RÉDACTION N° 129

COTE : NBR 036

TITRE : E.V.T. CHAPITRE IV (ÉTAT 4)
ESPACES HILBERTIENS

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 45

NOMBRE DE FEUILLES : 45

NBR 035 129 2

Archives mars 1950

ESPAGES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE IV (Etat 4)

ESPACES HILBERTIENS

Sommaire .

LIVRE VI

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE IV (Etat 4)

ESPACES HILBERTIENS

§ 1 . Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens .

1 . Formes hermitiennes positives .

Dans tout ce qui suit , K désignera le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes ; $\xi \to \bar{\xi}$ désignera l'automorphisme identique de K si $K=R$, l'automorphisme qui , à tout nombre complexe $\xi=\alpha+i\beta$, fait correspondre son conjugué $\bar{\xi}=\alpha-i\beta$, si $K=C$. Rappelons la définition suivante , donnée en Algèbre (chap. VIII) :

DÉFINITION 1 .- Etant donné un espace vectoriel E sur K , on appelle forme sesquilinéaire hermitienne sur $E\times E$ toute application f de $E\times E$ dans K satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y) \\ f(x,y_1+y_2)=f(x,y_1)+f(x,y_2) \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} f(\lambda x,y)=\lambda f(x,y) \\ f(x,\mu y)=\bar{\mu} f(x,y) \end{cases}$$

$$(3)\quad f(y,x)=\overline{f(x,y)}$$

On observera que la seconde condition (1) et la seconde condition (2) sont des conséquences des trois autres .

On déduit aussitôt de (1) et (2) que

$$(4)\quad f\Big(\sum_i \lambda_i x_i,\ \sum_j \mu_j y_j\Big)=\sum_{i,j} \lambda_i \bar{\mu}_j f(x_i,y_j) .$$

En particulier , si E est de dimension finie n , et si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E , on a , pour $x=\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y=\sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$

$$f(x,y)=\sum_{i,j} \alpha_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j$$

en posant $\alpha_{ij}=f(e_i,e_j)$; en outre , l'identité (3) est équivalente à $\alpha_{ji}=\bar{\alpha}_{ij}$ pour tout couple d'indices .

On sait (Alg., chap. VIII) que l'application $x \to f(x,x)$ de E dans K est appelée la <u>forme quadratique hermitienne</u> (ou simplement la <u>forme hermitienne</u>) correspondant à f ; il résulte de (3) que ses valeurs sont <u>réelles</u> .

Inversement , si $f(x,y)$ est une forme sesquilinéaire <u>sur le corps</u> C , telle que $f(x,x)$ prenne des valeurs réelles , f est <u>hermitienne</u> ; en effet , en écrivant que $f(x+y,x+y)$ est réelle , on voit que $f(x,y)+f(y,x)$ prend des valeurs réelles ; ~~appliquant~~ cette remarque appliquée aux vecteurs ix et y , montre que $i(f(x,y)-f(y,x))$ est réel , d'où résulte aussitôt la relation (3) .

On sait (Alg., chap. VIII, § 2, prop. 3) que les valeurs de la forme sesquilinéaire hermitienne $f(x,y)$ sont déterminées par celles de $f(x,x)$, d'après les formules

(5) $2f(x,y)=f(x+y,x+y)+f(x-y,x-y)$ si $K=R$.

(6) $4f(x,y)=f(x+y,x+y)-f(x-y,x-y)+if(x+iy,x+iy)-if(x-iy,x-iy)$ si $K=C$.

On dit qu'une forme hermitienne f est <u>positive</u> si on a $f(x,x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

Il est clair que les formes hermitiennes sur E forment un espace vectoriel <u>sur</u> R (mais non sur C lorsque $K=C$) ; dans cet espace , les formes positives constituent un <u>secteur conique convexe</u> (chap. II; §) , comme il résulte aussitôt de la définition .

PROPOSITION 1 .- <u>Si f est une forme hermitienne positive , on a</u>

(7) $$|f(x,y)|^2 \leqslant f(x,x)f(y,y)$$

<u>quels que soient x et y dans</u> E (<u>inégalité de Cauchy-Schwarz</u>) .

Les deux membres de (7) sont égaux lorsque x et y ne sont pas linéairement indépendants . Dans le cas contraire , soit P le plan défini par x et y ; dans P , f est une forme hermitienne positive , et dans ce cas , nous avons démontré l'inégalité (7) en Algèbre (chap. VIII, § 4).

COROLLAIRE .- Si f est une forme hermitienne positive , l'ensemble N des $x \in E$ tels que $f(x,x)=0$ est identique au sous-espace vectoriel de E conjugué de E (pour f).

En effet , il résulte de (7) qu'on a alors $f(x,y)=0$ pour tout $y \in E$.

On sait que si $x_1 \equiv x_2 \pmod{N}$ et $y_1 \equiv y_2 \pmod{N}$, on a $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$; on définit donc sur l'espace quotient E/N une forme sesquilinéaire hermitienne $\mathring{f}$ en posant $\mathring{f}(\mathring{x},\mathring{y})=f(x,y)$ pour tout $x\in\mathring{x}$ et tout $y\in\mathring{y}$; il est clair qu'en outre on a $\mathring{f}(\mathring{x},\mathring{x})\geq 0$ pour tout $\mathring{x}\in E/N$, et que la relation $\mathring{f}(\mathring{x},\mathring{x})=0$ entraîne $\mathring{x}=0$.

On dit qu'une forme hermitienne positive f sur E est strictement positive si la relation $f(x,x)=0$ entraîne $x=0$.

PROPOSITION 2 .- Si f est une forme hermitienne positive (resp. strictement positive) sur E , la fonction $f(x,x)^{\frac{1}{2}}$ est une semi-norme (resp. une norme) sur E .

Tout revient à démontrer que $f(x,x)^{\frac{1}{2}}$ vérifie l'inégalité du triangle . Or , on a

$$f(x+y,x+y)=f(x,x)+f(y,y)+f(x,y)+\overline{f(x,y)}$$

et , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} f(x+y,x+y) &\leq f(x,x)+2(f(x,x)f(y,y))^{\frac{1}{2}}+f(y,y) \\ &=(f(x,x)^{\frac{1}{2}}+f(y,y)^{\frac{1}{2}})^2 . \end{aligned}$$

Remarque .- On a vu en Algèbre (chap.VIII) que lorsque E est de dimension finie , les deux membres de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ne peuvent être égaux que si x et y sont linéairement dépendants , lorsque f est une forme strictement positive ; la démonstration de la prop.1 montre que ce résultat est valable dans tous les cas . En supposant toujours que f soit strictement positive , on voit donc que la relation

$f(x+y,x+y)^{\frac{1}{2}}=f(x,x)^{\frac{1}{2}}+f(y,y)^{\frac{1}{2}}$ n'est possible que si x et y forment un système lié ; en outre , si $x\neq 0$ et $y=\lambda x$, cette relation s'écrit $|1+\lambda| = 1+|\lambda|$, et entraîne donc que λ est <u>réel et</u> ≥ 0 .

2 . <u>Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens</u> .

DÉFINITION 2 .— <u>On appelle espace préhilbertien un ensemble</u> E <u>muni de la structure définie par la donnée , sur</u> E , <u>d'une structure d'espace vectoriel par rapport à</u> K , <u>et d'une forme sesquilinéaire hermitienne strictement positive</u> .

Lorsqu'on n'a à considérer , sur un espace vectoriel E , qu'une seule structure d'espace préhilbertien , la valeur , pour un couple (x,y) de points de E , de la forme sesquilinéaire hermitienne qui définit la structure considérée se note $\langle x,y\rangle$ et s'appelle <u>produit scalaire</u> de x et de y (<u>carré scalaire</u> de x si y=x) . Deux vecteurs x,y sont dits <u>orthogonaux</u> si $\langle x,y\rangle=0$; 0 est le seul vecteur <u>orthogonal à lui-même</u> . La fonction $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ est alors une <u>norme</u> sur l'espace vectoriel E (prop.2) ; un espace préhilbertien est toujours considéré comme muni de la structure d'<u>espace normé</u> sur K définie par cette norme (et par suite , comme muni aussi de la topologie et de la structure uniforme correspondantes).

Avec ces notations , dans un espace préhilbertien E , l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\| \tag{8}$$

et prouve que le produit scalaire est une <u>forme bilinéaire continue</u> sur $E\times E$ (<u>Top.gén.</u>,chap.IX,§ 3,th.1) .

Comme en outre on a $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$ par définition , la <u>norme</u> de la forme bilinéaire $(x,y)\to\langle x,y\rangle$ (<u>Top.gén.</u>,chap.X,§ 2,n°2) est égale à 1 .

Conformément aux définitions générales (<u>Ens</u>.R,§ 8) , un <u>isomorphisme</u> d'un espace préhilbertien E sur un espace préhilbertien F est une application linéai re biunivoque u de E sur F telle que

$$(9) \qquad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

quels que soient x et y dans E . Un tel isomorphisme est bien entendu un isomorphisme de la structure d'espace <u>normé</u> de E sur celle de F (et par suite une <u>isométrie</u> de E sur F).

<u>Remarque</u> .- Inversement , on peut montrer que , <u>si</u> $K=R$, toute application biunivoque u de E sur F telle que $\|u(x)-u(y)\|=\|x-y\|$ et $u(0)=0$ est une application <u>linéaire</u> ; il résulte alors de la formule (5) que u est un <u>isomorphisme</u> de l'espace préhilbertien E sur l'espace préhilbertien F (cf.exerc.6 et chap.III,§ ,exerc.).

Si E est un espace préhilbertien , V un sous-espace vectoriel de E non réduit à 0 , la restriction à V de la forme fondamentale $\langle x,y\rangle$ est une forme strictement positive dans V , qui définit donc sur V une structure d'espace préhilbertien ; on dit que cette structure est <u>induite</u> sur V par celle de E .

DÉFINITION 3 .- <u>On appelle espace hilbertien un espace préhilbertien complet</u>.

Tout espace préhilbertien est isomorphe à un sous-espace <u>partout dense</u> d'un espace hilbertien déterminé à une isomorphie près ; de façon précise :

PROPOSITION 3 .- <u>Soit</u> E <u>un espace préhilbertien</u> , $\hat{E}$ <u>l'espace normé complété de</u> E (Top.gén.,chap.IX,§ 3,n°3) . <u>Le produit scalaire</u> $\langle x,y\rangle$ <u>se prolonge par continuité en une forme sesquilinéaire hermitienne sur</u> $\hat{E}\times\hat{E}$, <u>qui définit sur</u> $\hat{E}$ <u>une structure d'espace hilbertien</u> .

L'existence du prolongement de $\langle x,y\rangle$ à $\hat{E}\times\hat{E}$ résulte de la continuité de cette forme ~~XXXXXXXX~~ sesquilinéaire dans $E\times E$ (<u>Top.gén</u>.,chap.III,§ 5,th.1) . En outre , ce prolongement , noté aussi $\langle x,y\rangle$, est une forme sesquilinéaire hermitienne et satisfait à la relation $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$, en vertu du principe de prolongement des identités ($\|x\|$ désignant la norme obtenue en prolongeant par continuité la norme dans E) ; cela prouve que la relation $\langle x,x\rangle=0$ entraîne $x=0$, dans $\hat{E}$, donc $\langle x,y\rangle$ définit sur $\hat{E}$ une structure d'<u>espace hilbertien</u> . On dira que cet espace hilbertien est le <u>complété</u> de l'espace préhilbertien E .

Si u est un <u>isomorphisme</u> d'un espace préhilbertien E sur un espace préhilbertien F , u se prolonge d'une seule manière en un isomorphisme de l'espace hilbertien $\hat{E}$ sur l'espace hilbertien $\hat{F}$, en vertu du principe de prolongement des identités .

<u>Remarques</u> .- 1) Conformément à la terminologie générale pour les espaces vectoriels topologiques (chap.II,§) , un espace préhilbertien sera dit <u>réel</u> ou <u>complexe</u> suivant que $K=R$ ou $K=C$. Soit E un espace préhilbertien <u>complexe</u> ; le produit scalaire $\langle x,y\rangle$ s'écrit $\langle x,y\rangle = f_1(x,y)+if_2(x,y)$, où f_1 et f_2 sont deux formes <u>bilinéaires</u> pour la structure d'espace vectoriel <u>réel</u> de E ; en outre , les relations $\langle ix,y\rangle = i\langle x,y\rangle$ et $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$ donnent

(10) $$f_2(x,y)=-f_1(ix,y)$$

(11) $$\begin{cases} f_1(x,y)=f_1(y,x) \\ f_2(y,x)=-f_2(x,y) \end{cases}$$

Comme en outre $f_1(x,x)=\langle x,x\rangle$, on voit que la forme bilinéaire symétrique f_1 définit sur E une structure d'espace préhilbertien <u>réel</u> , qu'on appelle la structure <u>associée</u> à la structure d'espace préhilbertien complexe donnée sur E . Pour cette structure d'espace préhilbertien réel , l'application $x \to ix$ est un <u>automorphisme</u> de E , puisque $\langle ix,iy\rangle = \langle x,y\rangle$; si on le désigne par u_o , on a en outre $u_o^2(x)=-x$.

<u>Inversement</u> , supposons donnée sur un espace vectoriel E une structure d'espace préhilbertien <u>réel</u> , définie par une forme bilinéaire symétrique $f_1(x,y)$ strictement positive ; et soit d'autre part u_o un automorphisme de cette structure , tel que $u_o^2(x)=-x$; si on pose $f_2(x,y)=-f_1(u_o(x),y)$, on a

$$f_2(x,y)=f_1(u_o(x),u_o^2(y))=f_1(x,u_o(y))=f_1(u_o(y),x)=-f_2(y,x) .$$

Définissons alors sur E une structure d'espace vectoriel <u>complexe</u> , en posant

$(\alpha+i\beta)x=\alpha x+\beta u_0(x)$ (chap.II, §) . Si on pose $\langle x,y\rangle=f_1(x,y)+if_2(x,y)$, on vérifie aussitôt , en vertu de ce qui ~~précède~~ , que pour la structure complexe précédente , $\langle x,y\rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne ; en outre , comme f_2 est une forme bilinéaire alternée , on a $\langle x,x\rangle=f_1(x,x)$, donc $\langle x,y\rangle$ est strictement positive ; et définit par suite sur E une structure d'espace préhilbertien complexe , dont la structure réelle associée est identique à la structure donnée d'espace préhilbertien réel .

2) Sur l'espace K^n , on sait (Alg., chap.VIII) que toute forme hermitienne strictement positive est équivalente à la forme $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i y_i$ (x_i et y_i ~~....~~ coordonnées de x et y respectivement) ; cette forme n'est autre que le produit scalaire euclidien lorsque K=R (Top.gén., chap.VI, § 2) . Deux espaces hilbertiens réels (resp. complexes) de même dimension finie n sont donc toujours isomorphes .

3) Soit f une forme sesquilinéaire hermitienne sur $E\times E$, positive mais non strictement positive , et soit N l'ensemble des $x\in E$ tels que $f(x,x)=0$. On a vu (n°1, cor. de la prop.1) que N est un sous-espace de E et que la forme sesquilinéaire hermitienne $\mathring{f}$ correspondant à f sur E/N est strictement positive ; elle définit donc sur E/N une structure d'espace préhilbertien . L'espace normé E/N n'est autre d'ailleurs que l'espace normé associé à l'espace vectoriel topologique non séparé obtenu en munissant E de la semi-norme $f(x,x)^{\frac{1}{2}}$.

3 . Sous-ensembles convexes d'un espace préhilbertien .

Si on calcule $\|x-y\|^2$ et $\|x+y\|^2$ pour deux points quelconques d'un espace préhilbertien E , on vérifie aussitôt l'identité

$$\|\tfrac{1}{2}(x+y)\|^2+\|\tfrac{1}{2}(x-y)\|^2=\tfrac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad (12)$$

On déduit aussitôt ~~de~~ cette identité la proposition suivante :

PROPOSITION 4 .- *Pour tout nombre* δ *tel que* $0<\delta<1$, *les relations* $\|x\|=1$, $\|y\|\leqslant 1$, $\|x+y\|\geqslant 2(1-\delta)$ *entraînent* $\|x-y\|\leqslant 2\sqrt{2\delta}$.

En effet , on tire des hypothèses et de (12) que

$$\|\tfrac{1}{2}(x-y)\|^2=\tfrac{1}{2}(1+\|y\|^2)-\|\tfrac{1}{2}(x+y)\|^2\leqslant 1-(1-\delta)^2=2\delta-\delta^2\leqslant 2\delta \quad .$$

THÉORÈME 1 .- *Soit* E *un espace préhilbertien* , H *un sous-espace convexe et complet de* E . *Pour tout* $x\in E$, *il existe un point et un seul* $y\in H$ *tel que la distance de* x *à* y *soit égale à la distance de* x *à* H ; *ce point est aussi le seul point de* H *tel que , pour tout* $z\in H$, *on ait*

$$\mathcal{R}\langle x-y,z-y\rangle\leqslant 0 \quad . \tag{13}$$

Par translation , on peut se ramener au cas où $x=0$; soit alors $d=\inf_{z\in H}\|z\|$ la distance de 0 à H ; il existe donc une suite (y_n) de points de H telle que l'on ait

$$d^2\leqslant\|y_n\|^2\leqslant d^2+\frac{1}{n} \quad . \tag{14}$$

Comme H est *convexe* , on a $\frac{1}{2}(y_m+y_n)\in H$, d'où $\|\frac{1}{2}(y_m+y_n)\|^2\geqslant d^2$; par suite , en vertu de (12) et (14) , on a

$$\|y_m-y_n\|^2\leqslant 2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) \tag{15}$$

ce qui prouve que (y_n) est une *suite de Cauchy* dans H ; comme H est complet par hypothèse , cette suite a une limite $y\in H$, pour laquelle on a évidemment $\|y\|=d$. En outre , si y' est un point de H tel que $\|y'\|=d$, il résulte de la relation $\frac{1}{2}(y+y')\in H$ qu'on a $\|\frac{1}{2}(y+y')\|^2\geqslant d^2$; par suite , en vertu de (12) on a $\|y-y'\|^2\leqslant 0$, ce qui équivaut à $\|y-y'\|=0$ et prouve que $y=y'$.

Soit maintenant z un point quelconque de H ; pour tout λ tel que $0<\lambda\leqslant 1$, le point $y+\lambda(z-y)$ appartient à H , donc on a $\|y+\lambda(z-y)\|^2\geqslant\|y\|^2$, ce qui s'écrit

$$\|y\|^2+2\lambda\,\mathcal{R}\langle y,z-y\rangle+\lambda^2\|z-y\|^2\geqslant\|y\|^2$$

ou encore

$$2\,\mathcal{R}\langle y,z-y\rangle\geqslant-\lambda\|z-y\|^2$$

et comme $\lambda>0$ est arbitrairement petit , on a la relation (13) .

Réciproquement, si $y' \in H$ est tel que $\mathcal{R}\langle y', z-y'\rangle \geqslant 0$ pour tout $z \in H$, on en tire $\|z\|^2 = \|y'\|^2 + 2\mathcal{R}\langle y', z-y'\rangle + \|z-y'\|^2 \geqslant \|y'\|^2$, donc y' serait tel que $d = \|y'\|$, ce qui montre, en vertu de ce qui précède, que $y'=y$.

Remarque. – On appliquera d'ordinaire le th.1 dans l'un des cas suivants :

1° E est un espace hilbertien et H un sous-ensemble convexe fermé dans E (donc complet) ;

2° E est un espace préhilbertien, H un sous-ensemble convexe fermé et de dimension finie ; comme H est fermé dans le sous-espace V de dimension finie qu'il engendre, et que ce dernier est complet, H est complet.

L'unique point y de H déterminé par le th.1 est appelé la projection orthogonale de x sur H.

4. Sous-espaces vectoriels et projecteurs.

Le th.1 se précise lorsque l'ensemble convexe H est une variété linéaire de E :

PROPOSITION 5. – Soit V une variété linéaire complète dans un espace préhilbertien E ; si x est un point quelconque de E, la projection orthogonale y de x sur V est l'unique point de V tel que, pour tout $z \in V$, $z-y$ soit orthogonal à $y-x$.

Ce résultat justifie bien entendu le terme de "projection orthogonale". Pour le démontrer, remarquons que pour tout $z \in V$, le point $y+\lambda(z-y)$ appartient à V, quel que soit le scalaire $\lambda \in K$; on a donc, en vertu du th.1, $\mathcal{R}(\bar{\lambda}\langle x-y, z-y\rangle) \leqslant 0$; en prenant $\lambda = \langle x-y, z-y\rangle$, il vient $|\langle x-y, z-y\rangle|^2 \leqslant 0$, donc $\langle x-y, z-y\rangle = 0$.

On dit qu'un vecteur x est orthogonal à un sous-espace vectoriel V de E s'il est orthogonal à tout vecteur de V ; on dit que deux sous-espaces V, W sont orthogonaux si tout vecteur de V est orthogonal à tout vecteur de W. On notera que dans ce cas on a $V \cap W = \{0\}$, puisque 0 est le seul vecteur orthogonal à lui-même .

Nous allons nous borner maintenant au cas où E est un espace hilbertien et V un sous-espace vectoriel fermé quelconque de E , auquel la prop.5 est donc applicable .

PROPOSITION 6 .- Soient E un espace hilbertien , V un sous-espace vectoriel fermé de E , non réduit à 0 . L'application $\underline{P}$ qui , à tout $x \in E$, fait correspondre sa projection orthogonale sur V , est un endomorphisme continu de l'espace normé E dans lui-même , de norme 1 . Le sous-espace $V = \underline{P}(E)$ est l'ensemble des $x \in E$ tels que $\underline{P}(x) = x$; le noyau $V' = \overset{-1}{\underline{P}}(0)$ est un sous-espace vectoriel (fermé) supplémentaire de V , identique à l'ensemble des vecteurs orthogonaux à V , et l'espace E est somme directe topologique de V et V' .

En effet , le point $\underline{P}(x)$ est caractérisé , d'après la prop.5 , par la propriété d'être l'unique point de V satisfaisant à

$$\langle \underline{P}(x), z \rangle = \langle x, z \rangle \tag{16}$$

pour tout $z \in V$. Il en résulte aussitôt que $\underline{P}$ est linéaire , et que V est l'ensemble des $x \in E$ tels que $\underline{P}(x) = x$. Comme $\underline{P}(x) \in V$, $\underline{P}(x) - x$ est orthogonal à $\underline{P}(x)$; on déduit donc aussitôt de la relation $x = \underline{P}(x) + (x - \underline{P}(x))$ que $\|x\|^2 = \|\underline{P}(x)\|^2 + \|x - \underline{P}(x)\|^2$, d'où $\|\underline{P}(x)\| \leq \|x\|$, ce qui démontre que $\underline{P}$ est continu et de norme 1 (puisque $\underline{P}(x) = x$ pour tout $x \neq 0$ dans V). Comme 0 est le seul vecteur de V qui soit orthogonal à lui-même , on voit d'après (16) que si y est orthogonal à tous les $z \in V$, on doit avoir $\underline{P}(y) = 0$; la réciproque est immédiate . Enfin , la continuité de $\underline{P}$ prouve que E est somme directe topologique de V et de V' .

On dit que $\underline{P}$ est le projecteur de E sur le sous-espace V , et que le sous-espace $\overset{-1}{\underline{P}}(0)$ formé de tous les vecteurs orthogonaux à V est le supplémentaire orthogonal de V (ces deux propriétés le caractérisent en effet entièrement).

Si on considère l'espace quotient E/V, on sait (chap.I, §) que l'isomorphisme canonique φ de E/V sur V' est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique de E/V sur celle de V'. Si on pose $\langle\dot{x},\dot{y}\rangle = \langle\varphi(\dot{x}),\varphi(\dot{y})\rangle$ pour tout couple de points de E/V, il est clair qu'on définit sur E/V une structure d'espace hilbertien, transportée de celle de V' par l'isomorphisme réciproque de φ. En raison de la relation $\|x\|^2=\|\underline{P}(x)\|^2+\|x-\underline{P}(x)\|^2$, on voit en outre que la norme de $\dot{x}$ pour cette structure, définie par la relation $\|\dot{x}\|=\|\varphi(\dot{x})\|$, est égale à la norme $\inf_{x\in\dot{x}}\|x\|$ définie de façon générale sur tout espace quotient d'un espace normé (chap.III, §).

DÉFINITION 3 .- Etant donnés deux sous-espaces fermés V, W d'un espace hilbertien E, tels que $V\subset W$, on appelle différence de W et de V et on note $W\ominus V$ le supplémentaire orthogonal de V par rapport à W.

Le supplémentaire orthogonal de V dans E est donc $E\ominus V$.

PROPOSITION 7 .- Si V et W sont deux sous-espaces fermés de E tels que $V\subset W$, on a

$$W\ominus(W\ominus V)=V . \tag{17}$$

On peut supposer que $W=E$, et tout revient donc à montrer que V est le supplémentaire orthogonal de $V'=E\ominus V$, ce qui est évident.

PROPOSITION 8 .- Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces fermés orthogonaux dans E, V_1+V_2 est fermé dans E, et on a $V_2=(V_1+V_2)\ominus V_1$.

En effet, on a $V_1\cap V_2=\{0\}$, donc la somme V_1+V_2 est directe. Pour tout $x\in V_1+V_2$, le composant y de x dans V_1 est donc tel que $x-y\in V_2$ soit orthogonal à V_1, d'où $y=\underline{P}(x)$, où $\underline{P}$ est le projecteur de E sur V_1 ; comme $\underline{P}$ est une application continue dans V_1+V_2, V_1+V_2 est somme directe topologique de V_1 et V_2, et par suite c'est un sous-espace complet (isomorphe à $V_1\times V_2$), donc fermé dans E . Il est clair alors que V_2 est le supplémentaire orthogonal de V_1 par rapport à V_1+V_2 .

PROPOSITION 9 .- Soit $\underline{P}$ un endomorphisme continu de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\underline{P}$ est un projecteur de E sur un sous-espace vectoriel fermé V .

b) Quels que soient $x \in E$ et $y \in E$, on a

(18)
$$\langle x, \underline{P}(y)\rangle = \langle \underline{P}(x), \underline{P}(y)\rangle = \langle \underline{P}(x), y\rangle \quad .$$

c) On a $\underline{P}^2 = \underline{P}$ et $\langle x, \underline{P}(y)\rangle = \langle \underline{P}(x), y\rangle$.

En premier lieu , a) entraîne b) , car la relation $\underline{P}(y) \in V$ entraîne $\langle x, \underline{P}(y)\rangle = \langle \underline{P}(x), \underline{P}(y)\rangle$ d'après (16) : on démontre de même la relation $\langle \underline{P}(x), \underline{P}(y)\rangle = \langle \underline{P}(x), y\rangle$. La propriété b) entraîne c) , car on déduit de (18) que $\langle \underline{P}(\underline{P}(x)), y\rangle = \langle \underline{P}(x), \underline{P}(y)\rangle = \langle \underline{P}(x), y\rangle$; $\underline{P}^2(x) - \underline{P}(x)$ étant ainsi orthogonal à tous les éléments de E , est nécessairement nul . Montrons enfin que c) entraîne a) ; soit W le noyau $\overset{-1}{\underline{P}}(0)$ de $\underline{P}$, qui est un sous-espace fermé de E ; pour tout $x \in E$, on a $\underline{P}(x - \underline{P}(x)) = 0$, donc $x - \underline{P}(x) \in W$, ce qui montre que E est somme de $V = \underline{P}(E)$ et de W . La relation $\langle x, \underline{P}(y)\rangle = \langle \underline{P}(x), y\rangle$ entraîne que V et W sont orthogonaux , donc $V \cap W = \{0\}$, et par suite V est le supplémentaire orthogonal $E-W$ de W ; comme $x - \underline{P}(x)$ est orthogonal à V pour tout $x \in E$, $\underline{P}$ est bien le projecteur de E sur V .

Il y a donc correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-espaces fermés d'un espace hilbertien E et l'ensemble des endomorphismes continus de E satisfaisant à l'une des conditions équivalentes b),c) de la prop.9 (cf.§ 4). Nous désignerons dans ce qui suit par $\underline{P}_V$ le projecteur de E sur un sous-espace vectoriel fermé V . On notera que l'application nulle 0 est le projecteur $\underline{P}_{\{0\}}$, et l'application identique $\underline{I}$ le projecteur $\underline{P}_E$.

PROPOSITION 10 .- Soient V et W deux sous-espaces vectoriels fermés de E .

Pour que $V\subset W$ *, il faut et il suffit que* $P_V P_W = P_V$ *; on a alors*

(19) $$P_{W\ominus V} = P_W - P_V \ .$$

La condition est nécessaire, car pour tout $x\in E$, $x-P_W(x)$ est orthogonal à W, donc à V, et $P_W(x)-P_V(P_W(x))$ est orthogonal à V ; donc $x-P_V(P_W(x))$ est orthogonal à V, ce qui prouve que $P_V(x)=P_V(P_W(x))$. Inversement, si $P_V P_W = P_V$, on a, pour tout $x\in V$, $P_V(P_W(x)-x)=0$, donc $P_W(x)-x$ est orthogonal à V, et par suite aussi à x ; mais $P_W(x)-x$ est aussi orthogonal à $P_W(x)$, donc est orthogonal à lui-même, ce qui prouve que $P_W(x)=x$, et par suite que $x\in W$.

Enfin, pour tout $x\in E$, $P_W(x)-P_V(x)$ est orthogonal à V et contenu dans W, donc appartient à $W\ominus V$; en outre $x-(P_W(x)-P_V(x))=(x-P_W(x))+P_V(x)$ est orthogonal à $W\ominus V$, car $x-P_W(x)$ est orthogonal à W (donc à $W\ominus V$) et $P_V(x)$ appartient à V, donc est orthogonal à $W\ominus V$. Il en résulte bien la relation (19).

On remarquera qu'on a aussi $P_W P_V = P_V$ lorsque $V\subset W$; il est clair d'ailleurs que cette condition entraîne $P_V(x)\in W$ pour tout x, donc $V\subset W$.

PROPOSITION 11 .- *Soient* V *et* W *deux sous-espaces vectoriels fermés de* E *. Pour que* $P_V P_W = P_W P_V$ *, il faut et il suffit que les sous-espaces* $V\ominus(V\cap W)$ *et* $W\ominus(V\cap W)$ *soient orthogonaux*.

Posons $V_1 = V\ominus(V\cap W)$; d'après (19), on a $P_V = P_{V_1} + P_{V\cap W}$; comme P_W et $P_{V\cap W}$ sont permutables d'après la prop.10, tout revient à établir la prop.11 lorsque V et W ont une intersection réduite à 0. Il est clair alors que si V et W sont orthogonaux, on a $P_V(P_W(x))=0$ pour tout $x\in E$; inversement, si P_V et P_W sont permutables, $P_V(P_W(x))=P_W(P_V(x))$ appartient à la fois à V et W, donc est nul, ce qui implique que $P_W(x)$ est orthogonal à V pour tout $x\in E$, donc que V et W sont orthogonaux.

COROLLAIRE .- *Lorsque* V *et* W *sont tels que* $V\ominus(V\cap W)$ *et* $W\ominus(V\cap W)$ *soient ortho-*

gonaux , on a $P_V P_W = P_{V\cap W}$.

On dit dans ce cas que les sous-espaces vectoriels V et W sont perpendiculaires ; comme alors $(V+W)\ominus V = W\ominus(V\cap W)$, on a aussi

$$P_{V+W} = P_V + P_W - P_{V\cap W}$$

d'après la prop.10 et le cor. de la prop.11 .

5 . Dual d'un espace ~~XX~~ hilbertien .

THÉORÈME 2 .- Pour toute forme linéaire continue x' sur un espace hilbertien E , il existe un vecteur $\varphi(x')\in E$ et un seul tel que l'on ait $\langle x,x'\rangle = \langle x,\varphi(x')\rangle$ pour tout $x\in E$. L'application φ est une application antilinéaire biunivoque du dual E' de E sur E , et une isométrie de l'espace normé E' sur l'espace normé E .

On peut se borner au cas où $x'\neq 0$; soit alors H l'hyperplan fermé $\overset{-1}{x'}(0)$; son supplémentaire orthogonal $D=E\ominus H$ est une droite , et si $b\in D$ et $b\neq 0$, la forme linéaire $x\to\langle x,b\rangle$ n'est pas nulle et s'annule dans H ; il existe donc un scalaire $\lambda\neq 0$ tel que $x'(x)=\langle x,\lambda b\rangle$ pour tout $x\in E$. L'existence de ~~XXX~~ $\varphi(x')$ étant ainsi démontrée , son unicité résulte de ce qu'aucun vecteur $\neq 0$ n'est orthogonal à l'espace E tout entier . Il résulte aussitôt de (1) et (2) que φ est une application antilinéaire de E' dans ~~XX~~ E ; d'ailleurs , pour tout $a\in E$, $x\to\langle x,a\rangle$ est une ~~XXXXXXXXXX~~ forme linéaire continue , donc $\varphi(E')=E$. Enfin , on a $\|x'\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x,\varphi(x')\rangle| = \|\varphi(x')\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz .

On dit que l'application φ est l'application canonique de E' sur E ; on identifie d'ordinaire E à son dual au moyen de cette application , ce qui justifie la notation $\langle x,y\rangle$ pour le produit scalaire dans E . L'application canonique de E dans son bidual E'' (chap.III, §) est alors l'application identique de E sur lui-même ; E est donc réflexif , et par suite (chap.III, §):

THÉORÈME 3 .- Dans un espace hilbertien E , tout ensemble borné et faiblement fermé est faiblement compact .

Il est clair que , par l'identification précédente , un vecteur y orthogonal à x est identifié à une forme linéaire y' "orthogonale" à x au sens du chap.I Le sous-espace vectoriel V^{0} de E' "orthogonal" à un sous-espace vectoriel fermé V de E , au sens du chap.I , est identifié au supplémentaire orthogonal $E \ominus V$ de V dans E .

PROPOSITION 12 .- Si , dans un espace hilbertien E , un filtre $\mathfrak{F}$ converge faiblement vers x_0 , et si en outre $\lim_{\mathfrak{F}} \|x\| = \|x_0\|$, alors $\mathfrak{F}$ converge fortement vers x_0 .

On a en effet $\|x-x_0\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathcal{R}\langle x, x_0\rangle + \|x_0\|^2$. Comme $\langle x, x_0\rangle$ tend vers $\|x_0\|^2$ suivant $\mathfrak{F}$, on a $\lim_{\mathfrak{F}} \|x-x_0\| = 0$, d'où la proposition .

§ 2 . Familles orthogonales dans un espace hilbertien .

1 . Somme directe de sous-espaces orthogonaux d'un espace hilbertien .

THÉORÈME 1 .- Soit $(V_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque de sous-espaces fermés et non réduits à 0 d'un espace hilbertien E , tels que , pour tout couple d'indices $\iota, \varkappa$ distincts , V_ι et $V_\varkappa$ soient orthogonaux . Soit V le plus petit sous-espace fermé de E contenant tous les V_ι . Dans ces conditions :

1° pour toute partie finie $F \subset I$, la somme des V_ι d'indice $\iota \in F$ est directe ;

2° si , pour tout $x \in E$, on pose $x_\iota = P_{V_\iota}(x)$, la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est sommable et a pour somme $P_V(x)$, et on a

(1)
$$\sum_{\iota \in I} \|x_\iota\|^2 = \|P_V(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad ;$$

3° réciproquement , pour toute famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de points de E telle que $x_\iota \in V_\iota$ pour tout ι , et $\sum_{\iota \in I} \|x_\iota\|^2 < +\infty$, il existe un point $x \in V$ et un seul tel que $x_\iota = P_{V_\iota}(x)$ pour tout $\iota \in I$.

1° Si , pour tout ι appartenant à la partie finie F de I , y_ι est un point de V_ι , on a $\sum_{\iota \in F} \|y_\iota\|^2 = \|\sum_{\iota \in F} y_\iota\|^2$, et par suite la relation $\sum_{\iota \in F} y_\iota = 0$ entraîne

$y_\iota=0$ pour tout $\iota\in F$, ce qui prouve que la somme des V_ι ($\iota\in F$) est directe.

2° Soit F une partie finie quelconque de I, et posons $x_F=\sum_{\iota\in F} x_\iota$. On a $\langle x-x_F, x_F\rangle = \sum_{\iota\in F}\langle x,x_\iota\rangle - \sum_{(\iota,\kappa)\in F\times F}\langle x_\iota,x_\kappa\rangle = \sum_{\iota\in F}\langle x,x_\iota\rangle - \sum_{\iota\in F}\langle x_\iota,x_\iota\rangle = 0$, puisque, par définition $x-x_\iota$ est orthogonal à V_ι. On a par suite $\|x\|^2=\|x_F\|^2+\|x-x_F\|^2$, d'où

(2) $$\|x_F\|^2 = \sum_{\iota\in F}\|x_\iota\|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Ceci montre en premier lieu que la famille des $\|x_\iota\|^2$ est *sommable* (*Top. gén.*, chap. IV, § 7, th. 1) (et en particulier que l'ensemble des $\iota\in I$ tels que $x_\iota\neq 0$ est *dénombrable*). Pour tout $\varepsilon>0$, soit alors J une partie finie de I telle que, pour toute partie finie L de I ne rencontrant pas J, on ait $\sum_{\iota\in L}\|x_\iota\|^2 \leq \varepsilon$: cela signifie que $\|x_L\|^2\leq\varepsilon$, et comme E est complet, il résulte du critère de Cauchy que la famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ est sommable. Sa somme x' appartient évidemment à V ; d'autre part, si $z\in V_\kappa$, on a $\langle x',z\rangle=\sum_{\iota\in I}\langle x_\iota,z\rangle=\langle x_\kappa,z\rangle=\langle x,z\rangle$; cela montre que $x-x'$ est orthogonal à chacun des V_ι, donc à V, ~~XX~~ c'est-à-dire que $x'=P_V(x)$. Enfin, en passant à la limite dans la relation (2), on obtient (1).

3° Pour toute partie finie L de I, posons encore $x_L=\sum_{\iota\in L}x_\iota$; on a $\|x_L\|^2=\sum_{\iota\in L}\|x_\iota\|^2$. L'hypothèse sur les x_ι entraîne encore, par le même raisonnement que dans la seconde partie, que x_L tend vers une limite ~~XXXX~~ x dans E, limite qui appartient nécessairement à V ; en outre, on a $P_{V_\iota}(x)=\lim P_{V_\iota}(x_L)$, la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant des parties finies de I ; comme on a évidemment $P_{V_\iota}(x_L)=x_\iota$ dès que $\iota\in L$, on a bien $P_{V_\iota}(x)=x_\iota$ pour tout $\iota\in I$. Si $y\in V$ est un point tel que $P_{V_\iota}(y)=x_\iota$ pour tout $\iota\in I$, $x-y$ est orthogonal à tous les V_ι, donc à V, et comme $x-y\in V$, on a $x-y=0$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Soient* (x_ι), (y_ι) *deux familles de points de* E *telles que* $x_\iota\in V_\iota$, $y_\iota\in V_\iota$ *pour tout* ι, *et que* $\sum_\iota\|x_\iota\|^2<+\infty$, $\sum_\iota\|y_\iota\|^2<+\infty$. *Si* $x=\sum_\iota x_\iota$,

y=

$y = \sum_\iota y_\iota$, on a $\langle x,y\rangle = \sum_\iota \langle x_\iota , y_\iota\rangle$.

En effet , on a $|\langle x_\iota , y_\iota\rangle| \leq \|x_\iota\| \cdot \|y_\iota\| \leq \frac{1}{2}(\|x_\iota\|^2 + \|y_\iota\|^2)$, donc la famille $(\langle x_\iota , y_\iota\rangle)$ est sommable dans K . Comme , pour toute partie finie J de I , on a $\langle \sum_{\iota\in J} x_\iota , \sum_{\iota\in J} y_\iota\rangle = \sum_{\iota\in J} \langle x_\iota , y_\iota\rangle$, le corollaire en résulte par passage à la limite.

Nous dirons qu'un sous-espace vectoriel fermé V d'un espace hilbertien E est somme directe orthogonale d'une famille $(V_\iota)_{\iota\in I}$ de sous-espaces fermés de E non réduits à 0 , ~~EX~~ lorsque :

1° pour deux indices distincts $\iota , \varkappa$ quelconques ; V_ι et $V_\varkappa$ sont orthogonaux;

2° V est le sous-espace vectoriel fermé engendré par les V_ι .

On notera que lorsque I est fini , cette notion se confond (pour des V_ι deux à deux orthogonaux) avec la notion algébrique de somme directe (§ 1,prop.8) ; on a vu d'ailleurs qu'alors V est somme directe topologique des V_ι .

Si V est somme directe orthogonale de la famille $(V_\iota)_{\iota\in I}$, on écrira $V = \bigoplus_{\iota\in I} V_\iota$

Soit V la somme directe orthogonale d'une famille $(V_\lambda)_{\lambda\in L}$; supposons que , pour chaque $\lambda\in L$, V_λ soit somme directe orthogonale d'une famille $(W_{\lambda\mu})_{\mu\in M_\lambda}$; alors V est somme directe orthogonale de tous les $W_{\lambda\mu}$ ($\lambda\in L$, $\mu\in M_\lambda$ pour chaque $\lambda\in L$) . Tout revient en effet à vérifier que V est le sous-espace vectoriel ~~engendré~~ fermé engendré par les $W_{\lambda\mu}$; or , ce sous-espace V' contient tous les $W_{\lambda\mu}$ pour un $\lambda\in L$ fixe , donc le sous-espace fermé V_λ qu'ils engendrent ; il est par suite identique à V .

Inversement , soit V la somme directe orthogonale d'une famille $(V_\lambda)_{\lambda\in L}$; soit $(L_\iota)_{\iota\in I}$ une partition de L , et pour chaque $\iota\in I$, soit U_ι la somme directe orthogonale des V_λ tels que $\lambda\in L_\iota$; V est alors somme directe orthogonale des U_ι . En effet , tout revient à ~~mon~~ montrer que si $\iota\neq\varkappa$, U_ι et $U_\varkappa$ sont orthogonaux . Or , tout élément $x\in U_\iota$ (resp. $y\in U_\varkappa$) est limite d'éléments de $\sum_{\lambda\in L_\iota} V_\lambda$ (resp. de $\sum_{\lambda\in L_\varkappa} V_\lambda$) , et $\sum_{\lambda\in L_\iota} V_\lambda$ et $\sum_{\lambda\in L_\varkappa} V_\lambda$ sont orthogonaux , ~~donc~~

donc il en est de même de x et y .

On peut exprimer ces propriétés en disant que la somme directe orthogonale est <u>associative</u> .

Considérons maintenant une famille <u>quelconque</u> $(E_\iota)_{\iota\in I}$ d'espaces hilbertiens; dans chacun des E_ι , nous désignerons par $\langle x_\iota , y_\iota\rangle$ le produit scalaire , par $\|x_\iota\|$ la norme . Dans l'<u>espace vectoriel produit</u> $F=\prod_{\iota\in I} E_\iota$, considérons le sous-ensemble E des points $(x_\iota)_{\iota\in I}$ tels que $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2 < +\infty$. Cet ensemble est un <u>sous-espace vectoriel</u> de F , car on a évidemment $\|x_\iota+y_\iota\|^2\leq 2(\|x_\iota\|^2+\|y_\iota\|^2)$. Dans cet espace , pour tout couple de points $x=(x_\iota)$, $y=(y_\iota)$, la famille de nombres complexes $(\langle x_\iota,y_\iota\rangle)_{\iota\in I}$ est <u>sommable</u> , en raison de l'inégalité $|\langle x_\iota,y_\iota\rangle|\leq\|x_\iota\|\cdot\|y_\iota\|\leq\frac{1}{2}(\|x_\iota\|^2+\|y_\iota\|^2)$; si on pose $\langle x,y\rangle=\sum_{\iota\in I}\langle x_\iota,y_\iota\rangle$, il est clair que $\langle x,y\rangle$ est une <u>forme sesquilinéaire hermitienne</u> ; en outre , comme $\langle x,x\rangle=\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2$, cette forme est <u>strictement positive</u> . Montrons enfin que E , muni du produit scalaire $\langle x,y\rangle$, est un espace <u>hilbertien</u> , autrement dit qu'il est <u>complet</u> pour la norme $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$. En effet , soit (x_n) une suite de Cauchy pour cette norme , et soit $x_n=(x_{n,\iota})_{\iota\in I}$ avec $x_{n,\iota}\in E_\iota$. Par hypothèse , pour tout $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que les relations $m\geq n_0, n\geq n_0$ entraînent $\|x_m-x_n\|^2\leq\varepsilon^2$, c'est-à-dire $\sum_{\iota\in I}\|x_{m,\iota}-x_{n,\iota}\|^2\leq\varepsilon^2$, ce qui entraîne en particulier pour chaque $\iota\in I$ que la suite $(x_{n,\iota})_{n\in N}$ est une suite de Cauchy; cette suite converge donc vers un point $y_\iota\in E_\iota$; en faisant tendre m vers $+\infty$, on voit que pour toute partie finie J de I , on a $\sum_{\iota\in J}\|y_\iota-x_{n,\iota}\|^2\leq\varepsilon^2$ pour $n\geq n_0$, et par suite aussi $\sum_{\iota\in I}\|y_\iota-x_{n,\iota}\|^2\leq\varepsilon^2$ pour $n\geq n_0$; cela démontre d'abord que $y-x_n\in E$, donc $y\in E$, puis que la suite (x_n) tend vers y dans E , ce qui achève de prouver notre assertion . On peut évidemment <u>identifier</u> chacun des $E_\varkappa$ avec le sous-espace de E formé des (x_ι) dont les coordonnées d'indice $\neq\varkappa$ sont toutes nulles . Avec cette convention , il est clair que E_ι et $E_\varkappa$ sont <u>orthogonaux</u> dans E lorsque $\iota\neq\varkappa$, et que E est engendré par la réunion de ses sous-espaces E_ι ; en d'autres termes , E est somme directe orthogonale des E_ι . C'est de cet espace qu'il sera question chaque fois que nous parlerons de la somme directe orthogonale d'une famille d'espaces hilbertiens $(E_\iota)_{\iota\in I}$ qui ne sont pas nécessairement a priori des sous-espaces deux à deux orthogonaux d'un espace hilbertien donné à l'avance . Nous écrirons encore $E=\bigoplus_{\iota\in I} E_\iota$.

Nous généraliserons plus tard cette construction en définissant la notion de "somme continue" d'espaces hilbertiens (Intégr.,chap.III) .

2 . Familles orthogonales dans un espace hilbertien

DÉFINITION 1 .- Dans un espace hilbertien E , on dit qu'une famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ de vecteurs $\neq 0$ est orthogonale si , pour $\iota\neq\kappa$, x_ι et x_κ sont orthogonaux . Une famille orthogonale $(x_\iota)_{\iota\in I}$ est dite orthonormale si on a en outre $\|x_\iota\|=1$ pour tout indice $\iota\in I$.

Il est clair que , si $(x_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille orthogonale , la famille des $y_\iota=x_\iota/\|x_\iota\|$ est orthonormale ; nous dirons que c'est la famille orthonormale associée à la famille orthogonale (x_ι) .

Dire qu'une famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ est orthogonale signifie encore que les sous-espaces vectoriels fermés $D_\iota=Kx_\iota$ de dimension un sont deux à deux orthogonaux. Le sous-espace vectoriel fermé V engendré par les x_ι est donc la somme directe orthogonale des D_ι (n°1). Pour tout $z\in E$, la projection orthogonale de z sur D_ι est égale à $\lambda_\iota x_\iota$, où $\langle z,x_\iota\rangle=\lambda_\iota\|x_\iota\|^2$. Dans tout ce qui suit , nous supposerons la famille (x_ι) orthonormale ; on a alors $\lambda_\iota=\langle z,x_\iota\rangle$, et on dit que $\langle z,x_\iota\rangle$ est la composante de z sur le vecteur x_ι . Les résultats généraux du n°1 , appliqués aux sous-espaces D_ι , donnent les propositions suivantes:

PROPOSITION 1 .- Toute famille orthogonale est ~~XXXXX~~ topologiquement libre .

PROPOSITION 2 .- Soit $(x_\iota)_{\iota\in I}$ une famille orthonormale . Pour tout $z\in E$, la somme ~~xxx~~ $\sum_{\iota\in I}|\langle z,x_\iota\rangle|^2$ est finie, et on a

(3)
$$\sum_{\iota\in I}|\langle z,x_\iota\rangle|^2\leq\|z\|^2$$

(inégalité de Bessel) ; la famille $(\langle z,x_\iota\rangle x_\iota)$ est sommable dans E et a pour somme la projection de z sur le sous-espace vectoriel fermé V engendré par les x_ι. Inversement, pour qu'une famille $(\lambda_\iota x_\iota)$ soit sommable dans E, il faut et il suffit que $\sum_\iota|\lambda_\iota|^2<+\infty$; si $z=\sum_\iota\lambda_\iota x_\iota$, on a alors $z\in V$ et $\lambda_\iota=\langle z,x_\iota\rangle$ pour tout $\iota\in I$.

COROLLAIRE 1 .- Pour tout $z\in E$, l'ensemble des $\iota\in I$ tels que $\langle z,x_\iota\rangle\neq 0$ est dénombrable.

COROLLAIRE 2 .- Pour que l'on ait $z\in V$, il faut et il suffit que les deux membres de (3) soient égaux.

Rappelons (chap.I, § 2) qu'une famille (x_ι) de points de E est dite totale si E est identique au sous-espace vectoriel fermé engendré par cette famille.

PROPOSITION 3 .- Pour qu'une famille (x_ι) de points d'un espace hilbertien E soit totale, il faut et il suffit que les conditions $\langle y,x_\iota\rangle=0$ pour tout indice ι entraînent $y=0$.

Cela exprime en effet que le supplémentaire orthogonal du sous-espace fermé engendré par les x_ι se réduit à 0.

PROPOSITION 4 .- Soit (x_ι) une famille orthonormale dans un espace hilbertien E. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) La famille (x_ι) est totale.

b) Pour tout $z\in E$, on a

(4)
$$z=\sum_\iota\langle z,x_\iota\rangle x_\iota .$$

c) Pour tout $z\in E$, on a

(5)
$$\|z\|^2=\sum_\iota|\langle z,x_\iota\rangle|^2$$ (identité de Parseval).

La proposition est une conséquence immédiate du th.1.

COROLLAIRE .- Si la famille orthonormale (x_ι) est totale , pour tout couple de vecteurs y,z de E , on a

(6) $$\langle y,z\rangle = \sum_\iota \langle y,x_\iota\rangle \cdot \overline{\langle z,x_\iota\rangle} .$$

Par abus de langage , une famille orthonormale et totale (x_ι) dans un espace hilbertien E est appelée une base orthonormale de E . Pour qu'aucune confusion ne se produise entre cette notion et celle de base de E sur le corps K, définie en Alg.,chap.II,§ 1,n°6 , nous dirons toujours par la suite qu'une base d'un espace hilbertien E , au sens de cette dernière définition , est une base algébrique de E (sur K).

Comme les éléments d'une famille orthonormale sont distincts , on peut encore appeler ensemble orthonormal l'ensemble de ses éléments ; une base orthonormale pourra donc signifier aussi bien un ensemble orthonormal et total B que la famille définie par une application biunivoque d'un ensemble d'indices sur B .

3 . Orthogonalisation d'un ensemble de vecteurs d'un espace hilbertien .

THEOREME 2 .- Pour tout ensemble orthonormal L dans un espace hilbertien E , il existe une base orthonormale B de E contenant L .

En effet , soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des parties orthonormales de E , ordonné par inclusion . Cet ensemble est inductif (Ens.R.,§ 6) ; en effet , si $\mathfrak{S}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{D}$, et M la réunion des ensembles orthonormaux $X \in \mathfrak{S}$, deux éléments distincts quelconques x,y de M appartiennent à un même ensemble ~~ORTHOGONAL~~ ~~ORTHONORMALXX~~ orthonormal $X \in \mathfrak{S}$, donc sont orthogonaux . En vertu du th. de Zorn , il existe donc dans $\mathfrak{D}$ un ensemble maximal B contenant L . Tout revient à prouver que B est un ensemble total ; dans le cas contraire , il existerait un élément $y \neq 0$ orthogonal à tous les vecteurs de B (prop.3) , et en multipliant y par un scalaire , on peut supposer que $\|y\|=1$;

alors $F\cup\{y\}$ serait un ensemble orthonormal distinct de B et contenant L, contrairement à la définition de B, d'où le théorème.

COROLLAIRE. — *Dans tout espace hilbertien, il existe une base orthonormale.*

Il suffit d'appliquer le th.2 au cas où $L=\emptyset$.

Lorsque l'espace hilbertien E est *de type dénombrable* (chap.III), on peut préciser le th.2 en généralisant le processus d'"orthogonalisation" d'une base décrit en Algèbre pour les espaces de dimension finie (*Alg.*, chap.VIII, § 4

PROPOSITION 5. — *Soit E un espace hilbertien de type dénombrable, et soit (a_n) une famille dénombrable totale et libre de vecteurs de E. Il existe alors base orthonormale (e_n) et une seule de E telle que :*

1° pour tout entier $p>0$, le sous-espace engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est identique au sous-espace engendré par $a_1, a_2, \ldots, a_p$;

2° pour tout indice n, $\langle a_n, e_n\rangle > 0$.

En effet, soit V_n le sous-espace (de dimension n) engendré par $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Si $b_{n+1}=a_{n+1}-P_{V_n}(a_{n+1})$, Kb_{n+1} est le supplémentaire orthogonal de V_n dans V_{n+1}, donc si les e_n satisfont à la condition 1° de l'énoncé, on doit avoir $e_{n+1}=\lambda b_{n+1}$; la condition $\|e_{n+1}\|=1$ donne ensuite $|\lambda|^2\|b_{n+1}\|^2=1$, et la condition $\langle a_{n+1}, e_{n+1}\rangle>0$ donne $\lambda\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle>0$; cela détermine complètement λ, et prouve par suite que l'on peut déterminer par récurrence la famille orthonormale (e_n) de façon qu'elle satisfasse aux conditions 1° et 2° de l'énoncé. Comme alors le sous-espace engendré par les e_n est identique au sous-espace engendré par les a_n, donc est partout dense, les e_n forment bien une *base orthonormale* de E.

On dit que la base orthonormale (e_n) est déduite par *orthonormalisation* de la famille libre (a_n).

On notera que la prop.5 ne peut être généralisée à une famille libre *non dénombrable* totale dans E : il n'existe pas toujours de base orthonormal engendrant le même sous-espace de N que la famille libre considérée (exerc.1)

Pour tout ensemble d'indices I , désignons par $L^2_K(I)$ l'espace hilbertien somme directe orthogonale de la famille $(K_\iota)_{\iota\in I}$, où $K_\iota = K$ pour tout $\iota \in I$ (n°1) , autrement dit , l'espace des familles $x=(\xi_\iota)_{\iota\in I}$ d'éléments de K , ayant pour ensemble d'indices I et telles que $\sum_{\iota\in I} \xi_\iota \bar{\xi}_\iota < +\infty$, avec comme produit scalaire $\langle x,y\rangle = \sum_{\iota\in I} \xi_\iota \bar{\eta}_\iota$. Le cor. du th.2 montre que tout espace hilbertien sur K est isomorphe à un espace $L^2_K(I)$.

PROPOSITION 6 .- Dans un espace hilbertien E , deux bases orthonormales quelconques sont équipotentes .

En effet , soient M et N deux bases orthonormales de E , supposées infinies. Pour tout $x\in M$, soit A_x la partie de N formée des $y\in N$ tels que $\langle x,y\rangle \neq 0$. Comme $x\neq 0$, A_x n'est pas vide et est un ensemble dénombrable (cor.1 de la prop.2) . Enfin , pour tout $y\in N$, il existe $x\in M$ tel que $y\in A_x$, puisque M est une base orthonormale et que $y\neq 0$; autrement dit , N est la réunion des ensembles dénombrables A_x lorsque x parcourt M . La puissance de N est donc inférieure à celle de $\underline{N}\times M$ ($\underline{N}$ signifie ici l'ensemble des entiers) , donc à celle de M (Ens?R, § 7) ; on montre de même que la puissance de M est inférieure à celle de N , ce qui achève la démonstration dans ce cas .

Le cas où l'un des ensembles M,N est fini , que nous avons laissé de coté , est trivial , puisqu'une base orthonormale finie est aussi une base algébrique de l'espace .

COROLLAIRE .- Pour que les espaces hilbertiens $L^2_K(I)$ et $L^2_K(J)$ soient isomorphes , il faut et il suffit que I et J soient équipotents .

§ 3 . Produits tensoriels d'espaces hilbertiens .

1 . Définition du produit tensorial d'espaces hilbertiens .

Soit $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite finie d'espaces hilbertiens sur K . On a défini en

Algèbre (Alg., chap. III, § 1, n°7) l'espace vectoriel (non topologique) F , produit tensoriel des espaces vectoriels (non topologiques) E_i . Pour tout couple $((x_i),(y_i))$ d'éléments de $\prod_{i=1}^{n} E_i$, considérons le nombre $\prod_{i=1}^{n}\langle x_i,y_i\rangle$. L'application $(y_1,y_2,\dots,y_n)\to\prod_{i=1}^{n}\langle x_i,y_i\rangle$ est évidemment une forme multilinéaire , et il en est de même de l'application $(x_1,x_2,\dots,x_n)\to\prod_{i=1}^{n}\overline{\langle x_i,y_i\rangle}$. Par suite (Alg., chap. III, § 1, n°2, Scholie) il existe une forme sesquilinéaire $\langle x,y\rangle$ et une seule définie dans $F\times F$, et telle que

(1) $$\langle x_1\otimes x_2\otimes\dots\otimes x_n , y_1\otimes y_2\otimes\dots\otimes y_n\rangle=\prod_{i=1}^{n}\langle x_i,y_i\rangle .$$

On déduit aussitôt de cette identité qu'on a $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$ dans F , donc que $\langle x,y\rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne . Nous allons prouver qu'elle est strictement positive et par suite définit sur F une structure d'espace préhilbertien . En effet , soit $x=\sum_{h=1}^{m} x_{h1}\otimes x_{h2}\otimes\dots\otimes x_{hn}$ un point de F , et soit V_i le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les x_{hi} dans E_i $(1\leq h\leq m, 1\leq i\leq n)$; soit $(e_{ij})_{1\leq j\leq n_i}$ une base orthonormale de V_i ; on peut donc écrire

$$x=\sum_{(j_i)}\xi_{1,j_1}\xi_{2,j_2}\dots\xi_{n,j_n}\, e_{1,j_1}\otimes e_{2,j_2}\otimes\dots\otimes e_{n,j_n}$$

Or , il est immédiat , en vertu de la formule (1) , qu'on a

(2) $$\langle e_{1,j_1}\otimes e_{2,j_2}\otimes\dots\otimes e_{n,j_n} , e_{1,k_1}\otimes\dots\otimes e_{n,k_n}\rangle=\begin{cases}0 \text{ si } (j_i)\neq(k_i)\\ 1 \text{ si } (j_i)=(k_i)\end{cases}$$

On en déduit que

$$\langle x,x\rangle=\sum_{(j_i)}\left|\xi_{1,j_1}\xi_{2,j_2}\dots\xi_{n,j_n}\right|^2$$

ce qui établit notre assertion .

En général , l'espace préhilbertien F ainsi défini n'est pas complet (exerc. 1). Soit E l'espace hilbertien obtenu en complétant l'espace F ; nous dirons que E est le produit tensoriel topologique des espaces hilbertiens E_i ; par abus de langage , nous dirons aussi que E est le produit tensoriel des E_i , et nous le noterons $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ quand aucune confusion ne sera à redouter avec l'espace F (on dira que ce dernier est le produit tensoriel algébrique des E_i

27

quand il sera nécessaire de faire la distinction).

Pour tout indice i ($1 \leq i \leq n$) , soit M_i un sous-espace vectoriel <u>partout dense</u> de E_i . On peut identifier canoniquement le produit tensoriel <u>algébrique</u> M des M_i à un sous-espace vectoriel de F (<u>Alg</u>.,chap.III,§ 1) , donc de E ; le sous-espace M est alors <u>partout dense</u> dans F , donc dans E . En effet , tout point de F de la forme $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$ peut être approché arbitrairement par un point de la forme $y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots \otimes y_n$ de M , car l'application multilinéaire canonique $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \to x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$ de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans E est continue en raison de la relation

(3) $$\|x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n\| = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

qui résulte aussitôt de (1) .

Soit $(I_k)_{1 \leq k \leq p}$ une partition quelconque de l'intervalle $[1,n]$; pour tout indice k , soit F_k le produit tensoriel <u>algébrique</u> des E_i tels que $i \in I_k$, et soit G_k son complété , produit tensoriel <u>topologique</u> des E_i tels que $i \in I_k$. Soit G le produit tensoriel topologique des G_k ($1 \leq k \leq p$) ; d'après ce qui précède , le produit tensoriel <u>algébrique</u> des F_k est <u>partout dense</u> dans G . Or, il existe un isomorphisme canonique de la structure d'espace vectoriel de F sur celle du produit tensoriel algébrique des F_k (<u>Alg</u>.,chap.III,§ 1,n°7) ; il résulte aussitôt de la formule (1) que cet isomorphisme est aussi un isomorphisme pour les structures d'<u>espace préhilbertien</u> de ces deux espaces; cet isomorphisme se prolonge donc par continuité en un <u>isomorphisme</u> (dit <u>canonique</u>) du produit tensoriel topologique $E = \bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ <u>sur</u> le produit tensoriel topologique $G = \bigotimes_{k=1}^{p} (\bigotimes_{i \in I_k} E_i)$ (<u>associativité</u> du produit tensoriel topologique).

<u>2 . Sous-espaces d'un produit tensoriel d'espaces hilbertiens</u> .

Soient E_1, E_2 deux espaces hilbertiens , V_1 (resp. V_2) un sous-espace fermé de E_1 (resp. E_2) . Désignons par F (resp. W) le produit tensoriel <u>algébrique</u>

de E_1 et E_2 (resp. V_1 et V_2) ; on sait (Alg.,chap.III, § 1,n°3) que l'application canonique de W dans F est un isomorphisme de structures d'espace vectoriel ; en outre , il résulte aussitôt de la formule (1) que cette application est aussi un isomorphisme de la structure d'espace préhilbertien de W sur celle de son image W' dans F ; comme W est partout dense dans le produit tensoriel topologique $V_1 \otimes V_2$, l'isomorphisme précédent se prolonge par continuité en un isomorphisme (dit canonique) de l'espace hilbertien $V_1 \otimes V_2$ sur l'adhérence (dans $E_1 \otimes E_2$) du sous-espace W' . On identifiera d'ordinaire $V_1 \otimes V_2$ et son image par l'isomorphisme canonique précédent .

Avec cette convention , on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1 .- Si l'espace E_1 est somme directe orthogonale d'une famille $(V_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E_1 , le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$ est somme directe orthogonale des sous-espaces vectoriels fermés $V_\iota \otimes E_2$ ($\iota \in I$)

En effet , soient ι et $\varkappa$ deux indices distincts , et soient W_ι et $W_\varkappa$ les sous espaces de $V_\iota \otimes E_2$ et $V_\varkappa \otimes E_2$ qui sont respectivement les produits tensoriels algébriques de V_ι et E_2 , et de $V_\varkappa$ et E_2 ; il résulte de la formule (1) que W_ι et $W_\varkappa$ sont orthogonaux dans $E_1 \otimes E_2$; comme W_ι et $W_\varkappa$ sont partout denses dans $V_\iota \otimes E_2$ et $V_\varkappa \otimes E_2$ respectivement , ces deux derbiers sous-espaces sont orthogonaux dans $E_1 \otimes E_2$. D'autre part , le produit tensoriel algébrique de E_1 et E_2 est somme directe des sous-espaces W_ι (Alg.,chap.III, § 1,prop.7) ; donc le sous-espace vectoriel engendré par par les $V_\iota \otimes E_2$ est partout dense dans $E_1 \otimes E_2$, ce qui achève la démonstration .

COROLLAIRE 1 .- Si E_1 (resp. E_2) est somme directe orthogonale d'une famille $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ (resp. $(W_\mu)_{\mu \in M}$) de sous-espaces vectoriels fermés , le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$ est somme directe orthogonale des sous-espaces vectoriels fermés $V_\lambda \otimes W_\mu$.

Il suffit d'utiliser l'associativité de la somme directe orthogonale (§ 2)

COROLLAIRE 2 .- __Si__ $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ (resp. $(b_\mu)_{\mu\in M}$) __est une base orthonormale de__ E_1 (resp. E_2) , __la famille__ $(a_\lambda \otimes b_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$ __est une base orthonormale de__ $E_1 \otimes E_2$.

Nous laissons au lecteur le soin de formuler les extensions de la prop.1 et de ses corollaires au cas du produit tensoriel d'un nombre quelconque d'espaces hilbertiens .

__Remarque__ .- Il est clair que le produit tensoriel topologique $K \otimes E$ du corps des scalaires K (considéré comme espace hilbertien de dimension 1) est d'un espace hilbertien quelconque E , est isomorphe à E ; c'est ce que montre par exemple le cor.2 de la prop.1 . On en déduit aussitôt que si a est un vecteur quelconque $\neq 0$ dans E_1 , le sous-espace $(Ka)\otimes E_2$ de $E_1 \otimes E_2$ est isomorphe à E_2 .

3 . __Produits tensoriels et espaces d'applications semi-linéaires__ .

Soient E et F deux espaces hilbertiens , ~~et soit~~ $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace de Banach des applications semi-linéaires continues de E dans F , muni de la norme $\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|$ (correspondant à la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E). Si a est un point quelconque de E , b un point quelconque de F , l'application $x \rightarrow \langle x,a\rangle b$ est une application semi-linéaire continue de E dans F , que nous désignerons par $\varphi_{a,b}$; il est clair en outre que l'application $(x,y) \rightarrow \varphi_{x,y}$ de $E\times F$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ est __bilinéaire__ ; on en déduit (__Alg.__, chap.III, § 1, n°2) qu'il existe une application linéaire et une seule $z \rightarrow \varphi_z$ du produit tensoriel __algébrique__ G de E et F dans $\mathcal{L}(E,F)$ telle que , pour $z = \sum_h x_h \otimes y_h$, on ait $\varphi_z(t) = \sum_h \langle t, x_h\rangle y_h$. Montrons qu'on a

$$\|\varphi_z\| \leq \|z\| \tag{4}$$

la norme de z dans G étant définie par la formule (3) . En effet , il existe deux familles orthonormales finies $(a_i)_{1\leq i\leq m}$, $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ dans E et F respectivement , telles qu'on puisse écrire $z = \sum_{i,j} \alpha_{ij} a_i \otimes b_j$, d'où $\|z\|^2 = \sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2$.

On a d'autre part
$$\|\varphi_z(t)\|^2=\|\sum_{i,j}\alpha_{ij}\langle t,a_i\rangle b_j\|^2=\sum_j\left|\sum_i\alpha_{ij}\langle t,a_i\rangle\right|^2=\sum_j\left|\langle t,\sum_i\alpha_{ij}a_i\rangle\right|^2 .$$
Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$\left|\langle t,\sum_i\alpha_{ij}a_i\rangle\right|^2\leqslant\|t\|^2.\|\sum_i\alpha_{ij}a_i\|^2=\|t\|^2(\sum_i|\alpha_{ij}|^2) .$$
d'où $\|\varphi_z(t)\|\leqslant\|z\|.\|t\|$, ce qui démontre (4).

La formule (4) montre que l'application $z\to\varphi_z$ de G dans $\bar{\mathcal{L}}(E,F)$ est continue et par suite se prolonge en une application linéaire continue du complété $E\hat{\otimes}F$ de G dans $\bar{\mathcal{L}}(E,F)$ (qui est complet). Nous noterons encore cette application $z\to\varphi_z$. Si (a_λ) et (b_μ) sont deux bases orthonormales de E et F respectivement, on a, pour tout $z\in E\hat{\otimes}F$, $z=\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}a_\lambda\otimes b_\mu$, la famille du second membre étant sommable, d'où $\varphi_z=\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}\varphi_{a_\lambda,b_\mu}$, la famille du second membre étant sommable ; cela signifie que

(5) $$\varphi_z(x)=\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}\langle x,a_\lambda\rangle b_\mu .$$

Cette formule montre aussitôt que l'application $z\to\varphi_z$ est biunivoque ; en effet, si $\varphi_z=0$, on a identiquement $\varphi_z(x)=0$ dans E, et en particulier $\varphi_z(a_\lambda)=0$, ce qui donne $\sum_\mu\alpha_{\lambda\mu}b_\mu=0$, et par suite $\alpha_{\lambda\mu}=0$ pour tout couple d'indices, c'est-à-dire $z=0$. On peut donc identifier $E\hat{\otimes}F$, en tant qu'espace vectoriel non topologique, au sous-espace S de $\bar{\mathcal{L}}(E,F)$ qui est son image biunivoque par l'application $z\to\varphi_z$; mais si on transporte sur S par cette application la topologie de $E\hat{\otimes}F$, cette topologie est en général strictement moins fine que celle induite par la topologie de $\bar{\mathcal{L}}(E,F)$. On notera que, pour la topologie de $\mathcal{L}(E,F)$, tout élément de S est limite ~~xxxxx~~ d'applications semi-linéaires de rang fini ; en d'autres termes, tout élément de S est limite uniforme sur tout ensemble borné de E d'applications semi-linéaires de rang fini (si on admettait au chap. III les applications complètement continues, on dirait naturellement ici que les applications appartenant à S sont complètement continues) ; la réciproque est inexacte (exerc.2).

§ 4 . Opérateurs dans un espace hilbertien .

1 . Adjoint d'un opérateur .

Dans ce paragraphe , les endomorphismes d'un espace préhilbertien E seront qualifiés d'opérateurs dans E . Pour un opérateur $\underline{A}$ dans A et un point $x \in E$, on écrira le plus souvent $\underline{A}x$ au lieu de $\underline{A}(x)$.

DEFINITION 1 .- On dit qu'un opérateur $\underline{A}$ dans un espace préhilbertien E est régulier s'il existe un opérateur $\underline{B}$ dans E tel que l'on ait identiquement

(1) $$\langle \underline{A}x, y\rangle = \langle x, \underline{B}y\rangle \ .$$

Si l'opérateur $\underline{B}$ existe , il est unique , l'identité $\langle x, \underline{B}y - \underline{C}y\rangle = 0$ pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$ entraînant $\underline{B}y = \underline{C}y$ pour tout $y \in E$, c'est-à-dire $\underline{B} = \underline{C}$. L'unique opérateur ainsi défini est appelé l'adjoint de $\underline{A}$ et noté $\underline{A}^*$. Il est immédiat que si $\underline{A}$ est régulier , il en est de même de $\underline{A}^*$, puisque $\langle \underline{A}^* x, y\rangle = \overline{\langle y, \underline{A}^* x\rangle}$ $= \overline{\langle \underline{A}y, x\rangle} = \langle x, \underline{A}y\rangle$, et on a

(2) $$(\underline{A}^*)^* = \underline{A} \ .$$

Un vérifie sans peine que les opérateurs réguliers de E forment une sous-algèbre $\mathcal{R}(E)$, contenant l'opérateur unité , de l'algèbre de tous les opérateurs de E . L'application $\underline{A} \to \underline{A}^*$ est une permutation involutive de $\mathcal{R}(E)$, telle que

(3) $$(\underline{A} + \underline{B})^* = \underline{A}^* + \underline{B}^* \ , \quad (\lambda \underline{A})^* = \bar{\lambda} \underline{A}^* \ , \quad (\underline{A}\underline{B})^* = \underline{B}^* \underline{A}^*$$

(autrement dit , c'est une application semi-linéaire , qui est en même temps un isomorphisme de la structure d'anneau de $\mathcal{R}(E)$ sur la structure d'anneau opposée).

THEOREME 1 .- Pour qu'un opérateur $\underline{A}$ dans un espace hilbertien E soit régulier il faut et il suffit qu'il soit continu .

La condition est suffisante , car si E est hilbertien , il peut être identifié à son dual par l'application canonique φ (§ 1, n°5). Si $\underline{A}$ est continu , et si ${}^t\underline{A}$ est son transposé (chap.III, §) , qui est un endomorphisme du dual de E , il est clair que l'on a $\langle \underline{A}x,y\rangle = \langle x,\varphi\circ{}^t\underline{A}\circ\varphi^{-1}(y)\rangle$, donc $\underline{A}$ est régulier , et son adjoint est $\underline{A}^* = \varphi\circ{}^t\underline{A}\circ\varphi^{-1}$.

La condition est <u>nécessaire</u> ; car la relation $\langle \underline{A}x,y\rangle = \langle x,\underline{A}^*y\rangle$ montre (en raison de l'identification de E et de son dual) que $\underline{A}$ est <u>faiblement continu</u> (chap?III,§) , donc aussi <u>fortement continu</u> (chap.III,§ , prop.).

Si E est <u>préhilbertien</u> , mais <u>non complet</u> (donc non hilbertien) , un endomorphisme régulier de E <u>n'est pas nécessairement continu</u> . Par exemple , soit $\mathcal{D}$ des fonctions complexes définies dans R , <u>à support compact et indéfiniment dérivables</u> (on montre aisément que cet espace n'est pas réduit à 0 (exerc.)) ; sur cet espace , on constate aisément que

$$\langle x,y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne strictement positive , définissant donc sur $\mathcal{D}$ une structure d'espace préhilbertien . Dans $\mathcal{D}$, l'application $x \to Dx$ (=dx/dt) est <u>régulière</u> , car on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)\overline{y(t)}\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y'(t)}\,dt$$

par intégration par parties . Mais il est facile de voir que $x \to Dx$ n'est pas continu dans $\mathcal{D}$ (exerc.).

Inversement , un opérateur <u>continu</u> $\underline{A}$ dans un espace préhilbertien non complet E <u>n'est pas nécessairement régulier</u> : on peut en effet prolonger $\underline{A}$ par continuité au complété $\hat{E}$ de E , et par suite $\underline{A}$ (prolongé) est régulier <u>dans</u> $\hat{E}$; mais , pour un vecteur $y \in E$, $\underline{A}^*y$ est un vecteur de $\hat{E}$, qui n'appartient pas nécessairement à E lui-même (exerc.).

En vertu du th.1 , pour un espace <u>hilbertien</u> E , l'algèbre $\mathcal{R}(E)$ n'est autre que l'algèbre des <u>opérateurs continus</u> dans E .

PROPOSITION 1 .- <u>Soit E un espace hilbertien ; pour tout opérateur continu $\underline{A}$</u>

dans E , on a

(4) $$\|\underline{A}^*\| = \|\underline{A}\|$$

(5) $$\|\underline{A}^*\underline{A}\| = \|\underline{A}\|^2 \quad .$$

La relation (4) n'est autre que l'égalité entre la norme d'un opérateur continu et celle de son transposé , transportée au moyen de l'application canonique de E' sur E (chap.III,§) . D'autre part , on a $\langle \underline{A}^*\underline{A}x, x\rangle = \langle \underline{A}x, \underline{A}x\rangle = \|\underline{A}x\|^2$ pour tout $x \in E$, donc

$$\|\underline{A}\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\underline{A}x\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \underline{A}^*\underline{A}x, x\rangle| \leq \|\underline{A}^*\underline{A}\| \quad .$$

Mais d'autre part

$$\|\underline{A}^*\underline{A}\| \leq \|\underline{A}^*\| \cdot \|\underline{A}\| = \|\underline{A}\|^2$$

d'où la relation (5) .

2 . Opérateurs hermitiens .

DEFINITION 2 .- On dit qu'un opérateur $\underline{A}$ d'un espace préhilbertien E est hermitien s'il est régulier et si $\underline{A}^* = \underline{A}$.

Exemples .- 1) Dans un espace hilbertien E , tout projecteur $\underline{P}$ est un opérateur hermitien tel que $\underline{P}^2 = \underline{P}$; réciproquement , tout opérateur hermitien idempotent est un projecteur (§ 1,prop.10) .

2) Dans l'espace préhilbertien $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact , définies dans R (n°1,Exemple) , l'opérateur iD est hermitien , en vertu de la formule d'intégration par parties , qui montre que $\langle Dx, y\rangle = -\langle x, Dy\rangle$.

PROPOSITION 2 .- Pour qu'un opérateur $\underline{A}$ dans un espace préhilbertien E soit hermitien , il faut et il suffit que la forme sesquilinéaire $\langle \underline{A}x, y\rangle$ soit hermitienne .

En effet , si $\underline{A}$ est hermitien , on a $\langle \underline{A}x, y\rangle = \langle x, \underline{A}y\rangle = \overline{\langle \underline{A}y, x\rangle}$, ce qui signifie que $\langle \underline{A}x, y\rangle$ est hermitienne ; réciproquement , si $\langle \underline{A}x, y\rangle$ est hermitienne , on a identiquement $\langle \underline{A}x,y\rangle = \langle x,\underline{A}y\rangle$, ce qui prouve que $\underline{A}^*$ existe et est égal à $\underline{A}$.

COROLLAIRE .- *Si le corps des scalaires* K *est le corps des nombres complexes* , *pour qu'un opérateur* $\underline{A}$ *soit hermitien , il faut et il suffit que , pour tout* $x \in E$, $\langle \underline{A}x,x\rangle$ *soit réel* .

La condition est évidemment nécessaire . Inversement , si elle est satisfaite en écrivant que $\langle \underline{A}(x+y),x+y\rangle$ est réel , on voit que $\langle \underline{A}x,y\rangle + \langle \underline{A}y,x\rangle = \langle \underline{A}x,y\rangle + \overline{\langle x,\underline{A}y\rangle}$ est réel pour tout couple x,y de points de E . En appliquant cette propriété à ix et y , on voit , compte tenu de $\underline{A}(ix) = i.\underline{A}x$, que $i(\langle \underline{A}x,y\rangle - \overline{\langle x,\underline{A}y\rangle})$ est réel , donc que $\langle \underline{A}x,y\rangle - \overline{\langle x,\underline{A}y\rangle}$ est imaginaire pur ; de ces deux propriétés , on déduit aussitôt que $\langle \underline{A}x,y\rangle = \langle x,\underline{A}y\rangle$, d'où le corollaire .

Bien entendu , ce corollaire ne s'étend pas au cas où $K=R$.

Lorsque E est *complet* (donc *hilbertien*) , pour tout opérateur hermitien $\underline{A}$ dans E , la forme hermitienne $\langle \underline{A}x,y\rangle$ est *continue* dans $E\times E$, puisque $\underline{A}$ est continu dans E (th.1) . Inversement :

PROPOSITION 3 .- *Soit* E *un espace hilbertien ; pour toute forme sesquilinéaire hermitienne* $f(x,y)$ *continue dans* $E\times E$, *il existe un opérateur hermitien et un seul* $\underline{A}$ *dans* E *tel que* $f(x,y) = \langle \underline{A}x,y\rangle$.

En effet , pour tout $x \in E$, l'application $y \to f(x,y)$ est une forme linéaire continue sur E , donc il existe un vecteur $\underline{A}x$ et un seul tel que $f(x,y) = \langle \underline{A}x,y\rangle$ pour tout $y \in E$ (§ 1,th.2) . Il est immédiat que $\underline{A}$ est un opérateur de E , qui est hermitien en vertu de la prop.2 .

Pour un espace *préhilbertien* E , la continuité d'une forme sesquilinéaire hermitienne $f(x,y)$ dans $E\times E$ n'est ni nécessaire, ni suffisante , pour que $f(x,y)$ soit de la forme $\langle \underline{A}x,y\rangle$, où $\underline{A}$ est hermitien (exerc.).

Les opérateurs hermitiens dans un espace préhilbertien E forment évidemment un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}(E)$ *sur le corps* R , de l'algèbre $\mathcal{R}(E)$. En outre:

PROPOSITION 4 .- *Pour que le produit de deux opérateurs hermitiens soit hermi-*

tien , il faut et il suffit que ces opérateurs soient permutables .

En effet , si A et B sont hermitiens , on a $(AB)^* = B^*A^* = BA$.

DEFINITION 3 .- On dit qu'un opérateur hermitien A dans un espace préhilbertien E est positif si l'on a $\langle Ax,x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$. On dit que A est strictement positif s'il existe une constante $m>0$ telle que l'on ait $\langle Ax,x\rangle \geq m\langle x,x\rangle$ pour tout $x\in E$.

Par exemple , tout projecteur dans un espace hilbertien Eest un opérateur hermitien positif , puisque pour tout $x\in E$, on a $\langle Px,x\rangle = \|Px\|^2$; mais iln'est strictement positif que ~~XXO~~ lorsqu'il est l'opérateur iden tique .

Dire que A est un opérateur hermitien positif signifie donc que la forme hermitienne $\langle Ax,y\rangle$ est positive . Si A est strictement positif , la forme $\langle Ax,y\rangle$ est strictement positive (autrement dit , la relation $\langle Ax,x\rangle=0$ entraîne $x=0$, cf. § 1,n°1); mais la réciproque est inexacte si E est de dimension infinie (exerc.).

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{H}(E)$(sur R) des opérateurs hermitiens dans E , la relation "$B-A$ est positif" est une relation d'ordre compatibleavec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{H}(E)$; on note cette relation $A\leq B$. Dire que A est strictement positif signifie donc que $A\geq mI$ pour un $m>0$ (I étant l'opérateur identique) .

PROPOSITION 5 .- Dans un ~~DE~~ espace hilbertien E , tout opérateur hermitien strictement positif A est une application biunivoque et bicontinue de E sur lui-même (en d'autres termes , un automorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique de E - mais non de sa structure d'espace hilbertien).

En effet , la relation $\langle Ax,x\rangle \geq m\langle x,x\rangle$ $(m>0)$ entraîne , pour tout $x\in E$

$$m\|x\|^2 \leq \langle Ax,x\rangle \leq \|Ax\|.\|x\|$$

ou encore $m\|x\| \leqslant \|\underline{A}x\|$: cette relation et le th. 1 prouvent que $\underline{A}$ est une application biunivoque et bicontinue de E sur un sous-espace M de E . D'autre part , M est partout dense dans E , car si $x \in E$ est orthogonal à M , on a en particulier $\langle \underline{A}x, x \rangle = 0$, donc $x=0$. Comme M est isomorphe à E , M est complet , donc fermé dans E , et par suite identique à E , ce qui achève la démonstration .

Si E est un espace préhilbertien non complet , un opérateur hermitien strictement positif dans E n'est pa nécessairement continu : c'est une application biunivoque de E sur un sous-espace partout dense M de E , dont l'application réciproque est continue ; mais M n'est pas nécessairement identique à E (exerc.).

PROPOSITION 6 .- Pour tout opérateur régulier $\underline{A}$ dans un espace préhilbertien, $\underline{A}^*\underline{A}$ est un opérateur hermitien positif .

En effet , on a $(\underline{A}^*\underline{A})^* = \underline{A}^*\underline{A}$ et $\langle \underline{A}^*\underline{A}x, x \rangle = \langle \underline{A}x, \underline{A}x \rangle \geqslant 0$.

COROLLAIRE 1 .- Pour tout opérateur hermitien $\underline{A}$ dans E , $\underline{A}^2$ est un opérateur hermitien positif .

COROLLAIRE 2 .- Pour tout opérateur continu $\underline{A}$ dans un espace hilbertien E , $\underline{I}+\underline{A}^*\underline{A}$ est un opérateur inversible .

En effet , il est hermitien et strictement positif (prop.5) .

PROPOSITION 7 .- Tout opérateur régulier dans un espace préhilbertien E ~~sur~~ sur le corps C , est combinaison linéaire d'opérateurs hermitiens positifs .

En effet , pour tout opérateur régulier $\underline{A}$, il est clair que les opérateurs $\underline{H} = \frac{1}{2}(\underline{A}+\underline{A}^{*})$ et $\underline{H}' = \frac{1}{2i}(\underline{A}-\underline{A}^{*})$ sont hermitiens , et on a $\underline{A} = \underline{H} + i\underline{H}'$. Tout revient donc à prouver que tout opérateur hermitien $\underline{B}$ est combinaison linéaire d'opérateurs hermitiens positifs , ce qui résulte immédiatement de la relation $4\underline{B} = (\underline{I}+\underline{B})^2 - (\underline{I}-\underline{B})^2$ (cor.1 de la prop.6) .

3 . Opérateurs normaux et opérateurs unitaires .

DEFINITION 3 .- On dit qu'un opérateur A dans un espace préhilbertien E est normal s'il est régulier et permutable avec son adjoint .

Il revient au même de dire que l'opérateur hermitien A^*A-AA^* est nul ; ce qui équivaut à $\langle A^*Ax,x\rangle=\langle AA^*x,x\rangle$ pour tout $x\in E$; comme $\langle A^*Ax,x\rangle=\|Ax\|^2$ et $\langle AA^*x,x\rangle=\|A^*x\|^2$, on voit que :

PROPOSITION 8 .- Pour qu'un opérateur régulier A soit normal , il faut et il suffit que $\|Ax\|=\|A^*x\|$ pour tout $x\in E$.

PROPOSITION 9 .- Pour tout opérateur normal A dans un espace hilbertien E , on a

$$\|A^2\|=\|A\|^2 \quad (6)$$

En effet , on a , pour tout $x\in E$

$$\|A^2x\|^2=\langle A^2x,A^2x\rangle=\langle Ax,A^*A^2x\rangle=\langle Ax,AA^*Ax\rangle=\langle A^*Ax,A^*Ax\rangle=\|A^*Ax\|^2$$

compte tenu de $AA^*=A^*A$; on a donc $\|A^2\|=\|A^*A\|=\|A\|^2$ d'après (5) .

Il est clair que tout opérateur hermitien est normal ; une autre catégorie importante d'opérateurs normaux est la suivante :

DEFINITION 4 .- On appelle opérateur unitaire dans un espace préhilbertien E tout automorphisme de la structure d'espace préhilbertien de E .

En d'autres termes , un opérateur unitaire U dans E est un automorphisme de la structure d'espace vectoriel de E , tel que

$$\langle Ux,Uy\rangle=\langle x,y\rangle \quad (7)$$

pour tout couple de vecteurs x,y de E ; il revient encore au même de dire que U est un automorphisme de la structure d'espace vectoriel (non topologique) de E tel que $\|Ux\|=\|x\|$ pour tout $x\in E$, car cette relation entraîne (7) (§ 1,n°1) ; autrement dit , U est un automorphisme de la structure d'espace normé de E .

On notera que , lorsque E est de dimension infinie , il existe des endomorphismes de E satisfaisant à (7) et appliquant E sur un sous-espace fermé de E distinct de E (exerc.).

Par définition , un opérateur unitaire $\underline{U}$ est inversible , et il résulte de (7) que l'on a

$$\langle \underline{U}x,y\rangle = \langle \underline{U}x,\underline{U}\underline{U}^{-1}y\rangle = \langle x,\underline{U}^{-1}y\rangle$$

Cela montre que $\underline{U}$ est un opérateur régulier dans E et qu'on a

(8) $$\underline{U}^{*} = \underline{U}^{-1}$$

d'où en particulier le fait que $\underline{U}$ est normal . Réciproquement , tout opérateur régulier $\underline{U}$, inversible et vérifiant (8) est unitaire , car on a alors

$$\langle \underline{U}x,\underline{U}y\rangle = \langle \underline{U}^{*}\underline{U}x,y\rangle = \langle \underline{U}^{-1}\underline{U}x,y\rangle = \langle x,y\rangle \ .$$

L'ensemble $\mathcal{U}(E)$ des opérateurs unitaires dans E n'est autre que le groupe des automorphismes de la structure d'espace préhilbertien de E . Pour tout opérateur unitaire $\underline{U}$, l'application $\underline{A} \to \underline{U}\underline{A}\underline{U}^{-1}$ est un automorphisme intérieur de l'algèbre $\mathcal{R}(E)$ des opérateurs réguliers dans E , tel en outre que

(9) $$(\underline{U}\underline{A}\underline{U}^{-1})^{*} = \underline{U}\underline{A}^{*}\underline{U}^{-1}$$

comme il résulte aussitôt de (8) ; un tel automorphisme laisse donc invariant dans $\mathcal{R}(E)$ l'ensemble des opérateurs hermitiens , celui des opérateurs hermitiens positifs (resp. strictement positifs), l'ensemble des opérateurs normaux , l'ensemble des projecteurs , etc. Enfin , on a

(10) $$\|\underline{U}\underline{A}\underline{U}^{-1}\| = \|\underline{A}\|$$

car $\|\underline{U}\underline{A}\underline{U}^{-1}x\| = \|\underline{A}\underline{U}^{-1}x\|$, et lorsque x parcourt la boule $\|x\| \leq 1$ dans E , il en est de même de $\underline{U}^{-1}x$.

Nous avons déjà remarqué (§ 1, n°2) que tout opérateur unitaire dans un espace préhilbertien E se prolonge par continuité en un opérateur unitaire dans l'espace hilbertien $\hat{E}$ complété de E .

PROPOSITION 10 .- Soit E un espace hilbertien sur le corps C . Pour tout opérateur hermitien $\underline{H}$ dans E , $\underline{I}+i\underline{H}$ et $\underline{I}-i\underline{H}$ sont des opérateurs inversibles et permutables , et $\underline{U} = (\underline{I}+i\underline{H})^{-1}(\underline{I}-i\underline{H})$ est un opérateur unitaire .

En effet, posons $A=I+iH$; on a $A^*=I-iH$, d'où $A^*A=AA^*=I+H^2$; $I+H^2$ étant un opérateur hermitien strictement positif, est inversible (prop.5) ; comme l'image de E par cet opérateur est contenu dans $A(E)$, on a $A(E)=E$; de même la relation $A(x)=0$ entraîne $x+H^2(x)=0$, donc $x=0$, ce qui montre que A est inversible ; on montre de même que A^* est inversible. Si alors $U=A^{-1}A^*$, on a $U^{-1}=(A^*)^{-1}A$ et $U^*=A(A^*)^{-1}$; mais A et A^* sont permutables, donc $U^{-1}=U^*$, U est unitaire.

4. *Topologies sur les algèbres d'opérateurs*.

Dans tout le reste de ce paragraphe, nous ne considérerons plus que des opérateurs dans un espace *hilbertien* E. L'algèbre $\mathcal{R}(E)$ des opérateurs continus dans E est, comme on sait, munie d'une structure d'*algèbre normée* par la norme

$$\|A\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$$

De façon précise, on a

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\| \tag{11}$$

(*Top.gén.*, chap.X, § 2, n°2) ; en outre la prop.4 montre que $A\to A^*$ est un *anti-automorphisme involutif* de l'algèbre normée $\mathcal{R}(E)$.

La topologie définie sur $\mathcal{R}(E)=\mathcal{L}(E,E)$ par la norme précédente n'est autre que la topologie de la *convergence uniforme dans les parties bornées* de E (E étant muni de sa topologie *forte*). Nous dirons que, sur $\mathcal{R}(E)$, cette topologie est la topologie *maximale* (ou encore la topologie de la norme).

Considérons maintenant sur $\mathcal{R}(E)$ la topologie de la *convergence simple* (E étant muni de sa topologie *forte*). C'est la topologie *la moins fine rendant continues toutes les applications* $A\to Ax_0$ *de* $\mathcal{R}(E)$ *dans* E (muni de la topologie *forte*). Nous dirons que cette topologie (qui est en général *strictement moins fine* que la topologie maximale) est la *topologie forte* sur $\mathcal{R}(E)$. Elle est compatible avec la structure d'*espace vectoriel* de $\mathcal{R}(E)$ (chap.I, § 2) ;

on a un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{R}(E)$ pour cette topologie en considérant , pour toute suite finie (x_i) de points de E , l'ensemble des $\underline{T} \in \mathcal{R}(E)$ tels que $\|\underline{T}x_i\| \leq 1$ pour tout i . La topologie forte <u>n'est pas compatible</u> en général avec la structure d'<u>algèbre</u> sur $\mathcal{R}(E)$; autrement dit , l'application $(\underline{A},\underline{B}) \to \underline{AB}$ <u>n'est pas continue</u> en général pour la topologie forte (exerc.) : on notera seulement que les applications $\underline{A} \to \underline{AB}_0$ et $\underline{A} \to \underline{B}_0\underline{A}$ sont continues , comme il résulte aussitôt de la définition des voisinages de 0 pour la topologie forte . En général , l'application $\underline{A} \to \underline{A}^*$ <u>n'est pas continue</u> pour la topologie forte (exerc.);

La définition des voisinages pour la topologie forte sur $\mathcal{R}(E)$ montre que cette topologie peut encore être définie d'une autre manière : on a en effet $\|\underline{A}x_i\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle \underline{A}x_i, y\rangle| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x_i, \underline{A}^* y\rangle|$. Si on considère sur E la topologie <u>faible</u> , on voit donc que la topologie <u>forte</u> sur $\mathcal{R}(E)$ est <u>l'image par l'application biunivoque</u> $\underline{A} \to \underline{A}^*$ de la topologie de la <u>convergence uniforme dans les parties bornées</u> de E .

Considérons enfin sur $\mathcal{R}(E)$ la topologie de la <u>convergence simple</u> quand E est muni de la topologie <u>faible</u> ; nous dirons que cette topologie est la topologie <u>faible</u> sur $\mathcal{R}(E)$; elle est en général <u>strictement moins fine</u> que la topologie forte . Un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{R}(E)$ pour cette topologie est formé des ensembles définis par $\sup_{1 \leq i \leq n} |\langle \underline{A}x_i, y_i\rangle| \leq 1$, où (x_i, y_i) sont des couples quelconques , en nombre fini , d'éléments de E . Il en résulte aussitôt que la topologie faible sur $\mathcal{R}(E)$ est <u>la moins fine</u> des topologies sur cet espace pour laquelle toutes les formes linéaires $\underline{A} \to \langle \underline{A}x, y\rangle$ sont <u>continues</u> . Par suite (chap. II, §) toute forme linéaire continue sur $\mathcal{R}(E)$ pour la topologie <u>faible</u> est de la forme $\underline{A} \to \sum_{i=1}^{n} \langle \underline{A}x_i, y_i\rangle$.

L'application $(\underline{A},\underline{B}) \to \underline{AB}$ n'est pas continue en général pour la topologie faible sur $\mathcal{R}(E)$ (exerc.) ; on vérifie aussitôt que chacune des applications

$\underline{A} \to \underline{A}\underline{B}_0$ et $\underline{A} \to \underline{B}_0\underline{A}$ est continue dans $\mathcal{R}(E)$ pour cette topologie . En outre , l'application $\underline{A} \to \underline{A}^*$ est continue pour la topologie faible , comme il résulte aussitôt de la relation

$$\langle \underline{A}^* x, y\rangle = \overline{\langle \underline{A} y, x\rangle}$$

et de la définition des voisinages de 0 pour la topologie faible .

PROPOSITION 11 .- Dans $\mathcal{R}(E)$, les notions d'ensemble équicontinu et d'ensemble borné pour une quelconque des trois topologies faible , forte ou maximale sont identiques..

En effet , soit B un ensemble borné dans $\mathcal{R}(E)$ pour la topologie faible ; cela signifie que , pour tout $x \in E$, l'ensemble des formes linéaires continues $y \to \langle \underline{A}x, y\rangle$ sur E (où $\underline{A}$ parcourt B) est faiblement borné dans le dual E' de E . Il est par suite fortement borné dans E' (chap.III, §) , ce qui signifie que , pour tout $x \in E$, $\sup_{\underline{A} \in B} \|\underline{A}x\| < +\infty$. Cela signifie encore que l'ensemble B est borné pour la topologie forte sur $\mathcal{R}(E)$; on sait alors que B est aussi borné pour la topologie maximale sur $\mathcal{R}(E)$ (chap.III, §). Enfin, les notions d'ensemble équicontinu et d'ensemble borné pour la topologie maximale sont identiques dans $\mathcal{R}(E)$ (chap.III, §).

5 . Algèbres autoadjointes d'opérateurs .

DÉFINITION 5 .- Etant donné un espace préhilbertien E , on appelle algèbre autoadjointe d'opérateurs dans E toute sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{R}(E)$ telle que la relation $\underline{A} \in \mathcal{A}$ entraîne $\underline{A}^* \in \mathcal{A}$.

Exemple .- Soit $\mathcal{M}$ un ensemble quelconque d'opérateurs réguliers dans E , $\mathcal{M}^*$ l'ensemble des $\underline{A}^*$, où $\underline{A}$ parcourt $\mathcal{M}$. La sous-algèbre de $\mathcal{R}(E)$ engendrée par $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$, est évidemment autoadjointe , puisque son image par l'application $\underline{A} \to \underline{A}^*$ est engendrée par $\mathcal{M}^* \cup \mathcal{M}$. En particulier , si $\underline{A}$ est un opérateur normal , la sous-algèbre de $\mathcal{R}(E)$ engendrée par $\underline{A}$ et $\underline{A}^*$, est une algèbre autoadjointe commutative. Plus particulièrement, pour tout opérateur hermitien $\underline{H}$, la sous-algèbre de $\mathcal{R}(E)$ engendrée par $\underline{H}$ est une algèbre autoadjointe commutative.

PROPOSITION 12 .- Pour qu'un sous-espace vectoriel fermé V d'un espace hilbertien E soit stable pour tous les opérateurs d'une algèbre autoadjointe $\mathcal{A}$ d'opérateurs dans E, il faut et il suffit que le projecteur $\underline{P}_V$ soit permutable avec tous les opérateurs de $\mathcal{A}$; le supplémentaire orthogonal de V dans E est alors stable pour tous les opérateurs de $\mathcal{A}$.

En effet, si $\underline{A}$ est un opérateur tel que $\underline{A}(V)\subset V$, on a $\langle \underline{A}^*x,y\rangle = \langle x,\underline{A}y\rangle = 0$ pour $y\in V$ et $x\in E\ominus V$, ce qui prouve que $\underline{A}^*x$ est orthogonal à V, autrement dit que $\underline{A}^*(E\ominus V)\subset E\ominus V$. Si V est stable pour tout opérateur de $\mathcal{A}$, il en est donc de même de $E\ominus V$, puisque $\mathcal{A}$ est autoadjointe. Pour tout $x\in E$ et tout $\underline{A}\in\mathcal{A}$, on a par suite $\underline{A}(\underline{P}_V(x))\in V$ et $\underline{A}(x-\underline{P}_V(x))\in E\ominus V$, puisque $\underline{P}_V(x)\in V$ et $x-\underline{P}_V(x)\in E\ominus V$; comme $\underline{A}(x)=\underline{A}(\underline{P}_V(x))+\underline{A}(x-\underline{P}_V(x))$, on a $\underline{A}(\underline{P}_V(x))=\underline{P}_V(\underline{A}(x))$, ou encore $\underline{A}\underline{P}_V=\underline{P}_V\underline{A}$ pour tout $\underline{A}\in\mathcal{A}$. Réciproquement, si $\underline{P}_V$ est permutable avec tous les opérateurs de $\mathcal{A}$, on a en particulier, pour tout $\underline{A}\in\mathcal{A}$ et tout $x\in V$, $\underline{P}_V(\underline{A}(x))=\underline{A}(\underline{P}_V(x))=\underline{A}(x)$, et par suite $\underline{A}(x)\in V$; cela montre que V est stable pour $\underline{A}$, et achève donc la démonstration.

PROPOSITION 13 .- Si $\mathcal{A}$ est une algèbre autoadjointe d'opérateurs d'un espace hilbertien E, l'adhérence dans $\mathcal{R}(E)$ de la sous-algèbre $\mathcal{A}$, pour la topologie faible ou la topologie maximale, est une algèbre autoadjointe d'opérateurs.

Cela résulte aussitôt de la continuité des applications $\underline{A}\to\underline{A}\underline{B}_0$, $\underline{A}\to\underline{B}_0\underline{A}$ et $\underline{A}\to\underline{A}^*$ dans $\mathcal{R}(E)$ pour chacune des deux topologies considérées.

Nous allons montrer que l'adhérence de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{R}(E)$ pour la topologie forte sur $\mathcal{R}(E)$ est encore une algèbre autoadjointe d'opérateurs, et préciser la nature de cette adhérence.

Etant donnée une algèbre autoadjointe $\mathcal{A}$ d'opérateurs dans un espace préhilb bertien E , nous désignerons par $\mathcal{A}'$ l'algèbre commutante de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre $\mathcal{R}(E)$ (Alg.,chap.X,§) ; on l'appellera simplement la commutante de $\mathcal{A}$ quand aucune confusion n'en résultera . L'algèbre $\mathcal{A}''$ commutante de $\mathcal{A}'$ sera appelée la bicommutante de $\mathcal{A}$. Il est clair que $\mathcal{A}'$ (et par suite $\mathcal{A}''$) sont des algèbres autoadjointes d'opérateurs , et qu'on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$; $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ est le centre de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ le centre de $\mathcal{A}'$; si $\mathcal{A}$ est commutative , il en est de même de sa bicommutante $\mathcal{A}''$ (Alg.,chap.X) . Comme les applications $A \to AB_0$ et $A \to B_0A$ sont continues pour la topologie faible sur $\mathcal{R}(E)$, la commutante $\mathcal{A}'$ d'une algèbre autoadjointe $\mathcal{A}$ quelconque est faiblement fermée dans $\mathcal{R}(E)$.

PROPOSITION 14 .- Soit $\mathcal{A}$ une algèbre autoadjointe d'opérateurs dans XXXXX un espace hilbertien E , et soit V un sous-espace vectoriel fermé de E . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) V est stable pour les opérateurs de $\mathcal{A}$;

b) le projecteur P_V appartient à la commutante $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$;

c) V est stable pour les opérateurs de la bicommutante $\mathcal{A}''$ de $\mathcal{A}$.

C'est une conséquence immédiate de la prop.12 , compte tenu de la relation $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$.

THÉORÈME 2 (von Neumann) .- Pour toute algèbre autoadjointe $\mathcal{A}$ d'opérateurs dans un espace hilbertien E , contenant l'opérateur identique I , l'adhérence faible et l'adhérence forte de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{R}(E)$ sont identiques à la bicommutante $\mathcal{A}''$ de $\mathcal{A}$.

Comme $\mathcal{A}''$ est faiblement fermée (et a fortiori fortement fermée) et contient $\mathcal{A}$, il suffit de prouver que tout opérateur $T \in \mathcal{A}''$ est fortement adhérent à $\mathcal{A}$ (il sera a fortiori faiblement adhérent à $\mathcal{A}$) : en d'autres termes , il faut prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de E , il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\|Tx_i - Ax_i\| \leq \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq n$. Cela va résulter de la proposition plus précise suivante :

PROPOSITION 15 .- Soit T un opérateur quelconque ~~XX~~ appartenant à $\mathcal{A}''$, et soit (x_n) une suite (finie ou infinie) de points de E telle que $\sum_n \|x_n\|^2 < +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur $A \in \mathcal{A}$ tel que $\sum_n \|Tx_n - Ax_n\|^2 \leq \varepsilon^2$.

1° Considérons d'abord le cas où la suite (x_n) se réduit à un seul terme x . Soit V le sous-espace vectoriel fermé de E engendré par les Ax lorsque A parcourt $\mathcal{A}$; il est clair que V est stable pour les opérateurs de $\mathcal{A}$, donc il est aussi stable pour $\mathcal{A}''$ (prop.14) . Puisque $\mathcal{A}$ contient I, on a $x \in V$, d'où $Tx \in V$ pour tout $T \in \mathcal{A}''$; par suite , Tx est limite forte d'éléments de la forme Ax avec $A \in \mathcal{A}$, ce qui prouve la proposition dans ce cas .

2° Abordons maintenant le cas général , et soit F l'espace hilbertien somme directe orthogonale de la famille (E_n) , où $E_n = E$ pour tout indice n (§ 2,n°1); rappelons que , dans F , on a , pour tout $x = (x_n)$, $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2 < +\infty$, et pour $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$, $\langle x, y \rangle = \sum_n \langle x_n, y_n \rangle$. Pour tout opérateur continu S défini dans E , considérons l'endomorphisme U_S de F défini par la condition $U_S((x_n)) = (Sx_n)$. Comme $\|Sx_n\| \leq \|S\| \cdot \|x_n\|$, on a $\sum_n \|Sx_n\|^2 \leq \|S\|^2 \cdot \sum_n \|x_n\|^2$, donc U_S est un opérateur continu dans F . L'application $S \to U_S$ est donc une représentation de l'algèbre $\mathcal{R}(E)$ dans l'algèbre ~~XXXX~~ $\mathcal{R}(F)$, telle que $U_{S^*} = (U_S)^*$ comme il résulte aussitôt des définitions .

Soit alors $\mathcal{B}$ l'image par cette représentation de ~~XXXXXXXX~~ la sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{R}(E)$: $\mathcal{B}$ est une algèbre autoadjointe d'opérateurs dans F , contenant l'opérateur identique : nous allons montrer que , pour tout opérateur $T \in \mathcal{A}''$ l'opérateur U_T appartient à la bicommutante $\mathcal{B}''$ de $\mathcal{B}$; la première partie de la démonstration , appliquée à U_T , achèvera alors de démontrer le théorème . Considérons pour cela un opérateur quelconque C de la commutante $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$; pour tout indice n , et tout $x_n \in E_n$, posons $Cx_n = \sum_m C_{mn} x_n$, avec $C_{mn} x_n \in E_m$; C_{mn} est une application linéaire de $E_n = E$ dans $E_m = E$, c'est-à-dire un opérateur dans F , et comme $\|Cx_n\|^2 = \sum_m \|C_{mn} x_n\|^2$, on a $\|C_{mn} x_n\| \leq \|Cx_n\|$, ce qui prouve que

C_{mn} est continu . En écrivant que , pour tout $A \in \mathcal{A}$, U_A permute avec C dans E_n , il vient $C_{mn}A = AC_{mn}$ pour tout couple d'indices , autrement dit , ~~donc~~ tous les C_{mn} appartiennent à la commutante $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$. Tenant compte de ce que , pour $x=(x_n)=\sum_n x_n$, on a $Cx=\sum_n Cx_n$ en vertu de la continuité de C , on vérifie aussitôt que pour $T \in \mathcal{A}''$, U_T est permutable avec tout opérateur C de $\mathcal{B}'$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE .- Pour toute algèbre autoadjointe $\mathcal{A}$ d'opérateurs de E , contenant l'opérateur unité , les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mathcal{A}$ est faiblement fermée ;

b) $\mathcal{A}$ est fortement fermée ;

c) $\mathcal{A}$ est identique à sa bicommutante .

On notera que si $\mathcal{A}$ vérifie ces propriétés , $\mathcal{A}$ est fermée pour la topologie maximale , mais la réciproque de cette proposition est inexacte (exerc.   ).
