors f une application continue d'un espace polonais ~~xxx~~ P sur A, et effectuons un dévissage de P au moyen d'ensembles fermés $B(n_1,\ldots,n_p)$; posons $A(n_1,\ldots,n_p) = f(B(n_1,\ldots,n_p))$.

Puisque A est la réunion des A(n), et puisque la mesure extérieure de la réunion d'une suite croissante d'ensembles est la borne supérieure des mesures extérieures de ceux-ci (Chap.III, Etat 5), on peut trouver dans P un ensemble X_1, réunion finie d'ensembles d'ordre 1 du dévissage, et tel que $f(X_1)$ soit de mesure extérieure $\geqslant \overline{m}(A) - \varepsilon/2$ (ε nombre positif donné).

Maintenant, puisque X_1 est réunion dénombrable d'éléments d'ordre 2 de la partition, on peut de même trouver un ensemble $X_2 \subset X_1$, réunion finie de tels éléments, et tel que $f(X_2)$ soit de mesure extérieure $\geqslant \overline{m}(A) - \varepsilon/2 - \varepsilon/2^2$; au besoin en agrandissant X_2, on peut supposer que ~~toute~~ tout élément d'ordre 1 qui ~~xxxxxxxx~~ est contenu dans X_1 rencontre X_2.

En procédant ainsi indéfiniment, on forme une suite décroissante d'ensembles $X_p \subset P$ possédant les propriétés suivantes:

a) chaque X_p est la réunion d'un nombre fini d'éléments d'ordre p du dévissage;

b) chaque élément d'ordre p contenu dans X_p rencontre X_{p+1};

c) l'ensemble $f(X_p)$ est de mesure extérieure $\geqslant \overline{m}(A) - \varepsilon$.

Considérons alors l'ensemble

$$X = \bigcap X_p \quad ;$$

il est compact ; en effet, comme intersection de fermés il est fermé; et par a) on peut, quel que soit $\delta > 0$, le recouvrir au moyen d'un nombre fini d'ensembles de diamètres $< \delta$.

L'ensemble $f(X)$ est donc aussi compact; je dis qu'on a

$$(*) \qquad f(X) = \bigcap \overline{f(X_p)} \quad ;$$

tout d'abord il est clair que le premier membre est contenu dans le second; maintenant, soit x un point de E adhérent à tous les $f(X_p)$; soit U_p un système fondamental dénombrable de voisinages de x dans E; pour tout p, il existe un $x_p \in X_p$ tel que $f(x_p) \in U_p$; mais d'après la condition b), chaque élément d'ordre p de X_p rencontre X; donc il existe aussi un $y_p \in X$ tel que $d(y_p, x_p) \leqslant 1/p$; puisque X est compact, on peut extraire une suite partielle p_n telle que y_{p_n} converge vers un $a \in X$; on aura aussi évidemment $\lim x_{p_n} = a$, d'où $\lim f(x_{p_n}) = f(a)$, et puisque $f(x_p) \in U_p$, il vient $x = f(a)$, ce qui démontre la relation (*) .

Les $\overline{f(X_p)}$ formant une suite décroissante, il vient d'après c)

$$\overline{m}(f(X)) \geqslant \overline{m}(A) - \varepsilon \quad ;$$

on a donc trouvé un compact contenu dans A et dont la mesure ~~intérieure~~ est arbitrairement voisine de $\overline{m}(A)$: par suite, A est mesurable.

6-Ensembles boréliens

Définition 4-Soit E un ensemble arbitraire; on dit qu'un ensemble de parties de E est un corps si elle contient ~~toutes~~ les intersections de ses parties dénombrables et si, avec une partie de E, elle contient l'ensemble complémentaire.

Exemple : si m est une mesure de Radon sur un espace localement compact, les ensembles m-mesurables forment un corps.

Il est clair qu'un corps contient non seulement les intersections, mais aussi les réunions dénombrables de ses éléments.

Il n'est pas moins clair que toute intersection de corps est un corps; que par suite, on peut parler du corps engendré par une famille de parties de E.

Définition 5-Dans un espace topologique E, on appelle ensembles boréliens les éléments du corps engendré par les ensembles fermés.

On a donc les propriétés suivantes:

a) tout ensemble fermé est borélien;

b) le complémentaire d'un ensemble borélien est borélien;

c) toute intersection (resp? réunion) dénombrable d'ensembles boréliens est un ensemble borélien;

d) si E est localement compact, tout ensemble borélien est mesurable pour toute mesure de Radon;

e) ~~tout ensemble borélien d'un espace polonais est analytique~~.

Toutes ces propriétés sont évidentes, ~~sauf la d) la première la dernière~~

Proposition 6-L'image réciproque d'un ensemble borélien par une application continue est un ensemble borélien.

Soient en effet E et F deux espaces topologiques, f une application continue de E dans F. Quand B décrit la famille des ensembles boréliens de F, $\overset{-1}{f}(B)$ décrit un ensemble de parties de E qui possède évidemment les deux propriétés suivantes: c'est un corps, et il contient les ensembles (fermés) de la forme $\overset{-1}{f}(K)$ où K est fermé dans F; c'est de plus le plus petit corps contenant les ensembles $\overset{-1}{f}(K)$; par conséquent, c'est un sous-corps du corps engendré par les ensembles fermés, ce qui prouve la Proposition.

Remarque-L'image directe d'un ensemble borélien n'est naturellement pas en général un ensemble borélien; quand il s'agit d'espaces polonais, c'est un ensemble analytique.

7-Théorème de séparation.

Théorème 3-Soient A et B deux ensembles analytiques disjoints dans un espace topologique séparé E; alors il existe dans E un ensemble borélien qui contient A et ne rencontre pas B.

Soient en effet X et Y deux espaces polonais, et f et g deux applications continues de X et Y sur A et B respectivement. Effectuons un dévissage de X au moyen d'ensembles fermés $F(n_1,\ldots,n_p)$ et posons

$$A(n_1,\ldots,n_p) = f(F(n_1,\ldots,n_p)) \ ;$$

de même effectuons un dévissage de Y au moyen d'ensembles fermés $G(n_1,\ldots n_p)$ et posons

$$B(n_1,\ldots,n_p) = g(G(n_1,\ldots,n_p)) \ .$$

Supposons le théorème faux pour le couple A, B ; alors il sera faux aussi pour au moins un couple $A(m_1)$, $B(n_1)$; en effet, si quels que soient m et n on pouvait trouver un ensemble borélien $B_{m,n}$ contenant A(m) et ne rencontrant pas B(n), l'ensemble borélien $\bigcup_m \bigcap_n B_{m,n}$ contiendrait A et ne rencontrerait pas B, contrairement à l'hypothèse.

Puisque $A(m_1)$ et $B(n_1)$ sont respectivement la réunion des $A(m_1,m)$ et des $B(n_1,n)$, le même raisonnement montre l'existence d'au moins un couple $A(m_1,m_2)$, $B(n_1,n_2)$ pour lequel le théorème est faux. En poursuivant ainsi, on construit donc deux suites d'entiers (m_i) et (n_i) telles que, pour tout p, le théorème soit faux pour les ensembles $A(m_1,\dots,m_p)$ et $B(n_1,\dots,n_p)$.

Mais considérons dans X les ensembles correspondants $F(m_1,\dots,m_p)$; ils forment une suite décroissante d'ensembles dont les diamètres tendent vers 0; donc, X étant complet, leur intersection se réduit exactement à un point a; je dis qu'on a

$$(*) \qquad \bigcap_p \overline{A(m_1,\dots,m_p)} = \{f(a)\} \quad ;$$

soit en effet x un point de E adhérent à tous les $A(m_1,\dots,m_p)$; quel que soit le voisinage U de x dans E, il existera donc pour tout p un a_p dans $F(m_1,\dots,m_p)$ tel que $f(a_p) \in U$; comme f est continue et comme a_p tend vers a, on en conclut que $f(a) \in \overline{U}$; U étant arbitraire et E séparé, ceci implique $x = f(a)$, d'où la relation (*).

De même, les $B(n_1,\dots,n_p)$ ont pour intersection un seul point $b \in Y$, et on a

$$(**) \qquad \bigcap_p \overline{B(n_1,\dots,n_p)} = \{g(b)\} \quad .$$

Ceci étant, puisque A et B sont disjoints, les points f(a) et ~~gX~~ g(b) sont ~~dx~~ distincts; il s'ensuit que pour au moins un p ~~xxxxxgrand~~, les ensembles $\overline{A(m_1,\dots,m_p)}$ et $B(n_1,\dots,n_p)$ ne se rencontrent pas (et ceci est la contradiction qui va démontrer le théorème); supposons en effet que, quel que soit p, il existe un x_p appartenant à ces deux ensembles; on aura $x_p = g(b_p)$ où $b_p \in G(n_1,\dots,n_p)$; donc b_p tend vers b, en sorte que x_p converge vers $g(b) \neq f(a)$; les $\overline{A(m_1,\dots,m_p)}$ étant fermés et décroissants, il s'ensuit qu'ils contiennent tous g(b), ce qui est contraire à (*): le théorème est donc prouvé.

<u>Corollaire 1 du Théorème 3</u>-<u>Pour qu'une partie d'un espace polonais soit un ensemble borélien, il faut et il suffit qu'elle soit analytique ainsi que</u>

sa complémentaire.

La condition est suffisante, car si B et $\complement B$ sont analytiques, il existe un ensemble borélien qui contient B et ne rencontre pas $\complement B$: ce ne peut être que B, qui est donc bien borélien.

Pour montrer que la condition est nécessaire, on remarque d'abord que les ouverts, étant polonisables, sont analytiques; en vertu des Prop. 4 et 5 sur les réunions et intersections dénombrables d'énsembles analytiques, le fait qu'un borélien est analytique résultera donc de ce qui suit:

Lemme - Dans un espace métrique E, les ensembles boréliens forment la plus petite famille Φ de parties de E possédant les propriétés suivantes: a) Φ contient les ouverts; b) si Φ contient une suite d'ensembles, Φ contient leur intersection; c) si Φ contient une suite d'ensembles deux à deux disjoints, Φ contient leur réunion.

Puisqu'un fermé est une intersection dénombrable d'ouverts, Φ contient les fermés; soit Φ' la famille des ensembles X tels que $X \in \Phi$ et $\complement X \in \Phi$; Φ' contient les ouverts et les fermés; si Φ' contient une suite X_n, on a $\bigcup X_n \in \Phi'$ (dém: de $\complement X_n \in \Phi$ résulte $\bigcap \complement X_n \in \Phi$ donc $\complement \bigcup X_n \in \Phi$; soit de plus $Y_n = X_n \cap \complement X_{n-1} \cdots \cap \complement X_1$; les Y_n sont par hypothèse dans Φ, et deux à deux disjoints, donc leur réunion est dans Φ, ce qui prouve que $\bigcup X_n \in \Phi$, donc $\in \Phi'$) par suite Φ' est un corps qui, contenant les fermés, contient tous les boréliens; donc Φ contient tous les boréliens, et comme les éléments de Φ sont visiblement boréliens, le Lemme est démontré. On s'en servira pour le Th. 4.

Corollaire 2 du Théorème 3 - Dans un espace topologique séparé E, soit A_n une suite d'ensembles analytiques deux à deux disjoints; alors il existe une suite d'ensembles boréliens B_n, deux à deux disjoints, tels que l'on ait $A_n \subset B_n$ pour tout n.

En effet, pour tout couple m,n avec $m\neq n$, il existe un borélien $B_{m,n}$ qui contient A_m et ne rencontre pas A_n; posant $B'_m = \bigcap B_{m,n}$, on voit que le borélien B'_m contient A_m sans rencontrer aucun des autres A_n; on définit alors les B_m cherchés par récurence, en posant $B_1=B'_1$ et $B_{p+1}=B'_{p+1}\cap \complement B_1 \cap \dots \cap \complement B_p$.

8-<u>Image continue et biunivoque d'un ensemble borélien.</u>

<u>Théorème</u> 4-<u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces polonais</u>, B <u>un ensemble borélien dans</u> E, f <u>une application continue et biunivoque de</u> B <u>dans</u> F; <u>alors</u> f(B) <u>est un ensemble borélien</u>.

Ce théorème est une conséquence directe des Lemmes 1 et 3 qui vont suivre.

<u>Lemme</u> 1-<u>Si</u> B <u>est un ensemble borélien dans un espace polonisable</u> E, <u>il existe un espace polonisable totalement discontinu</u> X <u>dont</u> B <u>soit l'image par une application continue et biunivoque</u>.

Appelons (P) la propriété de B à démontrer, et soit Φ la famille des sous-ensembles de E qui vérifient (P). Si Φ contient une suite d'ensembles B_n, Φ contient aussi leur intersection; la démonstration est identique à celle de la Prop.4 relative aux ensembles analytiques; de même, si les $B_n \in \Phi$ sont <u>deux à deux disjoints</u>, la démonstration de la Prop.5 prouve que Φ contient la réunion de ces B_n.

En vertu du No.7, <u>Lemme</u>, tout revient donc à prouver que les ouverts possèdent la propriété (P).

Or ceux-ci sont polonisables (Th.1), et donc (Coroll. du Th.1) homéomorphes à des intersections dénombrables d'ouverts dans le cube I^N. Donc tout revient, par le même raisonnement que ci-dessus, à prouver (P) pour les sous-ensembles ouverts de I^N; en fait il suffit de démontrer (P) pour le cube lui-même, car si f est une application continue et biunivoque de l'espace polonisable totalement discontinu X sur I^N, et si G est ouvert dans I^N, on aura immédiatement la "représentation paramétrique" cherchée de G en remplaçant X par $f^{-1}(G)$ qui, étant ouvert dans X, est polonisable et totalement discontinu.

Maintenant, il est clair que pour prouver (P) pour I^N, il suffit de le prouver pour le segment I lui-même; et pour cela, d'après ce qui précède, il suffit de montrer que I est une réunion dénombrable de sous-ensembles deux à deux disjoints pour chacun desquels (P) est vrai; voici ces ensembles, extraits du génial cerveau de Lusin: a) les ensembles réduits à un nombre rationnel; b) l'ensemble des irrationnels (qui, étant une intersection dénombrable d'ouverts, est polonisable, et visiblement totalement discontinu).

Lemme 2-Un espace polonisable totalement discontinu possède un dévissage dont, quel que soit p, les éléments d'ordre p sont fermés et deux à deux disjoints.

Soit en effet d une distance sur cet espace X; il est clair que tout revient à montrer ceci: quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X au moyen d'une suite d'ouverts G_n deux à deux disjoints, tous de diamètre $< \varepsilon$.

Pour cela, et X étant à base dénombrable, choisissons une base de l'espace formée par des ouverts B_n; pour chaque $x \in X$, soit $U(x)$ un ouvert-fermé contenant x, de diamètre $< \varepsilon$ -ça existe puisque X est totalement discontinu. Soit p_n la suite des indices tels que l'on ait $B_{p_n} \subset U(x)$ pour au moins un x; enfin, choisissons pour chaque n un x_n tel que $B_{p_n} \subset U(x_n)$; puisque chaque $U(x)$ est la réunion des B_n qu'il contient, on a $\bigcup B_{p_n} = \bigcup B_n = X$, donc la réunion des $U(x_n)$ est tout X; les G_n cherchés sont alors donnés par

$$G_1 = U(x_1), \ldots, \quad G_n = U(x_n) \cap \complement U(x_{n-1}) \cap \ldots \cap \complement U(x_1) \quad .$$

Lemme 3-Si f est une application continue et biunivoque d'un espace polonais totalement discontinu X dans un espace topologique séparé E, f(X) est borélien.

Effectuons un dévissage de X au moyen d'ensembles fermés, les éléments $F(n_1, \ldots, n_p)$ d'ordre p de ce dévissage étant disjoints deux à deux. Soit

$$A(n_1, \ldots, n_p) = f(F(n_1, \ldots, n_p)) \quad ;$$

pour p fixe, les A sont analytiques, deux à deux disjoints et en infinité dénombrable; par conséquent, on peut trouver dans E des ensembles boréliens $B(n_1, \ldots, n_p)$ deux à deux disjoints (pour p donné) et tels que

$$A(n_1, \ldots, n_p) \subset B(n_1, \ldots, n_p) \quad .$$

Au besoin en coupant $B(n_1, \ldots, n_p)$ par l'adhérence du premier membre de la relation précédente, on peut supposer

$$(*) \qquad A(n_1, \ldots, n_p) \subset B(n_1, \ldots, n_p) \subset \overline{A(n_1, \ldots n_p)} \quad ;$$

enfin, en remplaçant au besoin $B(n_1, \ldots n_p)$ par l'intersection des ensembles $B(n_1), B(n_1, n_2), \ldots, B(n_1, \ldots, n_p)$, on peut supposer que, pour toute suite (n_i), les $B(n_1,\ldots,n_p)$ forment une suite <u>décroissante</u>.

Ceci étant, on voit, comme dans la démonstration du Th.2, que pour toute suite (n_i), les $A(n_1,\ldots,n_p)$ ont pour intersection un seul point, qui est aussi l'intersection des adhérences de ces ensembles, donc aussi des $B(n_1,\ldots,n_p)$; par conséquent, on peut écrire

$$f(X) = \bigcup_{(n_i)} \bigcap_{p} B(n_1,\ldots,n_p) \quad ;$$

mais d'après les hypothèses faites sur les $B(n_1,\ldots,n_p)$ –à savoir qu'ils sont disjoints, etc.. –ceci s'écrit aussi

$$f(X) = \bigcap_{p} \bigcup_{(n_i)} B(n_1,\ldots n_p) \quad ;$$

$f(X)$ est donc l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles, qui sont chacun des réunions dénombrables d'ensembles boréliens: $f(X)$ est donc borélien.

9–<u>Théorème de Federer-Morse</u>.

<u>Théorème</u> 5–<u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>des espaces compacts métrisables</u>, et f <u>une application continue de</u> E <u>dans</u> F; <u>alors il existe dans</u> E <u>un ensemble borélien</u> S <u>sur lequel</u> f <u>est biunivoque et tel que</u> $f(S)=f(E)$.

On peut évidemment supposer que f applique E <u>sur</u> F. Pour un $y \in F$, nous noterons $E(y)$ l'ensemble $f^{-1}(y)$; les $E(y)$ constituent une partition de E en ensembles fermés, et tout revient à former un ensemble borélien S qui rencontre chaque $E(y)$ en exactement un point.

Pour cela, supposons la topologie de E définie par une distance d. Puisque

EXXMX

E est compact, on peut le recouvrir au moyen d'un nombre fini d'ensembles fermés de diamètres ≤ 1; soient $B(1),\ldots;B(n^1)$ ces ensembles. De même on peut recouvrir chaque $B(p)$ par un nombre fini de fermés $B(p,q)$ $(1 \leq q \leq n_p^2)$ de diamètres $\leq \frac{1}{2}$, et tous contenus dans $B(p)$; en procédant ainsi indéfiniment, on forme des ensembles fermés $B(m_1,\ldots,m_p)$ possédant toutes les propriétés imposées aux éléments d'un dévissage,à ceci près que,pour chaque p,les éléments d'ordre p de ce dévissage sont en nombre <u>fini</u>(ceci caractérise évidemment les espaces polonisables <u>compacts</u>).

Ceci étant,nous <u>ordonnerons</u> les éléments d'ordre p du dévissage par le procédé lexicographique;on dira donc que $B(m_1,\dots,m_p)$ est "avant" $B(n_1,\dots,n_p)$ si,pour le premier i tel que $m_i \neq n_i$, on a $m_i < n_i$.

Pour chaque $y \in F$,considérons alors le <u>premier</u> ensemble de la forme B(m) qui rencontre E(y) ;soit $E_1(y)$ l'intersection de E(y) et de cet ensemble; soit E_1 la réunion de tous les $E_1(y)$ .La relation "$x \in E_1$ " équivaut à la suivante: "soit B(m) le premier ensemble du dévissage qui contient x; alors pour tout $n < m$,l'image de B(n) par f ne contient pas f(x) ". Mais si nous donnons à m une valeur fixe,les x qui possèdent la propriété dont on vient de parler sont caractérisés comme suit;ce sont les points de B(m) qui appartiennent à l'image réciproque par f du complémentaire de la réunion des f(B(n)) avec $n < m$;mais la réunion des f(B(n)) en question est une réunion finie de compacts,donc un compact;son complémentaire est ouvert, ainsi par suite que son image réciproque;donc les $x \in E_1$ qui appartiennent à B(m) constituent l'intersection d'un fermé et d'un ouvert-donc une intersection dénombrable d'ouverts;E_1 est donc lui-même une intersection dénombrable d'ouverts,comme réunion finie de tels ensembles.

De même,pour chaque y,soit $E_p(y)$ l'intersection de E(y) avec le premier ensemble d'ordre p qui rencontre E(y),et soit E_p la réunion des $E_p(y)$;on voit comme ci-dessus que E_p est une intersection dénombrable d'ouverts.

Les ensembles E_p ont pour intersection l'ensemble S cherché.

Tout d'abord il est clair que

$$\bigcap_p E_p = \bigcup_{y \in F} \bigcap_p E_p(y) ;$$

donc tout revient à prouver que, pour chaque y, les $E_p(y)$ ont pour intersection exactement un point; puisqu'ils sont fermés, et que leur diamètre tend vers 0, il suffit de faire voir qu'ils forment une suite décroissante.

Or soit $B(m_1,\dots,m_p)$ le premier ensemble d'ordre p qui rencontre $E(y)$; soit $B(n_1,\dots,n_p,n_{p+1})$ le premier ensemble d'ordre $p+1$ qui rencontre $E(y)$; comme celui-ci est contenu dans $B(n_1,\dots,n_p)$, ce dernier se trouve "après" $B(m_1,\dots,m_p)$; mais puisque ce dernier ensemble est la réunion des $B(m_1,\dots,m_p,n)$, on est sûr qu'un au moins de ceux-ci rencontrera $E(y)$; par conséquent il vient $m_i=n_i$ pour $1\leqslant i\leqslant p$, ce qui met en évidence la relation $E_p(y) \supset E_{p+1}(y)$.

Le théorème est donc démontré, avec la précision suivante: S est une intersection dénombrable d'ouverts. On s'est toutefois servi du résultat suivant, non encore démontré: toute réunion finie d'ensembles $A_1,\dots,A_n$, intersections dénombrables d'ouverts, est une intersection dénombrable d'ouverts. Pour justifier ce point, on peut se ramener au cas $n=2$; soit alors

$$A_1 = \bigcap G_n \quad ; \quad A_2 = \bigcap H_n$$

où les G_n et les H_n sont ouverts; on a alors par un calcul simple la formule $A_1\cup A_2 = \bigcap_{m,n} G_m\cup H_n$, laquelle prouve notre assertion.

§8-Sommes continues et sommes mesurables de mesures.

1-Définition des sommes continues.

Soient E et I des espaces localement compacts, celui-ci étant muni une fois pour toutes d'une mesure positive α. Considérons l'espace $\mathcal{L}(E)$ des fonctions numériques définies, continues et à support compact sur E, ainsi que l'espace $\mathcal{M}(E)$ des mesures de Radon numériques définies sur E; ces deux espaces sont en dualité faible, le produit scalaire d'une $f\in\mathcal{L}(E)$ et d'une $m\in\mathcal{M}(E)$ étant le nombre

$$\langle f,m\rangle = \int f(x)dm(x) \quad .$$

Par suite, la notion de sommabilité faible(§5, Déf. 1) s'applique aux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathcal{M}(E)$, et conduit à poser la définition suivante:

<u>Définition</u> 1-<u>Soient</u> E <u>et</u> I <u>des espaces localement compacts</u>, α <u>une mesure positive sur</u> I, <u>et</u> $i\to m_i$ <u>une application de</u> I <u>dans l'espace</u> $\mathcal{M}(E)$ <u>des mesures de Radon définies sur</u> E. <u>On dit qu'une mesure</u> m <u>sur</u> E <u>est la somme des mesures</u> m_i <u>suivant la mesure</u> α <u>si les conditions suivantes sont remplies</u>:

1-<u>Pour toute</u> $f\in\mathcal{L}(E)$, <u>la fonction</u> $\langle f,m_i\rangle = \int f(x)dm_i(x)$ <u>est sommable sur</u> I <u>pour la mesure</u> α ;

2-<u>Pour toute</u> $f\in\mathcal{L}(E)$, <u>on a</u>

$$(1) \qquad \langle f,m\rangle = \int f(x)dm(x) = \int_I d\alpha(i)\int f(x)dm_i(x) \quad .$$

<u>Exemple</u>: Lebesgue-Fubini

<u>Contre-exemple</u>: Fourier(hélas!)

D'après la théorie des intégrales faibles, la mesure m est unique; on écrira symboliquement la relation précédente sous la forme

$$m = \int m_i . d\,(i)$$

-pour être en accord.I...avec le §5, on devrait ajouter un indice supérieur w au signe somme.

Il arrive parfois dans la pratique que l'application $i \to m_i$ considérée soit continue pour la topologie vague de $\mathcal{M}(E)$; dans ce cas, on dira que m est la <u>somme continue</u> des m_i ; dans le cas général, on dira que m est la <u>somme mesurable</u> (ou même la somme-tout court) des ...

Comme dans toutes les questions d'intégrales faibles, la condition 1 de la Définition n'a pas de raison d'impliquer l'existence d'une mesure m vérifiant la condition 2; toutefois:

<u>Proposition</u> 1-<u>Pour que la famille</u> $(m_i)_{i \in I}$ ~~soit~~ <u>possède une somme, il suffit que les mesures</u> m_i <u>soient positives et que la condition</u> 1 <u>de la Déf.</u> 1 <u>soit remplie</u>.

En effet, dans ce cas l'expression $\int \langle f, m_i \rangle . d\alpha(i)$ est une forme linéaire <u>positive</u> sur $\mathcal{L}(E)$, donc définit une mesure sur E.

2-<u>Théorème de Lebesgue-Fubini: sommes CONTINUES de mesures positives.</u>

<u>Théorème</u> 1-<u>Soit</u>

$$m = \int m_i . d\alpha(i)$$

<u>une somme continue de mesu--I--res positives; si une fonction</u> f <u>définie sur</u> E <u>et à valeurs dans un espace de Banach</u> F <u>est sommable pour</u> m, <u>on a les propriétés suivantes;</u>

a) <u>pour presque tout</u> $i \in I$, f <u>est</u> m_i-<u>sommable</u>;

b) <u>la fonction</u> $\int f . dm_i$ (définie presque partout sur I d'après ce qui précède) <u>est sommable sur</u> I <u>pour</u> α ;

c) <u>on a la relation</u> (1) <u>de la Déf</u>. 1.

La démonstration de ce théorème étant identique à celle su théorème de Lebesgue-Fubini(qui en est du reste un cas particulier)on se bornera à en indiquer les grandes lignes. Tout d'abord, soit φ une fonction positive et s.c.i. sur E; pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $0 \leqslant f \leqslant \varphi$, la fonction $\langle f, m_i \rangle$ est par hypothèse continue sur I ; donc on peut écrire $\int \overline{m}_i(\varphi) d\alpha(i) = \sup \int m_i(f) d\alpha(i) = \sup m(f) = \overline{m}(\varphi)$, en sorte qu'il vient la relation

$$(2) \qquad \overline{\int}\varphi . dm = \overline{\int} d\alpha(i) \overline{\int} \varphi . dm_i \quad ;$$

de là résulte évidemment-I--le Théorème 1 pour ces fonctions. Si maintenant f est une fonction positive arbitraire définie sur E, pour toute φ s.c.i. majorant f on a d'après ce qui précède $\overline{\int} d\alpha(i) \overline{\int} f . dm_i \leqslant \overline{\int} d\alpha(i) \overline{\int} \varphi . dm_i = \overline{m}(\varphi)$, et donc en passant à la borne inférieure

$$\overline{\int} d\alpha(i) \overline{\int} f . dm_i \leqslant \overline{m}(f) \quad ;$$

il résulte de là que, si f est m-négligeable, alors f est m_i-négligeable pour presque tout i; en particulier, tout ensemble $N \subset E$ qui est m-négligeable est m_i-négligeable pour presque tout i. Ceci posé, soit f une fonction m-sommable à valeurs dans un Banach F; soit f_n une série de fonctions continues et à support compact qui converge vers f en moyenne ,et aussi presque partout; le th. 1 étant à peu près trivial pour les f_n, on voit en utilisant ce qui précède que, pour presque tout i, la série f_n converge m_i-presque partout, vers une fonction m_i-sommable-donc f est m_i-sommable etc....

3-<u>Théorème de Lebesgue-Fubini: sommes MESURABLES de mesures positives.</u>

<u>Théorème</u> 2-<u>Soit</u>

$$m = \int m_i . d\alpha(i)$$

<u>une somme mesurable</u>- I--<u>de mesures positives; si l'espace</u> E <u>est polonisable</u>, <u>le Théorème</u> 1 <u>est vrai</u>.

Si l'on analyse la démonstration précédente, on se rend compte en effet du fait que tout revient à prouver la relation (2) lorsque φ est s.c.i.;or E étant polonisable, φ est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions f_n positives,continues et à support compact;on obtient alors (2) de façon évidente-c'est-à-dire en appliquant le théorème de Lebesgue.

---

§9-Décomposition des mesures;mesure quotient.

TOUS LES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS CONSIDERES DANS CE § SONT POLONISABLES. On rappelle que si E est un tel espace,on note $\mathcal{L}_\infty(E)$ l'espace des fonctions numériques continues qui tendent vers 0 à l'infini sur E:c'est un espace de Banach à base dénombrable quand on le munit de la topologie de la convergence uniforme sur E.De plus,le dual de $\mathcal{L}_\infty(E)$ est par définition l'espace $\mathcal{M}^1(E)$ des mesures de Radon bornées définies sur E;pour $f\in\mathcal{L}_\infty(E)$ et $m\in\mathcal{M}^1(E)$ on posera $\langle f,m\rangle = \int f(x)dm(x)$.On rappelle enfin que toute mesure m définie sur E est équivalente à une mesure bornée m';on peut même prendre $dm'=f.dm$ où $f\in\mathcal{L}_\infty(E)$(le rédacteur espère que son successeur voudra bien justifier ce point!)

1-Définition des mesures quotient.

Définition 1-Soient E et B deux espaces localement compacts polonisables,m une mesure sur E,p une application m-mesurable de E dans B;on dit qu'une mesure α définie sur B est une mesure-quotient de m(relativement à l'application p)s'il existe des mesures bornées α' et m',équivalentes respectivement à α et m,telles que α' soit l'image par p de la mesure m'.

Il résulte évidemment de cette définition que si m possède une mesure quotient,elle en possède une infinité :toute mesure sur B,qui est équivalente à une mesure-quotient de m,est elle-même une mesure quotient de m.Par ailleurs, l'existence de mesures-quotient est évidente:on en construit une en prenant une mesure bornée m' équivalente à m,et son image par l'application p(cette image existant puisque m' est bornée:Chap.III(Etat 5),§7).Enfin,deux mesures-quotient quelconques de m sont équivalentes ;il suffit évidemment de le prouver pour deux mesures-quotient bornées α' et α'',images par p de mesures bornées m' et m" équivalentes à m;mais alors m' est équivalente à m",de sorte que les ensembles m'-négligeables sont aussi m"-négligeables et réciproquement;ceci étant,soit un ensemble $N\subset B$;B et E étant dénombrables à l'infini, la relation $\alpha'(N)=0$ équivaut (Chap.III,§7,Corollaire non explicité du Th.1) à $m'(p^{-1}(N))=0$ donc à $m''(p^{-1}(N))=0$ donc à $\alpha''(N)=0$ -ce qui prouve,d'après le théorème de Lebesgue-Nikodym,que α' et α'' sont équivalentes;en définitive: il existe des mesures-quotient,et celles-ci forment exactement une classe de mesures équivalentes.

2-Théorème de décomposition:énoncé.

Théorème 1-Soient E et B des espaces localement compacts polonisables,m une mesure positive sur E, p une application m-mesurable de E dans B;soit α une mesure-quotient de m.Alors il existe une famille $(m_i)_{i\in B}$ de mesures positives bornées sur E qui possède les propriétés suivantes:

a) m est la somme(mesurable)des m_i suivant la mesure α ;

b)pour presque tout $i\in B$,la mesure m_i est concentrée sur l'ensemble $p^{-1}(i)$.

De plus,presque toutes les mesures m_i sont déterminées à des facteurs constants près(le "presque toutes" étant relatif à une mesure-quotient quelconque de m).

Ce théorème étant énoncé,on va le démontrer en plusieurs étapes.Pour un $i\in$ B,on notera F(i) l'ensemble des x E tels que p(x)=i;les F(i) forment évidemment une partition de E en ensembles m-mesurables(Chap.III,§7,...).

Notons que,pour démontrer le th.1,on peut supposer que les mesures m et α sont bornées;en effet,plaçons-nous dans le cas général,où les mesures m et α sont quelconques,et supposons le Th.1 démontré dans le cas de mesures bornées; soient m' et α' des mesures bornées équivalentes à m et α -on peut les supposer de la forme $dm'=f.dm$ et $d\alpha'=g.d\alpha$ où f et g sont continues et tendent vers 0 à l'infini;soit alors $m'=\int m'_i.d\alpha'(i)$ la décomposition de m' relativement à α';soit h une fonction continue et à support compact sur E;puisque h est m-sommable,on peut écrire $h=k.f$ où k est m'-sommable et on a alors $m(h)=m'(kf)$ (§3,Th.5);mais d'après le théorème de Lebesgue-Fubini généralisé(§8,Th.2)on pourra affirmer ceci: a)k est m'_i-sommable pour presque tout $i\in B$;b)la fonction $m'_i(k)$ est α'-sommable sur I;c) $m'(k)=\int m'_i(k)d\alpha'(i)$. Ceci étant,remplaçons les mesures m'_i par les mesures m_i données par $dm_i=\frac{1}{f}dm'_i$ (noter que f étant continue et partout non nulle si l'on y tient, 1/f est localement sommable pour m'_i);on a alors d'après ce qui précède les propriétés suivantes: a) h=kf est m_i-sommable pour presque tout $i\in B$;b)la fonction $m_i(h)$ est α'-sommable sur I ;c) $m(h)=\int m_i(h)d\alpha'(i)$.Donc dans ce cas,on a $m=\int m_i.d\alpha'(i)$;pour passer de là à une décomposition dans laquelle α' est remplacé par α,il suffit évidemment,puisque $d\alpha'(i)=g(i)d\alpha(i)$,de multiplier les m_i par des facteurs constants-à savoir par les nombres $g(i)$.Par suite,pour démontrer l'existence de la décomposition,on peut se ramener au cas où m et α sont bornées-et même au cas où α est l'image de m par l'application p, comme le montre le raisonnement précédent;on verra aussi de la même façon que,si l'unicité de la décomposition est démontrée dans ce cas particulier, elle le sera aussi automatiquement dans le cas général.

En définitive,nous supposons maintenant que m est bornée et que α est son image par l'application p.

3-Où l'on construit(en un nombre fini de pas)les mesures m_i.

Considérons la mesure bornée m et son image α par p. Soit θ une fonction numérique sommable pour α ; puisque les espaces considérés ici sont dénombrables à l'infini, la fonction $\theta \circ p$ est m-sommable sur E, et on a

$$(1) \qquad m(\theta\circ p) = \alpha(\theta) \quad .$$

Ceci étant, associons à la fonction θ la mesure m^θ définie par

$$(2) \qquad dm^\theta(x) = \theta\circ p(x).dm(x) \quad ;$$

celle-ci est bornée; elle dépend linéairement de θ, et sa masse totale est donnée par

$$(3) \qquad \| m^\theta \| = m(|\theta\circ p|) = \int |\theta(i)| .d\alpha(i) \quad ;$$

par conséquent, $\theta \to m^\theta$ est une application linéaire continue de l'espace $L^1_C(B;\alpha)$ dans l'espace $\mathcal{M}^1(E)$, dual de l'espace de Banach séparable $\mathcal{L}_\infty(E)$. D'après le [6, Th.3(corollaire non explicité), il existe une fonction $i \to m_i$ à valeurs dans $\mathcal{M}^1(E)$, faiblement sommable pour α, telle que l'on ait

$$(4) \qquad m^\theta = \int \theta(i).m_i.d\alpha(i)$$

pour toute θ sommable—I— pour α ; ce qui s'écrit aussi

$$(5) \qquad \int f(x).\theta\circ p(x).dm(x) = \int \theta(i)d\alpha(i) \int f(x)dm_i(x)$$

pour toute $f \in \mathcal{L}_\infty(E)$.

Mais puisque α est bornée, parmi les fonctions α-sommables se trouve la fonction 1; pour celle-ci, la formule (5) devient

$$(6) \qquad \int f(x).dm(x) = \int d\alpha(i) \int f(x).dm_i(x) \quad :$$

donc m est la somme(mesurable)des m_i relativement à la mesure α .

Les mesures m_i étant construites, il nous reste à prouver les points suivants: a)les m_i sont positives(ou du moins presque toutes); b)presque toute m_i est concentrée sur la "fibre" F(i) ;c)les m_i sont déterminées à des facteurs constants près et à un ensemble α-négligeable près.

4-O: l'on montre que les m_i sont positives.

Considérons une fonction positive $f \in \mathcal{L}_{\infty}(E)$; si la fonction θ qui figure dans (5) est positive, le premier membre de (5) est positif, ainsi par suite que le second; donc la fonction $\varphi(i) = \int f.dm_i$ vérifie $\int \theta(i)\varphi(i)d\alpha(i) \geqslant 0$ pour toute θ positive et α-sommable; il en résulte que la mesure $\varphi(i).d\alpha(i)$ est positive, donc qu'il existe sur B un ensemble $N(f)$ de mesure nulle pour tel que l'on ait $\varphi(i) \geqslant 0$ en dehors/ de $N(f)$.

Mais $\mathcal{L}_{\infty}(E)$ étant à base dénombrable, il existe une suite (f_n) partout dense dans l'ensemble des fonctions positives de cet espace; l'ensemble $N = \bigcup N(f_n)$ est négligeable; pour $i \notin N$, on a $\int f_n.dm_i \geqslant 0$ pour tout n; puisque chaque m_i est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_{\infty}(E)$, on aura donc plus généralement $\int f.dm_i \geqslant 0$ pour toute $f \geqslant 0$ de $\mathcal{L}_{\infty}(E)$, et ceci dès que $i \notin N$: donc presque toutes les m_i sont positives comme annoncé.

Nous supposerons maintenant que toutes les m_i sont positives.

5-O: l'on concentre les m_i sur les fibres.

La relation (5) prouve que toute mesure m^{θ} est la somme des m_i relativement à la mesure $\theta(i).d\alpha(i)$; donc, d'après Lebesgue-Fubini, (5) est vrai pour toute fonction f qui est sommable pour m^{θ}. En particulier, pour toute fonction $\varphi(i)$ continue et à support compact sur B on aura (appliquer (5) à $f=\varphi \circ p$):

(7) $$\int \varphi \circ p(x)dm^{\theta}(x) = \int \theta(i)d\alpha(i) \int \varphi \circ p(x)dm_i(x) \quad ;$$

en appliquant (5) en y remplaçant θ par $\varphi.\theta$ et f par 1:

(8) $$\int \varphi \circ p(x).dm^{\theta}(x) = \int \varphi(i).\theta(i).d\ (i) \int dm_i(x) \quad ;$$

la comparaison de (7) et (8) prouve que pour chaque φ il existe un ensemble négligeable $N(\varphi) \subset B$ tel que l'on ait

(9) $$\int \varphi \circ p(x).dm_i(x) = m_i(E).\varphi(i) \qquad \text{pour } i \notin N(\varphi).$$

Soit alors (φ_n) une suite de fonctions partout dense dans l'espace $\mathcal{L}_\infty(B)$; l'ensemble $N = \bigcup N(\varphi_n)$ est négligeable; pour $i \notin N$, on aura la relation (9) pour toutes les φ_n simultanément; par conséquent, pour $i \notin N$, l'image de la mesure m_i par p est formée d'une masse ponctuelle $m_i(E)$ placée au point i de B; l'ensemble A obtenu en ôtant de B le point i est donc négligeable pour l'image de m_i ; donc (Chap. III, {7) l'ensemble $p^{-1}(A)$ -qui n'est autre que le complémentaire de F(i) dans E-est négligeable pour m_i: par conséquent, pour $i \notin N$, la mesure m_i est concentrée sur F(i).

N.B. Ne pas oublier de compléter le raisonnement par ceci: pour $i \notin N$, l'application p est m_i-mesurable (ce qui est du reste évident, car les $\varphi_n \circ p$ sont sommables pour m_i, donc aussi par passage à la limite toute $\varphi \circ p$ où φ est continue sur B).

6-Unicité de la décomposition.

Soit $m = \int m_i . d\alpha(i)$ une décomposition de m en somme de mesures, ou l'on suppose que les m_i sont positives et concentrées dans les fibres F(i). Soit $\theta \in L^1(B;\alpha)$ et $f \in \mathcal{L}_\infty(E)$; la fonction $\theta \circ p(x).f(x)$ étant m-sommable, on a par Lebesgue-Fubini la relation

$$\int f(x).\theta\circ p(x).dm(x) = \int d\alpha(i) \int f(x)?\theta\circ p(x).dm_i(x) \; ;$$

mais $\theta \circ p(x)$ étant constante sur F(i), et m_i concentrée sur F(i), on peut dans cette dernière relation faire sortir $\theta \circ p(x)$ du dernier signe somme et le remplaçer par $\theta(i)$ placé devant le symbole $d\alpha(i)$: autrement dit, on a la relation (5). Par suite, on a aussi (4); vu l'unicité inhérente au théorème de Lebesgue -Nikodym vectoriel, on voit bien que les mesures m_i sont déterminées à un ensemble de mesure nulle près.

Bien entendu, ceci achève la démonstration du Théorème 1.

7-Relations d'équivalence mesurables.

Définition 2-Soient E un espace localement compact polonisable, m une mesure positive sur E, R une relation d'équivalence dans E; on dit que R est mesurable relativement à m s'il existe un ensemble négligeable $N \subset E$, espace localement compact polonisable B et une application m-mesurable p de E dans B telle que R soit dans E-N équivalente à la relation " $p(x)=p(y)$ ".

Il est clair que, si une relation R est mesurable, il existe une infinité d'espaces B qui vérifient la Déf. 1; il importe donc de trouver un moyen de caractériser la mesurabilité sans faire intervenir explicitement l'espace auxilliaire B; c'est à quoi répondent les propositions suivantes:

Proposition 1-Pour que R soit mesurable, il faut et il suffit qu'il existe une suite (f_n) de fonctions numériques mesurables telle que, dans le complémentaire d'un ensemble négligeable, R soit équivalente à la relation " pour tout $n, f_n(x) = f_n(y)$ ".

La condition est nécessaire. En effet, soient B un espace polonisable et p une application mesurable de E dans B telle que, dans $\complement N$, R soit équivalente à $p(x)=p(y)$; soit g_n une suite de fonctions continues sur B, partout dense dans $\mathcal{L}_\infty(B)$; pour $i, j \in B$, la relation "$i=j$" équivaut à "$g_n(i)=g_n(j)$ pour tout n"; donc R équivaut dans $\complement N$ à " $g_n \circ p(x)=g_n \circ p(y)$ pour tout n", ce qui prouve notre assertion.

La condition est suffisante. Supposons en effet R définie dans E-N par une suite (f_n) de fonctions numériques mesurables; au besoin en remplaçant chaque f_n par des fonctions positives, puis en "tronquant" celles-ci, on peut supposer que toutes les f_n prennent leurs valeurs dans l'intervalle $I = [0,1]$ de $\underline{R}$; considérons alors le cube $B = I^N$, et associons à $x \in E$ le point $p(x) \in B$ dont la $n^{è}$ coordonnée est $f_n(x)$;on obtient ainsi une application p de E dans B, et sur E-N la relation R équivaut à $p(x)=p(y)$;reste à montrer que p est mesurable,ce qui est visible par Lusin.

D'ailleurs,Lusin s'applique aussi à la Déf.2;disons d'une manière générale qu'une relation d'équivalence R est <u>continue</u> sur une partie A de E si l'espace quotient A/R est <u>séparé</u> ;alors:

<u>Proposition</u> 2-<u>Pour que</u> R <u>soit mesurable,il faut et il suffit que,pour tout</u> $\varepsilon>0$ <u>et tout compact</u> K,<u>il existe un compact</u> $K_1\subset K$ <u>tel que</u> $m(K-K_1)<\varepsilon$ <u>sur lequel</u> R <u>est continue</u>.

Que la condition soit nécessaire est <u>trivial</u> puisqu'une application mesurable possède par définition la propriété de Lusin.

Supposons réciproquement la condition vérifiée;par des raisonnements bien connus,on en déduit l'existence d'une suite K_n de compacts sur lesquels R est continue,et d'un négligeable N,tels que $E = N\cup\bigcup K_n$;K_n/R étant séparé,donc compact et métrisable comme K_n,il existe pour chaque n une suite f_{np} de fonctions définies et continues sur K_n telle que,sur K_n,R soit équivalente à $f_{np}(x)=f_{np}(y)$ pour tout p;on peut de plus supposer ~~les K_n deux à deux disjoints et définissant alors une fonction f_p sur E en la prenant égale à~~ que les K_n forment une suite croissante;

Ceci étant,considérons K_1 et K_2 ;les fonctions f_{1p} provenant de fonctions continues définies sur K_1/R,espace qu'on peut identifier à un sous-espace compact de K_2/R,on voit qu'on peut prolonger chaque f_{1p} en une fonction définie et continue sur K_2 ,constante sur les classe modulo R;nous noterons encore f_{1p} la fonction ainsi prolongée.Remplaçant maintenant K_2 par K_3,on voit de même que l'on peut prolonger les f_{1p} de K_2 à K_3 au moyen de fonctions continues et constantes sur les classes;en poursuivant ce procédé indéfiniment,on construit ainsi sur l'ensemble $E_o = E-N = \bigcup K_n$ une suite de fonctions f_{1p} possédant les propriétés suivantes:a)chaque f_{1p} est continue sur chaque K_n ,et constantes sur les classes modulo R ;b)sur K_1,la relation xRy équivaut à $f_{1p}(x)=f_{1p}(y)$ pour tout p.

Maintenant,il est clair que la même construction permet de prolonger les fonctions f_{2p} à tout E_o,de façon que les fonctions obtenues vérifient aussi la propriété a) ci-dessus,et que sur K_2 la relation xRy soit équivalente à $f_{2p}(x)=f_{2p}(y)$ pour tout p.

D'une manière générale,on peut construire ,pour chaque n,une suite f_{np} de fonctions définies sur E_o,vérifiant a) et: b_n)sur K_n,la relation xRy équivaut à $f_{np}(x)=f_{np}(y)$ pour tout p.

Considérons alors l'ensemble de toutes les fonctions f_{np} (n et p variables); on peut les ordonner en une suite g_n de fonctions définies sur E_o;toute g_n est constante sur les classes modulo R;quels que soient $x,y \in E_o$,la relation xRy équivaut à $g_n(x)=g_n(y)$ / pour tout n (en effet,x et y seront dans un certain K_m en sorte que xRy équivaut à $f_{mp}(x)=f_{mp}(y)$ -or la suite f_{mp} est extraite de la suite g_n).

Si l'on prolonge les g_n à E en leur attribuant la valeur 0 sur N,il est clair qu'on a ainsi construit une suite de fonctions mesurables,et que la condition de la Prop.1 est vérifiée:par conséquent,la relation R est mesurable.

<u>Proposition</u> 3-<u>Pour que</u> R <u>soit mesurable,il faut et il suffit qu'il existe un ensemble négligeable</u> N <u>et une suite</u>(E_n) <u>d'ensembles mesurables saturés pour</u> R <u>de telle sorte que,pour tout</u> $x \in$ N,<u>la classe de</u> x (dans E -N) <u>soit l'intersection des</u> E_n <u>qui la contiennent</u>.

La condition est suffisante. En effet, soit f_n la fonction caractéristique de E_n; pour $x,y \notin N$, la relation xRy est par hypothèse équivalente à la suivante: " $x \in E_n$ équivaut à $y \in E_n$ ", donc, comme on le voit immédiatement, à " pour tout $n, f_n(x)=f_n(y)$ " : donc R est mesurable (Prop. 1).

La condition est nécessaire. Supposons en effet R mesurable; alors il existe un negligeable N, un espace polonisable B et une application mesurable p de E dans B telle que, pour $x,y \notin N$, la relation xRy soit équivalente à $p(x)=p(y)$; B étant polonisable, sa topologie admet une base dénombrable, soit B_n; soit $E'_n=p^{-1}(B_n)$: les E'_n sont saturés dans $E-N$; ils sont aussi mesurables, puisque les B_n sont ouverts; enfin, pour $x,y \notin N$, la relation xRy équivaut à $p(x)=p(y)$, donc, puisque les B_n forment une base pour la topologie de B, à la relation suivante: " $p(x) \in B_n$ équivaut à $p(y) \in B_n$ ", et finalement à " $x \in E'_n$ équivaut à $y \in E'_n$ "; par suite, la classe de x dans $E-N$ est l'intersection des E'_n qui la contiennent. Soit alors E_n l'ensemble obtenu en saturant E'_n; comme il coincide avec E'_n sur le complémentaire de l'ensemble négligeable N, E_n est mesurable; et il est clair que, pour $x \notin N$, la classe de x ~~est l'intersection~~ dans $E-N$ est l'intersection des E_n qui la contiennent; d'où la Proposition.

Il est sans doute superflu de dire que: 1) toute relation d'équivalence continue, ou continue sur le complémentaire d'un ensemble négligeable, est mesurable; 2) la Nature fournit de nombreux exemples de relations d'équivalence ni mesurables, ni pathologiques (exemple, sauf erreur: les géodésiques du tore). Il importe donc d'étudier ces dernières, qui jouent un rôle malheureusement fondamental en théorie ergodique (par exemple); c'est ce qu'on fera au § suivant. Pour le moment, on va étudier la décomposition d'une mesure par une relation d'équivalence mesurable.

Auparavant, donnons quelques propriétés simples (?) des relations d'équivalence mesurables. La première généralise le théorème de Federer-Morse:

Proposition 4-Soient E un espace localement compact polonisable, m une mesure positive que E, R une relation d'équivalence mesurable dans E; alors il existe un ensemble saturé négligeable $N \subset E$ et un ensemble borélien $S \subset E-N$ tel que:

a) tout $x \notin N$ est équivalent à un point unique $\tilde{x}$ de S;

b) l'application $x \to \tilde{x}$ de $E-N$ dans E est mesurable.

Soit en effet K_n une suite croissante de compacts sur lesquels R est continue (Prop. 2) et dont la réunion est E à un ensemble de mesure nulle près.

R étant continue sur K_1, l'espace K_1/R est séparé donc métrisable et compact; d'après le théorème de Federer-Morse, il existe donc un ensemble borélien S_1 K_1 tel que tout $x \in K_1$ soit équivalent à un $\tilde{x} \in S_1$ et à un seul. Si l'on désigne par E_1 le saturé de K_1, il en sera évidemment de même de tout $x \in E_1$; noter que E_1 est mesurable; en effet c'est à un ensemble de mesure nulle près la réunion des $E_1 \cap K_n$, mais R étant continue sur K_n, le saturé de K_1 dans K_n est compact. Enfin, l'application $x \to \tilde{x}$ de E_1 sur S_1 est mesurable; en effet, soit G un ouvert; tout revient à montrer que le saturé de G S_1 est mesurable, et pour cela on peut se placer dans un K_n; mais $G \cap S_1$ étant borélien, et l'application canonique de K_n sur K_n/R étant continue et biunivoque sur S_1, l'image de $G \cap S_1$ par cette application est un ensemble borélien (§7, Th. 4), ainsi par conséquent que son image réciproque dans K_n (§7, Prop. 6); donc le saturé de $G \cap S_1$ est la réunion d'un ensemble de mesure nulle et d'une suite d'ensembles boréliens, ce qui prouve sa mesurabilité.

Ceci étant fait, plaçons-nous maintenant dans l'ensemble-mesurable et saturé- $E-E_1$; au besoin en remplaçant m par une mesure bornée qui lui est équivalente et de masse totale 1, on peut supposer tout d'abord que $m(E_1) > \frac{1}{2}$; en appliquant les raisonnements précédents à $E-E_1$, on peut évidemment construire un ensemble borélien S_2 , de saturé $E_2 \subset E-E_1$, de telle sorte qu'on ait les propriétés suivantes: a) E_2 est mesurable, et $m(E_1 \cup E_2) > 1-\frac{1}{3}$; b) tout $x \in E_2$ est équivalent à un seul point $\tilde{x} \in S_2$, et l'application $x \to \tilde{x}$ est mesurable dans E_2.

En poursuivant ainsi indéfiniment, on voit que l'on peut construire une suite d'ensembles boréliens S_n possédant les propriétés suivantes:

a) le saturé E_n de S_n est mesurable; les E_n sont deux à deux disjoints; on a $m(E_1 \cup \ldots \cup E_n) > 1 - 1/(n+1)$;

b) tout $x \in E_n$ est équivalent à un seul point $\tilde{x} \in S_n$, et l'application $x \to \tilde{x}$ est mesurable.

Soit alors $S = \bigcup S_n$, $E_o = \bigcup E_n$; S est borélien, E_o est mesurable et est le saturé de S; le complémentaire de E_o est de mesure nulle; tout $x \in E_o$ est équivalent à un seul $\tilde{x} \in S$, et l'application $x \to \tilde{x}$, étant mesurable sur chaque E_n, l'est sur E_o , ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition</u> 5-<u>Si</u> R <u>est une relation d'équivalence mesurable, le saturé pour</u> R ~~XXX~~ <u>d'un ensemble borélien est mesurable</u>.

Soit en effet $B \subset E$ un ensemble borélien, et appliquons la Prop.4; à un ensemble de mesure nulle près, le saturé de B ~~xxx~~ coincide avec le saturé de $B \cap S = B'$; S étant borélien, il en est de même de B'; l'application $x \to \tilde{x}$ étant mesurable, le saturé de B' -image réciproque par cette application de B' -est donc mesurable (corollaire non explicité du retour du Diplodocus), et la Prop. est démontrée.

<u>Remarque</u>-Il est <u>peut-être</u> possible de prouver la Prop.5 par des moyens plus élémentaires (application astucieuse de Lusin?).

6-Décomposition d'une mesure par une relation d'équivalence mesurable.

Soient E un espace loc.compact, m une mesure sur E, R une relation d'équivalence mesurable dans E. Soient B un espace loc.compact (polonisable comme toujours) et p une application mesurable de E dans B telle que, sur le complémentaire d'un ensemble négligeable $N \subset E$, la relation R soit définie par $p(x)=p(y)$.

L'application p permet de définir sur B une classe de mesures (No. 1); une quelconque mesure de cette classe sera dite une *mesure quotient de* m *par* R. Soit α une telle mesure quotient; alors d'après le Th. 1 il existe une famille $(m_i)_{i\in B}$ de mesures sur E, de telle sorte que:

a) m soit la somme des m_i relativement à la mesure suotient α ;

b) chaque m_i soit portée par l'ensemble $p^{-1}(i)$.

La propriété b) s'exprime évidemment encore comme suit: *chaque* m_i *est concentrée sur une classe d'équivalence, et deux* m_i *distinctes sont concentrées sur des classes distinotes*.

On obtient ainsi la *décomposition de* m *par* R. Il est visible que, à priori, cette décomposition est loin d'être unique: R étant donnée, l'espace B peut en général être choisi d'une infinité de manières (par exemple, d'après la Prop. 4, on peut prendre B=E, l'application p étant définie au moyen d'une "section"). Nous allons toutefois montrer que cette indétermination est inessentielle:

Théorème 2-Soient E *un espace loc.compact polonisable,* m *une mesure sur* E, R *une relation d'équivalence mesurable sur* E. *Soient* B *et* B' *deux espaces loc. compacts polonisables,* p *et* p' *deux applications mesurables de* E *dans* B *et* B' *respectivement tels que, à des ensembles négligeables près, la relation* xRy *soit équivalente à* $p(x)=p(y)$, *ainsi qu'à* $p'(x)=p'(y)$; *enfin, soient* α *et* α' *des* mesures-quotient de m dans B et B', et

$$m = \int_B m_i . d\alpha(i) \quad ; \quad m = \int_{B'} m'_j . d\alpha'(j)$$

les décompositions correspondantes de m.

Alors il existe dans B et B' des ensembles N et N', négligeables pour les mesures α et α' respectivement, et une application biunivoque θ de B-N sur B'-N', de telle sorte qu'on ait les propriétés suivantes:

a) θ est mesurable ainsi que l'application réciproque, et transforme α en une mesure équivalente à α';

b) pour tout $i \in B-N$, la mesure m_i est proportionnelle à la mesure $m'_{\theta(i)}$.

~~En effet, il existe (Prop.4) un ensemble m-négligeable $N_o \in E$, saturé pour R, et un ensemble borélien S tels que: a) le saturé E_o de S est $E-N_o$; b) tout $x \in E_o$ est équivalent à un seul point $\tilde{x} \in S$, et l'application $x \to \tilde{x}$ est mesurable.~~

D'autre part, il existe aussi deux ensembles négligeables N_1 et N'_1 tels que, sur $E_1 = E-N_1$ (resp. $E'_1 = E-N'_1$), la relation R soit équivalente à $p(x)=p(y)$ (resp. $p'(x)=p'(y)$). Soit $N_2 = N_1 \cup N'_1$, et $E_2=E-N_2$; alors, pour $x,y \in E_2$, la relation xRy s'exprime indifféremment sous l'une des 2 formes suivantes:

2) $p(x)=p(y)$

3) $p'(x)=p'(y)$.

Soit B_o (resp. B'_o) l'image de E_2 dans B (resp. B'); on peut évidemment définir une application biunivoque θ de B_o sur B'_o par la relation suivante: pour tout $x \in E_2$, on a $\theta \circ p(x) = p'(x)$.

Soit N (resp. N') le complémentaire de B_o (resp. B'_o) dans B (resp. B'); $p^{-1}(N)$ étant m-négligeable, N est α-négligeable (Chap. III, §7); de même N' est α'-négligeable: donc θ et son application réciproque sont définies presque partout.

Considérons maintenant une mesure bornée m' équivalente à m, et soient β et β' ses images par p et p' respectivement: ce sont des mesures équivalentes à α et α' respectivement. Pour tout ensemble $A \subset B$, la relation " A est mesurable pour α " équivaut à "A est mesurable pour β " (§4, Prop. 2) donc à "$p^{-1}(A)$ est mesurable pour m' " (Chap. III, §7), donc comme on le voit immédiatement à " $\theta(A)$ est mesurable pour α' ": par conséquent, l'application θ transforme les parties mesurables de B_o en les parties mesurables de B'_o : elle est donc mesurable ainsi que l'application réciproque. En outre, si A est négligeable pour α, donc pour β, $p^{-1}(A)$ est négligeable pour m', donc aussi son image dans B', donc aussi $\theta(A)$ (bien entendu, on s'appuie ici sur le fait que l'image d'un ensemble négligeable <u>saturé</u> est négligeable: Chap. III, §7, corollaire non explicité du Th. 1); en définitive, θ transforme tout ensemble α-négligeable en un ensemble α'-négligeable et inversement; il s'ensuit que les mesures-quotient de α par θ forment exactement la classe des mesures équivalentes à α'; le point a) du Th. 2 est donc justifié.

Reste à montrer que les mesures m_i et $m'_{\theta(i)}$ sont, pour presque tout $i \in B$, proportionnelles. Pour cela, on peut évidemment se ramener au cas où m est bornée et où α et α' sont les images de m par p et p' ; puisqu'alors θ transforme α en α', la décomposition de m relativement à p' s'écrit aussi

$$m = \int m'_{\theta(i)} . d\alpha(i) \quad ;$$

ce qui conduit ....B... à une décomposition de m relativement à p puisque l'on sait à priori que les mesures m'_j sont positives et portées par les classes d'équivalence; en comparant avec la décomposition $m = \int m_i . d\alpha(i)$ et en tenant compte du fait que, p étant donnée, la décomposition de m relativement à p est unique (Th. 1) on voit bien que l'on a presque partout $m_i = m'_{\theta(i)}$, ce qui achève la démonstration du Théorème 2.