RÉDACTION N° 127

COTE : NBR 034

TITRE : RAPPORT SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 48

NOMBRE DE FEUILLES : 48

Rapport sur les variétés différentiables

Table des matières.

NRB 37

- Suite -

RAPPORT SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

PREMIÈRE PARTIE

Définitions et propriétés générales

§ 1. Définition d'une variété p fois continument différentiable (p. C.D.)

Une variété à n dimensions réelles p fois continument différentiable V_p^n $(0 \leq p \leq +\infty)$ est définie par une variété topologique à n dimensions V^n et un ensemble $\mathcal{F}_p(V_p^n)$ de fonctions numériques (réelles) définies sur des ouverts de V^n, qui est dit "l'ensemble des fonctions p fois continument différentiables sur V_p^n". $\mathcal{F}_{p,0}(V_p^n)$ sera le sous-ensemble de $\mathcal{F}_p(V_p^n)$ formé des fonctions définies au moins sur l'ouvert 0 de V^n. $\mathcal{F}_{p,x_0}$ le sous-ensemble de celles qui sont définies dans un voisinage ouvert (non précisé) de x_0 ; $\mathcal{F}_p(0)$ sera l'ensemble des restrictions à l'ouvert 0 des $f \in \mathcal{F}_p(V_p^n)$.

Axiomes de $\mathcal{F}_p$.

(F_I). Pour que f, définie sur la réunion 0 d'une famille d'ouverts 0_i de V^n, soit $\in \mathcal{F}_p(V_p^n)$, il faut et il suffit que sa restriction à chaque 0_i le soit.

(F_{II}). Quel que soit $x_0 \in V^n$, il existe un homéomorphisme H d'un voisinage ouvert 0 de x_0 sur un ouvert H(0) de R^n, tel que l'ensemble des $f_{\lfloor 0} \overset{-1}{H}$, où $f \in \mathcal{F}_{p,0}$, soit identique à l'ensemble de toutes les fonctions numériques p.C.D. définies sur l'ouvert H(0) de R^n.

On appellera $\mathcal{H}_p$ l'ensemble des homéomorphismes possédant cette propriété $\mathcal{H}_{p,0}$, le sous-ensemble de ceux qui sont définis sur l'ouvert 0 de V^n, $\mathcal{H}_{p,x_0}$ le sous-ensemble de ceux qui sont définis dans un voisinage ouvert (non précisé) de x_0 ; $\mathcal{H}_p(0)$ l'ensemble des restrictions de ces homéomorphismes à l'ouvert 0.

- 2 -

Conséquences.

1) Si O est un ouvert $\subset V_p^n$; c'est aussi une variété p C.D., définie par l'ensemble $\mathcal{F}_p(O)$.

2) R^n est une variété indéfiniment différentiable (= ∞ C.D.)

$\mathcal{F}_\infty(R^n)$ est l'ensemble des fonctions ∞ C.D. ordinaires de R^n.

Sur une variété V à n dimensions, on dit qu'une structure p C.D. est plus fine qu'une autre si ses fonctions numériques p C.D. sont plus nombreuses.

Ex. sur R, structure (1) définie par les fonctions p C.D. de x, structure (2) définie par les fonctions p C.D. de x^3, (1) est plus fine que (2).

§2. Cartes locales. Atlas. Autre définition de V_p^n.

Une carte locale est le système d'un ouvert O de V_p^n et d'un homéomorphisme $H \in \mathcal{H}_{p,O}$. Un système de coordonnées $y_1, y_2, \dots y_n$ dans R^n définit alors les fonctions $x_i = y_i \circ H$ qui forment un système de coordonnées locales sur V_p^n, définies dans O. Pour que f, définie sur O, soit $\in \mathcal{F}_{p,O}$, il faut et il suffit qu'elle soit une fonction p C.D. des x_i. Un atlas est un recouvrement de V_p^n par des cartes locales.

Inversement on peut définir une variété p C.D. par un atlas ou famille de cartes locales.

On définit alors V_p^n par l'ensemble $\mathcal{H}_p(V_p^n)$ des "homéomorphismes p C.D." d'ouverts de V_p^n sur des ouverts de R^n. Les axiomes de $\mathcal{H}_p$ sont :

(H_I) Pour que H, homéomorphisme de la réunion O d'une famille d'ouverts O_i de V^n sur un ouvert H(O) de R^n, soit $\in \mathcal{H}_p$, il faut et il suffit que sa restriction à chaque O_i le soit.

(H_{II}) Si H et H' $\in \mathcal{H}_{p,O}$, $H \circ H'^{-1}$ est un homéomorphisme p C.D. de H'(O) sur H(O).

(H_{III}) Si $H \in \mathcal{H}_{p,0}$ et si φ est un homéomorphisme p C.D. de $H(O)$ sur un ouvert de R^n, $\varphi\circ H \in \mathcal{H}_{p,0}$.

Les 2 définitions de V_p^n par $\mathcal{F}$ ou par $\mathcal{H}$, sont équivalentes. On peut d'ailleurs se borner à définir V_p^n par une famille incomplète (O_i, H_i) de cartes locales, les O_i formant un recouvrement de V.
Le seul axiome est alors :

(C) Si $O_i \cap O_j = O_{ij}$; $H_i \circ H_j^{-1}$ est un homéomorphisme p C.D. de $H_j(O_{ij})$ sur $H_i(O_{ij})$.

<u>Conséquence.</u> Si V est une variété p C.D., elle est aussi q C.D., $q \leqslant p$. Définition évidente.

§ 3. <u>Variétés analytiques réelles (A.R.) ou complexes (A.C.)</u>

1° Une variété A.R. à n dimensions $V^n_{A.R}$ est une variété sur laquelle on a défini soit l'ensemble $\mathcal{F}_{A.R}$ des fonctions réelles analytiques, soit l'ensemble $\mathcal{H}_{A.R}$ des homéomorphismes A.R. dans ~~xxxxxx~~ R^n.
Axiomes analogues aux (F) ou (H). Une variété A.R est ∞ C.D.

<u>Remarque importante.</u> Sur une V_p^n ou $V^n_{A.R.}$ on peut définir les fonctions complexes p C.D. ou A.R. (?) comme $f+ig$, où f et $g \in \mathcal{F}$.
Mais dans la suite leur considération serait une gêne, elle introduirait un espace tangent à 2n dimensions réelles ou n dimensions complexes.

2° Une variété analytique à n dimensions complexes $V^n_{A.C.}$ est une variété sur laquelle on a défini l'ensemble $\mathcal{F}_{A.C.}$ des fonctions analytiques complexes définies sur des ouverts de V^n. Axiomes analogues à (F_I) et (F_{II}) ; l'ensemble $\mathcal{H}_{A.C.}$ des homéomorphismes A.C. d'ouverts de V^n sur des ouverts de C^n, axiomes analogues à (H_I), (H_{II}), (H_{III}).

Une variété A.C. à n dimensions est A.R. à 2n dimensions.
On n'en parlera plus dans la suite. pourquoi ?

V^n_p ?

§ 4. Propriétés des fonctions différentiables sur V^n_p.

Fonctions p C.D. sur toute V^n forment espace vectoriel $C_p = \mathfrak{F}_{p,V^n}$ sur lequel on met topologie (convergence compacte de chaque dérivée).

1° Si F est une fonction p C.D. de m variables réelles U_i, et si les f_i sont m fonctions $\in C_p$, $F(f_1, f_2, \ldots f_m)$ et $\bar{F}$ sont $\in C_p$. En particulier produit et polynomes.

2° Partition de l'unité.

Quel que soit le recouvrement de V^n_p par des ouverts O_i, il existe des fonctions numériques $\alpha_i \geqslant 0$, p C.D. ; $\alpha_i \equiv 0$ en dehors d'un ensemble fermé $\subset O_i$, avec $\sum \alpha_i \equiv 1$.

3° C_p est dense dans C_q si $q \leqslant p$. Pour $q=0$ résulte de Stone, doit se démontrer autrement pour $q \neq 0$: utiliser partition de l'unité, d'où passage au local et à I^n. En particulier C_∞ dense dans tous les C_q. Mais on ne sait pas si $C_{A.R}$ ou $C_{A.C}$ contient autre chose que des constantes ! pas clair

Deuxième partie

Eléments infinitésimaux du 1^{er} ordre.

§ 5. Différentielle première d'une fonction numérique.

Soit $f(x)$ une fonction $\in \mathcal{F}_{1,x_0}$ sur V_p^n $(p \geqslant 1)$. Si pour un homéomorphisme $H \in \mathcal{H}_{1,x_0}$, la fonction $f \circ \overset{-1}{H}$, définie sur un voisinage ouvert de $H(x_0)$ dans R^n, a une différentielle nulle, on démontre que cette propriété est indépendante de l'homéomorphisme H, c'est une propriété intrinsèque de f au voisinage de x_0. On dit que f a une différentielle nulle au point x_0. Le quotient de l'espace vectoriel $\mathcal{F}_{1,x_0}$ par le sous-espace des fonctions à différentielle nulle en x_0 est l'espace vectoriel $E^*_{x_0}(V)$ des différentielles des fonctions numériques en x_0.

La classe d'équivalence de $f \in \mathcal{F}_{1,x_0}$ s'appelle différentielle de f en x_0 et se note $d_{x_0} f$ ou $d_{x_0} f(x)$. mauvaise notation

En utilisant un homéomorphisme $H \in \mathcal{H}_{1,x_0}$ on montre :

Théorème. L'espace vectoriel $E^*_{x_0}(V)$ à n dimensions.

Chaque homéomorphisme $H \in \mathcal{H}_{1,x_0}$ définit un isomorphisme canonique de $E^*_{x_0}(V)$ sur le dual R^{n*} de R^n, par $d_{x_0} f \longrightarrow d_{H(x_0)}(f \circ \overset{-1}{H})$.

Si $(x_i)_{i=1,2\dots n}$, est un système de coordonnées locales, les $d_{x_0} x_i$ forment une base de $E^*_{x_0}(V)$ et

$$d_{x_0} f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x=x_0} d_{x_0} x_i .$$

La différentielle d'une constante est nulle.

Différentielle d'un produit

(1) $\quad d_{x_0} fg = (d_{x_0} f)\, g(x_0) + f(x_0)\,(d_{x_0} g)$

Différentielle d'un quotient, d'un polynôme, d'une fonction de fonction : si $F(u_1, u_2, \dots u_m)$ est fonction 1 C.D. de m variables réelles, et si $f_1, f_2 \dots f_m$ sont 1 C.D.

(2) $\quad d_{x_0} F(f_1, f_2 \dots f_m) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial u_i}(f_1, \dots f_m)\, d_{x_0} f_i$

<u>Remarque</u>. Si la variété est au moins 2 C.D. on peut définit la différentielle sans passer par un homéomorphisme H :

L'espace $E^{*}_{x_0}$ des différentielles est le quotient de l'espace $\mathcal{F}_{1,x_0}$ par le sous-espace Γ engendré par les produits de 2 fonctions s'annulant en x_0 et par les fonctions constantes. Cela revient à prendre comme définition la formule de la différentielle du produit. Cette méthode n'évitera pas l'utilisation d'un homéomorphisme H pour l'étude des propriétés de la différentielle, mais son caractère intrinsèque a priori rend inutile la démonstration de l'invariance par rapport à l'homéomorphisme H .

(Si la variété n'est qu'1 C.D., on doit remplacer le sous-espace Γ engendré par les produits de 2 fonctions nulles en x_0 et les constantes par son adhérence $\overline{\Gamma}$ dans $\mathcal{F}_{1,x_0}$ muni d'une pseudo-topologie analogue à celle de C_1).

§ 6. <u>Espace vectoriel tangent à la variété</u>.

Par définition, l'espace tangent $E_{x_0}(V^n_p)$ en x_0 est le dual de $E^{*}_{x_0}(V_p)$. Un vecteur tangent ξ_{x_0} en x_0 est donc une forme linéaire de différentielles ; c'est encore une forme linéaire $\xi_{x_0}(f)$ de $f \in \mathcal{F}_{1,x_0}$ telle que $d_{x_0} f = 0$ entraîne $\xi_{x_0}(f) = 0$. Si $p \geqslant 2$, c'est une forme linéaire de f telle que

$$(3) \qquad \xi_{x_0}(f.g) = \xi_{x_0} f.g(x_0) + f(x_0)\, \xi_{x_0}(g) .$$

ξ_{x_0} s'appelle aussi une <u>dérivation</u> en x_0 .

Dérivée d'une constante = 0, d'un produit, d'un quotient, d'un polynome, d'une fonction de fonction, $F(f_1, f_2, \dots f_m)$.

<u>Notation</u>. $\xi_{x_0}(f)$, $\langle \xi_{x_0} , d_{x_0} f \rangle$, Dérivé suivant un vecteur tangent

L'espace tangent E_{x_0} a n dimensions. Si H est un homéomorphisme $\in \mathcal{H}_{1,x_0}$, H définit un isomorphisme canonique de $E_{x_0}(V^n_p)$ sur R^n .

Si $(x_i)_{i=1,2,..n}$ est un système de coordonnées locales sur V_p^n, au voisinage de x_0, les $d_{x_0}x_i$ forment un système de coordonnées sur $E^*_{x_0}$. !!

§ 7. Algèbre multilinéaire en un point de la variété.

Un tenseur r fois contravariant et s fois covariant en x_0 est un élément de l'espace vectoriel $(\overset{r}{\otimes} E_{x_0}) \otimes (\overset{s}{\otimes} E^*_{x_0})$. Un homéomorphisme $H \in \mathcal{H}_{1,x_0}$ établit un isomorphisme canonique entre $(\overset{r}{\otimes} E_{x_0} \otimes \overset{s}{\otimes} E^*_{x_0})$ et $(\overset{r}{\otimes} R^n \otimes \overset{s}{\otimes} R^{n*})$. Un multi-vecteur tangent X_{x_0} en x_0 est un élément de l'algèbre extérieure $\wedge E_{x_0}$; une multi-forme ω_{x_0} un élément de l'algèbre extérieure $\wedge E^*_{x_0}$.

§ 8. Espaces fibrés du premier ordre définis par la variété.

On appellera $\overset{r}{\otimes} E \otimes \overset{s}{\otimes} E^* (V_p^n)$ l'espace topologique des couples d'un point x de V_p^n et d'un élément T_x de $\overset{r}{\otimes} E_x \otimes \overset{s}{\otimes} E^*_x(V)$.
On montre immédiatement que si $H \in \mathcal{H}_{p,O}$ (O = ouvert de V_p^n), H définit un isomorphisme canonique d'un ouvert de $\overset{r}{\otimes} E \otimes \overset{s}{\otimes} E^* (V_p^n)$ dans $R^n \times \left[\overset{r}{\otimes} R^n \otimes \overset{s}{\otimes} R^{*n}\right]$, donc une "carte locale" de $\overset{r}{\otimes} E \otimes \overset{s}{\otimes} E^*(V_p^n)$; ces cartes locales définissent une famille (incomplète) de cartes locales d'une variété à $n+n^{r+s}$ dimensions p-1 C.D.

En particulier E(V), espace des couples d'un point x de V et d'un vecteur ξ_x tangent en x, est une variété à 2n dim. p-1 C.D. Sa structure p-1 C.D. est la moins fine pour laquelle, quelle que soit $f \in C^p(V)$, f(x) et $\langle \xi_x , d_x f \rangle$ sont des fonctions numériques p-1 C.D. sur E(V). Si $(x_i)_{i=1,2,..n}$ sont n coordonnées locales sur V_1 $(x_i)_{i=1,2,..n}$ et $(d_x x_i)_{i=1,2,..n}$ sont 2n coordonnées locales sur E(V).

Mauvaise notation

$E^*(V)$ est l'espace des couples d'un point x de V et d'une différentielle ω_x au point x ; c'est encore une variété à $2n$ dim. $p-1$ C.D. Enfin il faudra considérer les espaces

$\bigwedge E(V)$, $\bigwedge E^*(V)$, à $n+2^n$ dim , $p-1$ C.D.

Sans insister sur la notion d'espace fibrés, il y a lieu de la mettre en évidence par :

l'existence des sous-espaces = fibres, $\overset{r}{\otimes} E_x \otimes \overset{s}{\otimes} E^*_x$, avec leur structure d'espace tensoriel ; l'existence d'une application canonique, la ouverte "projection" sur la base : $\overset{r}{\otimes} E_x \otimes \overset{s}{\otimes} E_x \longrightarrow x$.

§ 9. Applications différentiables.

Une application continue φ d'une variété U^m_p dans une autre V^n_q est dite k C.D. au voisinage de $x_0 \in U$ ($k \leq p$, $k \leq q$) si, quelle que soit $f \in \mathcal{F}_{k,\varphi(x_0)}(V^n_q)$, $f\circ\varphi$ est k C.D. au voisinage de x_0 .

Théorème des fonctions composées : si $U \xrightarrow{\varphi} V$, $V \xrightarrow{\psi} W$, φ et ψ k C.D., alors $U \xrightarrow{\psi\circ\varphi} W$, $\psi\circ\varphi$ est k C.D.

Soit un homéomorphisme $H \in \mathcal{H}_{k,x_0}(U)$, un homéomorphisme $K \in \mathcal{H}_{k,\varphi(x_0)}(V)$. Pour que φ soit une application k C.D. de U dans V , au voisinage de $x_0 \in U$, il faut et il suffit que $K\circ\varphi\circ \overset{-1}{H}$ soit une application k C.D. dans R^n d'un voisinage de $H(x_0)$ dans R^m .

Théorème. Si $f \in \mathcal{F}_{1,\varphi(x_0)}(V^n_q)$, et si $d_{\varphi(x_0)}f = 0$, alors $d_{x_0}(f\circ\varphi)=0$.

Se démontre par homéomorphismes H et K (ou intrinsèquement en utilisant des combinaisons de produits $f\,g$). $d\varphi$? $d\varphi^*$?

Conséquence. φ définit une application linéaire $\varphi^*_{x_0}$ de $E^*_{\varphi(x_0)}(V^n_q)$ dans $E^*_{x_0}(U^m_p)$. Sa transposée φ_{x_0} est une application linéaire de $E_{x_0}(U^m_p)$ dans $E_{x_0}(V^n_q)$, qu'on appelle différentielle de l'application φ au point x_0 . Elle peut d'ailleurs se définir directement : si $\xi_{x_0} \in E_{x_0}(U^m_p)$, son image $\varphi_{x_0}(\xi_{x_0})$ sera un vecteur

$\in E_{\varphi(x_0)}(V^n_q)$ défini comme forme linéaire sur des fonctions $f \in \mathcal{F}_{1,\varphi(x_0)}(V^n_q)$ par la formule

$$\varphi_{x_0}(\xi_{x_0})(f) = \xi_{x_0}(f \circ \varphi)$$

qui satisfait bien aux axiomes d'une dérivation au point $\varphi(x_0)$ de V^n_q.
Si φ est une application constante, les applications linéaires, φ_x , φ^*_x sont nulles. Expressions de φ_{x_0} , $\varphi^*_{x_0}$ avec des coordonnées locales.

Si φ est une application 1 C.D. de U dans V , le couple $(\varphi(U), \varphi)$ est une <u>variété portée</u> par V . L'image $\varphi_{x_0}(E_{x_0}(U))$ est ce qu'on appelle le sous-espace vectoriel de $E_{\varphi(x_0)}(V)$ tangent en $\varphi(x_0)$ à la variété portée.

<u>Remarque</u> :

Si un point x d'une variété V dépend d'un paramètre réel t , $x = \varphi(t)$ est une application de R dans V ; ce qu'on appelle la vitesse $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}$ est la valeur de l'application différentielle φ_{t_0} pour le vecteur de R de coordonnée $dt = 1$. C'est un vecteur de $E_{\varphi(t_0)}(V)$. Composantes en coordonnées locales.

Idem pour dérivées partielles dans le cas de plusieurs paramètres réels.

L'application φ peut alors s'étendre aux algèbres multilinéaires tangentes, et aux espaces fibrés associés. $\overset{z}{\otimes}\varphi_x$ est une application linéaire de $\overset{z}{\otimes} E_x(U^m_p)$ dans $\overset{z}{\otimes} E_{\varphi(x)}(V^n_q)$, et φ est une application de l'espace fibré $\overset{z}{\otimes} E(U^m_p)$ dans l'espace fibré $\overset{z}{\otimes} E(V^n_q)$. De même $\overset{\delta}{\otimes} E^*(V^q_n) \xrightarrow{\overset{\delta}{\otimes}\varphi^*} \overset{\delta}{\otimes} E^*(U^m_p)$. Enfin

$$\bigwedge E(U^m_p) \xrightarrow{\Lambda\varphi} \bigwedge E(V^n_p), \quad \bigwedge E^*(V^n_q) \xrightarrow{\Lambda\varphi^*} \bigwedge E^*(U^m_p)$$

Si φ est k C.D., on démontre que les applications d'espaces fibrés $\overset{z}{\otimes}\varphi$, $\overset{\delta}{\otimes}\varphi$, $\bigwedge\varphi$, $\bigwedge\varphi^*$ sont k-1 C D.

Il résulte immédiatement des définitions que si

$$U \xrightarrow{\varphi} V , \quad V \xrightarrow{\psi} W ,$$

la différentielle de la composée des 2 applications est la composée des différentielles : $(\psi \circ \varphi)_x = \psi_{\varphi(x)} \circ \varphi_x$.

Plus généralement $\overset{r}{\otimes}(\psi \circ \varphi) = \overset{r}{\otimes}\psi \circ \overset{r}{\otimes}\varphi$ et extensions évidentes à φ^*, $\overset{s}{\otimes}\varphi^*$, $\Lambda\varphi$, $\Lambda\varphi^*$. (Cela résulte uniquement de l'algèbre multilinéaire). $\Lambda\varphi_x$ est une <u>représentation de l'algèbre</u> $\Lambda E_x(U^m_p)$ dans l'algèbre $\Lambda E_{\varphi(x)}(V^n_q)$; $\Lambda\varphi^*_x$ une représentation de l'algèbre $\Lambda E^*_{\varphi(x)}(V^n_q)$ dans l'algèbre $\Lambda E^*_x(U^m_p)$.

<u>Remarque</u>. Si f est une fonction numérique, c'est une application de V^n_p dans R ; $d_x f$ est une forme linéaire sur $E_x(V^n_p)$, donc une application linéaire de $E_x(V^n_p)$ dans $R = E_{f(x)}(R)$; ce n'est autre que la différentielle f_x de l'application f. La différentielle d'une fonction de fonction $F(f_1,..f_m)$ déduit alors de la différentielle d'une application composée.

Désormais, quand aucune confusion ne sera possible, nous emploierons toujours φ au lieu de $\overset{r}{\otimes}\varphi$ ou $\Lambda\varphi$, φ^* au lieu de $\overset{s}{\otimes}\varphi^*$, $\Lambda\varphi^*$.

§ 10. <u>Homéomorphismes différentiables.</u>

On dit que φ est un homéomorphisme k C.D. de U^m_p sur V^n_q si c'est un homéomorphisme et si φ et φ^{-1} sont k C.D. Alors φ_x et $\overset{-1}{\varphi}_{\varphi(x)}$ sont 2 applications linéaires réciproques ; de même φ^*_x et $\overset{-1}{\varphi}{}^*_{\varphi(x)}$. Donc les dimensions sont égales, $m = n$.

On peut alors définir l'isomorphisme $\overset{r}{\otimes}\varphi_x \otimes \overset{s}{\otimes}\overset{-1}{\varphi}{}^*_{\varphi(x)}$ de $\overset{r}{\otimes}E_x \otimes \overset{s}{\otimes}E^*_x(U)$ sur $\overset{r}{\otimes}E_{\varphi(x)} \otimes \overset{s}{\otimes}E_{\varphi(x)}(V)$. De même avec ΛE et ΛE^*. L'application $\Lambda\varphi_x \times \Lambda\overset{-1}{\varphi}{}^*_{\varphi(x)}$ est une représentation de la structure de module de ΛE^*_x par rapport à l'anneau ΛE_x (définie par la multiplication intérieure) de U sur la structure analogue de V.

Les homéomorphismes $H \in \mathcal{H}_k(V^n_p)$ ne sont autres que les homéomorphismes k C.D. d'ouverts de V sur des ouverts de R^n.

§ 11. <u>Champs de tenseurs</u>.

Sur V^n_p, on appelle champ de tenseurs T r fois contravariant et s fois covariant, k C.D. ($k \leqslant p-1$) une application k C.D. $x \to (x, T_x)$ de V^n_p

?

dans $\overset{r}{\otimes} E \otimes \overset{s}{\otimes} E^*(V_p^n)$ telle que pour tout x , $T_x \in \overset{r}{\otimes} E_x \otimes \overset{s}{\otimes} E_x^*(V_p^n)$. De même champ de multivecteurs X , et champ de formes extérieures ω (qu'on appelle simplement une forme différentielle ω sur V_p^n . Un champ de scalaire est isomorphe à fonction numérique. Si f est une fonction $\in C_1(V), x \to d_x f$ définit une forme différentielle qu'on écrit df , alors $(df)_x = d_x f$, conserve toutes les structures algèbriques. En particulier, le produit scalaire d'un champ S r fois co-variant s fois contravariant par un champ T r fois contravariant s fois covariant est une fonction numérique k C.D.: $\langle S,T \rangle$ définie par $x \to \langle S_x, T_x \rangle$. Les champs de multivecteurs forment une algèbre sur R (le produit $X \wedge Y$ est le champ $x \to X_x \wedge Y_x$), de même que les formes différentielles (le produit $\omega \wedge \omega'$ est la forme différentielle $x \to \omega_x \wedge \omega'_x$), et l'une des algèbres est un module sur l'autre par la multiplication intérieure (le produit $X \lrcorner \omega$ est la forme différentielle $x \to X_x \lrcorner \omega_x$). On peut aussi considèrer ces champs comme des modules sur l'anneau des fonctions numériques k C.D. ($f\,T$ est le champ $x \to f(x)\, T_x$)

On voit alors que, <u>au voisinage de chaque point</u>, le module des champs de vecteurs k C.D. M , ou le module des formes différentielles d'ordre 1 k C.D. , M^*, sont des modules libres à n dimensions <u>sur l'anneau des fonctions numériques</u> k C.D. Le module des champs de tenseurs r fois contravariants et s fois covariants est le module produit kroneckérien

$$\overset{r}{\otimes} M \otimes \overset{s}{\otimes} M^* .$$

L'algèbre des champs de multivecteurs est $\wedge M$, l'algèbre des formes différentielles $\wedge M^*$.

D'où l'expression d'un champ de multivecteurs $X = \sum \frac{X^{i_1 i_2 \dots i_r}}{r!}$ $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, et d'une forme différentielle

$$\omega = \sum \frac{1}{s!} \omega_{i_1 i_2 \dots i_s} \, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$$

si les (e_i) forment une base locale et les (x^i) des coordonnées locales, définies par un homéomorphisme H dans R^n .

Si φ est une application $(k+1)$ C.D. de U_p^m dans V_q^n , on peut définir l'image réciproque φ^* de tout champ de tenseurs <u>co-variant</u>, de toute forme différentielle sur V_q^n ; c'est un champ ou une forme k C.D. sur U_p^m :

$$(\varphi^* \omega)_x = \varphi_x^* (\omega_{\varphi(x)})$$

Par contre en général il n'y a pas d'image directe d'un champ contravariant ; il y en a quand φ est biunivoque, elle est définie par

$$(\varphi(X))_y = \varphi_x (X_{\varphi^{-1}(y)})$$

Mais cette image directe ne sera un champ k C.D. que si $\overset{-1}{\varphi}$ est $(k+1)$ C.D., c'est-à-dire si φ est un homéomorphisme $(k+1)$ C.D.

φ^* et, si elle existe, φ , sont des représentations des structures algèbriques des champs de tenseurs.

Troisième Partie

Produits de variétés

§ 12. Structure différentiable produit.

Soient U_p^m, V_p^n 2 variétés p C.D. Si $H \in \mathcal{H}_p(U)$, $K \in \mathcal{H}_p(V)$, les homéomorphismes $H \times K$ d'ouverts de $U \times V$ sur des ouverts de R^{m+n} définissent une famille (incomplète) de cartes locales d'une structure p C.D. sur $U \times V$.

Si $(x_i)_{i=1,2..m}$, $(y_j)_{j=1,2,..n}$ sont des coordonnées locales au voisinage de $x_o \in U$, $y_o \in V$, les x_i et y_j forment un système de m+n coordonnées locales au voisinage de $(x_o, y_o) \in U \times V$.

Si $f(x) \in \mathcal{F}_p(U)$, alors $f(x)$ considérée comme fonction sur $(U \times V)$ (notation abrégée de $f \circ p_U^r$) est $\in \mathcal{F}_p(U \times V)$. De même pour $g(y) \in \mathcal{F}_p(V)$. Cela revient à dire que les applications coordonnées $U \times V \xrightarrow{pr_U} U$, $U \times V \xrightarrow{pr_V} V$ sont p C.D. On voit même que la structure p C.D. de $(U \times V)$ est la moins fine pour laquelle les 2 applications pr_U, pr_V soient p C.D., c'est-à-dire pour laquelle toutes les fonctions $f \circ pr_U$ $(f \in \mathcal{F}_p(U))$, $g \circ pr_V$ $(g \in \mathcal{F}_p(V))$ soient p C.D.

Plus généralement si φ est une application de W dans $U \times V$, il faut et il suffit pour qu'elle soit k C.D. $(k \leq p)$ que $p_U^r \circ \varphi$, $p_V^r \circ \varphi$ soient k C.D.

Si $f(x,y) \in \mathcal{F}_{p,(x_o,y_o)}(U \times V)$, les deux "fonctions partielles" $f(x,y_o)$ et $f(x_o,y)$ sont respectivement $\in \mathcal{F}_{p,x_o}(U)$ et $\mathcal{F}_{p,y_o}(V)$. Réciproque fausse. Cela signifie que, quels que soient x_o et y_o, l'application $\overline{y_o}$ définie par $x \longrightarrow (x,y_o)$, et $\overline{x_o}$ définie par $y \longrightarrow (x_o,y)$ sont p C.D.

Plus généralement si φ est une application k C.D. $(k \leq p)$ de $U \times V$ dans W, les 2 applications partielles $\varphi \circ \overline{y_o}$, $\varphi \circ \overline{x_o}$ sont k C.D.

<u>Théorème</u>. Si $C_p(U\times V)$ est l'espace topologique des fonctions p C.D. sur $U\times V$, les combinaisons linéaires finies de $f(x)\ g(y)$ ($f\in C_p(U)$, $g\in C_p(V)$) y forment un ensemble dense.

§ 13. Eléments infinitésimaux du 1^er ordre.

L'image par $(pr_U)^*_{x_0,y_0}$ de $E^*_{x_0}(U)$ est un sous-espace vectoriel A^* de $E^*_{(x_0,y_0)}(U\times V)$; comme $x \xrightarrow{\bar{y}_0} x,y_0 \xrightarrow{pr_U} x$ est l'identité A^* est isomorphe à $E^*_{x_0}(U)$, donc à m dimensions. (sous-espace des différentielles des fonctions de x seul). De même $B^*=(pr_V)^*_{x_0,y_0}$ $(E^*_{y_0}(V))$ est un sous-espace à n dimensions (sous-espace des différentielles des fonctions de y seul). D'autre part, à partir de l'application $(x,y)\longrightarrow(x,y_0)$ qui est $\bar{y}_0\circ pr_U$, on voit que $(\bar{y}_0\circ pr_U)^*_{(x_0,y_0)}$ est une application de $E^*_{x_0,y_0}(U\times V)$ sur A^* qui à une différentielle $d_{(x_0,y_0)}f(x,y)$ fait correspondre la différentielle partielle $d_{(x_0,y_0)}f(x,y_0)$; elle est idempotente et applique B^* sur 0 . Donc A^* et B^* sont supplémentaires et toute différentielle est somme des différentielles partielles :

(4) $$d_{(x_0,y_0)}f(x,y)=d_{(x_0,y_0)}f(x,y_0)+d_{(x_0,y_0)}f(x_0,y)$$

De même $E_{(x_0,y_0)}(U\times V)$ est somme de 2 sous-espaces

A isomorphe à $E_{x_0}(U)$

B isomorphe à $E_{y_0}(V)$.

Le vecteur le plus général de $E_{(x_0,y_0)}(U\times V)$ est

$$(\bar{y}_0)_{x_0}(\xi_{x_0})+(\bar{x}_0)_{y_0}(\eta_{y_0}) \quad \text{où} \quad \xi_{x_0}\in E_{x_0}(U)\ ,\ \eta_{y_0}\in E_{y_0}(V)$$

qu'on abrégera par (ξ_{x_0}, η_{y_0}) .

(5) $$(\xi_{x_0}, \eta_{y_0})f = \xi_{x_0}\big[f(x,y_0)\big]+\eta_{y_0}\big[f(x_0,y)\big]$$

ξ_{x_0} est une dérivation partielle en x , η_{y_0} ~~xxx~~ une dérivation partielle en y .

Si maintenant $z = \varphi(x,y)$ est une application 1 C.D. de $(U\times V)$ dans W, la différentielle $\varphi_{(x_0,y_0)}$ est l'application linéaire somme des différentielles partielles $\varphi_{(x_0,y_0)}(x,y_0)$ et $\varphi_{(x_0,y_0)}(x_0,y)$.

L'espace tensoriel $\overset{2}{\otimes} E_{(x_0,y_0)}(U\times V)$ est la somme directe de 4 sous-espaces respectivement isomorphes à $\overset{2}{\otimes} E_{x_0}(U)$, $E_{x_0}(U)\otimes E_{y_0}(V)$, $E_{y_0}(V)\otimes E_{x_0}(U)$, $\overset{2}{\otimes} E_{y_0}(V)$. Extension à $\overset{r}{\otimes} E$, $\overset{s}{\otimes} E^*$, $\overset{r}{\otimes} E\otimes\overset{s}{\otimes} E^*$.
De même, $\overset{r}{\wedge} E_{(x_0,y_0)}(U\times V)$ est somme directe de sous-espaces resp. isomorphes à $\overset{h}{\wedge} E_{x_0}(U)\otimes\overset{r-h}{\wedge} E_{y_0}(V)$. Un élément de $\overset{h}{\wedge} E_{x_0}(U)$ $\otimes\overset{k}{\wedge} E_{y_0}(V)$ est un <u>multivecteur de degré h en x et de degré k en y</u>.
$\wedge E_{(x_0,y_0)}(U\times V)$ est isomorphe au produit kroneckérien

$\wedge E_{x_0}(U)\otimes\wedge E_{y_0}(V)$, <u>en tant qu'espace vectoriel, non en tant qu'algèbre</u>. Cet isomorphisme s'écrit en tout rigueur de la façon suivante : si $X_{x_0}\in\wedge E_{x_0}(U)$, $Y_{y_0}\in\wedge E_{y_0}(V)$

(6) $X_{x_0}\otimes Y_{y_0} \rightleftarrows (\overline{y}_0)_{x_0}(X_{x_0})\wedge(\overline{x}_0)_{y_0}(Y_{y_0})$.

Mêmes propriétés avec $\wedge E^*$. L'isomorphisme entre $\wedge E^*_{(x_0,y_0)}(U\times V)$ et $\wedge E^*_{x_0}(U)\otimes\wedge E^*_{y_0}(V)$ est défini, pour $\alpha_{x_0}\in E^*_{x_0}(U)$, $\beta_{y_0}\in E^*_{y_0}(V)$, par

(7) $\alpha_{x_0}\otimes\beta_{y_0} \rightleftarrows (pr_U)^*_{x_0,y_0}(\alpha_{x_0})\wedge(pr_V)^*_{(x_0,y_0)}(\beta_{y_0})$

Ces propriétés résultent uniquement des propriétés des tenseurs sur un produit de 2 espaces vectoriels.

En passant aux espaces fibrés, on voit que $E\,(U\times V)$ est isomorphe à $E(U)\times E(V)$, en tant que variété fibrée p-1 C.D. De même E^*.

Si ξ est un champ de vecteurs sur U, η un champ de vecteurs sur V, on définit le produit $(\xi\otimes\eta)$ comme le champ sur $(U\times V) : (x,y) \longrightarrow (\xi_x, \eta_y)$.

De même si X et Y sont 2 champs de multivecteurs sur U et V respectivement, le champ produit $(X \otimes Y)$ est défini par $(x,y) \longrightarrow X_x \otimes Y_y$. Idem produit de formes différentielles. Dans l'espace C_k topologique des champs de multivecteurs k C.D. sur $U \times V$ $(k \leqslant p-1)$, les combinaisons linéaires de produits $(X \otimes Y)$ sont denses ; dans l'espace C_k des formes différentielles sur $U \times V$, les combinaisons linéaires de produits $(\alpha \otimes \beta)$ sont denses. (Ce ne sont pas de vrais produits tensoriels).

Quatrième partie

Fonctions implicites

§ 14-Passage des différentielles aux applications : théorème des fonctions implicites.

Les démonstrations ne sont pas à refaire : elles ont toutes été faites dans un vectoriel et on s'y ramène par un homéomorphisme H.

1°- Théorème des applications réciproques :

$$U_p^n \xrightarrow{\varphi} V_p^n \quad , \quad \varphi \ k\ C\ D \quad , \quad 1 \leqslant k \leqslant p \ .$$

Si $\dot{\varphi}_{x_0}$ est une application linéaire inversible, φ est un homéomorphisme au voisinage de x_0, $\overset{-1}{\varphi}$ est k C.D. et $\overset{-1}{\dot{\varphi}}_{\varphi(x_0)}$ est la réciproque de $\dot{\varphi}_{x_0}$.

2°- Applications dépendant d'un paramètre.

$$y = \varphi(x,\lambda) \quad , \quad x \in U \quad , \quad \lambda \in L \quad , \quad y \in V \ .$$

Si pour $\lambda = \lambda_0$, l'application $\varphi(x, \lambda_0)$ de U dans V a une différentielle en x_0 inversible, on peut calculer $x = \Psi(y,\lambda)$

3°- Théorème des fonctions implicites.

$z = \varphi(x,y)$ application de $U \times V$ dans W. Si l'application $y \longrightarrow \varphi(x_0,y)$ de V dans W a une différentielle inversible au point y_0, d'image z_0, l'équation $\varphi(x,y) = z_0$ est résoluble en y.

4°- Si une application a une différentielle $\equiv 0$, elle est constante sur toute composante connexe.

5°- Fonctions numériques dépendantes indépendantes.

§ 15 - Variété plongée dans une variété différentiable.

Soit W^m une sous-variété de V_p^n. On dit qu'elle est une variété k C.D. plongée dans V ($k \leqslant p$) s'il existe sur W^m une structure k C.D. telle que, φ étant l'application identique de W dans V, φ soit k C.D., et en outre que, pour tout $x_0 \in W$, la différentielle $\dot{\varphi}_{x_0}$ soit de rang n (ou encore biunivoque). Alors d'après les théorèmes des fonctions implicites, on peut voir qu'il existe un homéomorphisme $H \in \mathcal{H}_{k,x_0}(V)$ tel que l'image d'un voisinage de x_0 dans W par H soit un sous-espace vectoriel R^m de R^n et réciproquement. Ou encore : si $(x_i)_{i=1,2,\dots n}$ est un système quelconque de coordonnées locales sur V au voisinage de x_0, il en existe n-m qui sont au voisinage de x_0 des fonctions k C.D. des m autres lorsque $x \in W$, et réciproquement. Ou encore : l'ensemble des restrictions à un voisinage ouvert convenable de x_0 dans W des $f \in \mathcal{F}_k(V)$ est <u>identique</u> à l'ensemble des fonctions k C.D. sur cet ouvert de W, et réciproquement.

La différentielle φ_{x_0} ($x_0 \in W$) définit un isomorphisme de $E_{x_0}(W)$ dans $E_{x_0}(V)$; un isomorphisme de $\overset{z}{\otimes} E_{x_0}(W)$ dans $\overset{z}{\otimes} E_{x_0}(V)$; un isomorphisme de $\bigwedge E_{x_0}(W)$ dans $\bigwedge E_{x_0}(V)$. L'image $\varphi_{x_0}(E_{x_0}(W))$ est le sous-espace vectoriel tangent à W, au point x_0 de V.

$\varphi^*_{x_0}$ définit un homomorphisme de $E^*_{x_0}(V)$ ~~dans~~ sur $E^*_{x_0}(W)$, de $\overset{s}{\otimes} E^*_{x_0}(V)$ dans $\overset{s}{\otimes} E^*_{x_0}(W)$, de $\bigwedge E^*_{x_0}(V)$ dans $\bigwedge E^*_{x_0}(W)$; on l'appelle "restriction" d'un tenseur co-variant ou d'une forme extérieure à W. φ^* définit alors la restriction d'un champ de tenseurs co-variants ou d'une forme différentielle. C'est une représentation des structures algébriques.

Cinquième Partie

Eléments infinitésimaux d'ordre supérieur.

§ 16 - Différentielles ultérieures.

Soit V_p^n $(p \geqslant 2)$. L'espace $E(V)$ est une variété p-1 C.D. à 2 n dimensions. Donc si $F(x, X_x)$ est une fonction numérique 1 C.D. sur $E(V)$, elle admet une différentielle $d_{(a,A_a)} F$ au point (a, A_a) de $E(V)$; l'espace vectoriel de ces différentielles est $E^*_{(a,A_a)}(E(V))$, il a 2 n dim. Son dual $E_{(a,A_a)}(E(V))$ est l'espace vectoriel tangent à $E(V)$ au point (a, A_a). Si on a une carte locale de V^n, on a un isomorphisme canonique de $E^*_{(a,A_a)}(E(V))$ sur $(R^{n*} \times R^{n*})$ et de $E_{(a,A_a)}(E(V))$ sur $(R^n \times R^n)$. Pour a donné, l'espace des $(A_a, B_{(a,A_a)})$ est fibré à 3 n dim. Une carte locale en définit un isomorphisme canonique sur $R^n \times (R^n \times R^n)$.

En particulier si f est une fonction numérique 2 C.D. sur V, sa différentielle $d_x f$ définit une fonction 1 C.D. sur $E(V)$

$$F(x, X_x) = \langle X_x , d_x f \rangle .$$

La différentielle $d_{(a,A_a)} F$ est appelée différentielle seconde de f :

$$d^2_{a,A_a} f = d_{(a,A_a)} (\langle X_x , d_x f \rangle) \tag{8}$$

Elle définit pour a et A_a donnés une forme linéaire d'un vecteur $B_{(a,A_a)} \in E_{(a,A_a)}(E(V))$.

Si φ est une application 2 C.D. de U dans V, sa différentielle définit une application 1 C.D. de $E(U)$ dans $E(V)$:

$$\varphi(x, X_x) = (\varphi(x), \varphi_x(X_x)) .$$

La différentielle $\varphi_{(a,A_a)}$ de cette application au point (a, A_a) est alors une application linéaire de $E_{(a,A_a)}(E(U))$ dans

$E_{(\varphi(a),\varphi_a(A_a))}E(V)$ appelée différentielle seconde de φ et $\varphi^*_{(a,A_a)}$ est sa transposée.

Si f est une fonction numérique 2 C.D. sur (V), on a alors la formule du changement de variables pour les différentielles :

$$(9) \qquad d^2_{(a,A_a)}(f\circ\varphi) = \varphi^*_{(a,A_a)}\left(d^2_{(\varphi(a),\varphi_a(A_a))}f\right)$$

Cette formule du changement de variables s'écrit aussi autrement

$$(10) \qquad \left\langle B_{(a,A_a)}\,;\ d^2_{(a,A_a)}(f\circ\varphi)\right\rangle = \left\langle \varphi_{a,A_a}(B_{a,A_a}),d^2_{(\varphi(a),\varphi_a(A_a))}f\right\rangle$$

Cas particulier : différentielle seconde d'une fonction de fonction.

E(V) est un espace fibré. L'application canonique (projection pr) de E(V) dans V, $(x, X_x) \xrightarrow{pr} x$ a une différentielle $pr_{(a,A_a)}$ qui fait correspondre à tout vecteur de $E_{(a,A_a)}(E(V))$ un vecteur de $E_a(V)$, sa projection.

D'autre part, $E_a(V)$ est un sous-espace de E(V) (fibre), son espace vectoriel tangent $E_{(a,A_a)}(E_a(V)) \sim E_a(V)$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel de $E_{(a,A_a)}(E(V))$ qui est le sous-espace des vecteurs de projection nulle (cascade $X_a \longrightarrow (a,X_a) \longrightarrow a$).

Si $\xi_a(V)$ est l'espace fibré à 2n dim. (la fibre est un espace linéaire, non vectoriel) des points $(A_a\ ;\ B_{(a,A_a)})$ pour lesquels $pr_{(a,A_a)}B_{(a,A_a)} = A_a$, la fonction numérique $\left\langle B_{(a,A_a)},\ d^2_{(a,A_a)}f\right\rangle$ sur cet espace est la <u>différentielle seconde symétrique</u> de f. Je ne vois pas bien ce qu'on peut faire de tout ça ! Donner éventuellement la différentielle sur un produit de variétés ; l'accélération d'un point $x = \varphi(t)$.

17

Sixième Partie

Etude locale des formes différentielles.

§ 17 - Différentiation extérieure d'une forme différentielle sur R^n.

On définit dans R^n la différentielle extérieure $d\omega$ comme l'antisymétrisée de la différentielle. Si ω est une forme différentielle de degré s, 1 fois C.D., $d\omega$ est une forme différentielle de degré $s+1$, continue, qu'on définit de la façon suivante. On définit $(d\omega)_{x_0}$, qui est une $(s+1)$-forme, par sa valeur sur un $(s+1)$-vecteur $\xi_1 \wedge \xi_2 \dots \wedge \xi_{s+1}$ donné dans R^n.

$$(11)\quad \langle \xi_1 \wedge \xi_2 \dots \wedge \xi_{s+1}, (d\omega)_{x_0} \rangle = \langle \xi_1, d_{x_0} \langle \xi_2 \wedge \xi_3 \dots \wedge \xi_{s+1}, \omega_x \rangle\rangle$$
$$- \langle \xi_2, d_{x_0} \langle \xi_1 \wedge \xi_3 \dots \wedge \xi_{s+1}, \omega_x \rangle\rangle + \dots + (-1)^s \langle \xi_{s+1}, d_{x_0} \langle \xi_1 \wedge \xi_2 \dots \wedge \xi_s, \omega_x \rangle\rangle$$

En posant $\langle \xi_1 \wedge \xi_2 \dots \wedge \xi_{i-1} \wedge \xi_{i+1} \dots \wedge \xi_{s+1}, \omega_x \rangle = \omega_{1,2,\dots i-1, i+1, \dots s+1}(x)$ (fonction numérique), la formule peut donc s'abréger par

$$(12)\quad (d\omega)_{1,2\dots s+1}(x_0) = \sum_i (-1)^i \langle \xi_i, d_{x_0} \omega_{1,2,\dots i-1, i+1, \dots s+1}(x) \rangle$$

En prenant pour les ξ_i des vecteurs d'une base de R^n, on voit que si

$$\omega = \sum \frac{1}{s!} \omega_{i_1, i_2, \dots i_s} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$$

on a

$$(13)\quad \begin{cases} d\omega = \sum \dfrac{1}{(s+1)!} \Omega_{j_1, j_2 \dots j_{s+1}} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_{s+1}} \\ \Omega_{j_1, j_2 \dots j_{s+1}} = \dfrac{\partial}{\partial x^{j_1}} \omega_{j^2 \dots j^{s+1}} - \dfrac{\partial}{\partial x^{j_2}} \omega_{j^1, j^3 \dots j^{s+1}} \\ \qquad + \dots + (-1)^s \dfrac{\partial}{\partial x^{j_{s+1}}} \omega_{j^1, j^2, \dots j^s} \end{cases}$$

On voit aussi que l'opération $\omega \to d\omega$ est caractérisée par le fait d'être une opération linéaire (sur le corps R) et de vérifier

$$(14)\quad \text{si} \quad \omega = A\, dx_\alpha \wedge dx_\beta \dots \wedge dx_\gamma$$
$$d\omega = dA \wedge dx_\alpha \wedge dx_\beta \wedge dx_\gamma .$$

On peut à partir de là donner de la différentiation extérieure une définition nouvelle qui n'utilise pas la structure de R^n, ni les multi-vecteurs, mais seulement la structure de variété différentiable de R^n : l'opération $\omega \to d\omega$ satisfait en effet aux axiomes suivants :

(D_I) elle est linéaire (sur le corps R)

(D_{II}) la différentielle extérieure d'une fonction numérique f, 1 C.D., est df.

(15) (D_{III}) $d(d\omega) = 0$ si ω et $d\omega$ sont 1 C.D.

(16) (D_{IV}) $d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^r \omega \wedge d\omega'$

Si ω est une forme différentielle de degré r.

Tout cela résulte immédiatement de la dernière définition. <u>Réciproquement, ces 4 axiomes caractérisent la différentiation extérieure puisqu'elles redonnent la définition précédente</u>. Ils entraînent la propriété

(D_o) $\omega \to d\omega$ est une application <u>continue</u> de l'espace topologique C_k des formes k C.D. dans l'espace C_{k-1} des formes k-1 C.D.

§ 18. <u>Différentiation extérieure sur une variété.</u>

Si alors V_p^n est une variété p C.D. ($p \geqslant 2$) on définira la différentiation extérieure $\omega \to d\omega$ comme la seule opération vérifiant ces 4 axiomes. Un homéomorphisme $H \in \mathcal{H}_{2,x_0}$ montre que cette opération existe et est bien unique.

Si φ est une application 1 C.D. de U_p^n dans V_q^n, $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$; ω une forme différentielle 1 C.D. sur V.

(17) $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega))$.

C'est en effet vrai pour ω = fonction numérique f, d'après la définition de φ^*; si c'est vrai pour ω et ω', c'est vrai pour $\omega \wedge \omega'$, d'après la formule $d(\omega \wedge \omega')$ et la propriété de φ^* d'être une représentation de l'algèbre des formes ; donc, d'après la linéarité c'est vrai pour tout ω.

En particulier la différentielle extérieure de la restriction d'une forme différentielle à une variété plongée est la restriction de la différentielle extérieure

Eventuellement : différentielle extérieure à droite.

La différentielle définie plus haut est la différentielle à gauche. La différentielle à droite ωd vérifierait

$$\langle \xi_1 \wedge \xi_2 \ldots \wedge \xi_{s+1}, (\omega d)_{x_0} \rangle = \langle \xi_{s+1}, d_{x_0} \langle \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_s, \omega_x \rangle\rangle$$
$$- \langle \xi_s, d_{x_0} \langle \xi_1 \wedge \ldots \xi_{s-1} \wedge \xi_{s+1}, \omega_x \rangle\rangle$$
$$+ \ldots + (-1)^s \langle \xi_1, d_{x_0} \langle \xi_2 \wedge \xi_3 \ldots \wedge \xi_{s+1}, \omega_x \rangle\rangle ;$$

si $\omega = x^{i_1} d \wedge x^{i_2} d \ldots \wedge x^{i_s} d \, . \, A$

$$\omega d = x^{i_1} d \wedge x^{i_2} d \ldots \wedge x^{i_s} d \wedge Ad$$

(avec $f\, d = d_x f$ pour une fonction numérique) ; enfin

$$(\omega \wedge \omega')d = (-1)^r . \omega d \wedge \omega' + \omega \wedge \omega' d$$

si ω est de degré r .

Si ω est de degré s , $\omega d = (-1)^s d\omega$.

§ 19. Différentiation extérieure sur un produit de variétés.

Soit ω une forme différentielle sur $(U \times V)$. Considérons $\omega_{(x,y)}$ comme une forme linéaire sur un multivecteur tangent au point (x,y) ; comme $\bigwedge E_{(x,y)}(U \times V)$ est isomorphe à $\bigwedge E_x(U) \otimes \bigwedge E_y(V)$, $\omega_{(x,y)}$ est une forme bilinéaire de $X_x \in \bigwedge E_x(U)$ et $Y_y \in \bigwedge E_y(V)$, et réciproquement :

(18) $$\langle X_x \otimes Y_y , \omega_{(x,y)} \rangle$$

Fixons y et Y_y . La quantité ci-dessus définit alors une forme différentielle sur U , qu'on notera $\omega_{(y\,;\,Y_y)}$

(19) $$\langle X_x, (\omega_{y;Y_y})_x \rangle = \langle X_x \otimes Y_y , \omega_{(x,y)} \rangle$$

Cette forme différentielle sur U a une différentielle extérieure $d(\omega_{y;Y_y})$, forme différentielle sur U ; on appellera alors différentielle partielle $d_U\omega$ la forme différentielle sur $(U \times V)$ définie par

(20) $\langle X_x \otimes Y_y, (d_U\omega)_{(x,y)} \rangle = \langle X_x, (d(\omega_y ; Y_y))_x \rangle$

L'opération $\omega \to d_U\omega$ vérifie la propriété (D_o). Comme les combinaisons linéaires des $(\alpha \otimes \beta)$ $(\omega_{x,y} = \alpha_x \otimes \beta_y)$ sont denses dans l'espace C_1 des formes 1 C.D., l'opération d_U est <u>caractérisée</u> par les deux propriétés :

$$\begin{cases} (D_o) & \omega \to d_U\omega \text{ est une application linéaire continue de } C_1 \text{ dans } C_o . \\ (D'_V) & d_U(\alpha \otimes \beta) = (d\alpha \otimes \beta) \end{cases}$$

On peut encore <u>caractériser</u> l'opération d_U par les 5 axiomes suivantes (conséquences des précédents) :

(D_I) $\omega \to d_U\omega$ est une opération linéaire

(D'_{II}) Si $\omega = f$, fonction numérique, $d_U\,\omega$ est sa différentielle partielle en x.

(D_{III}) $d_U(d_U\,\omega) = 0$

(D_{IV}) $d_U(\omega \wedge \omega') = d_U\omega \wedge \omega' + (-1)^r\, \omega \wedge d_U\,\omega'$ si r est l'ordre <u>total</u> de ω.

(D_{VI}) Si ω est l'image réciproque pr_V^* d'une forme β sur V, $d_U\,\omega = 0$.

Enfin on peut caractériser d_U par les 2 axiomes suivants :

(D_I) d_U est une opération linéaire

(D_{VII}) Si $\omega = A(x,y)\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \wedge dy^{j_1} \ldots \wedge dy^{j_s}$

$d_U\omega = d_U A \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ldots \wedge dx^{i_r} \wedge dy^{j_1} \ldots \wedge dy^{j_s}$

Il faut définir de même l'opération d_V. Il y a lieu de prendre cette fois-ci

(21) $\langle X_x \otimes Y_y, (d_V\,\omega)_{(x,y)} \rangle = \langle Y_y, (d(\omega_{x}; X_x))_y \rangle (-1)^r$

r étant l'ordre de ω par rapport à x.

L'opération d_V possède alors les mêmes propriétés que d_U, sauf pour

(D''_V) $\qquad d_V\,(\alpha \otimes \beta) = (-1)^r\,(\alpha \otimes d\beta)$ $\qquad r$ = ordre de α .

Pour avoir une symétrie parfaite entre d_U et d_V il faudrait définir l'opération d_V à droite. Les opérations d_U et d_V anticommutent :

$$d_U d_V = -d_V d_U$$

Théorème

(22) $\qquad d\omega = d_U\omega + d_V\omega$

On le voit sur $\omega = (\alpha \otimes \beta)$. D'ailleurs $d_U + d_V$ vérifie tous les axiomes de d .

§ 20. Formule fondamentale de l'homotopie.

Une homotopie sur une variété V est une application k C.D. de $R \times V$ dans V , $y = \varphi(t, x)$. Alors les applications partielles

$x \longrightarrow \varphi(t_1, x)$ et $x \longrightarrow \varphi(t_2, x)$ (notées $\bar{t}_1(x)$, $\bar{t}_2(x)$)

sont appelées 2 applications k C.D. homotopes de V dans elle-même . Soit ω une forme différentielle sur V . L'image $\varphi^*\omega$ est une forme différentielle sur $R \times V$, et l'on a , d'après (22)

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega)) = d_R(\varphi^*(\omega)) + d_V(\varphi^*(\omega))$$

Cherchons le coefficient de dt dans les 2 membres ce qui revient à chercher, pour une forme Ω sur $R \times V$, la forme partielle $\Omega_{t;dt=1}$ sur V .

1°- Pour que d_R contienne dt en facteur, il faut considérer les termes de $\varphi^*(\omega)$ qui ne contiennent pas dt , ce qui revient à considérer la forme $\bar{t}^*(\omega)$ sur V , de sorte que

$$\left[d_R\,(\varphi^*(\omega))\right]_{t;1} = \frac{d}{dt}\,(\bar{t}^*(\omega)) .$$

2°- D'après la définition même, $\left[d_V(\varphi^*(\omega))\right]_{t;1}$ est une différentielle extérieure sur V , à savoir $d((\varphi^*\omega)_{t;1})$

Finalement ,

(23) $$\left[\varphi^*(d\omega)\right]_{t;1} = \frac{d}{dt}\,\bar{t}^*(\omega) - d\left[(\varphi^*(\omega))_{t;1}\right]$$

(23) $$\left[\varphi^*(d\omega)\right]_{t;1} = \frac{d}{dt}\, \Phi^*(\omega) - d\left[(\varphi^*(\omega))_{t;1}\right.$$

Généralement on multiplie par dt et on intègre :

$$\Phi_2^*(\omega) - \Phi_1^*(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\varphi^*(d\omega)\right]_{t;1} dt + d\int_{t_1}^{t_2} (\varphi^*(\omega))_{t;1}\, dt$$

En posant pour une forme Ω

$$\int_{t_1}^{t_2} (\varphi^*(\Omega))_{t;1}\, dt = \mathrm{Traj}^* \Omega \quad \text{(trajectoire réciproque de } \Omega\text{)},$$

(24) $$\Phi_2^*(\omega) - \Phi_1^*(\omega) = \mathrm{Traj}^*(d\omega) + d\,\mathrm{Traj}^*(\omega)$$

Si Ω est de degré r, $\mathrm{Traj}\,\Omega$ est de degré $r-1$.

§ 21. Primitive extérieure d'une forme différentielle dans R^n.

Une forme ω est fermée si $d\omega = 0$; elle est exacte ou ~ 0 si elle est une différentielle extérieure. La formule de l'homotopie montre que 2 formes différentielles fermées homotopes sont aussi homologues.

Il en résulte aussi que dans R^n, toute forme différentielle fermée de degré $\geqslant 1$ est exacte. En effet si on prend l'homotopie $y = tx$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, elle est homotope à 0, donc ~ 0 : comme pour $t = 0$, $\Phi^*(\omega)=0$, et pour $t=1$, $\Phi^*(\omega) = \omega$,

$$\omega = d\,\mathrm{Traj}^*\, \omega = d\int_0^1 (\varphi^*\omega)_{t;1}\, dt$$

(si ω est de degré r, $(\varphi^*(\omega))_{t;1}$ est la forme de degré $r-1$ définie par

$$\langle X, (\varphi^*(\omega))_{t;1}\rangle = t^{r-1}\langle x \wedge X, \omega_{tx}\rangle$$

d'où la formule classique donnant la primitive θ de ω

(25) $$\langle X, \theta_x\rangle = \int_0^1 t^{r-1}\langle x \wedge X, \omega_{tx}\rangle\, dt$$

On en déduit

(26) $$\theta = \int_0^1 (\Phi^*(\omega) \llcorner x)\, \frac{dt}{t}$$

Septième Partie

Intégrations locales des systèmes différentiels extérieurs.

Systèmes différentiels extérieurs.

Sur une variété V_p^n $(p \geqslant 2)$, l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = \xi_x(t)$ où $\xi(t)$ est un champ de vecteurs dépendant de t et 1 C.D. , se résout comme dans R^n , ~~pour~~ par un homéomorphisme $H \in \mathcal{H}_2(V)$.

On appelle système différentiel extérieur un système d'équations $(\omega_i)_{i=1,2\ldots\ell} = 0$, où les ω_i sont des formes différentielles de degré 1 C.D. Un point générique est un point où les formes sont indépendantes. Une intégrale est une variété portée par V , soit $(\varphi(W),\varphi)$, telle que chaque forme différentielle $\varphi^*(\omega_i)$ soit $\equiv 0$. Variété plongée intégrale. Une intégrale est de dimension $\leqslant n - \ell$ en un point générique. Son espace vectoriel tangent (qui a $n-\ell$ dimensions) est bien déterminé. Réciproquement si on se donne en chaque point x de V un sous-espace vectoriel de dimension $n-\ell$ de $E_x(V)$, variant régulièrement, et si on cherche une variété à $n-\ell$ dimensions ayant en chaque point le sous-espace vectoriel tangent donné, cela revient à trouver une variété intégrale de dim.max. d'un système différentiel extérieur défini par ℓ formes indépendantes.

Un système diff. ext. est <u>complètement intégrable</u> au voisinage d'un point générique, si en chaque point passe au moins une variété intégrale de dim. $n-\ell$.

§ 23. Condition d'intégrabilité complète.

<u>Théorème (Frobenius)</u> . Pour que le système diff. ext. $(\omega_i)_{i=1,2..\ell} = 0$, soit complètement intégrable au voisinage d'un point générique, il faut et il suffit que chaque forme différentielle $d\omega_j$ appartienne à l'idéal engendré par les formes ω_i dans l'anneau des formes diff.

Condition équivalente :

(27) $$\omega_1 \wedge \omega_2 \ldots \wedge \omega_\ell \wedge d\omega_j = 0$$

1°- Condition nécessaire.

ω_j est nulle sur W, donc aussi $d\omega_j$. Donc la forme $(d\omega_j)_{x_0}$ est orthogonale à tous les bivecteurs de $\Lambda^2 E_{x_0}(W)$; on en déduit par des considérations simples de pure algèbre extérieure, l'existence de formes $(\lambda_{ij})_x$ telles que $(d\omega_j)_x = \sum_i (\lambda_{ji})_x \wedge (\omega_i)_x$ ou

(28) $$d\omega_j = \sum_i \lambda_{ji} \wedge \omega_i$$

2°- Condition suffisante.

Supposons réalisée la dernière égalité. L'intégrale W passant par un point x_0 est surement déterminée d'une manière unique ; imaginons en effet qu'on écrive les équations sous une forme résolue par rapport à ℓ coord. locales

$$dx^\alpha = \sum_\beta A_{\alpha\beta}\, dx^\beta \qquad \begin{cases} \alpha = 1,2 \ldots \ell \\ \beta = \ell+1 \ldots n \end{cases}$$

et qu'on pose $x^\beta = t.u^\beta$. Pour des u^β fixés, on doit avoir

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \sum_\beta A_{\alpha\beta}\, u^\beta$$

les x^α sont donnés en fonction de t par un système différentiel ordinaire. La variété W est au fond déterminée par une famille de courbes rayonnant autour de x_0. Cela revient à dire qu'on a une variété W et une homotopie sur W, $y = \varphi(x, t)$ telle que :

a) $\varphi(x,0) = x_0$ $\qquad\qquad \varphi(x,1) = x$

b) sur la trajectoire d'un point quelconque (x fixe, t variable) toutes les restrictions des formes ω_i sont nulles. Ou encore, avec la notation de l'homotopie,

$$(\varphi^* \omega_i)_{t;1} = 0$$

Nous voulons montrer que sur W les ω_i sont nulles. Mais sur W

$$d\omega_j = \sum_i \lambda_{ji} \wedge \omega_i$$

D'autre part, d'après la formule de l'homotopie

$$\frac{d}{dt}(t^*(\omega_j)) = \underbrace{d\left[(\varphi^*\omega_j)_{t;1}\right]}_{=0} + \left[\varphi^*(d\omega_j)\right]_{t;1} = \sum_i \left[\varphi^*(\lambda_{ji}) \wedge \wedge \varphi^*(\omega_i)\right]_{t;1}$$

Comme il n'y a pas de terme en dt dans $\varphi^*(\omega_i)$ par hypothèse, on peut écrire le second membre sous la forme

$$\sum_i \left[(\varphi^*(\lambda_{ji}))_{t;1} \wedge \bar{t}^*\omega_i\right].$$

Mais $\Omega_j = \bar{t}^*(\omega_j)$ n'est autre qu'un vecteur de l'espace de Banach C_1 des formes 1 C.D., dépendant du temps t ; les Ω_j vérifient le système différentiel

$$\frac{d\Omega_j}{dt} = \sum (\varphi^*(\lambda_{ji}))_{t;1} \wedge \Omega_i$$

Comme pour $t=0$, les Ω_i sont nuls, ils sont nuls quel que soit t . En faisant $t = 1$, on voit bien que les ω_i sont nulles sur W .

Huitième Partie

Transformations infinitésimales

§ 24 - Champs de dérivation sur une variété 2 C.D.

Soit $y = \varphi(t, x)$ une homotopie sur V, telle que pour $t=0$, $\varphi(0,x)=x$. Il en résulte que pour t voisin de 0, la fonction partielle $\overline{t}(x)$ est un homéomorphisme 2 C.D. au voisinage de chaque point.

Si T^r_s est un champ de tenseurs r fois contravariant et s fois covariant 1 C.D., on peut considèrer son image réciproque $\overset{r}{\otimes}\, \overline{t}^{-1} \otimes \overset{s}{\otimes}\, \overline{t}^{*}(T)$, qui est un nouveau champ de tenseurs 1 C.D. Dans l'espace de Banach C_o des champs de tenseurs continus, on peut alors définir le champ de tenseurs r fois contravariant et s fois covariant, continu,

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overset{r}{\otimes}\, \overline{t}^{-1} \otimes \overset{s}{\otimes}\, \overline{t}^{*}(T)\right)\right]_{t=0}$$

On démontre (par des coordonnées locales) que ce champ ne dépend que de T et du champ de vecteurs 1 C.D. ξ défini par

$$\xi_x = \left[\frac{d}{dt}(\overline{t}(x))\right]_{t=0}$$

Le champ ξ est appelé la transformation infinitésimale de $\overline{t}(x)$ pour $t=0$.

Réciproquement si ξ est un champ de vecteurs 1 C.D., on pourra par exemple prendre $\varphi(t,x)$ en résolvent l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}(\overline{t}(x)) = \xi_x \qquad \varphi(0, x) = x,$$

ce qui permet toujours de poser

$$\xi T = \left[\frac{d}{dt}\left(\overset{r}{\otimes}\, \overline{t}^{-1} \otimes \overset{s}{\otimes}\, \overline{t}^{*}(T)\right)\right]_{t=0} \tag{29}$$

(En calcul des variations, on représente un tel champ de dérivations par δ, et on écrit δT). Si V est p C.D., le champ ξ et le champ T p-1 C.D., le champ ξT est p-2 C.D.

L'opération $(\xi, T) \longrightarrow \xi T$ est une application bilinéaire continu de $C_{p-1} \times C_{p-1}$ dans C_{p-2}.

On définit de même ξX, $\xi\omega$ si X est un champ de multivecteurs, ω une forme différentielle. L'opération ξ ne change pas le degré de X ou ω.

Si f est une fonction numérique, $(\xi f)_x = \xi_x f$

On démontre immédiatement les formules suivantes, conséquences de la formule habituelle de dérivation d'une fonction bilinéaire :

$$
(30)\quad \begin{cases}
\xi(X\wedge Y) = \xi X \wedge Y + X \wedge \xi Y \\
\xi(\omega\wedge\omega') = \xi\omega\wedge\omega' + \omega\wedge\xi\omega' \\
\xi(X \lrcorner\, \omega) = \xi X \lrcorner\, \omega + X \lrcorner\, \xi\omega \\
\xi\langle X,\omega\rangle = \langle \xi X, \omega\rangle + \langle X, \xi\omega\rangle \\
\xi(S\otimes T) = \xi S\otimes T + S\otimes \xi T
\end{cases}
$$

Si φ est un homéomorphisme 2 C.D. de U dans V, et si $\varphi(\xi) = \eta$, on a

$$
(31)\quad \begin{cases}
\varphi(\xi X) = \eta\, \varphi(X) \\
\varphi^*(\eta\,\omega) = \xi\, \varphi^*(\omega)
\end{cases}
$$

Permutabilité avec la différentiation extérieure des formes différentielles

$$\xi(d\,\omega) = d(\xi\,\omega).$$

Formule fondamentale de l'homotopie.

On voit que, si $\varphi(0,x) = x$, la formule de l'homotopie se transforme. Car

1° $\left[\frac{d}{dt}(\varphi_t^*(\omega)\right]_{t=0} = \xi\omega$

2° $\left\langle X_x, \left[(\varphi^*(\omega))_{0;1}\right]_x\right\rangle = \left\langle 1_0\otimes X_x, (\varphi^*\omega)_{(0,x)}\right\rangle =$

$$= \left\langle \varphi_{(0,x)}(1_0\otimes X_x), \omega_x\right\rangle$$

$$= \left\langle \xi_x\wedge X_x, \omega_x\right\rangle = \left\langle X_x, \omega_x \llcorner\, \xi_x\right\rangle \quad \text{ou}$$

$$(\varphi^*\omega)_{0;1} = \omega \llcorner\, \xi$$

La formule de l'homotopie s'écrit donc

$$(32)\quad \begin{cases} \xi\,\omega = d(\omega \llcorner \xi) + d\omega \llcorner \xi & \text{. On a aussi} \\ \xi\,\omega = (\xi \lrcorner \omega)\, d + \xi \lrcorner \omega\, d \end{cases}$$

Si U et V sont 2 variétés, si ξ est un champ sur U , il définit le champ $(\xi, 0)$ sur $U \times V$. (alors $\overline{T}$ est défini par $(x,y) \longrightarrow (\overline{T}(x), y)$). C'est un champ de dérivations partielles en x . Si η est un champ sur V , on aura sur $(U \times V)$ $(\xi, \eta) = (\xi, 0) + (0, \eta)$. Les dérivations $(\xi, 0)$ et $(0, \eta)$ commutent (interversion de l'ordre des dérivations partielles).

§ 25. <u>Formules en coordonnées locales.</u>

Homéomorphisme H sur R^n. $(e_i)_{i=1,2\ldots n}$ base de R^n , (x^i) coordonnées locales ; ξ^i composantes du champ ξ .

1°- Si f est une fonction

$$(33)\qquad \xi f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \xi^i$$

$$2°\text{-}\qquad \xi\, e_i = - \sum_\ell \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\, \xi^\ell\right) e_\ell$$

Si X est un champ de multivecteurs,

$$X = \sum \frac{1}{r!}\, X^{i_1 i_2 \ldots i_r}\, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_r}$$

(le tenseur des $X^{i_1 \ldots i_r}$ étant antisymétrique)

$$(34)\quad \begin{aligned} \xi X = \frac{1}{r!} \sum_{i_1 \ldots i_r} \Bigg[\sum_\ell \Bigg(& \xi^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} X^{i_1 i_2 \ldots i_r} - X^{\ell i_2 \ldots i_r} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \xi^{i_1} \\ & - X^{i_1 \ell i_3 \ldots i_r} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \xi^{i_2} \ldots - X^{i_1 i_2 \ldots i_{r-1} \ell} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \xi^{i_r} \Bigg) e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_r} \Bigg] \end{aligned}$$

3°- De même

$$(35)\qquad \xi(dx^i) = d\,\xi^i$$

Si $\omega = \frac{1}{r!} \sum \omega_{i_1 i_2 \ldots i_r}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ldots \wedge dx^{i_r}$

$$(36)\quad \begin{aligned} \xi\,\omega = \frac{1}{r!} \sum_{i_1 \ldots i_r} \Bigg[\sum_\ell \Bigg(& \xi^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}\, \omega_{i_1 i_2 \ldots i_r} + \omega_{\ell, i_2 \ldots i_r} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^{i_1}} \\ & + \omega_{i_1, \ell, i_3, \ldots i_r} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^{i_2}} + \ldots + \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, \ell} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^{i_r}} \Bigg) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \ldots \wedge dx^{i_r} \Bigg] \end{aligned}$$

Ces formules montrent la différence importante entre l'opération ξ sur champ de tenseurs quelconque et sur fonction f : dans ce dernier cas, ξ n'a besoin d'être qu'un champ continu, non nécessaire 1 C.D.

§ 26.- <u>Caractérisation d'un champ de dérivation</u> :

Si sur une variété V_p^n $(p \geq 2)$ une opération $T \longrightarrow \mathcal{L}(T)$ est définie pour tous les champs de tenseurs T, k C.D. $(1 \leq k \leq p-1)$, $\mathcal{L}(T)$ étant un champ de tenseurs de même nature que T, et si elle possède les propriétés suivantes :

(Δ_I) 1°- Elle est linéaire.

(Δ_{II}) 2°- Si $S\,T$ est un produit (tensoriel, extérieur, intérieur, scalaire) on a

$$\mathcal{L}(S\,T) = \mathcal{L}(S)\,T + S\,\mathcal{L}(T)$$

(Δ_{III}) 3°- Si f est une fonction numérique p C.D.,

$\mathcal{L}(df) = d(\mathcal{L}(f))$, et $\mathcal{L}(f)$ est une fonction numérique au moins 1 C.D.

Alors il existe un champ de vecteur ξ 1 C.D. tel que $\mathcal{L}(T) = \xi\,T$.

<u>Principe de la démonstration.</u>

D'abord la formule $\mathcal{L}(fg) = \mathcal{L}(f)g + f\mathcal{L}(g)$ montre qu'il existe un champ de vecteurs ξ tel que $\mathcal{L}(f) = \xi f$ pour toute fonction numérique. En prenant $f = x^i$, $\xi(f) = \xi^i$ doit être 1 C.D., donc c'est un champ 1 C.D. . Ensuite on a $\mathcal{L}(df) = d(\mathcal{L}(f)) = d(\xi f) = \xi(df)$. On en déduit, par la formule du produit $\mathcal{L}(\omega) = \xi\,\omega$ pour toute forme différentielle de degré 1 $(\omega = \sum A_i\,dx^i)$.
Alors $\mathcal{L}(X) = \xi\,X$ pour un champ de vecteurs par dualité. La formule des produits montre alors que $\mathcal{L} = \xi$ pour tout champ de tenseurs k C.D.

§ 27 - Crochet de 2 champs de vecteurs.

Théorème. Si sur une V_p^n $(p \geqslant 3)$, ξ et η sont 2 champs de vecteurs 2 C.D., il existe un champ ζ 1 C.D., tel que, pour tout champ de tenseurs T 2 C.D.

(37) $$\xi(\eta T) - \eta(\xi T) = \zeta T$$

Démonstration. L'opération $\xi\eta - \eta\xi$ satisfait à tous les axiomes (Δ_I), (Δ_{II}), (Δ_{III}). On posera $\zeta = [\xi, \eta]$.

Remarque. Si on veut se borner aux tenseurs d'ordre 0 = fonctions numériques f, il suffit que $p \geqslant 2$, et que les champs ξ et η soient 1 C.D. . Alors ζ est un champ continu. Donc d'une façon générale sur une V_p^n, $(p \geqslant 2)$, si ξ et η sont 2 champs 1 C.D., on peut toujours définir $\zeta = [\xi, \eta]$ pour des fonctions f, mais ζT n'aura pas de sens ; si le champ ζ est lui aussi 1 C.D., alors ζT aura un sens, mais en général $\xi(\eta T) - \eta(\xi T)$ n'en aura pas. Si $p \geqslant 3$, si ξ et η sont 1 C.D., et si ζ est lui aussi 1 C.D., alors pour tout T 2 C.D., on aura $\zeta T = \xi(\eta T) - \eta(\xi T)$.

Représentation en coordonnées locales :

(38) $$\zeta^i = \sum_l \left(\xi^l \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^i - \eta^l \frac{\partial}{\partial x^l} \xi^i \right)$$

Si ξ et η sont k C.D., ζ est (k-1) C.D.

Si ξ et η sont 2 champs de vecteurs, on a

(39) $$\xi(\eta) = [\xi, \eta].$$

Propriétés du crochet :

(40) $$\begin{cases} [\xi, \eta] = -[\eta, \xi] \; ; \quad [\xi, \xi] = 0 \text{ . Antisymétrie.} \\ [[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0 \text{ (Jacobi)} \end{cases}$$

sur une variété 3 C.D.

(On remplace chaque crochet par sa définition,

$[\xi, \eta]$ par $\xi \circ \eta - \eta \circ \xi$, etc...)

La formule $\xi(\eta) = [\xi, \eta]$ donne une autre démonstration du fait que $\xi\circ\eta - \eta\circ\xi$ est une transformation infinitésimale. Si T est un champ de tenseurs quelconque, ηT est une fonction bilinéaire de η, T, donc on a nécessairement

$$\xi(\eta T) = \xi(\eta) T + \eta(\xi T) \quad \text{ou}$$

$$\xi(\eta T) - \eta(\xi T) = \zeta T , \qquad \zeta = \xi(\eta)$$

étant bien un champ de vecteurs.

En appliquant maintenant l'opération ξ à la fonction bilinéaire $[\eta, \zeta]$, on trouve

$$[\xi, [\eta, \zeta]] = [[\xi, \eta], \zeta] + [\eta, [\xi, \zeta]]$$

qui est l'identité de Jacobi.

§ 28 - Dualité entre la différentiation extérieure des formes différentielles de degré 1 et le crochet des champs de vecteurs.

Soit $(\xi_i)_{i=1,2..n}$ une base du module M des champs de vecteurs (sur l'anneau des fonctions différentiables), au voisinage d'un point ; $(\varpi^i)_{i=1,..,n}$ la base duale du module M^* dest formes différentielles de degré 1 .

On a le système de formules équivalentes

$$(41) \quad \begin{cases} [\xi_i , \xi_j] = \sum_k c^k_{i,j} \xi_k \\ d\varpi^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} c^k_{i,j} \varpi^i \wedge \varpi^j \end{cases}$$

$$(42) \quad \begin{cases} \xi_i(\xi_j) = \sum_k c^k_{i,j} \xi_k \\ \xi_i(\varpi^k) = -\sum_j c^k_{i,j} \varpi^j \end{cases}$$

Soient alors α, β, γ, k 4 indices quelconques :

$$(42) \quad \sum_{\lambda} (C_{\alpha,\beta}^{\lambda} C_{\lambda,\gamma}^{k} + C_{\beta,\gamma}^{\lambda} C_{\lambda,\alpha}^{k} + C_{\gamma,\alpha}^{\lambda} C_{\lambda,\beta}^{k})$$
$$= \xi_{\alpha} (C_{\beta\gamma}^{k}) + \xi_{\beta} (C_{\gamma\alpha}^{k}) + \xi_{\gamma} (C_{\alpha\beta}^{k})$$

résulte soit de l'identité de Jacobi entre crochets, soit du théorème de Poincaré $dd\bar{\omega} = 0$ sur les formes. Les $C_{i,j}^{k}$ sont naturellement antisymétriques pour les indices inférieurs.

§ 29 - Invariants intégraux.

Le champ de tenseurs T est un invariant intégral pour une transformation infinitésimal ξ si $\xi T = 0$.

Les champs de tenseurs invariants forment un anneau : $\xi S = 0$, $\xi T = 0$ entraînent $\xi (S \otimes T) = 0$. De même avec ~~xxx~~ multiplication extérieure ou intérieure.

Le champ ξ est invariant, car $\xi \xi = 0$.

Donc si ω est une forme différentielle invariante, $\xi \lrcorner \omega$ aussi (théorème de Poincaré). De même $d\omega$, $d(\xi \lrcorner \omega)$, $\xi \lrcorner d\omega$.

Les invariants intégraux ont-ils leur place ici ??

§ 30.- Retour au théorème de Frobenius.

Soit $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_r$, r champs de vecteurs donnés, indépendants ; complétons par n-r, $\xi_{r+1}, \ldots \xi_n$, pour avoir une base du module M des champs de vecteurs, soit $(\bar{\omega}^i)$ la base duale dans M^*. Les vecteurs qui, en $x \in V$, sont dans le sous-espace vectoriel engendré par $(\xi_1)_x, (\xi_2)_x, \ldots (\xi_r)_x$, sont ceux qui sont orthogonaux à $(\bar{\omega}^{r+1})_x \ldots (\bar{\omega}^n)_x$. Donc trouver une variété à r dimensions tangente en chaque point x à $(\xi_1)_x, (\xi_2)_x, \ldots (\xi_r)_x$, c'est trouver une intégrale de dim. max. du système diff. extérieur $\bar{\omega}^k = 0$ $(k=r+1, \ldots n)$. La condition d'intégrabilité complète de Frobenius s'écrit $C_{i,j}^{k} = 0$ - pour $i,j = 1,2,\ldots r$, $k = r+1 \ldots n$.

C'est équivalent à

$$[\xi_i . \xi_j] \wedge \xi_1 \wedge \xi_2 \cdots \wedge \xi_r = 0$$

$(i, j = 1,2 \ldots r)$ ou $i,j,k = 1, 2, \ldots r$

$$[\xi_i . \xi_j] = \sum_k c_{ij}^k \, \xi_k \, . \tag{43}$$

On peut en donner une démonstration directe (cf. Chevalley) par récurrence sur r .

Neuvième Partie

Intégrales des formes différentielles.

§ 31. Introduction.

La méthode habituelle part de la définition de l'intégrale d'une forme différentielle en la ramenant à celle d'une intégrale multiple dans R^n ; l'invariance de la définition par les homéomorphismes repose alors sur l'identité de la formule du changement de variables pour les intégrales multiples et pour les formes différentielles. (Cette identité apparaît un peu comme une coïncidence). Ensuite il faut démontrer la formule de Stokes au moins pour un simplexe ou un pavé, par intégration par parties.

Il semble en fait que l'intégration des formes différentielles soit une question de topologie algébrique liée à la formule de Stokes. Je propose ici une méthode un peu canularesque d'introduction de l'intégrale à partir de la formule de Stokes.

§ 32.- Variété différentiable avec bord.

Soit C^n un cône polyédral fermé dans R^n (région limitée par un nombre fini h d'hyperplans passant au sommet du cône) si h=0, $C^n=R^n$ si h=1 , C^n = demi-espace si h=2 , C^n = quadrant, etc... Une fonction p C.D. sur C^n sera la restriction à C^n d'une fonction p C.D. sur un voisinage de C^n.

Γ^n sera la figure déduite de C^n par un homéomorphisme p C.D. de R^n.

Une variété avec bord V_p^n, à n dimensions, p C.D., est définie par la famille $\mathcal{F}_p$ de fonctions p C.D.

Axiomes (F_I) et (F'_{II}).

(F'_{II}) Quel que soit $x_o \in V^n$, il existe homéomorphisme H d'un voisinage ouvert O de x_o sur un ouvert H(O) d'un Γ^n, tel que l'ensemble des $f \circ \overset{-1}{H}$ où $f \in \mathcal{F}_{p,o}$ soit identique à l'ensemble $\mathcal{F}_{p,H(O)}$.

Définition du bord de V_p^n évidente ; comporte une réunion de variétés sans bord à n-1, n-2 ... 3, 2, 1, 0 dimensions.

La différentielle $d_{x_o} f$ d'une fonction numérique existe même au bord, donc aussi $E^*_{x_o}(V)$, $E_{x_o}(V)$, les espaces tensoriels, etc...

Produit de 2 variétés avec bord, évident.

§ 33.- Variété orientable.

On oriente l'espace tangent $E_{x_o}(V)$ (donc aussi $E^*_{x_o}(V)$) en fixant les n-vecteurs (~~xx~~ ou les n(formes)) $\neq 0$ considérées comme > 0. L'orientation est continue si un champ de n-vecteurs continu, a un signe constant au voisinage de tout point où il est $\neq 0$. La variété est orientable s'il existe une orientation continue ; la fixation d'une telle orientation définit une variété orientée.

Si V est une variété orientable, nous désignerons par $\vec{V}$ cette variété munie d'une orientation ; $-\vec{V}$ sera alors la variété munie de ~~xxx~~ l'orientation opposée.

L'orientation d'une variété oriente la portion de son bord qui est à n-1 dim. Un n-1 vecteur e_{n-1} de ce bord est >0 si, e_1 étant un vecteur "sortant" de la variété, $e_1 \wedge e_{n-1} > 0$ sur $\vec{V}$. Ce bord orienté sera noté $\vec{V}b$ (bord à droite). Le bord à gauche $b\vec{V}$ s'obitiendrait en écrivant $e_{n-1} \wedge e_1 > 0$.

L'ensemble du bord est la réunion d'un nombre localement fini de variétés orientées à n-1 dim. n'ayant 2 à 2 en commun que des points de leur bord, ce n'est pas <u>une</u> variété à n-1 dim.

§ 34 - Champ d'intégration.

Un champ d'intégration Ω sur une variété V 1 C.D. avec bord est une combinaison linéaire finie formelle, à coefficients réels, d'images "régulières à l'∞", 1 C.D., de variétés orientées 1 C.D. avec bord, sur V. (L'image $\varphi(W)$ de W est régulière à l'∞ si l'image réciproque d'un compact est un compact).

(44) $$\Omega = \sum_i a_i \varphi_i(\overrightarrow{W_i})$$

φ_i peut être l'application identique d'une sous-variété W_i de V. Une combinaison linéaire de sous-variétés orientées est donc un champ.

§ 35. Propriétés que devra posséder l'intégrale.

L'intégrale $\int_\Omega \omega$ d'une forme différentielle <u>continue</u> à support compact, sur un champ Ω devra posséder les propriétés suivantes.

(I_I). Elle dépend linéairement du champ Ω.

(I_{II}). L'intégrale change de signe si on change les orientations de toutes les variétés ; cela revient à considérer comme opposés les champs $\varphi(\overrightarrow{W})$ et $\varphi(-\overrightarrow{W})$.

(I_{III}). Si W^r est la réunion d'un nombre localement fini de variétés W_e^r, n'ayant 2 à 2 d'autres points communs que sur leurs bords, et si l'orientation $\overrightarrow{W_e}$ est induite par l'orientation $\overrightarrow{W}$, les intégrales sur les champs $\varphi(\overrightarrow{W})$ et $\sum_e \varphi(\overrightarrow{W_e})$ sont égales, ce qui revient à considérer de tels champs comme identiques.

En particulier, pour toute variété orientée $\overrightarrow{V}$, les champs $\overrightarrow{V}bb$ et $bb\overrightarrow{V}$ sont nuls, le bord du bord est nul. Sur une variété produit, $\overrightarrow{(U^m \times V^n)}b = \overrightarrow{Ub} \times \overrightarrow{V} + (-1)^m \overrightarrow{U} \times \overrightarrow{Vb}$.

(I_{IV}) Pour Ω fixé, elle dépend linéairement de la forme ω , et elle est continue pour la convergence uniforme des formes ω ayant leurs supports dans un compact fixe.

(I_V) Si dans R^n , $\omega = f\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n$, l'orientation $\vec{R}^n$ étant telle que $dx^1\, dx^2 \ldots dx^n > 0$,

$$\int_{\vec{R}^n} \omega = \iint \ldots \int f\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n$$

(identité de l'intégrale d'une forme différentielle et d'une intégrale multiple ordinaire). Si ω est homogène de degré r , et si tous les W_i sont de dimensions $\neq r$, l'intégrale est nulle.

(I_{VI}) Si ψ_i sont des homéomorphismes 1 C.D. de $\vec{W}'_i$ sur $\vec{W}_i$, conservant les orientations, l'intégrale sur le champ

$$\Omega = \sum a_i\, \varphi_i\, (\vec{W}_i)$$

et sur le champ

$$\Omega' = \sum a_i\, \varphi_i \circ \psi_i\, (\vec{W'}_i)$$

sont identiques, ce qui revient à considérer comme identique deux champs homéomorphes.

(I_{VII}) Invariance par un homéomorphisme 1 C.D. de la variété V .
Plus généralement si $V \xrightarrow{\theta} V'$, l'image $\theta\,\Omega$ est le champ $\sum a_i\, \theta\circ\varphi\, (\vec{W}_i)$, on doit avoir, ω étant une forme différentielle sur V' :

(45) $$\int_\Omega \theta^* \omega = \int_{\theta\Omega} \omega$$

(I_{VIII}) Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont 2 variétés orientées, on doit avoir le théorème de Fubini :

(46) $$\int_{\overrightarrow{U\times V}} \omega = \int_U \left[\int_V \omega_{x;X_x} \right] = \int_{\vec{V}} \left[\int_{\vec{U}} \omega_{y;Y_y} \right]$$

(I_{IX}) Théorème de Stokes. Si $\Omega b = \sum a_i\, \varphi_i\, (\vec{W}_i\, b)$,

(47) $$\int_{\Omega b} \omega = \int_\Omega d\omega \;;\; \int_{b\Omega} \omega = \int_\Omega \omega\, d$$

§ 36 - Définition et construction de l'intégrale.

L'intégrale d'une forme de degré 0 sur un champ à 0 dimension est évidente : Si $\Omega = \sum a_i\, \varphi(A_i)$, $\int_\Omega f(x) = \sum a_i\, f\circ\varphi\,(A_i)$.

Nous procèderons par récurrence. Supposons définie l'intégrale d'une forme de degré $\leqslant$ m-1 sur un champ de dim. $\leqslant$ m-1 , vérifiant tous les axiomes (I) . Passons de m-1 à m .

Nous poserons

$$(48) \qquad \int_\Omega \omega = \sum a_i \int_{\vec{W}_i} \varphi_i^* \omega$$

Cela nous ramène à définir $\int_{\vec{W}} \omega$, intégrale d'une formule ω de degré m sur une variété orientée $\vec{W}$ à m dimensions. La linéarité par rapport au champ sera satisfaite d'elle-même.

Soit $\{O_\nu\}$ un recouvrement localement fini de W par des ouverts, chaque O_ν homéomorphe différentiablement à un ouvert d'un cône Γ^m . Soit $\{\alpha_\nu\}$ une partition de l'unité 1 C.D. subordonnée. Nous poserons

$$(49) \qquad \int_{\vec{W}} \omega = \sum \int_{\vec{O}_\nu} \alpha_\nu\, \omega$$

ce qui nous ramène à définir $\int \omega$ sur un cône orienté Γ^m (éventuellement $\vec{R}^m$). Si $\int_{\vec{\Gamma}^m} \omega$ possède les diverses propriétés (I), on vérifie aisément que la définition de $\int_{\vec{W}} \omega$ ne dépend pas de la partition et du recouvrement choisis. (si $\{O_\mu\}$, $\{\beta_\mu\}$ est un autre système recouvrement - partition de l'unité, $\int_{\vec{W}} \omega$ est égal dans les 2 cas à la valeur commune $\sum_{\mu,\nu} \int_{\vec{O}_\nu \cap \vec{O}_\mu} (\alpha_\nu\, \beta_\mu)\omega$) .

On est alors ramené à définir l'intégrale $\int_{\vec{\Gamma}^m} \omega_m$, possédant les propriétés suivantes :

(J_{II}) L'intégrale change de signe par changement d'orientation de Γ^m .

(J_{III}) Si $\vec{\Gamma}^m = \bigcup_\ell \vec{\Gamma}_\ell^m$, les cônes ayant même sommet et n'ayant en commun que des bords dans un même $\vec{R}^m$, alors

$$(50) \qquad \int_{\vec{\Gamma}^m} \omega_m = \sum \int_{\vec{\Gamma}_\ell^m} \omega_m$$

(J_{IV}) Elle est linéaire et continue en ω_n pour $\vec{\Gamma}^m$ fixé.

(J_V) $\int_{\vec{R}^m} f\, dx^1 \ldots dx^m$ est l'intégrale multiple ordinaire, si $dx^1 \ldots dx^m > 0$.

(J_{VI}) Invariance par homéomorphisme 1 C.D.

$$\vec{\Gamma}^m \xrightarrow{\theta} \vec{\Gamma}'^m \subset R^m .$$

(51) $$\int_{\vec{\Gamma}^m} \theta^* \omega' = \int_{\vec{\Gamma}'^m} \omega'$$

(J_{VIII}) Formule de Fubini avec un produit $\vec{\Gamma}^h \times \vec{\Gamma}^k$

(J_{IX}) Formule de Stokes

(52) $$\int_{\overrightarrow{\Gamma^m_b}} \omega_{m-1} = \int_{\vec{\Gamma}^m} d\omega_{m-1}$$

Dans un but de simplification d'écriture, je prendrai dans la suite $\vec{\Gamma}^m_- = \vec{R}^m$. Cet "escamotage" des difficultés dues au bord n'est fait que pour l'écriture.

Soit donc à définir $\int_{\vec{R}^m} \omega_m$, ω_m à support compact. Soit $\vec{S}^m$ un simplexe (orienté comme $\vec{R}^m$). 1 C.D. à m dimensions contenant à son intérieur le support de ω_m . ω_m est toujours dans R^m une différentielle extérieure exacte $\omega_m = d\omega_{m-1}$. On posera, en prenant pour définition la formule de Stokes :

(53) $$\int_{\vec{R}^m} \omega_m = \int_{\vec{S}^m} \omega_m = \int_{\overrightarrow{S^m_b}} \omega_{m-1} ,$$

l'intégrale étant connue pour la dimension m-1 . Il faut montrer que cette définition est invariante :

a) par changement de la forme ω_{m-1} . Si on la remplace par ω'_{m-1} , on a $d(\omega_{m-1} - \omega'_{m-1}) = 0$, donc, dans R^m ,

$$\omega_{m-1} - \omega'_{m-1} = d\, \omega_{m-2} .$$

La différence des 2 valeurs de l'intégrale est donc, en vertu du théorème de Stokes pour la dimension m-1 :

$$\int_{\overrightarrow{S^m bb}} \omega_{m-2} = 0$$

b) par changement du simplexe S^m choisi.

Soit S'^m un autre simplexe. Il existe une homotopie 1 C.D. qui fait passer de S^m à S'^m, dans laquelle la trajectoire de tout point du bord, de $S^m b$ à $S'^m b$, ne coupe pas le support de ω_m. Soit $\overrightarrow{F_\alpha}$ une face de $\overrightarrow{S^m_b}$, $\overrightarrow{F'_\alpha}$ sa correspondante sur $\overrightarrow{S'^m_b}$. Dans le "prisme" trajectoire de F_α à F'_α, $d\omega_{m-1} = 0$ donc $\omega_{m-1} = d(\omega_{m-1})_\alpha$. Donc, par la formule de Stokes à m-1 dim., appliquée au cycle Γ déterminé par $\overrightarrow{F_\alpha}$, $\overrightarrow{F'_\alpha}$, et la trajectoire du bord $(\overrightarrow{F_\alpha})b$, on a

$$\int_{\overrightarrow{\Gamma}} \omega_{m-1} = \int_{\overrightarrow{\Gamma b}} \omega_{m-1} = 0 \qquad (\overrightarrow{\Gamma} b = 0) \qquad \text{ou}$$

$$\int_{\overrightarrow{F'_\alpha}} \omega_{m-1} - \int_{\overrightarrow{F_\alpha}} \omega_{m-1} = \int_{\text{Traj } (\overrightarrow{F_\alpha})b} \omega_{m-1} .$$

En additionnant

$$\int_{\overrightarrow{S^m b}} \omega_{m-1} - \int_{\overrightarrow{S'^m b}} \omega_{m-1} = \int_{\text{Traj } \overrightarrow{S^m bb}} \omega_{m-1} = 0$$

c) par un homéomorphisme $\overrightarrow{R^m} \xrightarrow{\theta} \overrightarrow{R^m}$, ce qui résulte de l'invariance par changement du simplexe et de l'invariance par homéomorphisme démontrée pour la dim. m-1. Alors :

(J_{II}) résulte de (J_{II}) pour la dim. m-1.

(J_{III}) est évident car $(\overrightarrow{\Gamma^m})b = \sum_e (\overrightarrow{\Gamma^m_e} e)b$

(J_{IV}) résulte de (J_{IV}) pour la dim. m-1, et de la continuité du passage à la primitive extérieure $\omega_m \longrightarrow \omega_{m-1}$.

(J_V) résulte de Fubini (J_{VIII}) si on considère $\overrightarrow{R^m}$ comme $R^{m-1} \times R$, (J_V) démontré pour la dim. m-1, et le théorème de Fubini connu pour les intégrales multiples.

(J_{VI}) résulte de (c) ci-dessus.

(J_{VIII}) reste à montrer

(J_{IX}) est la définition.

Il reste donc à montrer (J_{VIII}) pour $\vec{R}^h \times \vec{R}^k$, $h+k = m$.

Comme l'intégrale est une forme linéaire continue, et que les combinaisons linéaires de produits $\alpha \otimes \beta$ ($\omega_{(x,y)} = \alpha_x \otimes \beta_y$) ($\alpha$ de degré h, β de degré k), il suffit de montrer que dans ce cas

(54) $$\int_{\vec{R}^h \times \vec{R}^k} \alpha \otimes \beta = \int_{\vec{R}^h} \alpha \int_{\vec{R}^k} \beta$$

Par définition, si S^h et S^k sont 2 simplexes assez grands :

$$\int_{\vec{R}^h \times \vec{R}^k} \alpha \otimes \beta = \int_{\vec{S}^h \times \vec{S}^k} \alpha \otimes \beta$$

Si A est une primitive extérieure de α sur $\vec{R}^h$, $A \otimes B$ est une primitive de $\alpha \otimes \beta$ sur $\vec{R}^h \times \vec{R}^k$.

$$\int_{\vec{S}^h \times \vec{S}^k} \alpha \otimes \beta = \int_{\overrightarrow{(S^h \times S^k)_b}} A \otimes \beta$$

$$= \int_{\vec{S}^h_b \times \vec{S}^k} A \otimes \beta \pm \int_{\vec{S}^h \times \vec{S}^k_b} A \otimes \beta$$

Comme $h+k-1 = m-1$, on peut appliquer Fubini :

$$= \int_{\vec{S}^h_b} A \int_{\vec{S}^k} \beta \pm \int_{\vec{S}^h} A \int_{\vec{S}^k_b} \beta \, .$$

$$= \int_{\vec{S}^h} \alpha \int_{\vec{S}^k} \beta + 0 \, , \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Application.</u> Formule du changement de variables dans les intégrales multiples.

§ 37.- Additif à la formule de l'homotopie.

Soit φ une application de $\vec{R} \times \vec{U}$ dans $\vec{V}$. Si Ω est un champ $\sum a_i \Psi_i (\vec{W}_i)$ sur U ; sa "trajectoire" est le champ à une dimension de plus, sur V, défini par

(55) $$\text{Traj } \Omega = \sum a_i \varphi_i (\vec{R}_1^2 \times \Psi_i (\vec{W}_i)) \qquad (R_1^2 = [t_1, t_2])$$

La formule de l'homotopie s'écrit pour les champs, si on pose

$$\mathfrak{T}(\Omega) = \sum a_i \varphi_i (t \times \Psi_i (W_i))$$

(56) $\quad \bar{t}_2(\Omega) - \bar{t}_1(\Omega) = \mathrm{Traj}\,(\Omega\, b) + (\mathrm{Traj}\,\Omega\,)b$

(conséquence de la formule du bord du produit de 2 variétés).

Si ω est une forme différentielle sur V , sa trajectoire réciproque est une forme d'un degré de moins sur U , définie par

(57) $$\mathrm{Traj}^*\,\omega = \int_{t_1}^{t_2} \left[(\varphi^*\omega)_{t;x} \right] dt$$

qui d'ailleurs peut s'écrire

(58) $$\left\langle X_x \, , \, (\mathrm{Traj}^*\,\omega)_x \right\rangle = \int_{\vec{R}_1^{t}} \left[(\varphi^*\,\omega)_{x;X_x} \right]$$ et l'on a

(59) $$\bar{t}_2^*(\omega) - t_1^*(\omega) = \mathrm{Traj}^*(d\omega) + d(\mathrm{Traj}^*\,\omega)$$

Naturellement la dualité entre les 2 formules vient de ce que, si ω est une forme sur U , de degré $r+1$, Ω un champ sur V de dimension r ,

(60) $$\int_{\mathrm{Traj}\,\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{Traj}^*\,\omega$$

- - - - - - - - - - - - - - - -