RÉDACTION N° 130

COTE : **NBR 037**

TITRE : **LIVRE VIII. TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE**
CHAPITRE II. ALGÈBRE HOMOLOGIQUE (ÉTAT 1)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : **41**

NOMBRE DE FEUILLES : **41**

POUR LE CHAPITRE I DU BLOC HOMOLOGIQUE.

Au terme de ses efforts provisoires, le rédacteur du chap.II (Algèbre homologique) se doit de faire savoir à M. Quidedroit, rédacteur passé présent ou futur du chap.I (Algèbre des hom., ext.,...), qu'il a utilisé sans vergogne les résultats suivants qui lui semblent avoir leur place dans ledit chap.I :

a) Compléments sur les A-modules. Mécanisme des projecteurs et des facteurs directs. Définir la notion de module sans torsion sur un anneau quelconque si possible, et au moins sur un anneau d'intégrité (module régulier d'ALG., chap.II). Montrer que, sur un anneau principal, tout sous module d'un module libre est libre (cf. exposé III du séminaire CARTAN).

b) HOM. Relations $(f+g)' = f'+g'$ et $(f\circ g)' = g'\circ f'$ relatives aux sommes et composés de transposée. F étant un sous-module de E , cas de prolongement à E d'un homomorphisme de F dans γ ; cas où F est facteur direct. De la suite exacte $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow E/F \rightarrow 0$, on déduira la suite exacte $Hom(F,\gamma) \leftarrow Hom(E,\gamma) \leftarrow Hom(E/F,\gamma) \leftarrow 0$; cas où l'on peut mettre un 0 à sa gauche.

c) Produits tensoriels. Produit tensoriel de deux projecteurs. Si A' est un sous-module de A , le quotient de $A \otimes B$ par l'image canonique de $A'\otimes B$ est canoniquement isomorphe à $(A/A')\otimes B$. Le noyau de l'homomorphisme canonique de $A'\otimes B$ dans $A\otimes B$ est nul si A/A' ou si B est sans torsion.

d) Produits duaux. Définition ad libitum. Si E est de la forme A/B où A est sans torsion, le noyau de $B\otimes F \rightarrow A\otimes F$ est le produit dual $E * F$. $E * F$ ne dépend que des sous-modules de torsion de E et F .

e) Ext. Définition ad libitum. Si E est de la forme F/R où F est un module libre, le quotient de $Hom(R,G)$ par le sous-module (noté $Hom(F,G)$) des homomorphismes de R dans G qui se prolongent à F est isomorphe à $Ext(E,G)$. Cas de nullité de $Ext(E,G)$: E libre, ou G infiniment divisible

---

LIVRE VIII

TOPOLOGIE ALGEBRIQUE

CHAPITRE II

ALGEBRE HOMOLOGIQUE. (Etat 1).

------

§ 1. Modules gradués.

1) Définition des modules gradués ; projecteurs.

Définition 1 - Etant donné un anneau A ayant un élément unité, on appelle module (à gauche) gradué sur A un ensemble E muni de la structure algébrique définie par la donnée :

a) d'une structure de A-module (à gauche) définie sur E. (Alg., chap.II, §1).

b) d'une suite (θ_n) $(n \in Z)$ d'endomorphismes de la structure de module de E satisfaisant aux conditions suivantes :

(MG_I) $\theta_n \circ \theta_n = \theta_n$.

(MG_{II}) $\theta_n \circ \theta_q = 0$. (si $n \neq q$)

Dans ces conditions les endomorphismes (θ_n) prennent le nom de projecteurs du module gradué E . L'élément $\theta_n(x)$ est appelé la composante homogène de degré n de x ; un élément y qui est égal à sa composante homogène de degré n est dit homogène de degré n .

D'après (MG_I) il revient au même de dire que les éléments homogènes de degré n sont ceux du sous module $E_n = \theta_n(E)$. (MG_{II}) exprime que la somme des sous modules E_n est directe. Réciproquement le module somme directe (Alg.,chap.II, §1,n°7) d'une suite (G_n) $(n \in Z)$ est muni d'une structure de module gradué ; il en est de même du module produit des modules (G_n).

Remarques - 1) On définit de même la notion de module à droite gradué. Sauf mention expresse du contraire c'est de modules à gauche qu'il s'agira ici.

2) Il arrive souvent que certains des projecteurs (θ_n) soient nuls. En particulier, ils peuvent être nuls sauf un nombre fini d'entre eux ; ainsi le produit d'une famille finie de modules est muni d'une structure de module gradué.

3) Dans un module gradué E nous considérerons surtout les éléments homogènes et les sommes d'éléments homogènes.

2 - Sous-modules gradués stables ; modules gradués quotients.

Définition 2 - On dit qu'un sous-module F d'un module gradué E est un sous-module gradué stable (ou un sous-module stable) s'il est stable pour les projecteurs (θ_n).

Autrement dit on a $\theta_n(F) \subset F$. Les restrictions à F des projecteurs (θ_n) définissent alors sur F une structure de module gradué.

Exemples - 1) Les sous-modules E et $\{0\}$ sont stables.

2) Les sous-modules $E_n = \theta_n(E)$ sont stables ; la structure de module gradué définie sur E_n est alors définie par un seul projecteur. (d'ailleurs réduit à l'identité).

3) La somme des sous-modules E_n est un sous module stable.

Si F est un sous-module stable d'un module gradué E, on définit sur le module quotient E/F une structure de module gradué de la manière suivante : si $x \in E$ la classe de $\theta_n(x)$ mod. F ne dépend que de celle de x mod. F car F est stable pour θ_n ; θ_n induit donc un endomorphisme $\overline{\theta}_n$ de E/F, et les $(\overline{\theta}_n)$ satisfont évidemment aux conditions (MG_I) et (MG_{II}) de la déf. 1.

Exemple - Si E est un module gradué et si F est la somme directe des sous-modules $E_n = \theta_n(E)$, le module E/F est un module gradué dont tous les projecteurs se réduisent à l'endomorphisme nul.

3) - <u>Homomorphismes permis.</u>

Soient E et E' deux modules gradués sur le même anneau A , et (θ_n) et (θ'_n) les projecteurs de E et E' . On dit qu'un homomorphisme φ de E dans E' est <u>permis</u> (ou qu'il <u>conserve les degrés</u>) si l'on a $\varphi \circ \theta_n = \theta'_n \circ \varphi$ pour tout n . Il est clair que l'injection d'un sous module stable F dans E et l'homomorphisme canonique de E sur un module quotient E/F sont des homomorphismes permis. D'autre part, le noyau et l'image d'un homomorphisme permis φ de E dans E' sont des sous modules stables de E et de E'

Si f est un homomorphisme permis de E dans E' , f applique E_n dans E'_n . Si réciproquement f est un homomorphisme de E dans E' tel que $f(E_n) \subset E'_n$, on a $f(\theta_n(x)) = \theta'_n(f(x))$ pour tout élément homogène x de E et donc pour tout élément somme d'éléments homogènes.

4) - <u>Modules bigradués.</u>

<u>Définition 3</u> - <u>On appelle module bigradué sur un anneau A un ensemble E muni de la structure algèbrique définie par la donnée</u> :

a) <u>d'une structure de module à gauche sur A</u> .

b) <u>de deux suites (θ_n) et (π_n) de projecteurs, satisfaisant chacune aux conditions (MG_I) et (MG_{II}), et telles que l'on ait $\theta_n \circ \pi_p = \pi_p \circ \theta_n$ pour tous $n \in Z$ et $p \in Z$</u> . <u>Les deux structures de module gradué définies sur E par les projecteurs (θ_n) et (π_n) sont alors dites compatibles</u> .

Le cas le plus important de module bigradué E est celui où tout élément de E est somme d'éléments homogènes, ceci à la fois pour la structure définie par les projecteurs (θ_n) et pour celle définie par les (π_n). Si l'on pose $F_n = \theta_n(E)$ et $G_n = \pi_n(E)$, on a, pour tout $x \in F_n$, $x = \theta_n(x) = \sum_q \pi_q \theta_n(x) = \sum_q \theta_n \pi_q(x)$; ceci revient à dire que F_n est somme directe des $(F_n \cap G_q)$ $(q \in Z)$, ou encore que E est somme directe des $(F_n \cap G_q)$ $(q \in Z , n \in Z)$. Dans cette décomposition en somme directe il arrive souvent que l'on forme les sommes partielles

$\sum_{n+q=k}(F_n \cap G_q)$; si $x \in F_n \cap G_q$, on appelle $q+n$ le degré total de x, les entiers q et n prenant le nom de degrés partiels de x.

On définirait de même la notion de module trigradué, et, plus généralement celle de module multigradué.

5)- Exemples de modules bigradués : produits tensoriels de modules gradués.

Soient E et F deux modules gradués, définis par les projecteurs (p_n) et (θ_n) ; on suppose l'anneau de base A commutatif ; les endomorphismes $(p_n \otimes 1)$ et $(1 \otimes \theta_n)$ de $E \otimes F$ forment deux suites de projecteurs satisfaisant aux conditions de la déf.1 (Alg., chap.III, § 1, prop.10) et définissent donc sur $E \otimes F$ deux structures de module gradué ; en vertu de la même proposition ces deux structures sont compatibles, et définissent donc sur $E \otimes F$ une structure de module bigradué. Lorsque E (resp. F) est somme directe des $(p_n(E))$ (resp. $\theta_n(F)$)), alors $E \otimes F$ est somme directe des $(p_n(E) \otimes \theta_n(F))$ (ibid., prop.7).

L'isomorphisme canonique de $E \otimes (E' \otimes E'')$ sur $(E \otimes E') \otimes E''$ défini en Alg., chap.III, § 1 est évidemment un isomorphisme permis à la fois pour les degrés partiels et pour le degré total. Il en est de même pour l'isomorphisme canonique de $E \otimes E'$ sur $E' \otimes E$; mais, pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, nous définirons l'isomorphisme canonique du module bigradué $E \otimes E'$ sur le module bigradué $E' \otimes E$ au moyen de la formule $x \otimes y = (-1)^{pq}\, y \otimes x$ pour x de degré p et y de degré q ; il est à remarquer que cet isomorphisme n'est défini que pour les sommes d'éléments homogènes des modules en question ; c'est un isomorphisme permis à la fois pour les degrés partiels et pour le degré total.

6)- Exemples de modules bigradués : Hom (A,B).

Soient A et B deux modules gradués sur un même anneau commutatif A, définis par les projecteurs (p_n) et (θ_n). L'ensemble Hom(E,F) des homomorphismes de E dans F est muni d'une structure de A-module (chap.I). L'application $\varphi \to \overline{\theta}_n\varphi$ de $Hom(E,F)$ dans lui-même définie par $(\overline{\theta}_n\varphi)(x) = \theta_n(\varphi)(x)$ $(x \in E)$ est un endomorphisme de $Hom(E,F)$ que nous noterons $\overline{\theta}_n$; il est clair que les $(\overline{\theta}_n)$ satisfont aux conditions de la déf.1, et définissent donc sur $Hom(E,F)$ une structure de module gradué.

Soit d'autre part p'_n le transposé de p_n, endomorphisme de $Hom(E,F)$ défini par $\langle p_n(x),y'\rangle = \langle x,p'_n(y')\rangle$ $(x \in E\ ,\ y' \in Hom(E,F))$; d'après les règles de calcul des transposés (chap.I), les (p'_n) sont des projecteurs de $Hom(E,F)$ définissant sur ce module une seconde structure de module gradué.

Or on a $\langle \overline{\theta}_q p'_n x',x\rangle = \theta_q\langle p'_n x',x\rangle = \theta_q\langle x',p_n x\rangle = \langle \overline{\theta}_q x',p_n x\rangle = \langle p'_n \theta_q x',x\rangle$ pour tous $x \in E$ et $x' \in Hom(E,F)$; ceci exprime que les deux structures de modules gradués définies sur $Hom(E,F)$ sont compatibles et donc que $Hom(E,F)$ est un module bigradué.

Remarque - Dans le cas où les projecteurs de F se réduisent tous à l'endomorphisme nul, sauf un qui est l'identité, seule la seconde des structures graduées de $Hom(E,F)$ présente de l'intérêt.

7) - Algèbres graduées.

Définition 4.- Soit E une algèbre sur un anneau (commutatif et ayant un élément unité) A ; on dit que E est une algèbre graduée si le module sous-jacent de E est un module gradué, et si le produit de deux éléments homogènes de degrés p et q est un élément homogène de degré $p+q$.

On ne suppose pas ici que E soit une algèbre associative. La notion d'algèbre graduée est un cas particulier de celle d'algèbre stratifiée (ALG.,chap.IV), le monoide définissant la stratification étant ici le groupe Z des entiers rationnels (ou un sous-monoïde de celui-ci).

Exemples d'algèbres graduées - 1) Les algèbres de polynomes et de séries formelles à une variable sur un anneau A sont des algèbres graduées.

2) Les algèbres tensorielles et extérieures sont des algèbres graduées
3) Si V est une variété différentiable (Livre V) l'algèbre des formes différentiables définies sur V est une algèbre graduée.

Dans une algèbre graduée l'élément unité est nécessairement de degré 0 . Si x et y sont sommes d'éléments homogènes de E on a

$$\theta_n(xy) = \sum_{p+q=n} \theta_p(x)\,\theta_q(y)$$

La somme des sous-modules $\theta_n(E)$ $(n \geqslant q)$ est un idéal bilatère I_q de E.

8)- Algèbres graduées et produits tensoriels.

Dans une algèbre quelconque E la multiplication, qui n'est autre chose qu'une application bilinéaire de $E \otimes E$ dans E , peut être définie au moyen d'une application linéaire du produit tensoriel $E \otimes E$ dans E . Dans le cas où E est gradué cette application applique $E_p \otimes E_q$ dans E_{p+q} (E_n désignant le sous-module des éléments homogènes de degré n de E) ; autrement dit c'est un homomorphisme permis du module $E \otimes E$ muni de la graduation définie par le degré total, dans le module gradué E.

Soit maintenant E et F deux algèbres graduées sur le même anneau A . Nous nous proposons de munir le module bigradué $E \otimes F$ d'une structure multiplicative, c'est-à-dire de construire une application linéaire de $(E \otimes F) \otimes (E \otimes F)$ dans $E \otimes F$; on obtient celle-ci en identifiant le premier module à $E \otimes (F \otimes E) \otimes F$, puis en appliquant celui-ci sur $E \otimes (E \otimes F) \otimes F$ au moyen de l'isomorphisme canonique défini au n°5 , et enfin en identifiant ce dernier à $(E \otimes E) \otimes (F \otimes F)$; on fait alors le produit tensoriel des homomorphismes $E \otimes E \to E$ et $F \otimes F \to F$ définissant les structures multiplicatives de E et de F , et celui-ci définit la structure multiplicative de $E \otimes F$. Si x, x', y, y' sont homogènes et de degrés p, p', q, q' , le produit de $x \otimes x'$ et de $y \otimes y'$ sera donc $(-1)^{p'q}(xy) \otimes (x'y')$.

On voit aisément que l'isomorphisme $E \otimes F \to F \otimes E$ (défini au n°5) est aussi un isomorphisme pour les structures multiplicatives. Si E et F sont des algèbres associatives (resp. algèbres de Lie), $E \otimes F$ est aussi une algèbre associative (resp. algèbre de Lie). Le produit tensoriel de deux homomorphismes d'algèbres est un homomorphisme d'algèbres.

9)- L'algèbre des endomorphismes d'un module gradué.

Soit M un module gradué sur un anneau commutatif A. L'ensemble $E = \mathrm{Hom}(M,M)$ des endomorphismes de M est muni d'une structure de A-module bigradué (n°6). Il est aussi muni d'une loi de multiplication (composition des endomorphismes). Si (p_n) sont les projecteurs de M, les projecteurs $(\bar{p}_n)$ et (p'_n) de E sont définis par

$$\langle \bar{p}_n x', x \rangle = p_n \langle x', x \rangle \quad \text{et} \quad \langle p'_n x', x \rangle = \langle x', p_n x \rangle$$

Ces formules montrent :

1) Les éléments de E pour lesquels les deux graduations coïncident constituent la sous-algèbre des endomorphismes permis de M.

2) Les éléments homogènes de degré n pour la première graduation de E sont les endomorphismes x' tels que $(1-p_n)x' = 0$, c'est-à-dire tels qu'ils appliquent M dans M_n.

3) Les éléments homogènes de degré n pour la seconde graduation de E sont les endomorphismes x' tels que $x'(1-p_n)=0$; lorsque M est somme directe des M_n ce sont ceux qui s'annulent sur tous les M_q pour $q \neq n$.

On se gardera de croire que, pour une de ces graduations, E soit une algèbre graduée.

§ 2. Modules à bord.

1)- Définition : module d'homologie d'un module à bord.

Définition 1 - Soit G un module sur l'anneau A ; un endomorphisme d de G est appelé opérateur d'un bord s'il est de carré nul, c'est à dire si $d \circ d = 0$; G prend alors le nom de module à bord. Un élément x de G tel que $dx = 0$ est appelé un cycle ; un élément y de G de la forme $y = dz$ est appelé un bord.

Remarque. Dans certains cas, que seul l'usage permet de reconnaître, les opérateurs de bord, cycles et bords prennent les noms d'opérateurs de cobord, cocycles et cobords.

Proposition 1 - Tout bord est un cycle.

Ceci résulte aussitôt du fait que $ddz = 0$.

Ceci nous permet de poser la définition suivante :

Définition 2 - Si G est un module à bord, le quotient du module $Z(G)$ des cycles de G par le sous-module $B(G)$ des bords de G est appelé le module d'homologie de G et est noté $H(G)$.

Exemples 1) Si G est un module quelconque, l'endomorphisme nul est un opérateur de bord ; le module d'homologie de G est alors réduit à $\{0\}$.

2) Si V est une variété différentiable, l'espace vectoriel des formes différentielles définies sur V, muni de la différentiation extérieure, est un module à bord (Livre V, chap. II). Nous verrons plus tard que son module d'homologie joue un rôle important dans l'étude topologique de la variété V.

2) - Homomorphismes permis ; sous-modules stables.

Soient E et E' deux modules à bords sur un même anneau A, et soient d et d' leurs opérateurs de bord. Un homomorphisme f de E dans E' est dit permis si l'on a $f\circ d = d'\circ f$. Si x est un cycle de E, on a $d'(f(x)) = f(dx) = 0$, donc $f(Z(E)) \subset Z(E')$. Si y est un bord de E, c'est à dire si $y = dz$, on a $f(y) = f(dz) = d'(f(z))$, et $f(y)$ est un bord de E' ; ainsi $f(B(E)) \subset B(E')$. Par passage au quotient f induit donc un homomorphisme $\bar{f}$ de $H(E)$ dans $H(E')$, canoniquement associé à f.

Proposition 2 - Soient E, E' et E'' trois modules à bord, f (resp. g) un homomorphismes permis de E dans E' (resp. de E' dans E'') ; alors $g\circ f$ est un homomorphisme permis de E dans E'', et l'homomorphisme de $H(E)$ dans $H(E'')$ canoniquement associé à $g\circ f$ est $\bar{g}\circ\bar{f}$.

Ceci est une conséquence immédiate des définitions. Si $E = E'$ et si f et g sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre, alors leurs associés $\overline{f}$ et $\overline{g}$ sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Définition 3 - On dit qu'un sous-module F d'un module à bord E est stable s'il est stable pour l'opérateur de bord d de E, c'est-à-dire si $d(F) \subset F$.

La restriction de d à F munit ainsi F d'une structure de module à bord, que l'on appelle la structure induite par celle de E. L'injection de F dans E est alors un isomorphisme permis. Le noyau et l'image d'un homomorphisme permis d'un module à bord G dans un module à bord G' sont des sous-modules stables de G et de G'.

Soit F un sous-module stable du module à bord E, et soit d l'opérateur de bord de E. Si $x \in E$, la classe de dx mod. F ne dépend que de la classe de x mod. F car $d(F) \subset F$; donc d définit un endomorphisme du module quotient E/F ; celui-ci est évidemment de carré nul, et E/F est ainsi muni d'une structure de module à bord. Pour cette structure l'homomorphisme canonique de E sur E/F est un homomorphisme permis.

3) - Suites exactes.

Soient E un module à bord, d son opérateur de bord, et F un sous-module stable de E. Comme l'injection $F \to E$ est un homomorphisme permis, on en déduit l'homomorphisme associé $H(F) \xrightarrow{\varphi} H(E)$. Comme l'homomorphisme canonique $E \to E/F$ est permis, on en déduit l'homomorphisme associé π : $H(E) \to H(E/F)$. Nous nous proposons de définir un troisième homomorphisme δ : $H(E/F) \to H(F)$, et d'étudier les propriétés de ces trois homomorphismes.

Considérons un élément α de $H(E/F)$; c'est une classe de cycles de E/F, dont un représentant est une classe mod. F d'un élément $x \in E$ tel que $dx \in F$; dx est un cycle de F. Si l'on modifie en β' le cycle β de E/F dans sa classe α, on a $\beta' - \beta = d\gamma$ où $\gamma \in E/F$; soient x et x' des

des représentants de β et β' ; on a $x'-x \equiv dx_1$ (mod.F), c'est-à-dire $x'-x = dx_1+y$, avec $y \in F$. Ainsi $dx'-dx = dy$, et dx se trouve modifié d'un bord de F . Par conséquent la classe λ de dx dans H(F) ne dépend que de α ; nous poserons $\lambda = \delta(\alpha)$. Et il est clair que δ est un homomorphisme de H(E/F) dans H(F) .

L'image par ω de H(F) dans H(G) se compose des classes mod.B(E) des éléments $x \in F$ tels que $dx=0$. Le noyau de π dans H(E) se compose des classes mod.B(E) de cycles $y \in E$ tels que l'on ait $y = dz$ (mod.F) ; ceci revient à dire qu'il existe dans la classe mod.B(E) de y un cycle x de F . Par conséquent, dans H(E), <u>le noyau de</u> π <u>est identique à l'image de</u> ω .

L'image par π de H(E) dans H(E/F) se compose des classes (mod.B(E/F) de cycles $\bar{x}$ de E/F dont un représentant x dans E est tel que $dx = 0$. Le <u>noyau de</u> δ <u>dans</u> H(E/F) est évidemment <u>identique à cette image de</u> π en vertu de la définition de δ .

Enfin l'image par δ de H(E/F) dans H(F) se compose des classes mod. B(F) des éléments de Z(F) qui sont de la forme dx où $x \in E$, en vertu de la définition de δ . Le noyau de ω dans H(F) se compose des classes mod.B(F) des cycles de F qui sont des bords dans E . Par conséquent, dans H(F), <u>le noyau de</u> ω <u>est identique à l'image de</u> δ .

Ces résultats nous amènent à poser la définition suivante :

<u>Définition 4</u> - <u>Etant donnés une famille</u> (E_n) <u>de A-modules dont les indices parcourent un groupe monogène</u> (c'est à dire le groupe Z des entie[rs] rationnels, <u>ou un groupe</u> Z/(q)), <u>et une famille d'homomorphismes</u> (f_n) <u>tels que</u> f_n <u>applique</u> E_n <u>dans</u> E_{n+1} ,- <u>on dit que ces familles forment une suite exacte</u> (ou que les modules (E_n) forment une suite exacte pour <u>les homomorphismes</u> (f_n), <u>si</u>, <u>dans</u> E_n, le noyau de f_n est identique à <u>l'image de</u> f_{n-1} .

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> - <u>Si</u> F <u>est un sous-module stable du module à bord</u> E <u>les trois modules</u>

$$\begin{tikzcd} H(F) \arrow[r, "\omega"] & H(E) \arrow[dl, "\pi"] \\ H(E/F) \arrow[u, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

<u>forment une suite exacte pour les homomorphismes</u> ω, π <u>et</u> δ.

<u>Remarques</u>.- 1) Les applications topologiques du th.1 seront nombreuses ; il permettra notamment d'analyser les propriétés de situation d'un sous-espace fermé d'un espace topologique.

2) Si, dans une suite exacte, f_n est un <u>isomorphisme</u> dans, alors $f_{n-1}=0$ et réciproquement. Si, le module E_n est réduit à $\{0\}$, f_{n-2} est un homomorphisme de E_{n-2} <u>sur</u> E_{n-1}, et f_{n+1} est un <u>isomorphisme</u> de E_{n+1} dans E_{n+2} ; si E_n et E_{n+3} sont tous deux réduits à $\{0\}$, f_{n+1} est un <u>isomorphisme</u> de E_{n+1} <u>sur</u> E_{n+2}.

3) Si l'ensemble d'indices de la famille de modules (E_n) se compose des entiers $n \geqslant n_0$, si les homomorphismes (f_n) sont tels que l'image de l'un soit identique au noyau du suivant, et si le premier homomorphisme est un isomorphisme dans, on peut compléter les familles de modules et d'homomorphismes en une suite exacte en posant $E_n = \{0\}$ pour $n < n_0$. Il en est de même si les indices s'arrêtent à $n=n_0$ et si le dernier homomorphisme est un homomorphisme sûr.

4) On appelle encore, par abus de langage, suite exacte, une famille où le sens des homomorphismes est inversé.

4)- <u>Autre définition des suites exactes</u> ; <u>suites semi-exactes</u>.

Les notations étant les mêmes que dans la déf.4, on dira que les familles de modules (E_n) et d'homomorphismes (f_n) forment une <u>suite semi exacte</u> si, dans E_n, l'image de f_{n-1} est <u>contenue</u> dans le noyau de f_n. On peut alors former les modules quotients $\overset{-1}{f_n}(E_{n+1})/f_{n-1}(E_{n-1}) = H(E_n)$; les modules $H(E_n)$ s'appellent les <u>modules d'homologie</u> de la suite semi-exacte.

 14

Exemple : Si on prend pour groupe d'indices celui des entiers mod.1, pour l'unique module E_n un module à bord E d'opérateur de bord d , et pour homomorphisme f_n l'opérateur de bord d , la suite obtenue est semi exacte en vertu de la prop.1, et son module d'homologie est le module d'homologie $H(E)$ de E .

Proposition 3.- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite semi-exacte soit exacte est que ses modules d'homologie soient nuls.

Ceci résulte aussitôt des définitions.

5)- Naturalité.

Théorème 2 - Soient E et E' deux modules à bord et f un homomorphisme permis de E dans E' appliquant un sous-groupe stable F de E dans un sous-groupe stable F' de E' ; f induit alors des homomorphismes permis de F dans F' et de E/F dans E'/F', et les homomorphismes associés dans modules d'homologie satisfont au diagramme de compatibilités :

$$\begin{tikzcd} H(F) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\bar g"] & H(E) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\bar f"] & H(E/F) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\bar h"] & H(F) \arrow[d, "\bar g"] \\ H(F') \arrow[r, "\omega'"'] & H(E') \arrow[r, "\pi'"'] & H(E'/F') \arrow[r, "\delta'"'] & H(F') \end{tikzcd}$$

Ceci signifiant que, de quelque manière qu'on compose les homomorphismes désignés par des flèches, l'homomorphisme composé ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée et non du chemin suivi.

Soient g et h les homomorphismes de F dans F' et de E/F dans E'/F' induits par f ; on voit aussitôt que ce sont des homomorphismes permis. Il reste donc à démontrer les compatibilités du diagramme, ce qui revient à montrer que l'on a : $\omega' \circ \bar g = \bar f \circ \omega$, $\pi' \circ \bar f = \bar h \circ \pi$, $\delta' \circ \bar h = \bar g \circ \delta$, $\bar f, \bar g, \bar h$ désignant les homomorphismes associés à f,g,h. Si i,i',p,p' désignent l'injection de F dans E , celle de F' dans E', l'homomorphisme canonique de E sur E/F et celui de E' sur E'/F' , on a $i' \circ g = f \circ i$ et $p' \circ f = h \circ p$ ce qui démontre les deux premières formules en vertu de la prop.2 . Quant à la troisième, si $\alpha \in H(E/F)$ et si x est un élément de E

tel que sa classe mod.F soit un cycle de la classe a , $f(x)$ joue le rôle analogue pour $\bar{h}(d)$ en vertu du fait que f applique F dans F' ; la troisième formule se déduit alors aussitôt du fait que l'on a $f(dx) = d'(f(x))$ et de la définition des homomorphismes δ et δ' .

§ 3 - Modules caténaires.

1)- Définition ; sous-modules stables ; homomorphismes permis.

Définition 1 - On dit qu'un A-module E est un module caténaire (ou un module gradué à bord) s'il est muni d'une structure de module gradué définie par les projecteurs (p_n), -d'une structure de module à bord définie par l'opérateur de bord d,- et si l'on a $d \circ p_n = p^*_{n+r} \circ d$ pour tout n . Les éléments de E prennent alors le nom de chaînes. L'entier r est appelé le degré de l'opérateur d .

Remarques. 1) Dans certains cas, que seul l'usage permet de reconnaître, mais qui néanmoins coïncident avec ceux où les mots "cocycles" et "cobords" sont usités (§ 2, n°1), le mot "chaîne est remplacé" par le mot "cochaîne" .

2) Les cas les plus fréquents sont ceux où l'opérateur de bord d est de degré $r = \pm 1$.

Exemple.- Si V est une variété différentiable, l'espace vectoriel E des formes différentielles définies sur V , muni du degré et de la différentiation extérieure d , est un module caténaire ; d est ici de degré $r = +1$

Si E est un module caténaire, on dira qu'un sous-module F de E est stable si c'est un sous-module stable à la fois pour la structure de module gradué et pour celle de module à bord ; si (p_n) est la famille de projecteurs et si d est l'opérateur de bord de E , ceci veut dire que l'on a $p_n(F) \subset F$ et $d(F) \subset F$. Le module quotient E/F est alors un module caténaire ; son opérateur de bord a même degré que celui de E .

Si E et E' sont deux modules caténaires sur le même anneau A , on dit qu'un homomorphisme f de E dans E' est permis si c'est un homomorphisme permis à la fois pour les structures de modules gradués et pour celles de modules à bord ; (p_n) ,(p'_n), d,d' désignant les projecteurs et les opérateurs de bord de E et E', ceci veut dire que l'on a $f \circ p_n = p'_n \circ f$ et $f \circ d = d' \circ f$; Ceci implique évidemment que d et d' ont même degré r. Le noyau et l'image de f sont des sous-modules stables de E et E'. Si F est un sous-module stable du module caténaire G , les applications canoniques de F dans G et de G sur G/F sont des homomorphismes permis.

2)- Homologie d'un module caténaire.

Soit E un module caténaire, de projecteurs (p_n) et d'opérateur de bord d de degré r . Comme E est en particulier un module à bord, on peut former le module d'homologie H(E) de E . Si x est un cycle de E , on a $d(p_n(x)) = p_{n+r}(dx) = 0$, donc $p_n(x)$ est aussi un cycle et Z(E) est un sous-module stable de E ; de même B(E) est un sous-module stable de E . En particulier Z(E) et B(E) sont munis de structures de modules gradués, celle de B(E) étant induite par celle de Z(E) ; donc (§ 1,n°2) le module quotient H(E) est un module gradué, dont nous désignerons les projecteurs par (p_n) et par abus de langage ; on posera $H_n(E) = p_n(H(E))$ et on identifiera $H_n(E)$ à $Z_n(E)/B_n(E)$.

Si f est un homomorphisme permis du module caténaire E dans le module caténaire E', il conserve les degrés et l'homomorphisme associé f de H(E) dans H(E') (§ 2, n°2) est un homomorphisme permis pour les structures de modules gradués.

Soit, en particulier, F un sous-module stable du module caténaire E . Les homomorphismes $\varphi : H(F) \to H(E)$, et $\pi : H(E) \to H(E/F)$ (§ 2,n°3) conservent les degrés et appliquent $H_n(F)$ dans $H_n(E)$ et $H_n(E)$ dans $H_n(E/F)$. Quant au troisième homomorphisme $\delta : H(E/F) \to H(F)$, 17

il transforme, en vertu de sa définition, un élément de degré n en un élément de degré $n+r$; il applique donc $H_n(E/F)$ dans $H_{n+r}(F)$. Par conséquent :

Théorème 1 - *Si F est un sous-module stable du module caténaire E, et si l'opérateur de bord d de E est de degré r, la suite exacte du* th.1, § 2 *se décompose en r suites exactes à ensemble d'indices infini :*

$$\dots \to H_n(F) \to H_n(E) \to H_n(E/F) \to H_{n+r}(F) \to H_{n+r}(E) \to \dots$$

les indices de chacune parcourant une classe d'entiers congrus mod. r.

Si d est de degré ± 1, on obtient une seule suite exacte, qui s'écrit :

$(r = +1) \quad \dots \to H_n(F) \to H_n(E) \to H_n(E/F) \to H_{n+1}(F) \to H_{n+1}(E) \to \dots$

$(r = -1) \quad \dots \leftrightarrow H_n(E/F) \leftrightarrow H_n(E) \leftrightarrow H_n(F) \leftrightarrow H_{n-1}(E/F) \to H_{n-1}(E) \to \dots$

Remarque - Si f est un homomorphisme permis de E dans E', et si F applique F dans le sous-module stable F', le théorème de *naturalité* (§ 2, n°5, th.2) s'applique aux suites exactes du théorème précédent.

3)- *Produits tensoriels de modules caténaires.*

Soient E et E' deux modules caténaires sur le même anneau A, d et d' leurs opérateurs de bord que nous supposerons *de même degré* r égal à ± 1. Leur *produit tensoriel* $E \otimes E'$ est un module bigradué (§ 1, n°4). Les endomorphismes $d \otimes 1$ et $1 \otimes d'$ (que, par abus de langage, nous désignerons encore par d et d') de $E \otimes E'$ sont évidemment de carré nul (Alg., chap.III, § 1, n°4, prop.10). En vertu de la même prop. on a

$(d \otimes 1) \circ (p_n \otimes 1) = (d \otimes p_n) \otimes (1 \circ 1) = (1 \otimes p_{n+r}) \circ (d \otimes 1)$ et

$(d \otimes 1) \circ (1 \otimes p'_n) = (1 \otimes p'_n) \circ (d \otimes 1)$; ceci montre que $(d \otimes 1)$ est un opérateur de bord de degré 0 pour le second degré partiel de $E \otimes E'$, et de degré r pour le premier degré partiel et le degré total ; de même $(1 \otimes d')$ est un opérateur de bord de degré 0 pour le premier degré partiel, et de degré r pour le second degré partiel et le degré total.

Nous appellerons ces opérateurs les opérateurs de bord partiels de $E \otimes E'$.

Nous allons maintenant définir un opérateur de bord total dans $E \otimes E'$. Observons d'abord que l'endomorphisme $d+d'$ n'est pas de carré nul car on a $dd' = d'd$. Mais définissons, sur $E \otimes E'$, l'endomorphisme $\overline{d}'$ par la formule $\overline{d}'(x \otimes y) = \overline{x} \otimes (d'y)$, $x \to \overline{x}$ étant défini sur la somme des composantes homogènes de E par la formule $y \to (-1)^p y$ si y est homogène de degré p. On a $d\overline{d}' + \overline{d}'d = 0$, puisque r est impair, donc $d+\overline{d}'$ est de carré nul ; et on voit aussitôt que c'est un opérateur de degré r pour le degré total. Sauf mention expresse du contraire, quand nous parlerons de $E \otimes E'$ comme d'un module caténaire, c'est à la structure définie par le degré total et par l'opérateur de bord total $D = d+\overline{d}'$ que nous ferons allusion.

Remarque. Si E' est muni seulement d'une structure de A-module, on peut toujours lui donner une structure de module caténaire en posant que tous ses éléments sont de degré 0 et que d' est l'endomorphisme nul. Le module caténaire $E \otimes E'$ est alors appelé le module des chaînes de E à coefficients dans E'. On a alors $D(x \otimes x') = d(x \otimes x') = dx \otimes x'$.

Nous étudierons plus loin (§ 5) les relations entre $H(E)$, $H(E')$ et $H(E \otimes E')$.

Si E, E' et E'' sont trois modules caténaires, l'isomorphisme canonique de $E \otimes (E' \otimes E'')$ sur $(E \otimes E') \otimes E''$ est permis pour les structures de modules caténaires. Il en résulte un isomorphisme de leurs modules d'homologie.

L'isomorphisme canonique de $E \otimes E'$ sur $E' \otimes E$, défini par $x \otimes y = (-1)^{pq}\ y \otimes x$ pour x de degré p et y de degré q (§1, n°5) est aussi un isomorphisme permis ; en effet $(d+\overline{d}')(x \otimes y) = (dx) \otimes y + (-1)^p x \otimes (d'y)$ est transformé par cet isomorphisme en

$(-1)^{(p+r)q}y \otimes (dx) + (-1)^{p+p(q+r)}(d'y) \otimes x$; tandis que le transformé $(-1)^{pq}y \otimes x$ de $x \otimes y$ a pour bord total $(-1)^{pq}(d'y) \otimes x + (-1)^{pq+q}y \otimes (dx)$ chaine qui est égale à la précédente en vertu du fait que r est impair.

On constate aussi que l'isomorphisme canonique de $E \otimes E'$ sur $E' \otimes E$ défini à la manière ordinaire de Alg., chap. III n'est <u>pas</u> un isomorphisme permis ; ceci explique et justifie la définition donnée au § 1, n° 5 . On déduit de cet isomorphisme permis un isomorphisme de $H(E \otimes E')$ sur $H(E' \otimes E)$.

<u>Proposition 1 - Si</u> E, E', F, F' <u>sont quatre modules caténaires sur le même anneau</u> A , <u>si leurs opérateurs de bord</u> d, d', b, b' <u>sont de même degré</u> $r = \pm 1$ <u>et si</u> f <u>et</u> f' <u>sont des homomorphismes permis de</u> E <u>dans</u> F <u>et de</u> E' <u>dans</u> F', <u>alors</u> $f \otimes f'$ <u>est un homomorphisme permis de</u> $E \otimes E'$ <u>dans</u> $F \otimes F'$.

Le fait que $f \otimes f'$ conserve le degré total est évident. Soient x une chaine de degré p de E et y une chaine de degré q de E' ; on a

$(b+\overline{b'})(f \otimes f')(x \otimes y) = (b+\overline{b'})(f(x) \otimes f'(y)) = bf(x)) \otimes f'(y) + (-1)^p f(x) \otimes (b'f'(y))$

et $(f \otimes f')(d+\overline{d'})(x \otimes y) = (f \otimes f')(dx \otimes y + (-1)^p x \otimes d'y) = f(dx) \otimes f'(y) + (-1)^p f(x) \otimes f'd'y$. Puisque l'on a $b \circ f = f \circ d$ et $b' \circ f' = f' \circ d'$, ces deux chaînes sont égales, ce qui montre que $f \otimes f'$ est un homomorphisme permis.

On déduit alors de $f \otimes f'$ un homomorphisme de $H(E \otimes E')$ dans $H(F \otimes F')$.

§ 4.- <u>Cochaines ; modules de cohomologie</u>.

Soient E et γ deux modules sur le même anneau commutatif A . Rappelons (chap. I) que les <u>homomorphismes</u> de E dans γ forment un A-module que l'on note $\mathrm{Hom}(E, \gamma)$; la valeur de l'homomorphisme $x' \in \mathrm{Hom}(E, \gamma)$ pour l'élément x de E est notée $\langle x, x' \rangle$. Si f est un homomorphisme du A-module E_1 dans le A-module E_2, on définit le <u>transposé</u> f' de f comme l'homomorphisme de $\mathrm{Hom}(E_2, \gamma)$ dans $\mathrm{Hom}(E_1, \gamma)$ défini par la formule :

$$(1) \qquad \langle f(x_1), x'_2 \rangle = \langle x_1, f'(x'_2) \rangle$$

NBK037 20

Rappelons les formules suivantes, qui nous seront d'usage constant :

(2) $(f+g)' = f' + g'$

(3) $(f \circ g)' = g' \circ f'$.

1) - Module des cochaines d'un module caténaire.

Théorème 1 - Soient E un A-module caténaire de projecteurs (p_n) et d'opérateur de bord d de degré r et γ un A-module quelconque ; dans le module $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ les transposés p_n' des (p_n) sont des projecteurs, et le transposé d' de d est un opérateur de bord ; muni de cette structure $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ est un module caténaire, que l'on appelle le module des cochaines de E à coefficients dans γ ; dans ce module caténaire d' est de degré $-r$.

En effet la transposition, au moyen de la formule (3) des relations

$p_n \circ p_n = p_n$, $p_n \circ p_q = 0$, $d \circ d = 0$, $d \circ p_n = p_{n+r} \circ d$

donne $p_n' \circ p_n' = p_n'$, $p_n' \circ p_q' = 0$, $d' \circ d' = 0$, $p_n' \circ d' = d' \circ p_{n+r}'$, ce qui démontre le théorème.

Remarques. 1) Si E est seulement muni d'une seule structure, de module gradué ou de module à bord, le même raisonnement prouve que $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ est muni d'une structure de même espèce.

2) Les éléments homogènes de degré n de $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ sont caractérisés par $x' = p_n'(x')$, donc, en vertu de (1), par $\langle p_n(x),x'\rangle = \langle x,x'\rangle$; en particulier ils s'annulent sur les éléments homogènes de degré $q \neq n$ de E ; si E est somme de ses composantes homogènes cette dernière propriété caractérise les éléments de degré n de $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$.

3) Si E est somme (directe) de ses composantes homogènes, $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ est produit direct des siennes.

<u>Définition</u> 1 - <u>Les notations étant celles du</u> th.1, <u>les éléments de</u> $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ (resp. <u>éléments</u> x' <u>de</u> $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ <u>tels que</u> $d'x' = 0$, <u>éléments de</u> $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ <u>de la forme</u> $d'y'$) <u>sont appelés cochaines</u> (resp. <u>cocycles, cobords</u>) <u>de</u> E <u>à coefficients dans</u> γ ; <u>les modules des cocylces et des cobords de</u> E <u>à coefficients dans</u> γ <u>sont notés</u> $Z'(E,\gamma)$ <u>et</u> $B'(E,\gamma)$.

De la relation $\langle dx,x' \rangle = \langle x,d'x' \rangle$ on déduit le résultat suivant:

<u>Proposition</u> 1 - <u>Les notations étant celles du th.1 on a les relations suivantes</u> (<u>dites</u> "<u>relations d'orthogonalité</u>") :

(4) $\langle \text{cycle},\text{cobord} \rangle = 0$

(5) $\langle \text{bord},\text{cocycle} \rangle = 0$.

<u>Remarques</u> 1) La relation (5) caractérise les cocycles, qui sont les cochaines orthogonales à tous les bords. Par contre on se gardera de croire que les cobords sont caractérisés par (4) et qu'ils sont les cochaines orthogonales à tous les cycles ; ainsi si l'on prend pour E le module $Z/(8)$ (sur Z) et pour d l'endomorphisme $x \to 4x$, les cycles sont les classes de 0,2,4,6, et les bords les classes de 0 et 4 ; prenant $\gamma = Z/(2)$ $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ se compose de 0 et de l'homomorphisme h défini par $h(2n)=0$ et $h(2n+1)=1$; on a $d'=0$; les cocycles sont 0 et h , et 0 est le seul cobord ; mais tous les cocycles 0 et h s'annulent sur tous les cycles qui sont de la forme 2 n .

2) On note les modules des cocycles et des cobords de degré n $Z^n(E,\gamma)$ et $B^n(E,\gamma)$.

2) <u>Sous-modules stables</u> ; <u>homomorphismes permis</u>.

Soit F un sous-module du A-module E . Rappelons (chap.I) que de la suite exacte $0 \to F \to E \to E/F \to 0$, on déduit par transposition la suite exacte $\mathrm{Hom}(F,\gamma) \leftarrow \mathrm{Hom}(E,\gamma) \leftarrow \mathrm{Hom}(E/F,\gamma) \leftarrow 0$,- $\mathrm{Hom}(E/F,\gamma)$ étant identifié au sous-groupe de $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ composé des homomorphismes qui s'annullent sur F . On se gardera de croire que l'on puisse mettre

2 un 0 à la droite de cette suite, c'est-à-dire que f' est un homomorphisme de $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ sur $\mathrm{Hom}(F,\gamma)$, ou encore que tout homomorphisme de F dans γ se prolonge à E .

Supposons maintenant que E soit un module caténaire et F un sous-module stable de E . Si $x' \in \mathrm{Hom}(E/F,\gamma)$, on a $\langle x,x' \rangle = 0$ pour tout $x \in F$; alors $\langle x,d'x' \rangle = \langle dx,x' \rangle = 0$ car $dx \in F$; donc $d'x'$ (et de même $p_n'(x')$) appartient à $\mathrm{Hom}(E/F,\gamma)$ qui est ainsi un sous-module stable du module caténaire $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$.

Si de plus F est un facteur direct de E , l'homomorphisme canonique de $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ dans $\mathrm{Hom}(F,\gamma)$ est un homomorphisme sur, et $\mathrm{Hom}(F,\gamma)$ est isomorphe au module caténaire quotient $\mathrm{Hom}(E,\gamma)/\mathrm{Hom}(E/F,\gamma)$.

Proposition 2 - Si f est un homomorphisme permis du module caténaire E_1 dans le module caténaire E_2 , le transposé f' de f est un homomorphisme permis de $\mathrm{Hom}(E_2,\gamma)$ dans $\mathrm{Hom}(E_1,\gamma)$.

Il suffit pour le voir de transposer au moyen de (3) les relations $f \circ d_1 = d_2 \circ f$ et $f \circ p_n = p_n \circ f$.

Remarque. Avec trois modules caténaires on a une propriété évidente de transitivité.

3) Cohomologie d'un module caténaire ; suite exacte de cohomologie.

Définition 2 - Soit E un A-module caténaire et γ un A-module quelconque ; le module d'homologie $H(\mathrm{Hom}(E,\gamma))$ est appelé le module de cohomologie de E à coefficients dans γ et est noté $H'(E,\gamma)$. On note $H^n(E,\gamma)$ le sous-module des éléments homogènes de degré n de $H'(E,\gamma)$.

Proposition 3 - Avec les mêmes notations, il existe une application bilinéaire canonique de $H(E) \times H'(E,\gamma)$ dans γ , obtenue par passage aux quotients de la forme bilinéaire $(x,x') \rightarrow \langle x,x' \rangle$.

D'après les relations d'orthogonalité (4) et (5) de la prop.1, et si y et y' sont respectivement un cycle et un cocycle, la quantité $\langle y,y' \rangle$

ne change pas si ajoute un bord à y ou un cobord à y' ; elle ne dépend donc que des classes de y et de y' dans $H(E)$ et $H'(E,\gamma)$, et définit l'application bilinéaire cherchée. Celle-ci sera souvent désignée sous le nom d'accouplement entre homologie et cohomologie.

On a ainsi un homomorphisme canonique de $H'(E,\gamma)$ dans $\mathrm{Hom}(H(E),\gamma)$.

Remarques. 1) Le noyau de cet homomorphisme se compose des classes des cocycles qui s'annulent sur tous les cycles ; il ne se réduit donc en général pas $\{0\}$ (remarque 1, n°1). Son image est canoniquement isomorphe à l'ensemble des homomorphismes de $Z(E)$ dans γ qui s'annulent sur $B(E)$ et qui se prolongent à E. Si $Z(E)$ est un facteur direct de E (ce qui sera le cas le plus fréquent en algèbre simpliciale et dans les théories de l'homologie d'un espace topologique), cet homomorphisme est donc un homomorphisme sur.

2) Si, dans ce dernier cas, on a $H(E) = \{0\}$, $Z(E)$ se réduit à $B(E)$ et tout homomorphisme de $B(E)$ dans γ se prolonge à E. Si f est un cocycle, il s'annule sur $B(E) = Z(E)$ (prop.1), donc $f(x)$ ne dépend que de dx ; ainsi $dx \rightarrow f(x)$ est un homomorphisme de $B(E)$ dans γ, que nous prolongeons à E ; soit g l'homomorphisme obtenu. La formule $f(x) = g(dx)$ veut veut dire que l'on a $f = d'g$, c'est-à-dire que f est un cobord. Par conséquent, si $H(E)$ est nul et si $Z(E)$ est un facteur direct de E, les modules de cohomologie $H'(E,\gamma)$ sont nuls quel que soit le module γ. Nous retrouverons ce résultat au § suivant comme cas particulier d'un théorème plus général.

Soit f un homomorphisme permis du module caténaire E_1 dans le module caténaire E_2. Comme son transposé f' est un homomorphisme permis (prop.2) on déduit de f' un homomorphisme associé $\overline{f'}$ de $H'(E_2,\gamma)$ dans $H'(E_1,\gamma)$ (§ 2, n°2).

<u>Proposition 4 - *Si f est un homomorphisme permis du module caténaire* E_1 *dans le module caténaire* E_2 *, les homomorphismes associés à f des modules d'homologie et de cohomologie sont compatibles avec l'accouplement entre homologie et cohomologie, et on a le diagramme suivant*</u> :

$$\begin{tikzcd} H(E_1) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, phantom, "\|"] & H(E_2) \arrow[d, phantom, "\|"] \\ H'(E_1,\gamma) \arrow[d, Rightarrow] & H'(E_2,\gamma) \arrow[l, "\bar{f}'"'] \arrow[d, Rightarrow] \\ \gamma & \gamma \end{tikzcd}$$

Ceci veut dire que, si $x \in H(E_1)$ et $y \in H'(E_2,\gamma)$, on a $\langle x, \bar{f}'(y) \rangle = \langle \bar{f}(x), y \rangle$. La vérification en est immédiate.

Soit E un module caténaire et F un sous-module <u>stable</u> de E que nous supposerons être un <u>facteur direct</u>. On peut alors (n°2) identifier $\mathrm{Hom}(F,\gamma)$ au module quotient $\mathrm{Hom}(E,\gamma)/\mathrm{Hom}(E/F,\gamma)$. On déduit donc du th.1, § 2, que l'on a la suite exacte suivante, dite <u>suite exacte de cohomologie</u> :

$$\begin{tikzcd} H'(F,\gamma) & & H'(E,\gamma) \arrow[ll, "\omega'"'] \arrow[dl, "\pi'"] \\ & H'(E/F,\gamma) \arrow[ul, "\delta'"] & \end{tikzcd}$$

De plus les suites exactes d'homologie et de cohomologie de $E, F, E/F$ donnent lieu au <u>diagramme de compatibilités</u> avec les accouplements suivant :

$$\begin{tikzcd} H(F) \arrow[r, "\omega"] & H(E) \arrow[r, "\pi"] & H(E/F) \arrow[r, "\delta"] & H(F) \\ H'(F,\gamma) \arrow[d, Rightarrow] & H'(E,\gamma) \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] & H'(E/F,\gamma) \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] & H'(F,\gamma) \arrow[l, "\delta'"'] \arrow[d, Rightarrow] \\ \gamma & \gamma & \gamma & \gamma \end{tikzcd}$$

La compatibilité dans les deux rectangles de gauche résulte de la prop.4. Quant à celle relative aux troisièmes homomorphismes δ et δ' , elle se déduit aisément du fait que les endomorphismes d et d' sont transposés.

4) <u>Cas des accouplements</u>.

Au lieu des modules E et $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$, on peut, plus généralement considérer deux modules E et E', et une application bilinéaire $(x,x') \longrightarrow \langle x,x' \rangle$ de $E \times E'$ dans un A-module γ ; les modules E et E' seront alors dits

<u>accouplés sur</u> γ . Etant donnés deux accouplements, de E et E' et de F et F' sur γ , et un homomorphisme f de E dans F , il n'est <u>pas</u> en général possible de définir un homomorphisme de F' dans E' transposé de f. Donc, E et E' étant deux modules caténaires accouplés sur γ , nous supposerons que les projecteurs et opérateurs de bord de E et E' satisfont aux relations $\langle dx,x'\rangle \pm \langle x,d'x'\rangle = 0$ et $\langle p_n x,x'\rangle \pm \langle x,p'_n x'\rangle = 0$.
Les relations d'orthogonalité entre cycles (resp. bords) de E et bords (resp. cycles) de E' (prop.1) subsistent, ce qui donne, comme à la prop.3, un accouplement entre $H(E)$ et $H(E')$.

Si F est un sous-module stable de E , on définit F' comme l'ensemble des $x'\in E'$ tels que $\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout $x\in F$, F' est alors un sous-module <u>stable</u> de E' ; et les modules F et E'/F' , E/F et F' sont accouplés sur γ . On a alors le diagramme de compatibilités suivant , qui peut être utile dans le cas où F n'est pas facteur direct de E :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H(F) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\|"] & H(E) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\|"] & H(E/F) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\|"] & H(F) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\|"] & \cdots \\
\cdots & H(E'/F') \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] & H(E') \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] & H(F') \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] & H(E'/F') \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] & \cdots \arrow[l] \\
 & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma &
\end{tikzcd}$$

§ 5 - <u>Théorèmes des coefficients universels et de Künneth</u>.

Etant donnés deux modules caténaires sur le même anneau A , soient K et L , nous nous proposons de trouver des relations entre les modules d'homologie $H(K),H(L)$ et $H(Hom(K,L))$ d'une part, $H(K),H(L)$ et $H(K\otimes L)$ d'autre part.

1) - <u>Théorème des coefficients universels</u>.

Etant donné un module caténaire K sur un anneau A et un A-module nous nous proposons d'exprimer le module de cohomologie $H'(K,\gamma)$ de K à coefficients dans γ en fonction de γ et du module d'homologie $H(K)$. Nous nous limiterons à des anneaux de base A de types déterminés (les anneaux de "coefficients universels") dont la nature sera précisée au cours de la démonstration, et nous supposerons que K est un A-module libre (ce qui est le cas dans les applications). D'autre part, afin de garder une certaine symétrie avec le théorème de Künneth, nous prendrons pour Y un module caténaire L ; le cas où L ne possède pas a priori cette structure en est un cas particulier trivial si l'on prend tous les éléments de L de degré 0, et l'endomorphisme 0 pour opérateur de bord ; dans ce cas on a $H(L) = L$.

1) Il s'agit d'abord de montrer que $\mathrm{Hom}(K,L)$ peut être muni d'une structure de <u>module caténaire</u>. C'est d'abord un module bigradué (§ 1, n°6) et nous considérerons son <u>degré total</u>. Il reste donc à y définir un <u>opérateur de bord total</u> D ; soient d_K et d_L les opérateurs de bord de K et de L, que nous supposerons de degrés <u>opposés</u> r et $-r$ ($r = \pm 1$) . Sur $\mathrm{Hom}(K,L)$ nous définirons d'abord deux opérateurs de bord partiels, d'_K par transposition $\langle d'_K f,x \rangle = \langle f,d_K x \rangle$,- et d_L par la formule $\langle d_L f,x \rangle = d_L(\langle f,x \rangle)$ ($x \in K, f \in \mathrm{Hom}(K,L)$) ; comme on a $d_L d'_K \neq d'_K d_L$, l'endomorphisme $d'_K + d_L$ n'est <u>pas</u> de carré nul ; mais, comme pour les produits tensoriels (§ 3, n°3), nous définirons $\bar{d}_L$ par la formule $\langle \bar{d}_L f,x \rangle = \langle d_L f,\bar{x} \rangle$, $x \to \bar{x}$ étant défini sur la somme des composantes homogènes de K par la formule $y \to (-1)^p y$ si y est homogène de degré p . Les endomorphismes d'_K et $\bar{d}_L$ sont de carré nul et de même degré $-r$. Comme r est impair, on a $d_K\bar{x} = -\overline{d_K x}$, d'où $\langle \bar{d}_L d'_K f,x \rangle = \langle d_L f,d_K\bar{x} \rangle = -\langle d_L f,\overline{d_K x} \rangle = -\langle d'_K \bar{d}_L f,x \rangle$, c'est-à-dire $\bar{d}_L d'_K + d'_K \bar{d}_L = 0$; donc l'endomorphisme $D = d'_K + \bar{d}_L$ est un opérateur de bord total, de carré nul, compatible avec le degré total de $\mathrm{Hom}(K,L)$ et de degré $-r$. On a

$$(1) \qquad \langle Df,x \rangle = \langle f,d_K x \rangle + d_L(\langle f, \bar{x} \rangle) .$$

Si L est trivial nous retrouvons les résultats du § 4, n°1 .

II) Nous allons maintenant construire un <u>homomorphisme</u> φ <u>de</u> H (Hom(K,L)) dans Hom(H(K),H(L)), c'est-à-dire montrer que le module d'homologie H(K) et le module de cohomologie H(Hom(K,L)) sont accouplés sur H(L).

A toute chaine x de K et à toute cochaine f de Hom(K,L) nous ferons correspondre la chaine $\langle f,x \rangle$ de L ; d'après (I) on a les formules

(IIa) $\langle$cocycle, cycle$\rangle$ = cycle de L

(IIb) $\langle$cocycle, bord$\rangle$ = bord de L

(IIc) $\langle$cobord, cycle$\rangle$ = bord de L

Donc, si f et x sont un cocycle et un cycle, $\langle f,x \rangle$ est un cycle de L dont la classe d'homologie dans H(L) ne dépend que des classes d'homomorphisme φ cherchés ; dans le cas trivial on retrouve l'accouplement entre homologie et cohomologie défini au §4, n°3.

III) Montrons maintenant que, si K est un module <u>libre</u> sur un anneau A de type déterminé, φ est un homomorphisme de H(Hom(K,L)) <u>sur</u> Hom(H(K),H(L)). Soit donc u un homomorphisme de H(K) dans H(L) ; il provient d'un homomorphisme u_1 de Z(K) dans H(L) qui s'annule sur B(K) ; comme K est un A-module libre, B(K) sera un module libre lorsque A sera un anneau tel que tout sous-module d'un A-module libre soit libre, c'est-à-dire si A est un <u>anneau principal</u> (Alg., chap.VI) (en particulier l'anneau Z des entiers, ou un corps), ce que nous supposerons ; comme B(K) est isomorphe à K/Z(K), Z(K) est un facteur direct de K (chap.I) et u_1 se prolonge en un homomorphisme de K dans H(L) que nous noterons encore u_1. Désignons par π l'homomorphisme canonique de Z(L) sur H(L) ; pour tout élément x_α d'une base de K choisissons un cycle $u_2(x_\alpha) \in Z(L)$ de la classe $u_1(x_\alpha) \in H(L)$; par linéarité ceci définit un homomorphisme u_2 de K dans L tel que $u_1 = \pi \circ u_2$, $u_2(K) \subset Z(L)$ et $u_2(B(K)) = \{0\}$. La formule (I) montre aussitôt que u_2 est un cocycle ;

et l'alinéa (II) montre que la classe de cohomologie de u_2 définit l'homomorphisme u de $H(K)$ dans $H(L)$.

IV) $\mathrm{Hom}(H(K),H(L))$ s'identifie donc à un <u>module quotient</u> $H(\mathrm{Hom}(K,L))/S$. Il s'agit de déterminer la structure du sous-module S, noyau de φ. S est l'ensemble des classes de cocycles f tels que, pour tout cycle $x \in Z(K)$, $\langle f,x\rangle$ soit un bord de L ; soit T l'image inverse de S dans $Z(K)$. Ceci veut dire que $\pi\circ f$ induit un homomorphisme f_1 de $K/Z(K)$ dans $H(L)$, ou encore un homomorphisme f_2 de $B(K)$ dans $H(L)$ si l'on pose $(\pi\circ f)(x) = f_2(d_K x)$. D'autre part tout homomorphisme u_2 de $B(K)$ dans $H(L)$ définit, au moyen de $v(x) = u_2(d_K x)$, un homomorphisme v de K dans $H(L)$, qui, puisque K est un A-module libre, est de la forme $\pi\circ u$ (cf. III) ; d'après (I) u est un cocycle qui appartient à T par construction. Ainsi T est isomorphe au module $\mathrm{Hom}(B(K),H(L))$. S est donc isomorphe au quotient de $\mathrm{Hom}(B(K),H(L))$ par le sous-module des homomorphismes f tels que f soit un cobord ; or, si $u = Dg$, on a $u_1(d_K x) = (\pi\circ Dg)(x) = \pi(\langle g, d_K x\rangle + d_L\langle g,\bar{x}\rangle) = (\pi\circ g)(d_K x)$; ainsi, dire que u est un cobord, équivaut à dire que u_1 est de la forme $\pi\circ g$, c'est-à-dire qu'il peut se prolonger à K, ou, ce qui revient au même, à $Z(K)$, puisque $Z(K)$ est un facteur direct de K. Par conséquent (chap. I) S est isomorphe à $\mathrm{Hom}(B(K),H(L))/\mathrm{Hom}(Z(K),H(L))$; comme $H(K) \approx Z(K)/B(K)$ où $Z(K)$ est un module libre, S est isomorphe à $\mathrm{Ext}(H(K),H(L))$ (chap. I). Par conséquent :

<u>Théorème</u> 1 (théorème des coefficients universels) - <u>Si K est un module caténaire libre d'opérateur de bord de degré</u> $r = \pm 1$ <u>sur un anneau principal</u> A, <u>et si</u> L <u>est un module caténaire quelconque d'opérateur de bord de degré</u> $-r$ <u>sur</u> A, $\mathrm{Hom}(K,L)$ <u>est un module caténaire pour le degré total et l'opérateur de bord total</u> D ; <u>le module de cohomologie</u> $H(\mathrm{Hom}(K,L))$ <u>possède un sous-module permis</u> (pour la graduation) S <u>isomorphe</u>

<u>à</u> $\mathrm{Ext}(H(K),H(L))$; <u>et le module quotient</u> $H(\mathrm{Hom}(K,L)/S$ <u>est isomorphe à</u> $\mathrm{Hom}(H(K),H(L))$.

<u>Corollaire</u> 1.- <u>Lorsque</u> L <u>est un module caténaire trivial, les hypothèses sur</u> K <u>étant les mêmes, le module de cohomologie de</u> K <u>à coefficients dans</u> L <u>est une extension de</u> $\mathrm{Ext}(H(K),L)$ <u>par</u> $\mathrm{Hom}(H(K),L)$.

<u>Corollaire</u> 2 - <u>Si le module d'homologie d'un module caténaire libre</u> K <u>sur un anneau principal</u> A <u>est nul, il en est de même de tous les modules de cohomologie de</u> K <u>à coefficients dans tous les</u> A-<u>modules</u> L .

<u>Remarque</u> - Un cas particulier intéressant est celui où le sous-module S est nul ; alors $H(\mathrm{Hom}(K,L))$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}(H(K),H(L))$ et "les opérations "H" et "Hom" commuttent" . Il faut et il suffit pour cela que $\mathrm{Ext}(H(K),H(L))$ soit nul ; il en sera en particulier ainsi si $H(K)$ est un module libre, par exemple un groupe abélien sans torsion et à un nombre fini de générateurs, -ou encore si $H(L)$ est un module infiniment divisible (chap.X) ; l'une et l'autre conditions sont réalisées si A est un corps.

2) <u>Théorème de Künneth</u>.

Soient E et E' deux A-modules caténaires d'opérateurs de bord d et d' de même degré $r = \pm 1$. Considérons le produit tensoriel $E \otimes E'$ muni du degré total et de l'opérateur de bord total D défini par la formule

$$(D) \qquad D(x \otimes y) = (dx) \otimes y + \overline{x} \otimes (d'y) \qquad (\S 3, n^o 3).$$

Celle-ci montre que, si x et y sont des cycles, $x \otimes y$ est un cycle de $E \otimes E'$; si x est un bord $(x = dz)$ et y un cycle, $x \otimes y$ est égal à $D(z \otimes y)$ et est donc un bord ; de même, si x est un cycle et y un bord, $x \otimes y$ est un bord. Ainsi, lorsque x et y sont des cycles, la classe d'homologie de $x \otimes y$ ne dépend que des classes d'homologie de x et y ; l'application $(x,y) \longrightarrow x \otimes y$ définit donc, par passage aux quotients, une <u>application bilinéaire</u> (dite canonique) de $H(E) \times H(E')$ dans $H(E \otimes E')$

c'est-à-dire, d'après la définition des produits tensoriels (Alg.,chap. III) une <u>application linéaire</u> φ de $H(E) \otimes H(E')$ dans $H(E \otimes E')$. C'est cette application que nous nous proposons d'étudier.

Rappelons (chap.I) que si A est un anneau principal (par exemple un corps, ou l'anneau des entiers rationnels Z) et si K est un A-module sans torsion, l'homomorphisme canonique de $K \otimes M$ dans $K \otimes L$ est biunivoque pour tout A-module L et tout sous-module M de L . Nous supposerons que A est un anneau principal et que E , par exemple, est un module sans torsion.

<u>Lemme</u> - <u>Si</u> K <u>est un module caténaire sans torsion et d'opérateur de bord d nul sur un anneau principal</u> A , <u>et si</u> K' <u>est un A-module caténaire,</u> $Z(K \otimes K')$ <u>s'identifie à</u> $K \otimes Z(K')$, <u>et</u> $H(K \otimes K')$ <u>à</u> $K \otimes H(K')$.

D'après ce qui vient d'être dit $K \otimes Z(K')$ s'identifie à un sous-module de $K \otimes K'$. Or (chap.I, ou §3,n°3) $K \otimes Z(K')$, qui est l'image dans $K \otimes K'$ du produit tensoriel de K par le noyau de $d' : K' \to B(K')$, est le noyau de l'homomorphisme de $K \otimes K'$ sur $K \otimes B(K')$. Mais, comme l'homomorphisme canonique de $K \otimes B(K')$ dans $K \otimes K'$ est un isomorphisme d'après les hypothèses, $K \otimes Z(K')$ est aussi le noyau de l'endomorphisme d' de $K \otimes K'$, c'est-à-dire qu'il est identique au sous-module $Z(K \otimes K')$. D'autre part il est clair que $K \otimes B(K') = B(K \otimes K')$; ainsi le quotient $H(K \otimes K') = Z(K \otimes K')/B(K \otimes K')$ s'identifie à $K \otimes (Z(K')/B(K')) = K \otimes H(K')$.

Revenons maintenant à la question. Comme $E/Z(E) \approx B(E)$ est sans torsion, $Z(E) \otimes E'$ s'identifie à un sous module de $E \otimes E'$ (chap.I), et ce sous-module est stable pour l'opérateur de bord total D , qui d'ailleurs se réduit à d' sur $Z(E) \otimes E'$. D'autre part l'homomorphisme d identifie le quotient $(E/Z(E)) \otimes E'$ à $B(E) \otimes E'$ (en élevant les degrés de r unités). On a donc la <u>suite exacte</u>

$$\begin{tikzcd} H(Z(E) \otimes E') \arrow[rr, "a"] & & H(E \otimes E') \arrow[dl, "\beta"] \\ & H(B(E) \otimes E') \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

où α est de degré 0, β de degré r et δ de degré 0, en vertu de l'identification de $E/Z(E)$ à $B(E)$ au moyen de d. Soit λ un élément de $H(B(E)\otimes E')$, et λ_1 un représentant de λ dans $Z(B(E)\otimes E')$; choisissons un élément μ de $E\otimes E'$ qui soit appliqué par d en λ_1 ; comme, en vertu du lemme, λ_1 est dans $B(E)\otimes Z(E')$, on pourra prendre μ dans $E\otimes Z(E')$. D'après la définition du troisième homomorphisme (§ 2, n°3), $\delta(\lambda)$ est la classe d'homologie du cycle $D\mu$ de $Z(E)\otimes E'$. Mais, comme sur $E\otimes Z(E')$ D se réduit à d, $D\mu$ est égal à $d\mu$, c'est-à-dire à λ_1 considéré cette fois comme élément de $Z(E)\otimes E'$. Ainsi δ provient par passage aux quotients de l'homomorphisme canonique de $B(E)\otimes E'$ dans $Z(E)\otimes E'$.

En appliquant à nouveau le lemme, la suite exacte devient

$$\begin{tikzcd} Z(E)\otimes H(E') \arrow[rr, "\alpha"] & & H(E\otimes E') \arrow[dl, "\beta"] \\ & B(E)\otimes H(E') \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

δ étant ici l'homomorphisme canonique déduit de l'injection de $B(E)$ dans $Z(E)$. En vertu de l'exactitude, α identifie un sous module S de $H(E\otimes E')$ au quotient de $Z(E)\otimes H(E')$ par l'image canonique de $B(E)\otimes H(E')$, c'est-à-dire à $H(E)\otimes H(E')$ (chap. I) ; il est clair que cette injection de $H(E)\otimes H(E')$ coïncide avec l'application canonique définie au début du n°.

Appliquant encore l'exactitude de la suite, on voit que le quotient de $H(E\otimes E')$ par le sous-module identifié à $H(E)\otimes H(E')$ est isomorphe au noyau de l'application canonique de $B(E)\otimes H(E')$ dans $Z(E)\otimes H(E')$. Or, d'après le chap. I, ce noyau n'est autre que le <u>produit dual</u> $H(E) * H(E')$, puisque le module $Z(E)$ est sans torsion par hypothèse.

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Théorème 2 - Soient E et E' deux modules caténaires d'opérateurs de bord de même degré r ($= \pm 1$) sur un anneau principal A ; si l'un des deux modules E et E' est sans torsion, l'homomorphisme canonique de $H(E) \otimes H(E')$ dans $H(E \otimes E')$ est un isomorphisme ; le quotient de $H(E \otimes E')$ par l'image de $H(E) \otimes H(E')$ est isomorphe au produit dual $H(E) \circledast H(E')$.

Remarques.- 1) Si $H(E)$ ou $H(E')$ est sans torsion, le produit dual est nul (chap.I) et $H(E \otimes E')$ est isomorphe à $H(E) \otimes H(E')$; il en est en particulier ainsi si A est un corps.

2) Si $H(E)$ ou $H(E')$ est nul, il en est de même de $H(E \otimes E')$.

3) Si E et E' sont des A-modules libres, $Z(E)$ et $Z(E')$ sont facteurs directs ; soient alors p et p' des projecteurs de E et E' sur $Z(E)$ et $Z(E')$; $p \otimes p'$ est un projecteur de $E \otimes E'$ sur $Z(E) \otimes Z(E')$, qui, par passage aux quotients, donne un projecteur de $H(E \otimes E')$ sur $H(E) \otimes H(E')$; par conséquent $H(E \otimes E')$ est isomorphe au produit de $H(E) \otimes H(E')$ par $H(E) * H(E')$.

4) D'après les définitions $\sum_{p+q=n} H_p(E) \otimes H_q(E')$ s'identifie à un sous module de $H_n(E \otimes E')$. Le quotient est canoniquement isomorphe à la somme directe des modules $H_p(E) * H_q(E')$ où $p+q = n+r$.

5) Si l'un des modules d'homologie, $H(E)$ par exemple, est trivial, -c'est à dire si $H_p(E) = \{0\}$ pour $p \neq 0$, et $H_0(E)=A$,-les remarques 1) et 4) montrent que $H(E \otimes E')$ est canoniquement isomorphe à $H(E')$.

6) Si le module E est un espace vectoriel sur un corps A, et si la dimension de $H_n(E)$ sur A est finie, cette dimension est appelée le n-ème nombre de Betti de E et est notée $b_n(E)$ ou b_n ; la série formelle à coefficients entiers $P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(E)X^n$ (définie si $H(E)$ ne comporte que des degrés positifs) est appelé la série formelle de Poincaré de E.

Si H(E) et H(E') ne comportent que des degrés positifs, le th.2 et les propriétés des produits tensoriels d'espaces vectoriels montrent que la série formelle de Poincaré de E E' est égal au produit des séries formelles de Poincaré de E et de E' .

§ 6 - Structure multiplicative. Algèbres caténaires.

1)- Algèbres caténaires.

Définition 1 - On dit qu'une algèbre graduée (§ 1, n°7) E sur un anneau A est une algèbre caténaire si E est un module caténaire d'opérateur de bord d de degré $r = \pm 1$, et si l'application linéaire du produit tensoriel $E \otimes E$ dans E définie par la multiplication dans E (§ 1, n°8) est un homomorphisme permis pour les structures de modules caténaires de $E \otimes E$ et de E .

Proposition 1 - Pour qu'une multiplication définie sur un A-module caténaire E en fasse une algèbre caténaire, il faut et il suffit que le produit de deux éléments homogènes de degrés p et q soit un élément homogène de degré p+q , et que, pour tous x et y de E , on ait la relation

$$(1) \qquad d(xy) = (dx)y + \bar{x}(dy) .$$

La condition relative aux degrés exprime que E est une algèbre graduée. D'autre part le fait que l'homomorphisme de $E \otimes E$ dans E définissant la multiplication est permis s'exprime en écrivant que d(xy) est l'image dans E de $D(x \otimes y)$; en vertu de la formule $D(x \otimes y) = (dx) \otimes y + \bar{x} \otimes (dy)$ (§ 3, n°3), ceci s'écrit $d(xy) = (dx)y + \bar{x}(dy)$.

Il résulte de la déf.1 et du n°8 (§ 1) que le produit tensoriel $E \otimes E'$ de deux algèbres caténaires E et E' est une algèbre caténaire.

2)- Algèbres d'homologie d'une algèbre caténaire.

Proposition 2 - Si E est une algèbre caténaire, la multiplication dans E définit par passage aux quotients sur H(E) une multiplication qui en fait une algèbre graduée, appelée algèbre d'homologie de E .

En effet la relation (1) montre que le produit de deux cycles est un cycle, et que le produit d'un cycle et d'un bord (dans n'importe quel ordre) est un bord.

Remarques - 1) Si E est une algèbre associative (resp. une algèbre de Lie), il en est de même de $H(E)$.

2) $B(E)$ est un idéal bilatère de $Z(E)$.

3) L'homomorphisme permis de $E \otimes E$ dans E définit l'homomorphisme associé : $H(E \otimes E) \rightarrow H(E)$; on voit aussitôt que la structure multiplicative de $H(E)$ est définie par l'homomorphisme composé de ce dernier homomorphisme et de l'homomorphisme canonique de $H(E) \otimes H(E)$ dans $H(E \otimes E)$ défini au n°2, § 5 .

Exemple - Soit E l'algèbre des formes différentielles d'une variété différentiable V . La formule donnant la différentielle extérieure d'un produit est identique à la formule (1), et E est une algèbre caténaire. $H(E)$ est alors une algèbre graduée, fort importante dans l'étude de la topologie de V .

3)- Idéaux bilatéraux stables. Homomorphismes permis.

Nous dirons qu'un idéal bilatère I d'une algèbre caténaire E est stable si c'est un sous module stable de E pour la structure de module caténaire de E ; ceci veut dire que E est stable pour les projecteurs et pour l'opérateur de bord. La prop.1 montre aussitôt que E/I est une algèbre caténaire.

Un homomorphisme φ d'une algèbre caténaire E dans une algèbre caténaire F est dit permis si c'est un homomorphisme permis pour les structures de modules caténaires de E et F , et si l'on a $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$ pour tous x et y de E . Le noyau et l'image d'un homomorphisme permis sont des idéaux bilatères stables de E et de F . Si I est un idéal bilatère stable de l'algèbre caténaire E, les homomorph.canoniques de I dans E et de E sur E/I sont

permis

Si μ est un homomorphisme permis de l'algèbre caténaire E dans l'algèbre caténaire F, l'homomorphisme <u>associé</u> (2, n°2) de H(E) dans H(F) est évidemment un homomorphisme permis pour les structures d'algèbres graduées de H(E) et H(F). Si, en particulier, I est un idéal bilatère stable de l'algèbre caténaire E, les homomorphismes ω et π de la suite exacte

$$\begin{tikzcd} H(I) \arrow[rr, "\omega"] & & H(E) \arrow[dl, "\pi"] \\ & H(E/I) \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

sont des homomorphismes d'<u>algèbres graduées</u> ; mais, en vertu de la formule (1) de bord d'un produit, le troisième homomorphisme δ n'est <u>pas</u> un homomorphisme pour les structures multiplicatives.

2

§ 7 - <u>Opérateurs d'homotopie</u>.

1)- <u>Définition et propriétés fondamentales</u>.

<u>Définition 1</u> - <u>Soit</u> E <u>un module caténaire d'opérateur de bord</u> d <u>de degré</u> r ($r = \pm 1$) ; <u>on appelle opérateur d'homotopie dans</u> E <u>un endomorphisme</u> h <u>de</u> E (considéré comme A-module), <u>tel qu'il existe un endomorphisme</u> k, <u>de degré</u> $-r$ ($p_{n-r}k = kp_n$, les (p_n) étant les projecteurs de E), <u>et satisfaisant à la relation</u>

(H) $\quad e-h = dk + kd \quad$ (e désignant l'automorphisme identique)

<u>Dans ces conditions</u> h <u>est dit associé à</u> k .

Un opérateur d'homotopie est de degré 0 . D'autre part on a $d-dh = d-hd = dkd$ d'après (H). Donc un opérateur d'homotopie est un <u>endomorphisme permis</u> pour la structure de module caténaire de E .

<u>Remarque</u> - Si E est muni d'une structure d'algèbre caténaire, il arrive souvent dans les applications que les opérateurs d'homotopie dans E soient des endomorphismes multiplicatifs.

Avec les notations de la déf.1, si un sous-module stable F de E est stable pour k , il est stable pour h ; h induit alors un opérateur d'homotopie dans F . Par passage au quotient h et k définissent des

des endomorphismes du module quotient E/F qui satisfont encore à la relation analogue à (H) ; ainsi h définit un opérateur d'homotopie dans le module quotient E/F .

Proposition 1 - Si k et k' sont deux endomorphismes de degré $-r$ du module caténaire E , et si h et h' sont les opérateurs d'homotopie associés à k et k' , l'endomorphisme composé $h'h$ est un opérateur d'homotopie, associé à l'endomorphisme $k + k'h$.

En effet on a $e-h'h = (e-h) + (e-h')h = dk + kd + dk'h + k'dh = d(k+k'h)+(k+k'h)d$, puisque $dh = hd$ et donc $k'dh = k'hd$.

Corollaire - Le n-ème itéré de l'opérateur d'homotopie h associé à k est un opérateur d'homotopie h^n associé à $k(e+h+\ldots+h^{n-1})$.

Remarque - La conclusion de la prop. 1 reste valable si l'on suppose seulement que k' (et h') sont des homomorphismes de $h(E)$ dans E .

Théorème 1 - Si h est un opérateur d'homotopie dans le module caténaire E , l'endomorphisme $\tilde{h}$ de $H(E)$ associé à h (§ 2, n°2) est l'automorphisme identique de $H(E)$. Si de plus h est un projecteur de E sur un sous module (stable) F , et si f désigne l'injection de F dans E , les homomorphismes $\overline{h}: H(E) \to H(F)$ et $\overline{f}: H(F) \to H(E)$ associés à h et f sont des isomorphismes sur, réciproques l'un de l'autre.

Si x est un cycle de E , on a $dx = 0$, donc $x-h(x) = d(k(x))$, et $h(x)$ est un cycle homologue à x . Dans le cas où h est un projecteur, $\overline{fh}$ est l'automorphhisme identique de $H(E)$ d'après la première partie, et $\overline{h \circ f}$, associé à l'automorphisme identique $h \circ f$ de F , est l'automorphisme identique de $H(F)$.

2) - Transposé d'un opérateur d'homotopie.

Soient E un A-module caténaire, et γ un A-module quelconque ; nous avons vu (§ 4, n°1) que le module $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ peut être muni d'une structure de module caténaire, l'opérateur de bord d' de $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$ étant le le transposé de l'opérateur de bord d de E . Si k est un endomorphisme de degré $-r$ de E et h l'opérateur d'homotopie associé à k , c'est-à-dire défini par $e-h = dk + kd$, - le transposé k' de k est de degré r , et le transposé h' de h est l'*opérateur d'homotopie* associé à k' car, par transposition de (H), on obtient $e'-h' = d'k' + k'd'$.

Si h est un projecteur de E , et si g est l'homomorphisme de E sur $h(E)$ déduit de h (alors $h = f\circ g$ f étant l'injection de $h(E)$ dans E ; modifier ainsi la fin du th.1 qui n'a aucun sens), on sait que le transposé g' de g est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(h(E),\gamma)$ dans $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$, c'est-à-dire identifie $\mathrm{Hom}(h(E),\gamma)$ à un sous-module de $\mathrm{Hom}(E,\gamma)$, et que le transposé $h' = g'\circ f'$ de h est un projecteur sur ce sous-module. Comme c'est aussi un opérateur d'homotopie, il résulte du th.1 que les homomorphismes entre modules de cohomologie $H'(E) \rightarrow H'(h(E))$ et $H'(h(E)) \rightarrow H'(E)$ associés à f' et g' sont des *isomorphismes sur*, réciproques l'un de l'autre.

3)- *Opérateurs d'homotopie dans les produits tensoriels*.

Proposition 2 - *Si* h *est opérateur d'homotopie dans le module caténaire* E , *et si* E' *est un module caténaire d'opérateur de bord* d' *de même degré que celui* d *de* E , $h \otimes 1$ *est opérateur d'homotopie de* $E \otimes E'$.

Soit k l'endomorphisme de degré $-r$ auquel est associé h ; on a $x-h(x) = dk(x) = kd(x)$ pour tout $x \in E$; considérons l'endomorphisme de degré $-r$ $k\otimes 1$ de $E \otimes E'$ et formons $D(k \otimes 1) + (k \otimes 1)D$; il vient
$$D(k(x)\otimes y) + (k\otimes 1)(D(x\otimes y)) = dk(x)\otimes y+\overline{k(x)}\otimes(d'y)+kd(x)\otimes y+k(\overline{x})\otimes(d'y) ;$$
mais, comme k est de degré impair, on a $k(\overline{x}) + \overline{k(x)}=0$, et le second membre est égal à $(dk(x)+kd(x)) \otimes y$, c'est-à-dire à $(x-h(x))\otimes y$ .CQFD.

Remarques - 1) La prop.1 montre alors que le produit tensoriel $h\otimes h' = (h\otimes 1)\circ(1\otimes h')$ de deux opérateurs d'homotopie est un opérateur d'homotopie. Si h et h' sont de plus des projecteurs, il en est de même de $h\otimes h'$ (chap.I), et la fin du th.1 s'applique à $H(E\otimes E')$.

2) Si E' est un module caténaire trivial, un opérateur d'homotopie h de E définit un opérateur d'homotopie $h \otimes 1$ du module caténaire $E \otimes E'$ des chaines de E à coefficients dans E' .

4)- <u>Exemple des formes différentielles de l'espace euclidien</u>.

Pour simplifier nous considèrerons les formes différentielles à coefficients <u>indéfiniment différentiables</u> de l'espace numérique R^n . Elles forment une algèbre caténaire E sur le corps R des nombres réels ; son opérateur de cobord d est de degré +1 . Nous définissons un endomorphisme k de degré -1 de l'espace vectoriel sous-jacent de E par la formule $k(\omega) = b(u)\left(\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} u_i du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_p\right)$, le "$\wedge$" sur du_i signifiant que ce facteur est à omettre dans le produit écrit, ω étant la forme $a(u)du_1 \dots du_p$ de degré p , les (u_i) désignant les coordonnées du point u de R^n , et b(u) désignant la fonction $b(u) = \int_0^1 a(tu)t^{p-1}dt$ (tu étant l'homothétique de u par rapport à l'origine dans le rapport t) ; bien entendu cette définition de k s'étend à E par linéarité. Elle n'est valable que pour les formes de degré $p \geqslant 1$; pour une forme de degré 0, c'est à dire pour une fonction f , k(f) est de degré -1 et est donc nul.

Nous allons étudier l'<u>opérateur d'homotopie</u> h associé à k par la formule $e-h = dk + kd$. Pour une fonction f on a $(f-h(f))(u) = (k(df))(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u_j}(tu)dt = f(u)-f(0)$; h(f) est donc la fonction constante f(0). Passons maintenant au cas d'une forme $\omega = a(u)du_1 \dots du_p$ de degré $p \geqslant 1$; posant toujours $b(u) = \int_0^1 a(tu)t^{p-1}dt$, on a $dk(\omega) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} d(b(u)u_i)du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \left[\sum_{j=1}^{n} u_i \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial u_j}(tu)t^p dt\right) du_j du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_p\right] + pb(u)du_1 \dots du_p$.

D'autre part $kd(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial u_j}(tu)t^p dt\right)(u_j du_1 \dots du_p + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i u_i du_j du_1 . \widehat{du_i} \dots du_p$. Si l'on forme dk+kd , les sommes doubles se détruisent et il vient

$$(dk+kd)(\omega) = \Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} u_j \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial u_j}(tu)t^p dt\Big) - p\int_0^1 a(tu)t^{p-1} dt\Big)du_1 \ldots du_p .$$

Par intégration par parties, on voit que le coefficient de $du_1 \ldots du_p$ dans le second membre est égal à $f(u)$.

En résumé l'opérateur d'homotopie h associe à la forme $a(u)du_1 \ldots du_p$ 0 si $p \geqslant 1$, et $a(0)$ si $p=0$. C'est donc évidemment un <u>projecteur</u> de E sur le sous espace F des fonctions constantes. Or toute constante a sa différentielle extérieure nulle et est donc un cocyle ; d'autre part 0 est le seul cobord de degré 0 . Par conséquent, en vertu du th. 1 :

<u>Théorème</u> 2 - <u>L'espace vectoriel d'homologie de l'espace des formes différentielles sur</u> R^n <u>est trivial</u>, <u>c'est-à-dire que ses composantes de degré</u> $p \geqslant 0$ <u>sont réduites à 0</u>, <u>et que sa composante de degré</u> 0 <u>est isomorphe à</u> R .

§ 8 - <u>Homologie d'une limite inductive</u>.

Nous nous bornerons ici aux modules caténaires, le cas des algèbres caténaires se traitant de façon tout à fait analogue.

Etant donnée une famille de modules caténaires $(E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ dont l'ensemble d'indices est un <u>ordonné</u> <u>filtrant</u> Λ (Ens.R.), supposons-nous donnés, pour tout couple d'indices (α, β) tels que $\alpha \leqslant \beta$, des <u>isomorphismes permis</u> $\varphi_{\beta\alpha}$ <u>de</u> E_α <u>dans</u> E_β tels que, pour $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, on ait la relation de <u>transitivité</u> $\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha}$. Un module caténaire E est dit la <u>limite</u> <u>inductive</u> des (E_α) relativement aux isomorphismes $\varphi_{\beta\alpha}$ s'il existe une famille d'isomorphismes permis $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ des (E_α) dans E , tels que E soit engendré par les images (E'_α) des (E_α) et que les isomorphismes $\varphi_{\beta\alpha}$ aient pour transformés les applications canoniques $E'_\alpha \longrightarrow E'_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$; E est alors la <u>réunion</u> des sous modules (E'_α) .

L'unicité, à un isomorphisme près, de la limite inductive des (E_α) est évidente. On peut montrer son existence de la manière suivante : dans l'ensemble somme S des (E_α), on dit que $x_\alpha \in E_\alpha$ et $x_\beta \in E_\beta$ sont équivalents s'il existe un indice γ supérieur à α et β tel que $\varphi_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = \varphi_{\gamma\beta}(x_\beta)$; cette relation R est évidemment réflexive et symétrique ; elle est transitive du fait que l'ensemble d'indices est filtrant croissant et à cause de la relation de transitivité des $(\varphi_{\beta\alpha})$. On a donc défini sur S une relation d'équivalence R ; soit E l'ensemble quotient S/R. Puisque les $(\varphi_{\beta\alpha})$ sont des isomorphismes, l'application canonique de E_α dans E est biunivoque ; si E'_α désigne l'image de E_α par cette application μ_α, il est clair que l'on a $E'_\alpha \subset E'_\beta$ si $\alpha \leq \beta$, et que les transformées des $(\varphi_{\beta\alpha})$ par les (μ_α) sont les applications canoniques $E'_\alpha \to E'_\beta$. Par transport de structures les E'_α sont munis de structures de modules caténaires, structures qui se prolongent l'une l'autre du fait que les $(\varphi_{\beta\alpha})$ sont des isomorphismes permis. Comme E est la réunion de la famille filtrante croissante des (E'_α), ceci définit sur E une structure de module caténaire et en fait la limite inductive cherchée.

Remarque - Ce procédé de formation d'une limite inductive est applicable à toute espèce de structure algèbrique, par exemple à celle de module gradué. Dans ce dernier cas on peut aussi considèrer les modules gradués comme cas particuliers de modules caténaires en prenant les endomorphismes nuls pour opérateurs de bord.

Proposition 1 - Si le module caténaire E est limite inductive des modules caténaires (E_α) relativement aux isomorphismes $(\varphi_{\beta\alpha})$, le module d'homologie $H(E)$ est réunion des images des $(H(E_\alpha))$ par les homomorphismes associés aux isomorphismes (μ_α) des (E_α) dans E.

Ceci résulte aussitôt du fait que $Z(E)$ est réunion des $(Z(\mu_\alpha(E_a)))$.

Il faut bien se garder de croire que $H(E)$ soit <u>limite inductive</u> des $(H(E_\alpha))$. Prenons par exemple pour E un espace vectoriel de base infinie dénombrable $(u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots)$, avec graduation triviale et bord défini par $du_{2n-1} = u_{2n}$, $du_{2n} = 0$; $Z(E)$ et $B(E)$ sont égaux au sous-espace engendré par les $(u_2,u_4,\ldots,u_{2n},\ldots)$. Les sous espaces E_q (E_q étant engendré par $(u_2,u_4,\ldots,u_{2n},\ldots;u_1,u_3,\ldots,u_{2q-1})$) sont stables pour d et E est limite inductive des (E_q). Mais on a $Z(E_q) = Z(E)$, tandis que $B(E_q)$ est le sous espace de dimension finie engendré par $(u_2,u_4,\ldots,u_{2q})$. Ainsi $H(E)$ est réduit à 0, tandis qu'aucun des $H(E_q)$ ne l'est, même à partir d'un certain indice.

Le rédacteur, écoeuré de la trivialité du seul résultat positif de ce §, propose son expulsion, à moins qu'un changement dans la définition des limites inductives vienne donner un sens raisonnable à la sybilline ligne 12, page 13 de "La Tribu" relative aux décisions de Royaumont ; "Tribu" dont il s'excuse vivement d'avoir été le trop naïf rédacteur.
