RÉDACTION N° 132

COTE : **NBR 038**

TITRE : **LIVRE I : THÉORIE DES ENSEMBLES**
CHAPITRE III : PROJET DE § PRÉLIMINAIRE

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 7

NOMBRE DE FEUILLES : 7

N32 05 T 132 2

Archives Tournai 1 P

LIVRE I

THEORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE III

Projet de § préliminaire

(qui permettrait de publier ce chapitre avant les chap.I et II)

Ce paragraphe ~~XXX~~ permet d'aborder la lecture du reste de ce chapitre sans supposer la connaissance préalable des chapitres I et II ; il peut donc être omis par~~x~~ les lecteurs de ces derniers . Il contient essentiellement un certain nombre de définitions et de résultats complétant ceux qui sont résumés dans Ens.R ;ces compléments servent d'ailleurs à peu près exclusivement à fonder la théorie des puissances (ce qui explique que nous ne les ayons pas inclus dans Ens.R) . Le point de vue auquel nous nous plaçons dans ce paragraphe (comme dans tout le reste du chapitre) est le même que dans Ens.R , c'est-à-dire qu'un certain nombre de termes ne sont pas définis , mais qu'on les emploie de façon qui concorde avec le sens qu'ils ont dans la langue courante ; pour les lecteurs que cela ne satisferait pas , nous renvoyons aux chapitres I et II , où toutes explications utiles ont été données sur ce point de vue "naïf" et sur sa justification logique

1 . Relations entre objets mathématiques .

En premier lieu , il est utile d'élargir ~~XX~~ les notions de relations et de propriété , dont il a été parlé dans Ens.R,§ 1 . Il y était alors question de relations entre éléments d'ensembles supposés donnés , certains des éléments entrant dans la relation pouvant varier arbitrairement dans ces ensembles . Dans ce qui suit , nous qualifierons d'objets mathématiques les éléments d'ensembles arbitraires ; en particulier , tout ensemble E est un objet mathématique , puisqu'il est élément de l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ de ses parties (Ens.R,§ 1,n°10) . Nous nous permettrons alors désormais de parler de relations entre objets mathématiques (ou de propriétés d'objets mathématiques) , certains de ces objets pouvant être arbitraires . En particulier , nous pouvons parler de relation entre ensembles arbitraires ; ceci n'aurait pas été licite du point de vue de Ens.R., § 1, car il eût fallu que tous les ensembles pussent être considérés comme éléments d'un même ensemble fixe . Or , on peut montrer qu'il n'existe pas d'ensemble dont tout ensemble serait un élément (cf.chap.II, §   ).

Les objets mathématiques qui possèdent une même propriété forment ce qu'on appelle un type d'objets . Par exemple , si A est un ensemble donné , les objets x tels que $x \in A$ (c'est-à-dire les éléments de A) forment un même type d'objets . Dans ce cas particulier , tous les objets du type envisagé sont éléments d'un même ensemble . Mais ce n'est pas toujours le cas ; par exemple les ensembles forment un type d'objets caractérisés par la propriété "E est un ensemble" , mais ne peuvent être considérés comme éléments d'un même ensemble. On notera qu'un même objet peut appartenir à plusieurs types différents .

Lorsqu'on considère une relation entre plusieurs objets , dont certains sont arbitraires , il est toujours sous-entendu que chacun de ces objets arbitraires appartient à un certain type donné : on dit que c'est une variable , ou un argument , ou un objet générique de ce type .

Cela étant , toutes les définitions concernant les relations entre éléments d'ensembles donnés , énoncées dans Ens.R, § 1,n^{os}3-5 , s'étendent aux relations entre objets de types donnés . Nous ajouterons le complément suivant : si une relation (ou propriété) R est telle que sa négation $\overline{R}$ soit une identité (auquel cas on dit encore que R est partout fausse) , pour toute relation S , R entraîne S , car cela signifie (Ens.R., § 1,n°3) que pour tout système de valeurs donné aux objets arbitraires qui interviennent dans R ou dans S , l'une des deux relations $\overline{R}$,S devient vraie .

Lorsque deux symboles représentent des objets de même type , en les écrivant de part et d'autre du signe $=$, on a une relation dite relation d'<u>égalité</u> ,qui signifie que ces deux symboles représentent le <u>même</u> objet ; sa négation s'obtient en écrivant les mêmes symboles de part et d'autre du signe $\neq$.

<u>2 . Fonctions et famille d'ensembles</u> .

La notion de <u>fonction</u> définie dans <u>Ens</u>.R, § 2, s'étend de la façon suivante . Soient T,T' deux types d'objets , distincts ou non . Une relation entre une variable x de type T et une variable y de type T' est dite <u>relation fonctionnelle en y</u> si , quel que soit l'objet x de type T , il existe un objet y de type T' et un seul qui soit dans la relation donnée avec x . On donne le nom de <u>fonction</u> à l'opération qui , à tout objet x de type T associe l'unique objet y de type T' qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'objet x , et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée . Deux relations fonctionnelles <u>équivalentes</u> déterminent la <u>même</u> fonction . Par exemple , la relation $F=\mathfrak{P}(E)$ entre deux ensembles E,F est fonctionnelle en F , et détermine la fonction $E\rightarrow\mathfrak{P}(E)$ définie pour tout objet de type "ensemble" .

Par <u>famille d'objets de type T</u> , on entendra une fonction définie pour les <u>éléments d'un ensemble</u> I et dont la valeur est un objet de type T ; on la notera en général $(x_\iota)_{\iota\in I}$.

La différence entre ces notions générales de fonction et de famille , et les notions désignées sous le même nom dans <u>Ens</u>.R, § 2 , est que lorsque tous les objets du type T sont <u>éléments d'un même ensemble</u>, ainsi que tous ceux de type T' , nous considérons la fonction comme un élément d'un nouvel ensemble , c'est-à-dire comme un nouvel <u>objet mathématique</u> . Nous ne nous donnerons plus ce droit dans le cas général .

Toutefois , nous admettrons la proposition suivante (connue sous le nom d'axiome des familles d'ensembles) : si $(E_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille d'ensembles , il existe un ensemble F tel que $E_\iota \subset F$ pour tout $\iota \in I$. La famille d'ensembles devient alors une application de I dans $\mathfrak{P}(F)$ au sens de Ens.R, et peut donc de nouveau être considérée comme un objet mathématique .

3 . Entiers énumérés .

Dans ce chapitre , où on va définir les entiers naturels à partir des notions de la théorie des ensembles , il est indispensable de bien concevoir la distinction entre ces entiers , qui sont des objets mathématiques , et les "entiers énumérés" du langage courant .

Il n'est pas question de définir le mot "un" du langage , dont le sens doit être supposé connu (et dont l'emploi est indispensable , même en mathématique formalisée ; cf.chap.I). Mais le lecteur se convaincra aisément que , dans toute phrase où on parle de "deux éléments x,y" ou de "trois relations R,S,T" , on pourrait éviter l'emploi des mots "deux","trois" en écrivant respectivement "un élément x et un élément y" , ou "une relation R et une relation S et une relation T" . Les "nombres" (=adjectifs numéraux) du langage peuvent donc être tous éliminés à l'exception de "un" .

Le ot"un" n'est pas lui-même un objet mathématique , mais un "ensemble à un élément" en est un ; dans cette expression , le terme "à un élément" doit d'ailleurs être considéré comme un qualificatif unique , et pourrait être remplacé par un adjectif tel que "uniélémentaire" ne faisant plus intervenirle mot "un". Remarquons que l'existence d'un ensemble à un élément est assurée dès que l'existence d'un ensemble E est assurée , puisque $\{E\}$ est une partie réduite à un seul élément de $\mathfrak{P}(E)$.

Il est facile alors de définir (sans utiliser le mot "deux" dans la définition un "ensemble à deux éléments": c'est un ensemble E contenant un élément a et un élément b , tels que $a\neq b$ et que $E=\{a,b\}$. L'existence d'un tel ensemble s'é-

 6

tablit par exemple en remarquant que si $F=\{a\}$ est un ensemble à un élément , $\mathfrak{P}(F)=\{\emptyset,\{a\}\}$ est un ensemble à deux éléments . On définit de la même manière un ensemble à trois ou quatre éléments , et en général un ensemble dont on peut <u>énumérer</u> successivement tous les éléments constituant l'ensemble . Mais cela ne constitue nullement une définition ~~XXXX~~ d'un <u>ensemble fini quelconque</u> , notion indispensable à l'édification des mathématiques . Il serait facile d'introduire cette notion axiomatiquement ; il nous a paru plus intéressant de voir qu'elle peut se définir à partir des seules propriétés générales des ensembles que nous avons admises ; les lignes qui précèdent montrent qu'une telle définition ne constitue nullement un cercle vicieux , la notion de "nombre" du langage courant n'étant nullement présupposée .

Etant donnés deux objets a, b de même type ~~XXX~~ T et un ensemble I à deux éléments $\{\alpha,\beta\}$ la fonction qui prend la valeur a pour $\iota=\alpha$ et la valeur b pour $\iota=\beta$ définit une <u>famille</u> d'objets de type T , dont les ~~XXXXXXXXXXXXXX~~ valeurs sont a et b . Ceci s'étend à un nombre quelconque d'éléments d'un même type . En particulier , deux ensembles E,F quelconques sont toujours (en vertu de l'axiome des familles d'ensembles) contenus dans un même ensemble G .

<u>4 . L'ensemble vide</u> .

Si A est une partie d'un ensemble E , la partie vide de A est identique à la partie vide de E . Il en résulte que si E et F sont deux ensembles quelconques, leurs parties vides sont identiques , puisque E et F sont des parties d'un même ensemble G . Les parties vides de <u>tous</u> les ensembles sont donc identiques à un même ensemble , appelé <u>l'ensemble vide</u> (ce qui justifie l'usage d'une notation unique $\emptyset$ pour désigner la partie vide d'un ensemble quelconque). L'ensemble $\mathfrak{P}(\emptyset)$ est un ensemble à <u>un élément</u> , qui contient donc <u>deux</u> parties distinctes , $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$ (qu'on aura soin de ne pas confondre) ; l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$ est donc un ensemble à <u>deux</u> éléments , et contient <u>quatre</u> parties distinctes $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ et $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

-que

L'ensemble produit $\emptyset\times\emptyset$ est identique à $\emptyset$; il y a lieu de considérer son uni-

$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ et $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$; et ainsi de suite .

L'ensemble produit $\emptyset\times\emptyset$ est identique à $\emptyset$; il y a lieu de considérer son unique partie $\emptyset$ comme le graphe (ou ensemble représentatif) d'une <u>application biunivoque</u> de l'ensemble $\emptyset$ sur lui-même . En effet , la propriété qui caractérise l'ensemble représentatif A d'une application biunivoque d'un ensemble E sur un ensemble F , est que la relation $x\in E$ entraîne la relation "il existe un $y\in F$ et un seul tel que $(x,y)\in A$" , et que la relation $y\in F$ entraîne "il existe un $x\in E$ et un seul tel que $(x,y)\in A$" . Or , les relations $x\in\emptyset$ et $y\in\emptyset$ sont <u>partout fausses</u>(n°1) et entraînent donc toute autre relation . L'unique application biunivoque de $\emptyset$ sur lui-même ainsi définie est appelée l'application <u>vide</u> .