RÉDACTION N° 125

COTE : **NBR 032**

TITRE : **RAPPORT SUR LES ALGÈBRES DE LIE**
(CHEVALLEY)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 91

NOMBRE DE FEUILLES : 91

COMMUNICABLE ULTÉRIEUREMENT

Archives Chevalley

NBR 032

RAPPORT SUR LES ALGEBRES DE LIE

PRELIMINAIRES

Ce qui suit me parait devoir aller en même temps que la théorie de la réduction des matrices.

On désignera dans ce qui suit par V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K. On dira qu'un endomorphisme S de V est diagonal si V est engendré par des vecteurs propres de S, c'est-à-dire s'il existe une base de V telle que S se représente, par rapport à cette base, par une matrice diagonale.

Lemme 1-Pour que S soit diagonal, il faut et il suffit qu'il satisfasse une équation $f(S)=0$, où f est un polynôme qui se décompose en facteurs linéaires dans K et qui n'a pas de racines multiples.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante on écrit $f(t) = c\prod_{i=1}^{n}(t-a_i)$ (où t est la variable) et on pose $g_i = (t-a_i)^{-1}f(t)$. Les g_i sont premiers entre eux dans leur ensemble; il existe donc des h_i tels que $\sum g_i h_i = 1$. Si $x \in V$, $x = \sum g_i(S)h_i(S)x$; $g_i(S)h_i(S)x$ est annulé par $S - a_i I$ (où I est l'identité), de sorte que c'est un vecteur propre de S.

Lemme 2-Si S est diagonal et applique dans lui-même un sous-espace U de V, la restriction de S à U est diagonale.

Résulte immédiatement du Lemme 1.

Lemme 3-Si S et S' sont diagonaux et commutent, il existe une base par rapport à laquelle S et S' sont simultanément représentés par des matrices diagonales; donc toute combinaison linéaire de S et de S' est diagonale.

Si $c \in K$, soit U_c l'ensemble des $x \in V$ tels que $Sx=cx$. La somme des U_c est directe. Car, soit $x_1 + \dots + x_n = 0$, $x_i \in U_{c_i}$, $c_1, \dots, c_n$ tous distincts; on va montrer par récurence sur n que $x_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$. Supposons que ce soit vrai pour $n-1$; on a $0 = S(\sum x_i) = \sum c_i x_i$ et $c_n \sum x_i = 0$ d'où $\sum_{i=1}^{n-1}(c_i - c_n)x_i = 0$, et par suite $x_i = 0$ pour $i \leq n-1$, d'où $x_n = 0$. Donc V est somme directe des U_c. Ceci dit, puisque S' commute avec S, $S'(U_c) \subset U_c$ pour tout c; on prend une base de U_c par rapport à laquelle S' se représente par une matrice diagonale, et on met toutes ces bases ensemble.

Proposition 1-Soit X un endomorphisme de V qui satisfasse une équation $F(X)=0$,où F est un polynome qui a toutes ses racines dans K. On peut alors, d'une manière et d'une seule, représenter X sous la forme $S+N$, où S est diagonale, N nilpotent et $[S,N]=0$

(On pose $[X,X'] = XX'-X'X$)

De plus, S et N peuvent se représenter comme polynomes en X à coefficients dans K.

On peut trouver un polynome f sans racines multiples tel que F divise une puissance f^e de f et que f divise F. Les racines de f sont donc dans K. Le polynome f est premier à sa dérivée f'; soit h tel que $hf' \equiv 1 (\mathrm{mod.} f)$. Soit t la variable indépendante; il existe un endomorphisme d'algèbre s de $K[t]$ tel que $st = t - h(t)f(t)$. On a $sf \equiv 0 (\mathrm{mod}\ f^2)$; en effet, par la formule de Taylor, $(sf)(t) \equiv f(t)-f'(t)h(t)f(t) \ (\mathrm{mod}\ f^2)$, et $f-f'hf = f(1-f'h)$ est $\equiv 0 (\mathrm{mod}\ f^2)$. On en tire tout de suite par récurence que $s^k f \equiv 0 (\mathrm{mod}\ f^{2^k})$. Par ailleurs, on a $s^k t \equiv t (\mathrm{mod}\ f)$. C'est vrai pour $k=1$; si c'est vrai pour k, $s^{k+1}t \equiv st (\mathrm{mod}\ sf)$, d'où $s^{k+1}t \equiv t (\mathrm{mod}\ f)$. On choisit k tel que $2^k \geqslant e$, et on pose $S= (s^k t)(X)$. On a $f(s^k t) = (s^k f)(t)$, qui est divisible par F, d'où $f(S)=0$, et S est diagonale (lemme 1). Soit $N=X-S = (t-s^k t)(X)$; puisque $t-s^k t \equiv 0 (\mathrm{mod}\ f)$, on a $N^e=0$. De plus, S et N sont des polynomes en X, donc commutent. Soit réciproquement $X=S'+N'$, S' diagonal, N' nilpotent, $[S',N']=0$. Alors S' et N' commutent avec X donc avec S et N qui sont des polynomes en X; on a $S-S' = N-N'$. Or $S-S'$ est diagonal (lemme 3) et $N-N'$ est nilpotent comme il résulte tout de suite de la formule du binome, applicable puisque N et N' commutent. On a donc $S=S'$, $N=N'$.

Définition-Les endomorphismes S et N de la Proposition 1 sont appelés respectivement la composante diagonale et la composante nilpotente de X.

Remarque- L'existence de S et de N peut se déduire de la forme normale de Jordan, mais on n'obtient pas immédiatem nt le fait important qu'ils sont des polynomes en X, fait qui est nécessaire pour démontrer l'univité. Inversement, on peut se servir de la Prop. 1 pour établir la forme normale de Jordan. On peut même dire qu'une fois cette prop. acquise, le gros du travail est fait.

Proposition 2-Supposons qu'un endomorphisme X de V applique un sous-espace U de V dans lui-même. Les composantes diagonale et nilpotente de X appliquent alors U dans lui-même.

Cela résulte immédiatement du fait que ces composantes sont des polynômes en X.

Ceci dit, voici un autre résultat préliminaire important, mais que je ne vois pas trop ou il faudrait caser, puisqu'il brille par son absence au chap. III.

Proposition-Soit E l'algèbre extréieure sur un vectoriel V. Tout endomorphisme X de V se prolonge d'une manière et d'une seule en une dérivation D_X de V (?????); l'application $X \to D_X$ est linéaire; si X et X' sont des endomorphismes de V, $D_{[X,X']} = [D_X, D_{X'}]$. Soit U un sous-espace de V, et u le produit extréieur des éléments d'une base de U. Pour que X applique U dans lui-même, il faut et il suffit que $D_X u$ soit un multiple scalaire de u ; on a alors $D_X u = su$ ou s est la trace de la restriction de X à U. L'application D_X applique dans elle-mêmes toutes les puissances antisymétriques de V.

Soit V_n la puissance antisymétrique $n^è$ de V. L'application $(x_1,\ldots,x_n) \to (Xx_1)x_2\ldots x_n + x_1(Xx_2)\ldots x_n + \ldots + x_1\ldots x_{n-1}(Xx_n)$ de V^n dans V_n est alternée (les produits au second membre sont extérieurs). En effet, si $x_i = x_j$, $i \neq j$, n-2 des termes au second membre sont nuls, et les deux restants se déduisent l'un de l'autre par une transposition des facteurs. Il existe donc une application D_X^n de V_n dans lui-même telle que $D_X^n(x_1\ldots x_n)$ soit l'expression écrite plus haut (si n=0, il doit être entendu que D_X^0 est l'application nulle). L'application D_X de E dans E qui prolonge toutes les D_X^n est une dérivation qui prolonge X. Il résulte immédiatement des définitions que si D est une dérivation de E, D(1)=0, et que l'ensemble des x tels que D(x)=0 est une sous-algèbre. Si donc D est nulle sur V, on a D=0 d'ou l'unicité, puisque la différence de deux dérivations est une dérivation. Toute combinaison linéaire de dérivations étant une dérivation, l'application $X \to D_X$ est linéaire; le crochet de deux dérivations étant une dérivation, on a $D_{[X,X']} = [D_X, D_{X'}]$. Soit $u = x_1\ldots x_n$, ou les x_i forment une base de U. Si $Xx_i = \sum a_{ij}x_j$, il résulte immédiatement de la formule écrite plus haut que $D_X u = (\sum a_{ii})u$. Supposons inversement que $D_X u = su$. Soit $x \in U$; on a $0 = D_X(xu) = (Xx)u + sxu = (Xx)u$, d'où $Xx \in U$.

Remarque-On voit que la prop. précédente peut servir à une déf. intrinsèque de la trace; la formule $Tr(XX') = Tr(X'X)$ s'en déduit immédiatement.

§1-ALGEBRES NON ASSOCIATIVES.

Dans ce qui suit, on entend par algèbre sur un corps K un espace vectoriel V sur K muni d'une application bilinéaire $(x,y) \to xy$ de $V \times V$ dans V.

Les sorites suivants devront être déroulés:

sous-algèbres - homomorphismes d'une algèbre dans une autre - idéaux(à gauche, à droite, bilatères) - algèbres quotients - produits d'algèbres.

Extension du corps de base d'une algèbre. Si f est un homom. de l'algèbre A dans l'algèbre B, l'application linéaire f^L de A^L dans B^L qui prolonge f est un homomorphisme (ou L est un sur-corps de K, et l'indice supérieur L indique l'extension à L du corps de base).

Dérivations; le crochet de deux dérivations est une dérivation. Si D est une dérivation de A, et L un sur-corps de K, l'application linéaire de A^L dans lui-même qui prolonge D est une dérivation.

§2-ALGEBRES DE LIE (Définitions).

Une algèbre de Lie est une algèbre $\mathfrak{g}$ dans laquelle la loi de composition, notée $(X,Y) \to [X,Y]$, satisfait aux conditions $[X,X] = 0$, $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$. Ces conditions entrainent $[X,Y] = -[Y,X]$. Si on a une base $X_1,\dots,X_n$, et si on pose $[X_i,X_j] = \sum c_{ijk}X_k$, les c_{ijk} sont appelés les <u>constantes de structure</u>; ils satisfont à des identités qu'il est facile d'écrire.

Dans une algèbre de Lie, tout idéal à gauche ou à droite est bilatère; on parlera donc simplement d'idéaux. Toute algèbre quotient, et par suite toute image homomorphe, d'une algèbre de Lie est de Lie. Tout produit d'algèbres de Lie est de Lie.

On dit que les éléments X, Y d'une algèbre de Lie <u>commutent</u> si $[X,Y] = 0$ (cette condition est équivalente à $[X,Y] = [Y,X]$ si le corps de base n'est pas de caractéristique 2). Si tous les éléments d'une algèbre de Lie commutent entre eux, on dit que l'algèbre est <u>abélienne</u>.

<u>Lemme 1-Supposons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit somme directe de deux idéaux $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$; tout élément de $\mathfrak{h}$ commute alors avec tout élément de $\mathfrak{h}'$; tout idéal de $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{g}$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}'$.</u>

Si $H\in\mathfrak{h}$, $H'\in\mathfrak{h}'$, on a $[H,H']\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{h}' = 0$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{h}$, on a $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]\subset[\mathfrak{a},\mathfrak{h}]+[\mathfrak{a},\mathfrak{h}']=[\mathfrak{a},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. L'application $(H,H')\to H+H'$ est un isomorphisme de $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}'$ avec $\mathfrak{g}$.

Lemme 2- Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les combinaisons linéaires d'éléments de $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ forment alors un idéal.

En effet, si $A\in\mathfrak{a}$, $B\in\mathfrak{b}$, $X\in\mathfrak{g}$, on a $[X,[A,B]] = [A,[X,B]]+[[X,A],B]$ et les deux termes du second membre sont dans $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$.

On appelle *algèbre dérivée*, et on note $\mathcal{D}\mathfrak{g}$, d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. C'est un idéal en vertu du Lemme 2.

Proposition 1-L'algèbre dérivée d'une alg. de Lie $\mathfrak{g}$ est le plus petit idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ soit abélien.

Beweis klar.

Lemme 3- Si f est un homom. d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$, f applique l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ sur celle de $\mathfrak{g}'$.

On a en effet $f([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = [f(\mathfrak{g}),f(\mathfrak{g})] = [\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']$.

On appelle *centre* d'une alg. de Lie $\mathfrak{g}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathfrak{g}$. C'est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$.

Lemme 4- Le centre $\mathfrak{z}$ d'un idéal $\mathfrak{a}$ d'une alg. de Lie $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Soit $C\in\mathfrak{z}$, $A\in\mathfrak{a}$, $X\in\mathfrak{g}$; on a $[A,[X,C]] = [[A,X],C]+[X,[A,C]] = 0$ car $[A,X]\in\mathfrak{a}$ et $[A,C]=0$. On a donc $[X,C]\in\mathfrak{z}$.

Si $\mathfrak{g}$ est une alg. de Lie sur K, et L un sur-corps de K, l'algèbre $\mathfrak{g}^L$ est de Lie. L'algèbre dérivée et le centre de $\mathfrak{g}^L$ se déduisent par extension du corps de base de l'algèbre dérivée et du centre de $\mathfrak{g}$.

Soit V un espace vectoriel; les endomorphismes de V forment une algèbre de Lie par rapport à la loi de composition $[X,Y]=XY-YX$; on désignera cette alg. de Lie par $\mathfrak{gl}(V)$.

Une *représentation* ρ d'une alg. de Lie $\mathfrak{g}$ est un homom. de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$. L'espace V peut alors être muni d'une structure de groupe à opérateurs admettant comme opérateurs les éléments de son corps de base et les éléments de $\mathfrak{g}$; muni de cette structure, il prend le nom d'*espace de la représentation* ρ. On déduit de là les notions de représentations équivalentes, simples, semi-simples, de sous-espace stable de V(incidemment, je propose de n'appeler un espace de représentation simple que si, en plus de la condition habituelle, on a $V \neq \{0\}$). La dimension de l'espace V, si elle est finie, s'appelle le <u>degré</u> de la représentation.

Soit ρ une représentation de degré fini d'une alg. de Lie $\mathfrak{g}$. L'application $(X,Y) \to \operatorname{Tr} \rho(X)\rho(Y)$ s'appelle la <u>forme bilinéaire fondamentale associée à la représentation</u> ρ . Cette forme est symétrique.

<u>Proposition 2- Soit B la forme bilinéaire associée à une représentation</u> ρ <u>de degré fini d'une alg. de Lie</u> $\mathfrak{g}$. <u>On a alors l'identité</u> $B([X,Y],Z)+B(X,[Z,Y])=0$. <u>Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>est un idéal de</u> $\mathfrak{g}$, <u>l'ensemble des</u> $X \in \mathfrak{g}$ <u>tels que</u> $B(X,A)=0$ <u>pour tout</u> $A \in \mathfrak{a}$ <u>est un idéal de</u> $\mathfrak{g}$.

On a $B([X,Y],Z) = \operatorname{Tr} \rho(X)\rho(Y)\rho(Z) - \operatorname{Tr} \rho(Y)\rho(X)\rho(Z)$, et $B(X,[Z,Y]) = \operatorname{Tr} \rho(X)\rho(Z)\rho(Y) - \operatorname{Tr} \rho(X)\rho(Y)\rho(Z)$, de sorte que notre identité résulte tout de suite de la formule $\operatorname{Tr} UV = \operatorname{Tr} VU$. Supposons que $B(A,X)=0$ pour tout $A \in \mathfrak{a}$; si $Y \in \mathfrak{g}$, $B(A,[X,Y]) = -B([A,Y],X) = 0$ puisque $A \in \mathfrak{a}$ entraine $[A,Y] \in \mathfrak{a}$.

Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$, et soit L un sur-corps de K. Soit V l'espace de la représentation ρ . Si on associe à tout $X \in \mathfrak{g}$ l'endomorphisme de V^L qui prolonge $\rho(X)$, on obtient une application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(V^L)$ qui se prolonge en une représentation, que nous désignerons par ρ^L, de $\mathfrak{g}^L$; nous dirons que ρ^L est la représentation de $\mathfrak{g}^L$ <u>associée</u> à ρ .

Si $\mathfrak{g}$ est une alg. de Lie, et $X \in \mathfrak{g}$, on désigne par ad X (ou, s'il faut préciser, par $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$) l'application $Y \to [X,Y]$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$.

<u>Proposition 3- Si</u> $\mathfrak{g}$ <u>est une alg. de Lie, et</u> $X \in \mathfrak{g}$, ad X <u>est une dérivation de</u> $\mathfrak{g}$, <u>et l'application</u> $X \to \operatorname{ad} X$ <u>est une représentation de</u> $\mathfrak{g}$.

Vérification triviale par l'identité de Jacobi.

L'application $X \to \operatorname{ad} X$ s'appelle la <u>représentation adjointe</u> de $\mathfrak{g}$. Son noyau est le centre de $\mathfrak{g}$. Les sous-espaces stables de $\mathfrak{g}$, considéré comme espace de la représentation adjointe, sont les idéaux de $\mathfrak{g}$.

Si L est un sur-corps ~~XXXXX~~ du corps de base K de $\mathfrak{g}$, la représentation de $\mathfrak{g}^L$ associée à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est la représentation adjointe de $\mathfrak{g}^L$.

La forme bilinéaire associée à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ (si $\mathfrak{g}$ est

NBR032 8

de dimension finie) est appelée la <u>forme bilinéaire fondamentale de</u> $\mathfrak{g}$. La forme quadratique correspondante est appelée la <u>forme quadratique fondamentale de</u> $\mathfrak{g}$.

---

§3 - ALGEBRES SEMI-SIMPLES
Enoncé du théorème fondamental.

<u>A partir de dorénavant, on ne considèrera</u> (NB: l'accent grave n'est pas de Chevalley) <u>que des algèbres de Lie de dimensions finies, et des représentations de degrés finis.</u>

Une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ d'une alg. de Lie $\mathfrak{g}$ est dite <u>réductive</u> dans $\mathfrak{g}$ si la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ induit une représentation semi-simple de $\mathfrak{h}$. Une alg. de Lie $\mathfrak{g}$ est dite <u>semi-simple</u> si toutes ses représentations sont semi-simples. Il est clair que toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui est réductive dans $\mathfrak{g}$ est réductive en elle-même, et qu'une algèbre semi-simple est réductive dans toute algèbre qui la contient (on voit d'ailleurs sans peine que cette propriété caractérise les alg. semi-simples).

<u>Théorème fondamental</u>- <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0; les trois conditions suivantes sont alors équivalentes:</u>

I : $\mathfrak{g}$ <u>est semi-simple</u> ;

II : $\mathfrak{g}$ <u>n'a pas d'idéal abélien</u> $\neq 0$;

III: <u>la forme bilinéaire fondamentale de</u> $\mathfrak{g}$ <u>n'est pas dégénérée.</u>

Les démonstrations des implications I $\Rightarrow$ II et III $\Rightarrow$ II sont assez faciles (nous les donnons dans ce §), et ne dépendent pas de l'hypothèse de caractéristique 0. Les implications II $\Rightarrow$ I , II $\Rightarrow$ III et III $\Rightarrow$ I ne sont pas vraies si on ne fait pas l'hypothèse de caract. 0. Quant à I $\Rightarrow$ III, je ne sais pas ce qu'il en est en caractéristique $p \neq 0$; je suis porté à soupçonner que, si la caractéristique est $\neq 0$, I entraine $\mathfrak{g} = \{0\}$.

la repres. adjointe est semi-simple

<u>Proposition 1</u>- <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une alg. de Lie réductive en elle-même. Tout idéal abélien</u> $\mathfrak{n}$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>est dans le centre</u> $\mathfrak{z}$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$, <u>et</u> $\mathfrak{g}$ <u>est somme directe de</u> $\mathfrak{z}$ <u>et de</u> $\mathcal{D}\mathfrak{g}$; $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ <u>n'a pas d'idéal abélien</u> $\neq 0$.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal abélien. La représentation adjointe étant semi-simple, $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{n}$ et d'un idéal $\mathfrak{h}$. On a $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = 0$ et $[\mathfrak{n},\mathfrak{h}] = 0$

(Lemme 1,§2),d'où $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{r}$ .De plus,$[\mathfrak{n}+\mathfrak{h},\mathfrak{n}+\mathfrak{h}]\subset[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$ .Prenons maintenant $\mathfrak{n}=\mathfrak{r}$;on peut alors écrire $\mathfrak{h}$ comme somme directe de $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ et d'un idéal $\mathfrak{n}_1$ .L'idéal $\mathfrak{r}+\mathfrak{n}_1$,isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{D}\mathfrak{g}$,est abélien,donc contenu dans $\mathfrak{r}$,et $\mathfrak{n}_1=\{0\}$ .La dernière assertion découle tout de suite des autres du Lemme 1,§2.

<u>Proposition 2- Soit $\mathfrak{g}$ une alg.de Lie semi-simple.Toute algèbre quotient de $\mathfrak{g}$ est semi-simple, et on a $\mathfrak{g}=\mathfrak{D}\mathfrak{g}$</u> .

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ .Une représentation ρ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ définit une représentation ρ_0 de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho_0(X)=\rho(\bar{X})$,si $\bar{X}$ est la classe de X mod. $\mathfrak{n}$; ρ et ρ_0 ont le même espace de représentation V,et les sous-espaces de V stables par rapport à ρ et à ρ_0 sont les mêmes.Il en résulte que ρ et ρ_0 sont semi-simples en même temps.Donc,si $\mathfrak{g}$ est semi-simple,il en est de même de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ .Si $\mathfrak{g}$,de dimension n,est différente de $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$,tout sous-espace vectoriel de dimension n-1 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ est un idéal.Il suffit donc,pour démontrer l dernière assertion de la Prop.2 de montrer qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de dimension 1 n'est pas semi-simple.Soit A un élément de base de $\mathfrak{n}$;on définit une représentation non semi-simple de $\mathfrak{n}$ en associant à A un endomorphisme d'un espace vectorie de dimension 2 qui se représente,par rapport à une base de cet espace,par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il résulte immédiatement des Prop.1 et 2 que I $\Rightarrow$ II.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal abélien d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ .Si $A\in\mathfrak{n}$ et $X\in\mathfrak{g}$,on a $((\mathrm{ad}A)(\mathrm{ad}X))^2=0$.En effet,cette opération applique Y sur $[A,[X,[A,[X,Y]]]]$. Or $[A,[X,Y]]\in\mathfrak{n}$, $[X,[A,[X,Y]]]\in\mathfrak{n}$,d'où $[A,[X,[A,[X,Y]]]]=0$.On a donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}A)(\mathrm{ad}X)=0$,et il en résulte immédiatement que III $\Rightarrow$ II.

<u>Proposition 3- Soit $\mathfrak{g}$ une alg.de Lie qui possède l'une ou l'autre des propriétés I ou III du théorème fondamental.Si D est une dérivation de $\mathfrak{g}$,il existe un $A\in\mathfrak{g}$ tel que</u> $D=\mathrm{ad}\,A$.

Soit $\underline{E}$ l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel sous-jacent de $\mathfrak{g}$. Si $X\in\mathfrak{g}$,soit f(X) l'application $U\rightarrow[\mathrm{ad}X,U]$ de $\underline{E}$ dans lui-même.L'espace

$\underline{E}$ contient l'image ad $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ par sa représentation adjointe; si $X \in \mathfrak{g}$, $f(X)$ applique ad $\mathfrak{g}$ dans lui-même, car $f(X)$ applique ad$Y$ sur ad$[X,Y]$. Supposons la condition suivante satisfaite: C. l'espace $\underline{E}$ est somme directe de ad $\mathfrak{g}$ et d un espace $\underline{F}$ qui est appliqué dans lui-même par les $f(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, et, de plus, le centre de $\mathfrak{g}$ est 0. Soit alors D une dérivation de $\mathfrak{g}$; on a $D = \mathrm{ad}A + D'$ où $D' \in \underline{F}$. Il suffit donc de montrer que $D \in \underline{F}$ entraine $D=0$. Or on a, pour $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{g}$, $[\mathrm{ad}\ X, D]Y = [X, DY] - D([X,Y]) = -[DX, Y]$, d'où $[\mathrm{ad}\ X, D] = 0$, ad $DX = 0$. Le centre de $\mathfrak{g}$ étant 0, la représentation adjointe est un isomorphisme, d'où $DX = 0$. Ceci étant vrai pour tout X, on a $D=0$. Ceci dit, la condition C. est évidemment satisfaite si $\mathfrak{g}$ est semi-simple (puisqu'on sait déja que I $\Rightarrow$ II). Si $\mathfrak{g}$ possède la propriété III, soit $\underline{F}$ l'ensemble des U tels que $\mathrm{Tr}\ U(\mathrm{ad}\ X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Donc $\underline{F}$ n'a en commun avec ad $\mathfrak{g}$ que 0. De plus, si $\mathfrak{g}$ est de dimension n, $\underline{F}$ est l'ensemble des solutions d'un système de n équations linéaires, et est donc de dimension $\geqslant n(n-1)$. Il en résulte que $\underline{E}$ est somme directe de ad $\mathfrak{g}$ et de $\underline{F}$ (car ici encore le centre de $\mathfrak{g}$ est nul, et ad $\mathfrak{g}$ est de dimension n). Enfin, si $X, Y \in \mathfrak{g}$, $U \in \underline{F}$, $\mathrm{Tr}\,[\mathrm{ad}\ Y, U]\,\mathrm{ad}\ X = -\mathrm{Tr}\ U[\mathrm{ad}\ Y, \mathrm{ad}\ X] = -\mathrm{Tr}\ U\mathrm{ad}[Y,X] = 0$.

<u>Remarque</u>. Le seul intérêt de montrer que III entraine la conclusion de la Prop. 3 est que la démonstration est valable en caractéristique p.

---

§4 - LA DEMONSTRATION QUE II $\Rightarrow$ III.

Première partie : Le théorème d'Engel.

<u>Théorème d'Engel - Soit V un vectoriel, et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ dont les éléments sont tous nilpotents; si $V \neq \{0\}$, il existe un $x \neq 0$ dans V tel que $Xx = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.</u>

La démonstration procède par récurence sur la dimension n de $\mathfrak{g}$. Le théorème est évident si $n=1$. Supposons-le vrai pour les algèbres de dimension $< n$.

Nous aurons besoin du lemme suivant:

<u>Lemme 1-Soit X un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel V, et soit $\underline{E}$ l'espace des endomorphismes de V. L'applization $Y \to [X,Y]$ de $\underline{E}$ dans lui-même est nilpotente.</u>

NBR032

Car, si f est cette application, $f^m(Y)$ est une somme de termes de la forme $\pm X^iYX^j$ avec $i+j=m$; si $X^k=0$, $f^{2k}(Y)=0$ pour tout Y.

Il résulte immédiatement de là que, si X est un élément de l'algèbre $\mathfrak{g}$ du théorème, ad X est nilpotent. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de dimension $m<n$ de $\mathfrak{g}$. Si $X\in\mathfrak{h}$, ad X applique $\mathfrak{h}$ dans lui-même et définit par passage aux quotients un endomorphisme $\sigma(X)$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; il est clair que $\sigma(X)$ est nilpotent. En vertu de notre hypothèse inductive, il y a un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ qui est annulé par tous les $\sigma(X)$, $X\in\mathfrak{h}$. Il y'a donc un $Y\in\mathfrak{g}$, $Y\notin\mathfrak{h}$, tel que $[X,Y]\in\mathfrak{h}$ pour tout $X\in\mathfrak{h}$. Il en résulte immédiatement que $\mathfrak{h}$ est un idéal dans une certaine sous-algèbre de dimension $m+1$ de $\mathfrak{g}$.

On conclut facilement de là (par itération) à partir de $\mathfrak{h}=\{0\}$) que $\mathfrak{g}$ possède un idéal de dimension $n-1$, soit $\mathfrak{h}$. Faisant usage de nouveau de l'hypothèse inductive, les éléments de V qui sont annulés par les opérations de $\rho(\mathfrak{h})$ forment un sous-espace $U\neq 0$. Soit A un élément de $\mathfrak{g}$ non contenu dans $\mathfrak{h}$; si $x\in U$ et $X\in\mathfrak{h}$, on a

$$\rho(X)\rho(A)x = \rho(A)\rho(X)x + \rho([X,A])x = 0$$

puisque $[X,A]\in\mathfrak{h}$. Donc $\rho(A)$ applique U dans lui-même. Puisque $\rho(A)$ est nilpotent il y'a un $x\neq 0$ dans U qui est appliqué sur 0 par $\rho(A)$, et par suite aussi par tout élément de $\rho(\mathfrak{g})$.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite <u>nilpotente</u> si, pour tout $X\in\mathfrak{g}$, ad X est nilpotent.

<u>Corollaire</u> 1-<u>Une alg. nilpotente non nulle a un centre non nul.</u>

C'est le th. d'Engel appliqué à la représentation adjointe.

<u>Corollaire</u> 2-<u>Une algèbre de Lie qui a un idéal nilpotent non nul a un idéal abélien non nul.</u>

Car le centre d'un idéal est un idéal (lemme 4, §2).

---

§5-LA DEMONSTRATION QUE II $\Rightarrow$ III

Un lemmmmmme.

Lemme - Soit V un vectoriel sur un corps K de caractéristique 0. Soient $\underline{E}$ l'espace des endomorphismes de V ~~xx~~, $\underline{F}$ un sous-espace de $\underline{E}$, et $\mathfrak{g}$ l'ensemble des $X \in \underline{E}$ tels que $[X,\underline{F}] \subset \underline{F}$. Si $A \in \mathfrak{g}$ est tel que $\operatorname{Tr} AX = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, A est nilpotent.

1-Soit L un surcorps de K. Si $X \in \mathfrak{g}^L$, on a $[X,\underline{F}] \subset \underline{F}^L$, d'où $[X,\underline{F}^L] \subset \underline{F}^L$. Supposons réciproquement qu'un $X \in \underline{E}^L$ satisfasse à cette condition. On a en particulier $[X,Y] \in \underline{F}^L$ si $Y \in \underline{F}$. Ecrivant $X = \sum a_i X_i$ où les $X_i \in \underline{E}$ et les a_i sont linéairement indépendants sur K dans L, on voit tout de suite que $[X_i,Y] \in \underline{F}$ pour tout d'où $X \in \mathfrak{g}^L$. Par ailleurs on a $\operatorname{Tr} AX = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}^L$. On voit donc qu'on peut supposer sans restreind~~re~~ la généralité que A satisfait à une équation $F(A)=0$ où F est un polynome qui a toutes ses racines dans le corps de base.

2-On peut alors écrire $A=S+N$ où S est diagonal, N nilpotent et $[S,N] = 0$. Si $X \in \underline{E}$, désignons par $f(X)$ l'application $Y \rightarrow [X,Y]$ de $\underline{E}$ dans $\underline{E}$; f est donc la représentation adjointe de $\mathfrak{gl}(V)$. On a $f(A)=f(S)+f(N)$, $[f(S),f(N)] = 0$ et $f(N)$ est nilpotent (lemme 1, §4). Soit $x_1,\dots,x_n$ une base de V telle que $Sx_i = a_i x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; soit X_{ij} l'élément de $\underline{E}$ qui applique x_i sur x_j et x_k sur 0 si $k \neq i$; les X_{ij} forment une base de $\underline{E}$. Un calcul facile montre que, si $S'x_i = a_i' x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $[S',X_{ij}] = (a_j' - a_i')X_{ij}$. En particulier, $f(S)$ est diagonal. Il en résulte que $f(S)$ est la composante diagonale de $f(A)$, donc est un polynome en $f(A)$. Puisque $f(A)$ applique $\underline{F}$ dans lui-même, il en est évidemment de même de $f(S)$, d'où $S \in \mathfrak{g}$. Or on va montrer que, si $S \neq 0$, il existe un $S' \in \mathfrak{g}$ qui est un polynome en S et qui est tel que $\operatorname{Tr} SS' \neq 0$. Ceci fait, le lemme sera démontré. Car si l'on avait $S \neq 0$, S', qui est un polynome en S, commuterait avec N; $S'N$ serait donc nilpotent, d'où $\operatorname{Tr} NS' = 0$ et $\operatorname{Tr} AS' = \operatorname{Tr} SS' \neq 0$, ce qui n'est pas.

3-Soit donc S diagonal dans $\mathfrak{g}$; utilisons les mêmes notations que plus haut. Formons l'algèbre extérieure E sur $\underline{E}$; si $X \in \underline{E}$, soit $f^*(X)$ la dérivation de $\underline{E}$ (il est à présumer que c'est E, et non pas $\underline{E}$) qui prolonge $f(X)$. Soient d la dimension de $\underline{F}$, E_d la puissance antisymétrique d-ième de $\underline{E}$ et u le produit extérieur des éléments d'une base de $\underline{F}$. L'espace E_d possède une base $\xi_1,\dots,\xi_r$ composée des produits extérieurs de d des éléments X_{ij}. Soient a_i' des éléments de K, et S' l'endomorphisme de V qui applique x_i sur ~~xx~~ $a_i' x_i$. Il résulte alors du calcul fait plus haut et du résultat donné dans les préliminaires que

$f^*(S')\xi_k = L_k(a'_1,\dots,a'_n)$ ((il est à présumer qu'il manque un ξ_k)) où les L_k sont des formes linéaires à coefficients entiers rationnels. Par hypothèse, u est un vecteur propre de $f^*(S)$; si $f^*(S)u = su$, u est une combinaison linéaire de ceux des ξ_k pour lesquels $L_k(a_1,\dots,a_n)= s$; soit M l'ensemble des indices k pour lesquels il en est ainsi. Puisque K est de caract. 0, son corps primitif K_o peut être identifié au corps des rationnels. Soit R l'espace vectoriel sur K_o engendré par $a_1,\dots,a_n$, et soit h une fonction linéaire quelconque sur R(donc, à valeurs rationnelles). Posons $a'_i = h(a_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ et soit S' défini comme plus haut. Si k et k' sont des éléments de M, l'égalité $L_k(a_1,\dots,a_n) = L_{k'}(a_1,\dots,a_n)$ entraine $L_k(a'_1,\dots,a'_n)=L_{k'}(a'_1,\dots,a'_n)$; on en déduit immédiatement que u est un vecteur propre de $f^*(S')$, donc que $f(S')$ applique $\underline{F}$ dans lui-même, et par suite que $S'\in\mathfrak{g}$. Par ailleurs, si i et j sont tels que $a_i=a_j$, on a aussi $a'_i=a'_j$; il résulte de la formule d'interpolation de Lagrange qu'il existe un polynome P à coefficients dans K tel que $P(a_i)=a'_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, d'où $P(S)=S'$. Il suffira donc de montrer que la fonction linéaire h peut être choisie telle que $\mathrm{Tr}\, SS' = \sum a_i h(a_i) \neq 0$ (à condition que les a_i ne soient pas tous nuls). Or, soit $b_1,\dots,b_r$ une base de R; posons $a_i=\sum h_{ij}b_j$ où les h_{ij} sont rationnels. Soient i_o et j_o tels que $h_{i_o j_o}\neq 0$; il existe une fonction linéaire h sur R telle que $h(a_i)=h_{ij_o}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, d'où $\sum a_i h(a_i) = \sum\sum h_{ij}h_{ij_o}b_j$; or on a $\sum_i h_{ij_o}^2 \neq 0$, d'où $\sum a_i h(a_i)\neq 0$. Le lemme est donc démontré.

§6 - FIN DE LA DEMONSTRATION QUE II $\Longrightarrow$ III

Proposition 1-Soit ρ une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0, et soit B la forme bilinéaire associée à $\mathfrak{g}$ ((il est à présumer qu'il s'agit de ρ, et non de $\mathfrak{g}$)). Soit $\mathfrak{a}$ ~~XXXXXX~~ l'ensemble des $A\in\mathfrak{g}$ tels que $B(A,X)=0$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$, et soit $\mathfrak{a}'$ l'espace vectoriel formé des sommes d'éléments de la forme $[A,Y]$, avec $A\in\mathfrak{a}$, $Y\in\mathfrak{g}$. Tout élément de $\rho(\mathfrak{a}')$ est alors nilpotent.

Soit V l'espace de la représentation ρ. Remplaçant la considération de $\mathfrak{g}$ par celle de $\rho(\mathfrak{g})$, on peut supposer que $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ et que ρ est la représentation identique. Soit $\mathfrak{g}'$ l'ensemble des $X'\in\mathfrak{gl}(V)$

tels que $[X', \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$; on a donc $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$. Soient $A \in \mathfrak{n}$, $Y \in \mathfrak{g}$ et $X' \in \mathfrak{g}'$; on a $\mathrm{Tr}\,[A,Y]X' = \mathrm{Tr}\,A[Y,X'] = 0$. On en déduit que $\mathrm{Tr}\,A'X' = 0$ pour tout $A' \in \mathfrak{n}'$; en vertu du lemme du §5, que les éléments de $\mathfrak{n}'$ sont nilpotents.

Les ensembles $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$ de la Prop. 1 sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, le premier en vertu de la Prop. 2, §2, le second en vertudu lemme 2, §2.

Proposition 2-Soit ρ une représentation fidèle d'une alg. de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0. Si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal abélien $\neq 0$, la forme bilinéaire associée à ρ n'est pas dégénérée.

En effet, ρ induit une représentation fidèle de lâidéal $\mathfrak{n}'$ de la Prop. 1 par des endomorphismes nilpotents. Il résulte du lemme 1, §4 que $\mathfrak{n}'$ est nilpotent, donc du cor. 2 au théorème d'Engel que $\mathfrak{n}' = 0$. Cela signifie que $\mathfrak{n}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$, donc que $\mathfrak{n} = 0$.

Si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal abélien $\neq 0$, la représentation adjointe est fidèle; il résulte donc de la prop. 2 que II entraine III.

Nous allons maintenant montrer que III entraine que la représentation adjointe est semi-simple (toujours dans le cas de caract. 0). Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, et soit $\mathfrak{h}'$ l'ensemble des X tels que $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{ad}\,H)(\mathrm{ad}\,X) = 0$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$, c'est un idéal en vertu de la Prop. 2, §2, et il résulte de III que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}' = 0$. La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ induit une représentation fidèle de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}'$; il résulte de la prop. 1 que tout élément de l'algèbre dérivée de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}'$ est représenté par une opération nilpotente, donc que $\mathfrak{D}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}')$ est nilpotente. Or $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, et il résulte du lemme 2, §2 qu~~e~~'il en est de même de $\mathfrak{D}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}')$. Si $\mathfrak{D}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}')$ était $\neq 0$, son centre serait un idéal abélien $\neq 0$, ce qui est impossible puisque III $\Rightarrow$ II; donc $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}'$ est abélien, d'où $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}' = 0$. Or, soient m et n les dimensions de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{h}$; $\mathfrak{h}'$ est alors évidemment de dimension $\geqslant (n-m)$, et il résulte de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}' = 0$ que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$, ce qui démontre que la représentation adjointe est semi-simple.

Il résulte de là que, si $\mathfrak{g}$ sur un corps de caract. 0 possède la propriété II, et si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ possèdent la propriété II. Car tout idéal abélien de $\mathfrak{h}$ est aussi un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ (lemme 1, §2), et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est isomorphe à un idéal de $\mathfrak{g}$.

§7 - OPERATEURS DE CASIMIR

Soit $\mathfrak{g}$ une alg.de Lie sur un corps de caract. 0.Supposons que $\mathfrak{g}$ possède une représentation ρ dont la forme bilinéaire associée B soit non dégénérée. Soit $X_1,\ldots,X_n$ une base de $\mathfrak{g}$;il existe alors une base $X_1^*,\ldots,X_n^*$ de $\mathfrak{g}$ telle que $B(X_i,X_j^*) = \delta_{ij}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$.Soit $X\in\mathfrak{g}$,et $[X,X_i] = \sum_j a_{ij}X_j$ .On a $a_{ij} = B([X,X_i],X_j^*) = -B(X_i,[X,X_j^*])$,d'où $[X,X_j^*] = -\sum_i a_{ij}X_i^*$ .Posons

$$\Gamma = \sum_i \rho(X_i)\rho(X_i^*) \quad ;$$

Γ s'appelle alors l'<u>opérateur de Casimir</u> de la représentation ρ (on peut voir sans peine qu'il ne dépend pas du choix de la base $X_1,\ldots,X_n$;mais on n'aura pas besoin de ce fait).

L'opérateur Γ commute avec les $\rho(X)$, $X\in\mathfrak{g}$ .En effet,utilisant les mêmes notations que plus haut,on a

$$[\rho(X),\Gamma] = \sum_i \rho([X,X_i])\rho(X_i^*) + \sum_i \rho(X_i)\rho([X,X_i^*])$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}\rho(X_j)\rho(X_i^*) - \sum_{i,j} a_{ji}\rho(X_i)\rho(X_j^*) = 0.$$

Si $\mathfrak{g} \neq \{0\}$,l'opérateur Γ est $\neq 0$,car sa trace est $\sum B(X_i,X_i^*) = n$.Puisque $\mathrm{Tr}\,\Gamma \neq 0$,on peut même affirmer que Γ n'est pas nilpotent.Enfin,on observera que Γ appartient à l'algèbre associative engendrée par les éléments de $\rho(\mathfrak{g})$; il en résulte que tout sous-espace de V ,stable pour ρ ,est appliqué dans lui-même par Γ .

§8-DEMONSTRATION DE CE QUE II $\Rightarrow$ I

On désignera par $\mathfrak{g}$ une alg.de Lie sur un corps de caract.0 qui possède la propriété II,par ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ et par V l'espace de la représentation ρ .

1-<u>Soit U un sous-espace de V tel que $\rho(X)(V)\subset U$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$ .Alors V est somme directe de U et d'un sous-espace dont les éléments sont annulés par les $\rho(X)$, $X\in\mathfrak{g}$.</u>

On procède par récurence sur la dimension d de V.C'est évident si d=0 ou 1. Supposons que ce soit vrai pour les espaces de représentations de dimension $<$ d.

Si $\mathfrak{h}$ est le noyau de ρ, ρ induit une représentation fidèle de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, soit $\bar{\rho}$. Si $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$, l'assertion est évidente. Sinon, soit Γ l'opérateur de Casimir de $\bar{\rho}$ (on sait que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ possède la propriété II; cf. fin du §6). On a $V\supset\Gamma(V)\supset\Gamma^2(V)\supset\ldots$; soit $V_0=\Gamma^k(V)$ le plus petit espace de cette suite décroissante. On a $V_0\neq 0$ parce que Γ n'est pas nilpotent. De plus Γ^k induit un automorphisme de V_0 (car $\Gamma^{2k}(V)=\Gamma^k(V)$). Soit U_0 l'ensemble des vecteurs annulés par Γ^k. On a donc $U_0\cap V_0=0$. De plus la somme des dimensions de U_0 et de V_0 est la dimension de V; donc V est somme directe de U_0 et de V_0. Puisque Γ^k commute avec les $\rho(X)$, $X\in\mathfrak{g}$, U_0 et V_0 sont stables par ρ. Les opérations de l'algèbre associative engendrée par les $\rho(X)$ appliquent V dans U; donc $\Gamma(V)\subset U$ et par suite $V_0\subset U$. Puisque $V_0\neq 0$, U_0 est de dimension $< d$. Il résulte donc de l'hypothèse inductive que U_0 est somme directe de $U_0\cap U$ et d'un espace U' qui est annulé par les $\rho(X)$, $X\in\mathfrak{g}$. Il est alors clair que V est somme directe de U et de U'.

2-<u>Soit</u> x <u>un élément de</u> V <u>tel que</u> $\rho(X)x=0$ <u>pour tout</u> $X\in\mathfrak{g}$. <u>Alors</u> V <u>est somme directe de l'espace engendré par</u> x <u>et d'un sous-espace stable pour</u> ρ.

Soient V^* le dual de V et U^* l'espace des fonctions linéaires qui s'annulent en x. Si $X\in\mathfrak{g}$, soit $\rho^*(X)=-{}^t(\rho(X))$; on voit alors tout de suite que ρ^* est une représentation de $\mathfrak{g}$, et que les sous-espaces de V^* stables pour ρ^* sont exactement les sous-espaces orthogonaux aux sous-espaces de V stables pour ρ. De plus, les $\rho^*(X)$, $X\in\mathfrak{g}$, appliquent tous V^* dans U^*; V^* est donc somme directe de U^* et d'un sous-espace stable pour ρ^*, soit U_1^*. L'orthogonal U_1 de U_1^* est stable pour ρ et est un supplémentaire de l'espace engendré par x.

3-<u>Montrons maintenant que toute représentation</u> ρ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>est semi-simple</u>.

Montrons d'abord que $\mathfrak{g}=\mathcal{D}\mathfrak{g}$. En effet, la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ étant semi-simple((parce que II $\Rightarrow$ III et parce que III $\Rightarrow$ semi-simplicité de la représentation adjointe: fin du §6)), $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ et d'un idéal qui, étant isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathcal{D}\mathfrak{g}$, est abélien donc réduit à $\{0\}$. Ceci dit, soit U un sous-espace de V, stable pour ρ. Construisons l'algèbre extérieure E sur V, et la puissance antisymétrique d-ème E_d de V, où d est la dimension de U. Soit u le produit extérieur des éléments d'une base de U. Prolongeons chaque $\rho(X)$, $X\in\mathfrak{g}$, par une dérivation de E, dont nous désignerons par $\sigma(X)$ la restriction à E_d ; σ est une représentation de $\mathfrak{g}$ .On a $\sigma(X)u = s(X)u$, où $s(X)$ est un scalaire qui dépend linéairement de X.Il est clair que $s([X,Y])=0$ d'où $s(X)=0$ puisque $\mathfrak{g} = \mathcal{D}\mathfrak{g}$ .En vertu de 2.,E_d est somme directe de l'espace engendré par u et d'un ~~sous-espace stable pour X~~ espace $\underline{E}$ stable par σ .Soit $x_1,\dots,x_n$ une base de U telle que $u=x_1\dots x_n$ .Soit U' l'ensemble des $x\in V$ tels que les produits $xx_1\dots\hat{x}_i\dots x_n$ soient tous dans $\underline{E}$(le ^signifie que...).Alors $U\cap U' = 0$ car,si $x = \sum a_i x_i$, $xx_1\dots\hat{x}_i\dots x_n = \pm a_i u$.Soit par ailleurs x quelconque dans V;soit $xx_1\dots\hat{x}_i\dots x_n \equiv a_i u \pmod{\underline{E}}$.Soustrayant de x une combinaison linéaire de $x_1,\dots,x_n$ (dont les coefficients sont $\pm a_i$),on obtient un élément de U'. Donc V est somme directe de U et de U'.Soit $x\in U'$,et soit $X\in\mathfrak{g}$ .Puisque U est stable par ρ ,les produits déduits des $x_1\dots\hat{x}_i\dots x_n$ en y remplaçant un facteur par son transformé par $\rho(X)$ sont des combinaisons linéaires des $x_1\dots\hat{x}_j\dots x_n$ .Puisque $\underline{E}$ est stable pour σ ,les $\rho(X)(xx_1\dots\hat{x}_i\dots x_n)$ sont dans $\underline{E}$.Il en résulte tout de suite que les $(\rho(X)x)x_1\dots\hat{x}_i\dots x_n$ sont dans $\underline{E}$,donc que $\rho(X)x \in U'$;l'espace U' est donc stable pour .Ceci TERMINE la démonstration du théorème fondamental.

§9-PREMIERES APPLICATIONS

Appelons simple une algèbre de Lie non abélienne dont la représentation adjointe est simple.

Proposition 1-Tout produit d'algèbres de Lie simples sur un corps de caract.0 est semi-simple,et toute algèbre semi-simple est isomorphe à un produit d'algèbres simples.

On voit tout de suite qu'un produit d'alg.de Lie dont aucune ne possède d'idéal abélien $\neq 0$ n'a pas d'idéal abélien $\neq 0$,donc qu'un produit d'alg.simples est semi-simple.Inversement,une alg.de Lie semi-simple peut se représenter comme somme directe d'idéaux minimaux $\neq 0$,soient $\mathfrak{h}_1,\dots,\mathfrak{h}_n$,et il résulte du lemme 1 §1,que chaque $\mathfrak{h}_i$ est simple.

Proposition 2-Soit $\mathfrak{g}$ une alg.de Lie sur un corps K de caract.0,et soit L un sur-corps de K.Pour que $\mathfrak{g}$ soit semi-simple,il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\mathfrak{g}^L$.

Car la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}^L$ est le prolongement de celle de

$\mathfrak{g}$ et est par suite dégénérée ou non suivant que celle de $\mathfrak{g}$ l'est ou non.

Soit $\mathfrak{g}$ une alg.de Lie quelconque sur un corps de caract.0.Soit $\mathfrak{n}_1$ un idéal abélien maximal de $\mathfrak{g}$,$\mathfrak{n}_2/\mathfrak{n}_1$ un idéal abélien maximal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_1$,généralement $\mathfrak{n}_{k+1}/\mathfrak{n}_k$ un idéal abélien maximal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_k$.Il existe un m tel que $\mathfrak{n}_m = \mathfrak{n}_{m+1} = \dots$;soit $\mathfrak{r}$ l'idéal ainsi obtenu.Donc $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ n'a pas d'idéal abélien $\neq 0$ et est semi-simple.Soit réciproquement $\mathfrak{r}'$ un idéal tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}'$ soit semi-simple.Donc $\mathfrak{r}' \supset \mathfrak{n}_1$ .Supposons que $\mathfrak{r}' \supset \mathfrak{n}_k$;on voit alors tout de suite que $\mathfrak{r}'/\mathfrak{n}_k \supset \mathfrak{n}_{k+1}/\mathfrak{n}_k$,d'où $\mathfrak{r}' \supset \mathfrak{n}_{k+1}$,et par suite $\mathfrak{r}' \supset \mathfrak{r}$;l'idéal $\mathfrak{r}$ est donc uniquement caractérisé comme étant le plus petit idéal à quotient semi-simple.

Si $\mathfrak{g}$ est une alg.de Lie,on pose $\mathcal{D}^2\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathcal{D}\mathfrak{g})$,et,généralement,$\mathcal{D}^{k+1}\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathcal{D}^k\mathfrak{g})$.S'il y a un k tel que $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = 0$,on dit que $\mathfrak{g}$ est *résoluble*.Utilisant les mêmés notations que plus haut,on voit tout de suite que $\mathcal{D}(\mathfrak{n}_{k+1}) \subset \mathfrak{n}_k$;donc $\mathfrak{r}$ est résoluble.

Si f est un homom? de $\mathfrak{g}$ sur une algèbre $\mathfrak{g}'$,il résulte du lemme 3,§2,que $f(\mathcal{D}^k\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^k\mathfrak{g}'$;donc tout quotient d'une algèbre résoluble est résoluble. Une algèbre résoluble $\neq 0$ est différente de son algèbre dérivée,et $\mathfrak{r}$ est par suite pas semi-simple.

Soit $\mathfrak{r}'$ un idéal résoluble d'une alg.de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de caract.0; l'idéal $\mathfrak{r}$ étant défini comme plus haut,$(\mathfrak{r}'+\mathfrak{r})/\mathfrak{r}$ est un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, donc semi-simple,mais est aussi isomorphe à un quotient de $\mathfrak{r}'$,donc résoluble; on a donc $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}$, de sorte que $\mathfrak{r}$ est le plus grand idéla résoluble de $\mathfrak{g}$.L'idéal $\mathfrak{r}$ s'appelle le *radical* de $\mathfrak{g}$.

Proposition 3-Soit $\mathfrak{g}$ une alg.de Lie sur un corps de caract.0;supposons que $\mathfrak{g}$ possède une représentation semi-simple fidèle ρ ;l'algèbre $\mathfrak{g}$ est alors réductive en elle-même.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$,et soit $\mathfrak{n}'$ l'idéal formé des combinaisons linéaires d'éléments de $[\mathfrak{n},\mathfrak{g}]$ (lemme 2,§2).Soit $A' = \sum [A_i, X_i]$ un élément de $\mathfrak{n}'$,et U une puissance quelconque de $\rho(A')$.On a $\mathrm{Tr}\,\rho(A')U = \sum \mathrm{Tr}[U,\rho(A_i)]\rho(X_i)$ .Or les A_i qui sont dans $\mathfrak{n}$,commutent avec A';donc les $\rho(A_i)$ commutent avec U,et $\mathrm{Tr}\,\rho(A')U = 0$.Il en résulte que $\rho(A')$ est nilpotent.

Soit V_0 l'espace des $x\in V$ qui sont annulés par les $\rho(A')$ pour tout $A'\in\mathfrak{r}'$. L'ensemble $\mathfrak{r}'$ étant un idéal de $\mathfrak{g}$, on voit tout de suite que V_0 est stable pour ρ ; V est donc somme directe de V_0 et d'un sous-espace V_1 stable pour ρ. Les $\rho(A')$, $A'\in\mathfrak{r}'$, induisent des endomorphismes nilpotents de V_1, mais aucun élément $\neq 0$ de V_1 n'est annulé par tous les $\rho(A')$. Il résulte donc du théorème d'Engel que $V_1 = 0$, d'où $V_0=V$, $\rho(\mathfrak{r}')=0$, et par suite $\mathfrak{r}'=0$. Cela signifie que $\mathfrak{r}$ est dans le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. Soit maintenant $\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}\cap\mathcal{D}\mathfrak{g}$, et $A'' = \sum [X_i, Y_i]$ un élément de $\mathfrak{r}''$. Soit encore U une puissance de $\rho(A'')$; on a $\operatorname{Tr}\rho(A'')U = \sum \operatorname{Tr}\rho(X_i)[\rho(Y_i),U]$; or $\rho(A'')$ commute avec $\rho(Y_i)$ (parce que $A''\in\mathfrak{z}$); il en est donc de même de U, et on voit comme plus haut d'abord que les éléments de $\rho(\mathfrak{r}'')$ sont nilpotents, puis que $\rho(\mathfrak{r}'')=0$ et enfin que $\mathfrak{r}''=0$. Donc $\mathfrak{r}\cap\mathcal{D}\mathfrak{g}=0$. Tout idéal abélien de $\mathfrak{g}$ étant dans $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ n'a pas d'idéal abélien $\neq 0$ et est par suite semi-simple. Donc $\mathcal{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$; mais $\mathcal{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}) = (\mathcal{D}\mathfrak{g}+\mathfrak{r})/\mathfrak{r}$ (lemme 3, §2); donc $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{r}$, et $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ est semi-simple, d'où il résulte immédiatment que $\mathfrak{g}$ est réductive en elle-même.

<u>Corollaire-Toute représentation simple d'une alg. de Lie résoluble sur un corps de caract. 0 applique $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ sur 0.</u>

En effet, l'image de $\mathfrak{g}$ est résoluble, donc n'a pas de quotient semi-simple non nul, d'où il résulte en vertu de la prop. 3 qu'elle se confond avec son centre.

Je signalerai enfin qu'on peut démontrer (si on le juge assez intéressant) qu'une représentation d'une alg. de Lie ~~réductive~~ résoluble ? $\mathfrak{g}$ sur un corps de caract. 0 est semi-simple si et seulement si elle induit une représentation semi-simple du centre de $\mathfrak{g}$.

§10- EXEMPLES

Soit K de caract/0, et V vectoriel de dimension finie n sur K. Alors $\mathfrak{gl}(V)$ est réductive en elle-même, $\mathfrak{sl}(V)$ (alg. des endomorphismes de trace 0) est simple. Soit B une forme bilinéaire non dégénérée sur $V\times V$, symétrique ou symétrique gauche, et $\mathfrak{o}(B)$ l'alg. de Lie des $X\in\mathfrak{gl}(V)$ tels que $B(Xx,y)+B(x,Xy)=0$ pour tous x et y dans V. Alors $\mathfrak{o}(B)$ est simple sauf si B est symétrique, $n=2$ ou 4 ; si B est symétrique et $n=2$, $\mathfrak{o}(B)$ est abélienne; si B est symétrique, $n=4$, $\mathfrak{o}(B)$ est simple ou produit de deux algèbres simples suivant les cas, mais

NBK 032 20

n'est pas simple si K est alg. fermé.~~XX~~ Je tiens à la disposition d'un rédacteur éventuel des démonstrations de ces faits, ainsi que de nombreux contre-exemples pour les cas de caract. p.

XNXNXNXNXNXNXNXNXNXNXNXNXNX

DEUXIEME PARTIE

§11-LE THEOREME DE LEVI-MALCEV
(Enoncé)

Soient $\mathfrak{g}$ une alg. de Lie sur un corps de caract. 0 et $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{g}$; on appelle <u>décomposition de Levi</u> de $\mathfrak{g}$ une représentation de $\mathfrak{g}$ comme somme directe de $\mathfrak{r}$ et d'une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{l}$.

<u>Théorème de Levi-Malcev: Toute algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 admet au moins une décomposition de Levi. Deux décompositions de Levi de $\mathfrak{g}$ peuvent toujours se déduire l'une de l'autre par un automorphisme de $\mathfrak{g}$</u> .

La partie de ce théorème qui conserne l'existence d'une décomposition de Levi est ce qu'on appelle le théorème de Levi. Ce théorème est indispensable pour démontrer l'existence d'un groupe de Lie ayant une algèbre de Lie donnée (sur le corps des réels). Le complément, dû à Malcev, est utile dans l'étude détaillée de la structure topologiquedes groupes de Lie.

Appelons <u>nilpotent</u> un élément X de $\mathfrak{g}$ dont l'opération adjointe ad X est nilpotente. On peut alors définir l'exponentielle de ad X , $\exp \operatorname{ad} X = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{ad} X)^k/k!$, qui est une somme finie parce que adX est nilpotent (1 est l'application identique de $\mathfrak{g}$). L'opération exp ad X est un automorphisme de $\mathfrak{g}$; cela se vérifie par un petit calcul formel sans difficulté en tenant compte de ce que ad X est une dérivation. Appelons (faute de mieux) <u>spéciaux</u> les automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui appartiennet au groupe engendré par les opérations exp ad X , X appartenant à l'ensemble des éléments nilpo~~XXXXX~~tents contenus dans le radical. On démontre alors que:

<u>deux décompositions de Levi peuvent toujours se déduire l'une de l'autre par un automorphisme spécial</u>.

§ 12-DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LEVI-MALCEV

1. Réduction

La démonstration procède par récurence sur la dimension n de $\mathfrak{g}$. Le théorème est trivial si $\mathfrak{r}=0$; supposons que $\mathfrak{r}\neq 0$, et que le théorème soit vrai pour les algèbres de dimension $< n$. Soit $\mathfrak{h}$ un élément maximal de l'ensemble des idéaux de $\mathfrak{g}$ contenus dans $\mathfrak{r}$ et $\neq\mathfrak{r}$. Nous poserons $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}/\mathfrak{h}$; il est alors évident que $\mathfrak{r}^*$ est le radical de $\mathfrak{g}^*$, que $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{r}^*$ est isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, et que les seuls idéaux de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{r}^*$ sont 0 et $\mathfrak{r}^*$. Puisque $\mathfrak{r}^*$ est résoluble, il est distinct de son algèbre dérivée $\mathfrak{D}\mathfrak{r}^*$; or on voit tout de suite que l'algèbre dérivée d'un idéal quelconque est encore un idéal. On a donc $\mathfrak{D}\mathfrak{r}^* = 0$, et $\mathfrak{r}^*$ est abélien.

Supposons que $\mathfrak{h}\neq 0$; on a alors $\dim\mathfrak{g}^* < n$, et il existe une décomposition de Levi $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{r}^* + \mathfrak{g}_1^*$ de $\mathfrak{g}^*$. On peut écrire $\mathfrak{g}_1^* = \mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}$, où $\mathfrak{g}_1$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$, et $\dim\mathfrak{g}_1 < n$. Il existe donc une décomposition de Levi $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} + \mathfrak{l}$ de $\mathfrak{g}_1$. On voit tout de suite que $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{l}$ est une décomposition de Levi de $\mathfrak{g}$.

Soient maintenant $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{l}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{l}_1$ des décompositions de Levi de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{l}^* = (\mathfrak{l}+\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$, $\mathfrak{l}_1^* = (\mathfrak{l}_1+\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$; on voit tout de suite que les formules $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{r}^* + \mathfrak{l}^* = \mathfrak{r}^* + \mathfrak{l}_1^*$ donnent des décompositions de Levi de $\mathfrak{g}^*$/Il existe donc un automorphisme spécial s^* de $\mathfrak{g}^*$ qui transforme $\mathfrak{l}_1^*$ en $\mathfrak{l}^*$. Montrons que s^* peut se déduire par passage au quotient d'un automorphisme spécial de $\mathfrak{g}$ (qui conserve $\mathfrak{h}$). Il suffit de considérer le cas où $s^* = \exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^*} N^*$, N^* étant un élément de $\mathfrak{g}^*$ tel que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^*} N^*$ soit nilpotent. Distinguons deux cas suivant que $\mathfrak{r}^*$ est contenu ou non dans l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}^*$. Supposons d'abord $\mathfrak{r}^* \subset \mathfrak{D}\mathfrak{g}^*$: dans ce cas, la classe $N^*(\mathrm{mod}\ \mathfrak{h})$ peut être représentée par un élément N de $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$, et on a $N\in\mathfrak{D}\mathfrak{g}\cap\mathfrak{r}$. Notre assertion résultera dans ce cas DU

Lemme 1-Soit $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps de caract. 0*, $\mathfrak{r}$ *le radical de* $\mathfrak{g}$, *N un élément de* $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ *et* ρ *une représentation de* $\mathfrak{g}$; $\rho(N)$ *est alors nilpotent.*

Utilisant une suite de Jordan-Holder pour la structure d'espace vectoriel à opérateurs de l'espace de la représentation ρ, on voit tout de suite qu'il suffit de montrer que $\rho(N)=0$ si ρ est simple. Supposons donc ρ simple. L'algèbre $\rho(\mathfrak{g})$ est alors réductive en elle-même (prop.3,§9); il en résulte facilement que $\rho(\mathfrak{g})$ est la somme directe de son algèbre dérivée, qui est semi-simple, et de son centre, qui est le radical de $\rho(\mathfrak{g})$ (ces points ont d'ailleurs été établis au cours de la démonstration de la prop.3,§9). Or $\rho(N)$ appartient à $\rho(\mathfrak{r})$, qui est un idéal résoluble de $\rho(\mathfrak{g})$, donc contenu dans le centre de $\rho(\mathfrak{g})$; $\rho(N)$ appartient aussi à l'algèbre dérivée de $\rho(\mathfrak{g})$, d'où $\rho(N)=0$.

Revenant à la question traitée plus haut, on voit que $ad_{\mathfrak{g}} N$ est nilpotent, donc que $s^* = \exp ad_{\mathfrak{g}^*} N^*$ se déduit par passage aux quotients de l'automorphisme spécial $\exp ad_{\mathfrak{g}} N$ de $\mathfrak{g}$. Supposons maintenant que $\mathfrak{r}^* \not\subset \mathfrak{D}\mathfrak{g}^*$; puisque $\mathfrak{r}^* \cap \mathfrak{D}\mathfrak{g}^*$ est un idéal de $\mathfrak{g}^*$, on a alors $\mathfrak{r}^* \cap \mathfrak{D}\mathfrak{g}^* = 0$. Si $R^* \in \mathfrak{r}^*$ et $X^* \in \mathfrak{g}^*$, $[R^*,X^*]$ est dans $\mathfrak{r}^* \cap \mathfrak{D}\mathfrak{g}^*$ donc nul, ce qui montre que $\mathfrak{r}^*$ est dans le centre de $\mathfrak{g}^*$, d'où $ad_{\mathfrak{g}^*} N^* = 0$; s^* est l'identité, et notre assertion est triviale dans ce cas. On voit donc qu'il existe un autom. spécial s_1 de $\mathfrak{g}$ qui conserve $\mathfrak{h}$ et qui transforme $\mathfrak{h}+\mathfrak{l}_1$ en $\mathfrak{h}+\mathfrak{l}$. Soit $\mathfrak{l}_2 = s_1(\mathfrak{l}_1)$; les formules $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}+\mathfrak{l} = \mathfrak{h}+\mathfrak{l}_2$ donnent donc des décompositions de Levi de $\mathfrak{g}_1$. Il existe donc un automorphisme spécial s_2' de $\mathfrak{g}_1$ qui transforme $\mathfrak{l}_2$ en $\mathfrak{l}$. Montrons que s_2' peut se prolonger par un autom. spécial s_2 de $\mathfrak{g}$. Il suffit de considérer le cas où $s_2' = \exp ad_{\mathfrak{g}_1} N$, où $N \in \mathfrak{h}$ est tel que $ad_{\mathfrak{g}_1} N$ soit nilpotent. Puisque $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $ad_{\mathfrak{g}} N$ applique $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$. Puisque $ad_{\mathfrak{g}_1} N$ est nilpotent, il en est de même *a fortiori* de $ad_{\mathfrak{h}} N$, et on voit que $ad_{\mathfrak{g}} N$ est nilpotent, donc que s_2' se prolonge par l'autom. spécial $s_2 = \exp ad_{\mathfrak{g}} N$ de $\mathfrak{g}$. Ceci dit, l'autom. $s_2 s_1$ de $\mathfrak{g}$ est spécial, et applique $\mathfrak{l}_1$ sur $\mathfrak{l}$. Le théorème est donc démontré dans le cas où $\mathfrak{h} \neq 0$.

§13-DEMONSTRATION DU THEOREME DE LEVI-MALCEV

II: le cas où ça canule.

Supposons désormais que les seuls idéaux de $\mathfrak{g}$ contenus dans $\mathfrak{r}$ soient 0 et $\mathfrak{r}$, ce qui entraine que $\mathfrak{r}$ est abélien. Nous désignerons par $\mathfrak{f}$ l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Si $X \in \mathfrak{g}$, la restriction de $ad_{\mathfrak{g}} X$ à $\mathfrak{r}$ ne dépend que de la classe T_X de X modulo $\mathfrak{r}$, comme il résulte tout de suite du fait que $\mathfrak{r}$ est abélien; désignons cette restriction par $\rho(T_X)$; ρ est donc une représentation de $\mathfrak{s}$ dont l'espace de représentation est $\mathfrak{r}$. Cette représentation est simple, car tout sous-espace de $\mathfrak{r}$ stable pour ρ est évidemment un idéal de $\mathfrak{g}$. Nous désignerons par $\mathfrak{s}_1$ le noyau de ρ. C'est un idéal de $\mathfrak{s}$, et $\mathfrak{s}$ est par suite somme directe de $\mathfrak{s}_1$ et d'un idéal $\mathfrak{s}_2$ sur lequel ρ induit une représentation simple fidèle.

Considérons d'abord le cas où $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}$. Dans ce cas, $\mathfrak{r}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$, et, si $X \in \mathfrak{g}$, ~~mmmmmm~~, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ (et pas seulement sa restriction à $\mathfrak{r}$) ne dépend que de la classe T_X de X suivant $\mathfrak{r}$. Toute représentation de $\mathfrak{s}$ étant semi-simple, on en déduit que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est alors semi-simple, donc que $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{r}$ et d'un idéal $\mathfrak{l}$, évidemment isomorphe à $\mathfrak{s}$ et donc semi-simple, ce qui démontre l'existence d'une décomposition de Levi. Soit de plus dans ce cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{l}'$ une décomposition de Levi quelconque. Puisque $\mathfrak{r}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$, il est clair que l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ est la même que celle de $\mathfrak{l}'$, donc égale à $\mathfrak{l}'$, puisque $\mathfrak{l}'$ est semi-simple. On voit donc qu'il n'existe dans ce cas qu'une seule décomposition de Levi.

Considérons maintenant le cas où $\mathfrak{s}_1 \neq \mathfrak{s}$, d'où $\mathfrak{s}_2 \neq 0$. Nous aurons alors à nous servir des résultats du §7. Il existe deux bases $T_1, \ldots, T_m$ et $T^*_1, \ldots, T^*_m$ de $\mathfrak{s}_2$ qui possèdent les propriétés suivantes: 1) si $T \in \mathfrak{s}_2$, $[T, T_i] = \sum a_{ij} T_j$ on a aussi $[T, T^*_i] = -\sum a_{ji} T^*_j$; 2) l'opérateur $\Gamma = \sum \rho(T_i)\rho(T^*_i)$ est $\neq 0$ et commute avec tous les éléments de $\rho(\mathfrak{s}_2)$, donc aussi avec tous les éléments de $\rho(\mathfrak{s})$. Le sous-espace des $R \in \mathfrak{r}$ tels que $\Gamma(R)=0$ est donc stable pour ρ ((il est à présumer qu'il s'agit des R tels que $\Gamma(R)=0$)); ce sous-espace, étant $\neq \mathfrak{r}$, se réduit à 0, ce qui montre que Γ est inversible.

Lemme 2 (premier lemme de Whitehead) - Soit θ une application linéaire de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{r}$ telle que $\theta([T,U]) = \rho(T)\theta(U) - \rho(U)\theta(T)$ pour tout couple (T,U) d'éléments de $\mathfrak{s}$; il existe alors un $R_0 \in \mathfrak{r}$ tel que $\theta(T) = \rho(T)R_0$ pour tout $T \in \mathfrak{s}$.

Puisque Γ est inversible, on peut définir un élément R_0 de $\mathfrak{r}$ par $\Gamma R_0 = \sum \rho(T_i)\theta(T^*_i)$. Soit $T \in \mathfrak{s}$; $\rho(T)$ commute avec Γ et on a $\Gamma \rho(T) R_0 = \sum \rho(T)\rho(T_i)\theta(T^*_i)$. Or on a $\rho(T)\rho(T_i) = \rho([T,T_i]) + \rho(T_i)\rho(T)$. Tenant compte de l'identité satisfaite par θ, on a $\rho(T)\theta(T^*_i) = \rho(T^*_i)\theta(T) + \theta([T,T^*_i])$; il vient donc $\Gamma \rho(T) R_0 = \Gamma\theta(T) + \sum \rho(T_i)\theta([T,T^*_i]) + \sum \rho([T,T_i])\theta(T^*_i)$. Or on peut écrire $T = T' + T''$, $T' \in \mathfrak{s}_1$, $T'' \in \mathfrak{s}_2$; puisque $\mathfrak{s}$ est somme directe des idéaux $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$, T' commute avec les T_i, T_i^* ; on voit donc que $[T,T_i]$ est de la forme $\sum a_{ij}T_j$ et que $[T,T_i^*] = -\sum_i a_{ji}T_j^*$. Il en résulte que les deux derniers termes de l'expression de $\Gamma\rho(T)R_0$ se détruisent, d'où $\Gamma\rho(T)R_0 = \Gamma\theta(T)$, et $\theta(T) = \rho(T)R_0$ puisque Γ est inversible.

Lemme 3 (deuxième lemme de Whitehead) - Soit φ une application bilinéaire symétrique gauche de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{r}$ qui soit telle que

$$\mathfrak{S}\{\varphi(T,[U,V]) + \rho(T)\varphi(U,V)\} = 0$$

pour tout $(T,U,V)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$; il existe alors une application linéaire ψ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{r}$ telle que $\varphi(T,U) = \psi([T,U]) - \rho(T)\psi(U) + \rho(U)\psi(T)$ pour tout $(T,U)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$.

(NB. Le signe $\mathfrak{S}$ représente une sommation étendue aux permutations circulaires de T, U, V).

Puisque Γ est inversible, on peut définir une application linéaire ψ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{r}$ par $\Gamma\psi(T) = \sum\rho(T_i)\varphi(T,T_i^*)$. Il vient alors

$$\Gamma(\psi([T,U]) - \rho(T)\psi(U) + \rho(U)\psi(T)) = \sum\rho(T_i)\varphi([T,U],T_i^*) - \sum\rho(T_i)\rho(T)\varphi(U,T_i^*)$$

$$+\sum\rho(T_i)\rho(U)\varphi(T,T_i^*) - \sum\rho([T,T_i])\varphi(U,T_i^*) + \sum\rho([U,T_i])\varphi(T,T_i^*).$$

Appliquant l'identité satisfaite par φ, on a

$$\varphi([T,U],T_i^*) + \varphi([U,T_i^*],T) + \varphi([T_i^*,T],U) = \rho(T_i^*)\varphi(T,U) + \rho(T)\varphi(U,T_i^*) + \rho(U)\varphi(T_i^*,T)$$

On obtient donc

$$\Gamma(\psi([T,U]) - \rho(T)\psi(U) + \rho(U)\psi(T)) = \Gamma\varphi(T,U) + \sum\rho([U,T_i])\varphi(T,T_i^*)$$

$$-\sum\rho(T_i)\varphi([U,T_i^*],T) + \sum\rho(T_i)\varphi(U,[T_i^*,T]) - \sum\rho([T,T_i])\varphi(U,T_i^*).$$

Or on voit comme dans la démonstration du lemme 1 que l'on peut écrire $[T,T_i] = \sum a_{ij}T_j$, $[T,T_i^*] = -\sum a_{ji}T_j^*$, et des formules ananlogues pour $[U,T_i]$ et $[U,T_i^*]$. On trouve donc que

$$\Gamma(\psi([T,U]) - \rho(T)\psi(U) + \rho(U)\psi(T)) = \Gamma\varphi(T,U)$$

ce qui démontre le lemme 2 puisque Γ est inversible.

Ceci dit, revenons à la démonstration du théorème de Levi-Malcev. Soit $\underline{S}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{r}$. Si $T\in\mathfrak{g}$, il y'a un élément $\lambda(T)$ et un seul de $\underline{S}$ qui est dans la classe T (mod $\mathfrak{r}$). Posons

$$[\lambda(T),\lambda(U)] = \lambda([T,U]) + \varphi(T,U) ;$$

φ est donc une application bilinéaire symétrique gauche de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{r}$. En écrivant que l'identité de Jacobi est satisfaite dans $\mathfrak{g}$, et en se souvenant de ce que $\mathfrak{r}$ est abélien, et de ce que $[\lambda(T),R] = \rho(T)R$ pour tout $R\in\mathfrak{r}$, on voit facilement que φ possède les propriétés énoncées dans le lemme 3. Il existe donc une application linéaire ψ de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{r}$ telle que $\varphi(T,U) = \psi([T,U])-\rho(T)\psi(U)+\rho(U)\psi(T)$. On trouve alors que $[\lambda(T)+\psi(T),\lambda(U)+\psi(U)] =\lambda([T,U])+\psi([T,U])$; ce qui signifie que l'image ~~XX~~ $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{s}$ par l'application $T \to \lambda(T)+\psi(T)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Puisque $\lambda(T)+\psi(T)$ appartient à la classe ~~de~~ T (mod $\mathfrak{r}$), il est clair que $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{r}$ et de $\mathfrak{l}$, ce qui démontre l'existence d'une décomposition de Levi. Supposons maintenant que $\underline{S} = \mathfrak{l}$ (d'où $\varphi=0$), et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{l}'$ une décomposition de Levi quelconque de $\mathfrak{g}$; si $T \in \mathfrak{s}$, l'élément de $\mathfrak{l}'$ qui appartient à la classe T modulo $\mathfrak{r}$ se met sous la forme $\lambda(T)+\theta(T)$, où θ est une application linéaire de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{r}$. Puisque $\mathfrak{l}'$ est une sous-algèbre, on a, pour T et U dans $\mathfrak{s}$, $[\lambda(T)+\theta(T),\lambda(U)+\theta(U)] = \lambda([T,U])+\theta([T,U])$, d'où $\theta([T,U]) = \rho(T)\lambda(U)-\rho(U)\lambda(T)$ .XXXXXXXXX ((il n'est peut être pas inutile de rappeler que $\mathfrak{r}$ est abélien, donc que $[\theta(T),\theta(U)] = 0$; de plus, $\rho(T)$ est défini comme étant l'application $X \to [T^\circ,X]$ dans $\mathfrak{r}$, où T° appartient à la classe T mod. $\mathfrak{r}$ -en particulier on peut prendre $\rho(T)X = [\lambda(T),X]$; ces explications données, la formule est évidente)) Il existe donc un élément R_0 de $\mathfrak{r}$ tel que $\theta(T) = \lambda(T)R_0$ pour tout $T \in \mathfrak{s}$ (lemme 2). On a donc $\lambda(T)+\theta(T)=$ ~~XXXXXX~~ $\lambda(T)+[\lambda(T),R_0]$ ((car le lemme 2 donne $\theta(T) = \rho(T)R_0$ -et non pas $\lambda(T)R_0$ comme il a été dit à l'instant- ie. $=[\lambda(T),R_0]$)). Or l'opération $ad_{\mathfrak{g}} R_0$ applique $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{r}$ (parce que $\mathfrak{r}$ est un idéal) et $\mathfrak{r}$ sur 0 ((parce que $\mathfrak{r}$ est abélien)); on a donc $(ad_{\mathfrak{g}} R_0)^2=0$, et $\lambda(T)+\theta(T) = s(\lambda(T))$ où s est l'autom. spécial $\exp(-ad_{\mathfrak{g}} R_0)$; il en résulte que S transforme $\mathfrak{l}$ en $\mathfrak{l}'$. Le théorème de Levi-Malcev est donc entièrement dé ontré.

<u>Remarques</u>-1: Les deux lemmes de Whitehead sont en réaliét de nature cohomologique. Appliqués au cas où la représentation est identiquement nulle, ils expriment que le premier nombre de Betti et le second de $\mathfrak{g}$ sont nuls. Prévoyant que certains((qui ne sont malheureusement pas nommés))voudront en tirer parti pour repousser le th. de Levi dans l'étude de la cohomologie, le rédacteur attire l'attention sur le fait que les dits lemmes(dans le cas d'une représentation non nulle)ne sortent pas naturellement des grands théorèmes de la cohomologie; il faut les en extraire par un travail qui n'est pas sensiblement plus grand ((?????))que celui de les prouver directement.

2. Le premier lemme de Whitehead peut également servir à prouver que les représentations de $\mathfrak{g}$ sont semi-simples. Voivi rapidement comment on procède dans ce cas. Soit V l'espace d'une représentation ρ , et soit U un sous-espace stable pour ρ . On prend d'abord un sous-espace supplémentaire U' quelconque de U . Si $x \in U'$, on pose $\rho(X)x = \varphi(X)x + \psi(X)x$, où $\varphi(X)x \in U'$ et $\psi(X)x \in U$. On obtient ainsi une application linéaire $X \longrightarrow \psi(X)$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $L(U',U)$ des applications linéaires de U' dans U . On construit une représentation σ de $\mathfrak{g}$ dont l'espace est $L(U',U)$ en associant à X l'application $L \longrightarrow L\circ\varphi(X) - \rho(X)\circ L$ de $L(U', U)$ dans lui-même. On applique alors le premier lemme de Whitehead à cette représentation et à l'application $X \longrightarrow \psi(X)$, ce qui permet d'ajouter à tout élément de U' un terme correctif dans U , de manière que les éléments modifiés forment un sous-espace stable pour ρ . Cependant, si on procède de cette manière, il faut démontrer le premier lemme de Whitehead dans des circonstances plus générales que celles où nous l'avons démontré plus haut (nous avons supposé ρ irréductible $\neq 0$) ; on procède pour le faire par récurrence sur le degré de ρ en utilisant une suite de Jordan-Hölder.

§ 14. LE THÉORÈME D'ADO.

Théorème d'Ado. <u>Toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0 admet une représentation linéaire fidèle</u>.

L'objet principal du th. d'Ado est de fournir une démonstration immédiate du troisième théorème fondamental de Lie (existence d'un groupe de Lie ayant une algèbre de Lie donnée). Mais il existe d'autres démonstrations du dit théorème (elles utilisent toutes le théorème de Levi). Le th.d'Ado n'est donc pas indispensable.

Indépendamment de ses applications, on peut considérer que le résultat qu'il énonce est intéressant en lui-même ; Bourbaki jugera ! . En tout état de cause, je donne ici la démonstration de Harish-Chandra, la plus jolie des démonstrations connues jusqu'ici.

n°1. L'HOLOMORPHE.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soit $\mathfrak{d}$ l'algèbre des dérivations de $\mathfrak{g}$. Nous allons définir une structure d'algèbre de Lie sur le produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{d}$ des espaces vectoriels sous-jacents de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{d}$. Pour ce faire, nous poserons $[(X,D),(X',D')] = ([X,X']+DX'-D'X,[D,D'])$. On vérifie sans peine que l'identité de Jacobi est satisfaite et que notre loi de composition est symétrique gauche. On obtient donc ainsi une structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{d}$; $\mathfrak{h}$ s'appelle l'holomorphe de $\mathfrak{g}$. Il est clair que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{d}$ peuvent s'identifier à des sous-algèbres de $\mathfrak{h}$, et que $\mathfrak{g}$ est un idéal dans $\mathfrak{h}$. Si $X \in \mathfrak{g}$, on a $\mathrm{ad}\, X \in \mathfrak{d}$. Si $Y \in \mathfrak{g}$, on a $[\mathrm{ad}\, X, Y] = [X,Y] = (\mathrm{ad}\, X)(Y)$; plus généralement, $[D,Y] = DY$ pour tout $D \in \mathfrak{d}$. Par ailleurs, si $D \in \mathfrak{d}$, on a $[D, \mathrm{ad}\, X] = \mathrm{ad}\, DX$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$; les opérations ad X forment donc un idéal dans $\mathfrak{d}$.

n° 2. LE PLUS GRAND IDEAL NILPOTENT.

Lemme 1. Soit ρ une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'ensemble des idéaux $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ tels que tout élément de $\rho(\mathfrak{n})$ soit nilpotent possède un plus grand élément $\mathfrak{n}_0$; $\mathfrak{n}_0$ se compose de tous les $X \in \mathfrak{g}$ tels que $\rho(X)$ appartienne au radical de l'algèbre associative engendrée par $\rho(\mathfrak{g})$. Si le corps de base est de caractéristique 0, $\mathfrak{n}_0$ contient l'intersection du radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ avec son algèbre dérivée ; si de plus $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\mathfrak{n}_0$ est l'ensemble de tous les $X \in \mathfrak{g}$ tels que $\rho(X)$ soit nilpotent.

Soit V l'espace de la représentation ρ , et soit $V_o=V, V_1, \ldots, V_r=\{0\}$ une suite de Jordan-Hölder pour la structure d'espace vectoriel à opérateurs de V . Chaque V_{i-1}/V_i est alors l'espace d'une représentation simple ρ_i de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que les éléments de $\rho(\mathfrak{n})$ soient nilpotents. Les éléments de $\rho_i(\mathfrak{n})$ sont alors nilpotents ; il résulte du théorème d'Engel que l'espace U des éléments x de V_{i-1}/V_i tels que $\rho_i(X)x=0$ pour tout $X \in \mathfrak{n}$ ne se réduit pas à $\{0\}$. Or $\rho_i(\mathfrak{n})$ est un idéal dans $\rho_i(\mathfrak{g})$; on en déduit tout de suite que U est stable par rapport à ρ_i . Comme ρ_i est simple, on a $U=V_{i-1}/V_i$, et tout élément de $\rho_i(\mathfrak{n})$ applique V_{i-1}/V_i sur $\{0\}$. Soit A l'algèbre associative engendrée par $\rho(\mathfrak{g})$; si M est un élément quelconque de A , et si $X \in \mathfrak{n}$, $M\rho(X)$ applique V_{i-1} dans V_i $(1 \leq i \leq r)$ (car il est clair que M applique chaque V_i dans lui-même) et est par suite nilpotent, ce qui montre que $\rho(X)$ appartient au radical R de A . Réciproquement, l'ensemble $\mathfrak{n}_o$ des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $\rho(X) \in R$ est évidemment un idéal dans $\mathfrak{g}$; ceci démontre la première assertion du lemme 1. La seconde résulte immédiatement du lemme 1, § 12. Supposons maintenant $\mathfrak{g}$ résoluble ; il en est alors de même de $\rho_i(\mathfrak{g})$ $(1 \leq i \leq r)$, et il résulte du corollaire à la prop.3, § 8 que $\rho_i(\mathfrak{g})$ est abélien. Soit $\mathfrak{n}_1$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $\rho(X)$ soit nilpotent. Si Y et Z sont dans $\mathfrak{n}_1$, et si $1 \leq i \leq r$, $\rho_i(Y)$ et $\rho_i(Z)$ sont nilpotents et commutent entre eux, d'où il résulte tout de suite que $\rho_i(Y+Z)$ est nilpotent, donc que $\rho(Y+Z)$ est nilpotent. L'ensemble $\mathfrak{n}_1$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$; puisqu'il contient $\mathcal{D}\mathfrak{g}$, c'est un idéal, d'où $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_o$.

Si $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ qui, considéré comme sous-algèbre, est nilpotent, alors, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $ad_{\mathfrak{g}} X$ est nilpotent ; en effet, $ad_{\mathfrak{g}} X$ applique $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{n}$ et sa restriction à $\mathfrak{n}$ est $ad_{\mathfrak{n}} X$ qui

qui est nilpotent. Il résulte donc du lemme 1 que $\mathfrak{g}$ admet un plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$. Supposant le corps de base de caractéristique 0, soit $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{g}$; il est clair que $(\mathfrak{r}+\mathfrak{n})/\mathfrak{r}$ est nilpotent et que c'est un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Si on avait $\mathfrak{n}+\mathfrak{r}\neq\mathfrak{r}$, $(\mathfrak{n}+\mathfrak{r})/\mathfrak{r}$ aurait un centre $\neq\{0\}$ (cor.1 au th.d'Engel, § 4), ce qui est impossible puisque ce centre serait alors un idéal abélien de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. On a donc $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{r}$; par ailleurs, on a $\mathfrak{r}\cap\mathcal{D}\mathfrak{g}\subset\mathfrak{n}$.

Lemme 2. <u>Toute dérivation d'une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0 applique $\mathfrak{g}$ dans son plus grand ~~idéal~~ idéal nilpotent $\mathfrak{n}$.</u>

Il est clair que $\mathfrak{g}$ est contenu dans le radical de son holomorphe $\mathfrak{h}$. Si $X\in\mathfrak{g}$ et si D est une dérivation de $\mathfrak{g}$, $DX=[D,X]$ est dans le radical de $\mathfrak{h}$ et dans son algèbre dérivée, donc dans le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{h}$, et par suite, évidemment, dans $\mathfrak{n}$.

Il résulte immédiatement du lemme 2 que, si $\mathfrak{r}$ est le radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0, le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{r}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$; on en conclut que $\mathfrak{n}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{n}$ se compose de tous les $X\in\mathfrak{r}$ tels que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X$ soit nilpotent. On peut d'ailleurs démontrer que toute dérivation de $\mathfrak{g}$ applique $\mathfrak{r}$ dans lui-même, donc (en vertu du lemme 2), $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{n}$; nous n'aurons pas besoin de ce résultat.

<u>Lemme 3</u>. Soit $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie qui est somme directe de deux idéaux $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$. Le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ est alors la somme des plus grands idéaux nilpotents $\mathfrak{n}_1$ de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ de $\mathfrak{g}_2$.</u>

Tout élément de $\mathcal{G}_1$ commute avec tout élément de $\mathcal{G}_2$; tout idéal de $\mathcal{G}_i$ (i=1,2) est donc un idéal de $\mathcal{G}$. Il en résulte que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont contenus dans le plus grand idéal nilpotent $\mathcal{N}$ de $\mathcal{G}$. D'autre part, $\mathcal{G}/\mathcal{G}_2$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{G}_1$ et $(\mathcal{N}+\mathcal{G}_2)/\mathcal{G}_2$ est un idéal nilpotent de $\mathcal{G}/\mathcal{G}_2$; il en résulte que $\mathcal{N}+\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{N}_1+\mathcal{G}_2$. Puisque $\mathcal{N}\cap\mathcal{G}_2$ est un idéal nilpotent de $\mathcal{G}_2$, on a $\mathcal{N}\cap\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{N}_2$; d'où $\mathcal{N}\subset\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2$. Le lemme 4 est donc démontré.

n° 3. LEMMES SUR LES ALGEBRES ASSOCIATIVES.

Lemme 4. Soit U une algèbre associative qui possède un ensemble fini E de générateurs, et soit $\mathcal{X}$ un idéal bilatère de U tel que $U/\mathcal{X}$ soit de dimension finie. Si s est un entier >0, $U/\mathcal{X}^s$ est de dimension finie.

Soient $u_1,\dots,u_m$ des éléments de U dont les classes (mod $\mathcal{X}$) forment une base de $U/\mathcal{X}$. Pour tout $z\in E$, il existe des éléments $c_i(z)$ du corps de base tels que $z-\sum_{i=1}^m c_i(z)u_i = w(z)\in\mathcal{X}$.
On peut d'ailleurs supposer que les produits u_iu_j $(1\leqslant i, j\leqslant m)$ sont dans E ; les $w(z)$ engendrent alors $\mathcal{X}$. Soit en effet $\mathcal{X}'$ l'idéal bilatère engendré par les $w(z)$. Il est alors clair que les classes des u_i (mod $\mathcal{X}'$) engendrent $U/\mathcal{X}'$. Puisque les u_iu_j sont congrûs à des combinaisons linéaires de $u_1,\dots,u_m$ modulo $\mathcal{X}'$, tout élément de $U/\mathcal{X}'$ est une combinaison linéaire des classes de $u_1,\dots,u_m$ modulo $\mathcal{X}'$, d'où $\dim(U/\mathcal{X}')\leqslant\dim(U/\mathcal{X})$. Puisque $\mathcal{X}'\subset\mathcal{X}$, il en résulte que $\mathcal{X}'=\mathcal{X}$. On déduit tout de suite de là que pour tout $k>0$, un élément de $\mathcal{X}^k$ est congru (mod $\mathcal{X}^{k+1}$) à une combinaison linéaire de termes de la forme $v_0w(z_1)v_1w(z_2)\dots$ $\dots v_{k-1}w(z_k)v_k$, où les z_j sont dans E et où $v_0,\dots,v_k$ sont dans l'ensemble $U\{u_1,\dots,u_m\}$. Il en résulte que $\mathcal{X}^k/\mathcal{X}^{k+1}$ est de

dimension finie, ce qui démontre le lemme 4 .

Lemme 5. Soit D une dérivation d'une algèbre associative A de dimension finie. Supposons qu'il existe un ensemble E de générateurs de A tels que, pour tout $x \in E$, il existe un $k > 0$ tel que $D^k x = 0$. La dérivation D est alors nilpotente.

Il suffit évidemment de démontrer que, si $x_1, \ldots, x_h$ sont des éléments de E , il existe un $m > 0$ tel que $D^m(x_1 \ldots x_h) = 0$. Convenant que D^0 représente l'application identique, on voit tout de suite que $D^m(x_1 \ldots x_h)$ est une somme de termes de la forme $(D^{a_1} x_1) \ldots (D^{a_h} x_h)$, où $a_1, \ldots, a_h$ sont des entiers $\geqslant 0$ de somme m . Soit $k > 0$ tel que $D^k x_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$; il suffit alors de prendre $m = kh$.

n°4 . DEMONSTRATION DU THÉORÈME D'ADO.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 . Nous appellerons linéarisation de $\mathfrak{g}$ une application linéaire bi-univoque λ de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre associative A de dimension finie ayant un élément unité telle que $\lambda([X,Y]) = [\lambda(X), \lambda(Y)] = \lambda(X)\lambda(Y) - \lambda(Y)\lambda(X)$ pour tout $(X,Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Puisque toute algèbre associative de dimension finie qui a un élément unité a une représentation fidèle, pour que $\mathfrak{g}$ admette une représentation fidèle, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{g}$ admette une linéarisation. On dira que la linéarisation λ de $\mathfrak{g}$ est régulière si $\lambda(X)$ est nilpotent toutes les fois que X appartient au plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$; $\lambda(\mathfrak{n})$ est alors contenu dans le radical de l'algèbre associative engendrée par $\lambda(\mathfrak{g})$ (lemme 1).

Formons l'algèbre tensorielle T sur $\mathfrak{g}$, et désignons par $\mathfrak{U}$ l'idéal bilatère de T engendré ~~par T~~ par les éléments de la forme $X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y]$, pour tous les $(X,Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Soit U l'algèbre quotient $T/\mathfrak{U}$;

U s'appelle l'<u>algèbre associative universelle</u> de $\mathfrak{g}$. Il existe une application μ , dite canonique, de $\mathfrak{g}$ dans U qui associe à tout $X \in \mathfrak{g}$ la classe de X (mod $\mathcal{U}$) ; on a $\mu([X,Y]) = [\mu(X), \mu(Y)]$.

Soit λ une linéarisation de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre associative A ; λ se prolonge alors par un homomorphisme de T dans A qui applique évidemment les générateurs, et donc tous les éléments, de $\mathcal{U}$ sur 0 . On en déduit un homomorphisme λ^* de U dans A , qu'on dit <u>associé à</u> λ . On a, pour $X \in \mathfrak{g}$, $\lambda^*(\mu(X)) = \lambda(X)$; λ^* applique l'élément unité de U sur celui de A . Toute dérivation D de $\mathfrak{g}$ se prolonge en une dérivation Δ de T ; si X et Y sont dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\Delta(X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y]) = DX \otimes Y - Y \otimes DX - [DX,Y] + X \otimes DY - DY \otimes X - [X,DY] \in \mathcal{U} .$$

On en déduit que Δ applique $\mathcal{U}$ dans lui-même et définit une dérivation D^* de U , qu'on dit <u>associée à D</u> . Si $X \in \mathfrak{g}$, on a $D^*(\mu(X)) = \mu(DX)$.

<u>Lemme</u> 6. <u>Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble sur un corps de caractéristique</u> 0 <u>qui admet une linéarisation régulière</u> λ . <u>L'holomorphe</u> $\mathfrak{h}$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>admet alors une linéarisation</u> ρ <u>qui possède la propriété suivante: si</u> X <u>est dans le plus grand idéal nilpotent de</u> $\mathfrak{g}$, <u>et si</u> D <u>est une dérivation nilpotente de</u> $\mathfrak{g}$, $\rho(X+D)$ <u>est nilpotent</u>.

Soit $\mathcal{X}$ le noyau de l'homomorphisme λ^* de U associé à λ . Pour toute dérivation D de $\mathfrak{g}$, soit D^* la dérivation de U associée à D , et soit $\mathcal{D}$ l'algèbre associative engendrée (dans l'algèbre des endomorphismes de la structure d'espace vectoriel de U) par les opérations D^* , pour toutes les dérivations D de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{X}_0$ l'ensemble des $u \in \mathcal{X}$ tels que $\Delta u \in \mathcal{X}$ pour tout $\Delta \in \mathcal{D}$. Montrons que $\mathcal{X}_0$ est un idéal bilatère. Soit $\mathcal{X}_0'$ l'idéal bilatère engendré par $\mathcal{X}_0$. Si D est une dérivation de $\mathfrak{g}$, D^* applique évidemment $\mathcal{X}_0$ dans lui-même; puisque D^* est une dérivation, D^* applique $\mathcal{X}_0'$ dans lui-même. Il en résulte que toute opération de $\mathcal{D}$ applique $\mathcal{X}_0'$ dans lui-même.

Or puisque $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, on a $\mathcal{X}'_0 \subset \mathcal{X}$; on a donc d'où $\mathcal{X}'_0 = \mathcal{X}_0$. A toute dérivation D de $\mathcal{G}$ on peut ainsi faire correspondre une dérivation D^{**} de $U/\mathcal{X}_0$, déduite de D^* par passage aux quotients. Par ailleurs, l'application canonique de $\mathcal{G}$ dans U définit une application μ_1 de $\mathcal{G}$ dans $U/\mathcal{X}_0$; les éléments de $\mu_1(\mathcal{G})$ forment, avec l'élément unité 1 de $U/\mathcal{X}_0$, un système de générateurs de $U/\mathcal{X}_0$. L'application λ étant une linéarisation de $\mathcal{G}$, $\mu(\mathcal{G})$ n'a que 0 en commun avec $\mathcal{X}$, donc, <u>a fortiori</u>, avec $\mathcal{X}_0$; μ_1 est donc une application linéaire bi-univoque. Si $X \in \mathcal{G}$ et si D est une dérivation de $\mathcal{G}$, on a $D^{**}(\mu_1(X)) = \mu_1(DX)$; D^{**} est la dérivation (unique) de $U/\mathcal{X}_0$ qui prolonge l'application $\mu_1(X) \longrightarrow \mu_1(DX)$ de $\mu_1(\mathcal{G})$ dans lui-même. On en déduit que l'application $D \longrightarrow D^{**}$ de l'algèbre des dérivations $\mathcal{D}$ de $\mathcal{G}$ est linéaire, et que $[D_1^{**}, D_2^{**}] = [D_1, D_2]^{**}$ si D_1 et D_2 sont dans $\mathcal{D}$. De plus, la condition $D^{**}=0$ entraîne évidemment $D=0$. Nous pouvons définir une application linéaire ρ de l'holomorphe $\mathcal{h}$ de $\mathcal{G}$ dans l'espace des endomorphismes de la structure d'espace vectoriel de $U/\mathcal{X}_0$ comme suit : si $X \in \mathcal{G}$, $\rho(X)$ est l'opération de multiplication à gauche par $\mu_1(X)$ dans l'algèbre $U/\mathcal{X}_0$; si $D \in \mathcal{D}$, $\rho(X)=D^{**}$. Puisque D^{**} est une dérivation de $U/\mathcal{X}_0$, on voit tout de suite que $[D^{**}, \rho(X)] = \rho(DX)$ pour $X \in \mathcal{G}$; de plus, il est clair que $\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$ si X et Y sont dans $\mathcal{G}$. On en déduit que $\rho([H,H']) = [\rho(H), \rho(H')]$ pour tout $(H,H') \in \mathcal{h} \times \mathcal{h}$. De plus, la condition $\rho(H)=0$ entraîne $H=0$; posons en effet $H=X+D$, où $X \in \mathcal{G}$ et $D \in \mathcal{D}$. Puisque D^{**} applique l'élément unité 1 sur 0, on a $0=\rho(X).1 = \mu_1(X)$, d'où $X=0$, et par suite $D^{**}=\rho(D)=0$, d'où $D=0$.

Si donc nous montrons que $U/\mathcal{X}_0$ est de dimension finie, il en résultera que ρ est une linéarisation de $\mathfrak{h}$.

Il est clair que U possède un ensemble fini de générateurs. Tenant compte du lemme 4, on voit que, pour montrer que $U/\mathcal{X}_0$ est de dimension finie, il suffira de montrer qu'il existe un $s > 0$ tel que $\mathcal{X}^s \subset \mathcal{X}_0$. Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Désignons par $\mathcal{Y}$ l'idéal bilatère engendré par U par les éléments de $\mu(\mathfrak{n})$. La linéarisation λ étant régulière, $(\mathcal{Y}+\mathcal{X})/\mathcal{X}$ appartient au radical de $U/\mathcal{X}$; il existe donc un $s > 0$ tel que $\mathcal{Y}^s \subset \mathcal{X}$. Nous allons montrer que $\mathcal{X}^s \subset \mathcal{X}_0$. Si a et b sont des entiers $\geqslant 0$ de somme > 0, soit $\mathcal{Z}_{a,b}$ l'espace des combinaisons linéaires de $\mathcal{X}$ produits de a éléments de $\mathcal{X}$ et de b éléments de $\mathcal{Y}$. Nous allons montrer que, si $D \in \mathfrak{d}$, la dérivation D^* de U applique $\mathcal{Z}_{a,b}$ dans $\mathcal{Z}_{a-1,b+1}$ (si $a > 0$) et $\mathcal{Z}_{0,s}$ dans lui-même. On sait que D applique $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{n}$ (lemme 2) ; il en résulte que D^* applique $\mu(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{Y}$. Or U est engendré par $\mu(\mathfrak{g})$ et par son élément unité, et D^* applique l'élément unité sur 0. Il en résulte tout de suite que D^* applique U dans $\mathcal{Y}$. Si $x_1, \dots, x_a$ sont des éléments de $\mathcal{X}$, $D^*(x_1 \dots x_a)$ est la somme des a produits déduits de $x_1 \dots x_a$ en y remplaçant l'un des facteurs x_i par $D^* x_i$ sans toucher aux autres. On a donc $D^*(x_1 \dots x_a) \in \mathcal{X}^{a-1}\mathcal{Y}$, d'où $D^*(\mathcal{Z}_{a,b}) \subset \mathcal{Z}_{a-1,b+1}$ si $a > 0$; l'inclusion $D^*(\mathcal{Z}_{0,s}) \subset \mathcal{Z}_{0,s}$ se démontre de la même manière. Il résulte de là que l'ensemble $\sum_{a+b=s} \mathcal{Z}_{a,b}$ est appliqué dans lui-même par toutes les opérations de $\mathcal{D}$. Or on a $\mathcal{Z}_{s,0} = \mathcal{X}^s$, $\mathcal{Z}_{a,b} \subset \mathcal{X}$ si $a > 0$ et $\mathcal{Z}_{0,s} \subset \mathcal{X}$ en vertu de notre choix de s. Il en résulte que $\mathcal{X}^s \subset \sum_{a+b=s} \mathcal{Z}_{a,b} \subset \mathcal{X}_0$, ce qui démontre notre assertion.

Il reste à montrer que la linéarisation ρ de $\mathfrak{h}$ possède la propriété énoncée. Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, et soit D une dérivation nilpotente de $\mathfrak{g}$. Puisque $D(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}$ (lemme 2), le sous-espace $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{h}$ engendré par $\mathfrak{n}$ et par D est une sous-algèbre évidemment résoluble de $\mathfrak{h}$. Les éléments H de cette algèbre tels que $\rho(H)$ soit nilpotent forment un idéal $\mathfrak{m}_1$ (lemme 1). Il suffira donc de montrer que tout $X \in \mathfrak{n}$ est dans $\mathfrak{m}_1$ et que $D \in \mathfrak{m}_1$. Or, si $X \in \mathfrak{n}$, on a $\mu(X) \in \mathcal{Y}$, $(\mu(X))^s \in \cancel{\mathcal{Y}}\mathcal{X}$, $(\mu(X))^{s^2} \in \mathcal{X}_0$, d'où $(\mu_1(X))^{s^2} = 0$ et $(\rho(X))^{s^2} = 0$. Par ailleurs, D^{**} induit une application nilpotente de $\mu_1(\mathfrak{g})$ dans lui-même et applique 1 sur 0 ; il résulte donc du lemme 5 que D^{**} est nilpotent, ce qui démontre le lemme 6.

Lemme 7. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie qui est somme directe de deux idéaux $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ dont chacun admet une linéarisation régulière. L'algèbre admet alors une linéarisation régulière.*

Soit ρ_i une linéarisation régulière de $\mathfrak{g}_i$ $(i=1,2)$, et soit A_i l'algèbre associative engendrée par 1 et par les éléments de $\rho_i(\mathfrak{g}_i)$. L'application $X_1+X_2 \longrightarrow (\rho_1(X_1), \rho_2(X_2))$ (où $X_i \in \mathfrak{g}_i, i=1,2$) de $\mathfrak{g}$ dans le produit des algèbres A_1 et A_2 est alors une linéarisation régulière de $\mathfrak{g}$, comme il résulte tout de suite du lemme 3.

Lemme 8.- *Toute algèbre de Lie résoluble sur un corps de caractéristique 0 admet une linéarisation régulière.*

On récure sur $n = \dim \mathfrak{g}$. C'est évident si $n=0$. Supposons que $n > 0$ et que le lemme soit vrai pour les algèbres de dimension $n-1$. Puisque $\mathfrak{g} \neq \mathcal{D}\mathfrak{g}$, et puisque $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ est contenu dans le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$, on peut trouver un sous-espace $\mathfrak{g}'$ de dimension n-1 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ & tel que $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}'$ si $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{g}$. L'espace $\mathfrak{g}'$ est alors un idéal de $\mathfrak{g}$. Soit A un élément de $\mathfrak{g}$ non dans $\mathfrak{g}'$. Si A est dans le centre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{g}'$ et de l'idéal $\mathfrak{a}$ de dimension 1 engendré par A. Or il est évident que $\mathfrak{a}$ admet une linéarisation régulière ; on conclut dans ce cas au moyen du lemme 7. Supposons maintenant que A ne soit pas dans le centre de $\mathfrak{g}$; $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} A$ induit alors une dérivation $D_A \neq 0$ de $\mathfrak{g}'$. L'application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans l'holomorphe $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}'$ qui coïncide avec l'identité sur $\mathfrak{g}'$ et qui applique A sur D_A est alors un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ avec une sous-algèbre $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{h}$; nous désignerons par $\mathfrak{n}_1$ l'image de $\mathfrak{g}$ par cette application. Il résulte du lemme 6 que $\mathfrak{h}$ admet une linéarisation ρ qui satisfait à la condition suivante: si X' est un élément du plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}'$ de $\mathfrak{g}'$, et si D' est une dérivation nilpotente de $\mathfrak{g}'$, $\rho(X'+D')$ est nilpotent. Montrons que les éléments de $\rho(\mathfrak{n}_1)$ sont nilpotents. Si $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}'$, d'où $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}'$; si $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{n}' = \mathfrak{g}'$, et D_A est une dérivation nilpotente de $\mathfrak{g}'$; dans chacun des deux cas, notre assertion est vraie. La restriction de ρ à $\mathfrak{g}_1$ est donc une linéarisation régulière de $\mathfrak{g}_1$, ce qui démontre le lemme 8.

On peut maintenant démontrer le th. d'Ado. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque sur un corps de caractéristique 0, et soit $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$ une décomposition de Levi de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{s}_1$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{s}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathfrak{r}$. Puisque $\mathfrak{r}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, on voit tout de suite que $\mathfrak{s}_1$ est un idéal de $\mathfrak{s}$. Puisque $\mathfrak{s}$ est semi-simple, $\mathfrak{s}$ est somme directe de $\mathfrak{s}_1$ et d'un idéal $\mathfrak{s}_2$. Les ensembles $\mathfrak{r} + \mathfrak{s}_2$ et $\mathfrak{s}_1$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ (car tout élément de $\mathfrak{s}_1$ commute avec tout

tout élément de $\mathfrak{l}_2$) et $\mathfrak{g}$ est leur somme directe. Posons $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r} + \mathfrak{l}_2$, et soit $\mathfrak{h}$ l'homolorphe de $\mathfrak{r}$. Si $S \in \mathfrak{l}_2$, la restriction de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} S$ à $\mathfrak{r}$ est une dérivation D_S de $\mathfrak{r}$; on voit tout de suite que l'application linéaire de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{h}$ qui coïncide avec l'identité sur $\mathfrak{r}$ et qui applique tout $S \in \mathfrak{l}_2$ sur D_S est un isomorphisme de $\mathfrak{g}_1$ avec une sous-algèbre de $\mathfrak{h}$. Le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}_1$ est aussi le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{r}$; il résulte des lemmes 6 et 8 que $\mathfrak{h}$ admet une linéarisation qui applique tout élément de $\mathfrak{n}$ sur un élément nilpotent ; cette linéarisation définit une linéarisation régulière de $\mathfrak{g}_1$. Par ailleurs, $\mathfrak{l}_1$ est semi-simple, de sorte que la représentation adjointe de $\mathfrak{l}_1$ définit une linéarisation régulière de $\mathfrak{l}_1$. On en conclut, en vertu du lemme 7 , qu'il existe une linéarisation régulière de $\mathfrak{g}$, ce qui démontre le théorème d'Ado.

<u>Remarque</u>. Le th. d'Ado est encore vrai pour les algèbres de Lie sur les corps de caractéristique p ; cf. K. Iwasawa, On the representations of Lie algebras, Jap. Journal of Math., XIX, 1948.

Archives

NBR 032

RAPPORT SUR LES ALGEBRES de LIE (III) : LES PROBLÈMES DE CLASSIFICATION.

L'objet de cette partie du rapport est de parvenir à la classification complète des algèbres de Lie simples sur un corps algèbriquement clos de caractéristique 0 , ainsi que de leurs représentations. Après cela, la théorie contient encore la classification complète des algèbres simples sur le corps des réels, que je n'ai pas rédigée ; c'est sensiblement plus compliqué que dans le cas algèbriquement clos.

§ 15. LES SOUS-ALGÈBRES DE CARTAN.

Dans toute cette partie du rapport, K désignera (sauf mention du contraire) un corps algèbriquement clos de caractéristique 0 , et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur K .

Un élément de $\mathfrak{g}$ est appelé diagonal (resp.: nilpotent) si son opération adjointe est diagonale (resp.: nilpotente).

Lemme 1. Tout élément de $\mathfrak{g}$ peut se représenter comme somme d'un élément diagonal et d'un élément nilpotent qui commutent entre eux.

L'algèbre $\mathfrak{g}$ est isomorphe à son adjointe (car son centre est $\{0\}$). Il suffit donc de démontrer le lemme 1 dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie d'endomorphismes d'un vectoriel V . Soit alors E l'espace des endomorphismes de V ; si $X \in \mathfrak{g}$, soit f_X l'application $Y \longrightarrow [X,Y]$ de E . L'opération f_X est donc une dérivation de la structure d'algèbre de Lie de E , et elle conserve $\mathfrak{g}$. Soient S et N la composante diagonale et la composante nilpotente de X ; on sait alors que f_S est diagonal, f_N nilpotent, que $[f_S,f_N] = f_{[S,N]} = 0$ et que $f_X = f_S+f_N$; on en conclut que f_S et f_N sont les composantes diagonale et nilpotente de f_X .

Puisque ce sont des polynomes en f_X, f_S et f_N appliquent $\mathfrak{g}$ dans lui-même et induisent par suite des dérivations de $\mathfrak{g}$. Il résulte alors de la prop.3, § 3 qu'il existe S' et N' dans $\mathfrak{g}$ tels que $f_S(Y)=[S',Y]$, $f_N(Y)=[N',Y]$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. On voit que ad S' est diagonal, ad N' nilpotent, et que $X-(S'+N')$ et $[S',N']$ sont dans le centre de $\mathfrak{g}$, donc égaux à 0. L'unicité de la décomposition résulte de l'unicité des composantes diagonale et nilpotente de ad X.

Lemme 2. *Si* X *est un élément diagonal de* $\mathfrak{g}$ *et* ρ *une représentation quelconque de* $\mathfrak{g}$, $\rho(X)$ *est diagonal.*

On peut en effet utiliser les notations de la démonstration du lemme précédent en supposant que V est l'espace de ρ et que ρ est l'application identique de $\mathfrak{g}$ dans V. Si ρ est fidèle ; sinon, on se ramène au cas où ρ est fidèle en observant que la classe de X modulo le noyau $\mathfrak{n}$ de ρ est diagonale relativement à $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Puisqu'on sait que ρ est semi-simple, on peut évidemment de plus supposer que ρ est simple. On a $f_N=0$, ce qui montre que N commute avec les éléments de $\mathfrak{g}$. Les éléments x de V tels que $Nx=0$ forment donc un sous-espace U de V stable pour $\mathfrak{g}$, et $\neq \{0\}$ puisque N est nilpotent. Ce sous-espace est donc V tout entier, d'où $N=0$.

Lemme 3. *Si* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, *il existe un élément diagonal* $\neq 0$ *de* $\mathfrak{g}$.
En effet, $\mathfrak{g}$, étant semi-simple, n'est pas nilpotente, et contient par suite un élément non nilpotent, de sorte que le lemme 2 résulte du lemme 1.

Définition 1. *On appelle sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *un élément maximal de l'ensemble des sous-algèbres* $\mathfrak{h}$ *qui possèdent les propriétés suivantes* : a) *tout élément de* $\mathfrak{h}$ *est diagonal* ; b) $\mathfrak{h}$ *est abélienne.*

Dans ce qui suit, $\mathfrak{h}$ désignera une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, choisie une fois pour toutes.

Définition 2. Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$, et soit V l'espace de la représentation ρ. Soit w une fonction linéaire sur $\mathfrak{h}$. On dit qu'un vecteur $x \in V$ appartient à w si $\rho(H)x = w(H)x$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$; si de plus $x \neq 0$, on dit que w est un poids de ρ et que x est de poids w. Les poids de la représentation adjointe s'appellent les racines.

Théorème 1. Soit V l'espace d'une représentation ρ de $\mathfrak{g}$. Soient x un vecteur de V qui appartient à un poids w et X un élément de $\mathfrak{g}$ qui appartient à une racine α. Le vecteur $\rho(X)x$ appartient alors à la fonction $w+\alpha$.

Si $H \in \mathfrak{h}$, on a $\rho(H)\,\rho(X)x = \rho(X)\,\rho(H)x + \rho([H,X])x = w(H)\,\rho(X)x + \alpha(H)\,\rho(X)x$, car $[H,X] = \alpha(H)X$; le th. 1 est donc démontré.

Corollaire 1. Si $w+\alpha$ n'est pas un poids de ρ, on a $\rho(X)x = 0$.

Corollaire 2. Si des éléments X et Y de $\mathfrak{g}$ appartiennent à des racines α et β, $[X,Y]$ appartient à $\alpha+\beta$ et est nul si $\alpha+\beta$ n'est pas une racine.

Théorème 2. Soit V l'espace d'une représentation ρ de $\mathfrak{g}$. L'espace V est alors engendré par ceux de ses vecteurs qui appartiennent à des poids de ρ.

Si $H \in \mathfrak{h}$, $\rho(H)$ est diagonal (lemme 2) ; les $\rho(H)$ forment donc un ensemble d'endomorphismes diagonaux qui commutent entre eux ; il résulte alors d'un théorème bien connu qu'il existe une base de V par rapport à laquelle les $\rho(H)$ se représentent tous par des matrices diagonales ; les éléments de cette base appartiennent à des poids de ρ.

NBR/032

Corollaire 1. Soient $X_1,\ldots,X_h$ des éléments de $\mathfrak{g}$ qui appartiennent à des racines $\alpha_1,\ldots,\alpha_h$ dont la somme est $\neq 0$. Si ρ est une représentation de $\mathfrak{g}$, $\rho(X_1)\ldots\rho(X_h)$ est nilpotent.

Posons $M = \rho(X_1)\ldots\rho(X_h)$ et $\alpha = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i$. Si x est un vecteur de V qui appartient au poids w, et si $k > 0$, $M^k x$ appartient à $w+k\alpha$. Or ρ n'a qu'un nombre fini de poids ; on peut donc choisir un $k > 0$ tel que $k\alpha$ ne puisse pas s'écrire comme différence de deux poids. Il résulte alors du th.2 que $M^k=0$.

Remarque. L'assertion que ρ n'a qu'un nombre fini de poids se démontre en observant que, si $\{x_1,\ldots,x_d\}$ est une base de V composée de vecteurs qui appartiennent à des poids $w_1,\ldots,w_d$, pour qu'un $x\neq 0$ de V appartienne à un poids w, il faut et suffit que x soit combinaison linéaire des x_i pour lesquels $w_i=w$.

Corollaire 2. Soient α et β des racines de $\mathfrak{g}$ dont la somme est $\neq 0$, et soient X et Y des éléments appartenant à ces racines. On a alors $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y) = 0$.

En effet, $(\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y)$ est nilpotent en vertu du cor.1.

Corollaire 3. Si α est une racine de $\mathfrak{g}$, il en est de même de $-\alpha$.

Soit X un élément appartenant à α. Si $-\alpha$ n'était pas une racine, il résulterait du cor.2 que l'on aurait $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y)=0$ pour tout $Y\in\mathfrak{g}$, ce qui est impossible puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Corollaire 4. Si r est la dimension de $\mathfrak{h}$, il existe au moins r racines linéairement indépendantes.

Car, soit H un élément de $\mathfrak{h}$ tel que $\alpha(H)=0$ pour toute racine α. Il résulte alors du th.2 que H est dans le centre de $\mathfrak{g}$, d'où $H=0$.

Proposition 1. <u>L'algèbre $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$. La restriction de la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ n'est pas dégénérée.</u>

Soit $\mathfrak{g}_0$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les éléments de $\mathfrak{g}$ qui appartiennent à la racine 0 ; $\mathfrak{g}_0$ est donc l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}$ qui commutent avec ceux de $\mathfrak{h}$. Si $X \in \mathfrak{g}_0$ et si Y appartient à une racine $\alpha \neq 0$, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y) = 0$ (cor.2 au th.2). La forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}$ n'étant pas dégénérée, il en résulte que sa restriction à $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ n'est pas dégénérée. Tout élément diagonal H de $\mathfrak{g}_0$ est dans $\mathfrak{h}$. En effet, puisque H commute avec tous les éléments de $\mathfrak{h}$, qui sont eux-mêmes diagonaux, tout élément de l'espace engendré par H et $\mathfrak{h}$ est diagonal ; cet espace est donc contenu dans $\mathfrak{h}$ en vertu du caractère maximal de $\mathfrak{h}$. L'algèbre $\mathfrak{g}_0$ ne peut contenir aucune sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{l} \neq \{0\}$. En effet, $\mathfrak{l}$ contiendrait alors un élément $H \neq 0$ tel que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}\,H$ soit diagonal ; il résulterait du th.2 (appliqué à la représentation de $\mathfrak{l}$ induite par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$) que H serait diagonal, donc contenu dans $\mathfrak{h}$; mais, $\mathfrak{h}$ étant dans le centre de $\mathfrak{g}_0$, H serait dans le centre de $\mathfrak{l}$, ce qui est impossible. Il résulte donc du th. de Levi que $\mathfrak{g}_0$ est résoluble. Si N est un élément nilpotent de $\mathfrak{g}_0$, ad N est dans le radical de l'algèbre associative engendrée par les ad X, $X \in \mathfrak{g}_0$ (lemme 1, § 14). Il en résulte que, pour tout $X \in \mathfrak{g}_0$, (ad X)(ad N) est nilpotent, d'où $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,N) = 0$ et $N=0$. Soit maintenant X un élément quelconque de $\mathfrak{g}_0$, et soit $X=H+N$, où H et N sont dans $\mathfrak{g}$, H diagonal, N nilpotent et $[H,N]=0$. Alors, ad H et ad N sont les composantes diagonale et nilpotente de ad X, et peuvent s'écrire comme polynomes en ad X. Puisque ad X commute avec tous les éléments de ad $\mathfrak{u}$, il en est de même de ad N ; la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ étant fidèle, N commute avec les éléments de $\mathfrak{h}$, d'où $N \in \mathfrak{g}_0$ et par suite $N=0$. On a donc $X=H \in \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, ce qui démontre la prop.1 .

<u>Notation</u>.

Nous poserons, pour X et Y dans $\mathfrak{g}$,

$$\langle X,Y \rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y) .$$

Si w est une fonction linéaire quelconque sur $\mathfrak{h}$, il existe en vertu de la prop.1 un élément H_w et un seul de $\mathfrak{h}$ tel que

$$\langle H,H_w \rangle = w(H)$$

pour tout $H \in \mathfrak{h}$; nous appellerons H_w <u>l'élément dual de</u> w . L'application $w \longrightarrow H_w$ est un isomorphisme du dual de $\mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{h}$. Si H est un élément quelconque de $\mathfrak{h}$, nous poserons

$$\langle H,w \rangle = w(H) = \langle H,H_w \rangle$$

et, si w,w' sont des fonctions linéaires sur $\mathfrak{h}$, nous poserons

$$\langle w,w' \rangle = \langle H_w,H_{w'} \rangle = w'(H_w) = w(H_{w'}) .$$

Proposition 2. <u>Soit</u> α <u>une racine</u> $\neq 0$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$; <u>soient</u> X <u>et</u> Y <u>des éléments de</u> $\mathfrak{g}$ <u>appartenant aux racines</u> α <u>et</u> $-\alpha$ <u>respectivement</u>. <u>On a alors</u> $[X,Y] = \langle X,Y \rangle H_\alpha$.

L'élément $[X,Y]$ appartient à la racine 0 , donc est dans $\mathfrak{h}$ (prop.1). Si $H \in \mathfrak{h}$, on a $\langle H,[X,Y] \rangle = \langle [H,X],Y \rangle = \alpha(H) \langle X,Y \rangle$, ce qui démontre la prop.2 .

Soit donné un élément $X \neq 0$ appartenant à α. Il existe alors un $Z \in \mathfrak{g}$ tel que $\langle X,Z \rangle \neq 0$; or, on a $\langle X,Z \rangle = 0$ pour tout Z qui appartient à une racine $\neq -\alpha$ (cor.2 au th.2). Il en résulte qu'il existe un Y appartenant à $-\alpha$ tel que $\langle X,Y \rangle = 1$. On a alors

$$[H_\alpha,X] = \alpha(H_\alpha)X \; ; \; [H_\alpha,Y] = -\alpha(H_\alpha)Y \; ; \; [X,Y] = H_\alpha .$$

NBR 032 44

Les éléments H_α , X et Y forment une base d'une sous-algèbre $\mathfrak{g}_\alpha$ de dimension 3 de $\mathfrak{g}$. De plus, $\alpha(H_\alpha)$ n'est pas nul ; car, si $\alpha(H_\alpha)$ était nul, H_α serait dans le centre et dans l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}_\alpha$ et il en résulterait que ad H_α serait nilpotent (lemme 1, § 12), ce qui n'est pas. On déduit tout de suite de là que $\mathfrak{g}_\alpha$ est simple. Les propriétés fondamentales des poids et racines proviennent de l'étude des représentations des algèbres $\mathfrak{g}_\alpha$.

§ 16. REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES SIMPLES DE DIMENSION 3.

Dans ce § , $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie simple de dimension 3 qui a une base $\{X,Y,H\}$ telle que

(1) $$[H,X] = aX \quad ; \quad [H,Y] = -aY \quad ; \quad [X,Y] = H$$

où a est un élément $\neq 0$ de K . Nous désignerons par U l'algèbre associative universelle de $\mathfrak{g}$; U est donc engendré par son élément unité I et par des éléments X,Y et H qui sont liés par les relations (1) ; nous poserons $X^0=Y^0=H^0=I$. Soit F un polynome à coefficients dans K ; on a alors

(2) $$F(H)X = XF(H+aI) \quad ; \quad F(H)Y = YF(H-aI) \quad ;$$

on voit en effet tout de suite par récurrence sur n que ces formules sont vraies si $F(H)=H^n$. On démontre également par récurrence sur n les formules

(3) $$[H,X^n] = naX^n \quad ; \quad [H,Y^n] = -naY^n$$
$$[X,Y^n]= nY^{n-1}(H-(1/2)(n-1)aI) \; ; \; [Y,X^n] =-nX^{n-1}(H+(1/2)(n-1)aI) \; .$$

Soit ρ une représentation simple non triviale de $\mathfrak{g}$ (i.e. ρ n'applique pas tous les éléments de $\mathfrak{g}$ sur 0). Posons $D = \rho(H)$, $P=\rho(X)$, $Q=\rho(Y)$. Il est clair que le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par H est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$; D est donc diagonal (th.2, § 1) et P et Q sont nilpotents (cor.1 au th.2, § 1). Il existe donc un vecteur $\neq 0$ de l'espace V de la représentation qui est appliqué sur 0 par P . Or, on a $DP-PD=aP$; les vecteurs qui sont annulés par P forment donc un sous-espace W de V qui est appliqué dans lui-même par D . Puisque D est diagonal, la restriction de D à W admet au moins un vecteur propre x . Il existe donc un $x\neq 0$ tel que $Px=0$, $Dx=ex$, où $e\in K$. Posons $Q^i x=x_i$. Il résulte alors des formules (3) que

$$Px_i = iQ^{i-1}(H-(1/2)(i-1)a)x = (e-(1/2)(i-1)a)x_{i-1} \qquad (i\geqslant 1)$$

$$Dx_i = Q^i Hx - iaQ^i x = (e-ia)x_i \qquad (i\geqslant 0)$$

Puisque Q est nilpotent, il existe un entier $n\geqslant 0$ tel que $x_n\neq 0$, $x_{n+1}=0$. On a donc $e=(1/2)na$. Soit réciproquement V_n un espace vectoriel de dimension $n+1$, et soit $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ une base de cet espace. Définissons des opérateurs D,P et Q de cet espace par les formules

$$Dx_i = ((1/2)n-i)ax_i$$

$$Px_0=0 \quad ; \quad Px_i=(1/2)(n-i+1)ax_{i-1} \qquad (i\geqslant 1)$$

$$Qx_i = x_{i+1} \quad (i< n) \; ; \quad Qx_n=0 \; .$$

On vérifie alors aisément que $[D,P]=aP$, $[D,Q]=-aQ$, $[P,Q]=D$; on en déduit l'existence d'une représentation ρ_n de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho_n(H)=D$, $\rho_n(X)=P$, $\rho_n(Y)=Q$; les seuls vecteurs de V_n annulés par P étant les multiples scalaires de x_0 , on voit que ρ_n est irréductible. Donc, <u>pour tout</u> $n\geqslant 0$, $\mathfrak{g}$ <u>admet exactement une représentation irréductible</u> ρ_n <u>de degré</u> $n+1$. Si on désigne par α la fonction linéaire sur l'espace $\mathfrak{h}$ engendré par H telle que $\alpha(H)=a$, les racines de $\mathfrak{g}$ sont α , $-\alpha$ et 0 , et les poids de ρ_n sont les $((1/2)n-i)\alpha$ $(0\leqslant i\leqslant n)$. Soit y un vecteur $\neq 0$ de V_n qui appartient au poids $(1/2)r\alpha$. Si p est le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $P^p y\neq 0$, on a $n=2p+r$, $y\in Kx_p$ et le plus grand entier $q\geqslant 0$ tel que $Q^q y\neq 0$ est $q=p+r$.

Soit maintenant ρ une représentation quelconque de $\mathfrak{g}$, et soit y un vecteur $\neq 0$ de l'espace V, de la représentation ρ qui appartient à un poids de ρ. Désignons par p le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $(\rho(X))^p y \neq 0$ et par q le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $(\rho(Y))^q y \neq 0$. La représentation ρ étant semi-simple, son espace est la somme directe de sous-espaces stables qui fournissent des représentations simples de $\mathfrak{g}$; chacune de ces représentations simples est équivalente à l'une des ρ_n construites plus haut. Posons $y = \sum_j y_j$, où chaque y_j appartient à un sous-espace stable simple de dimension $n(j)+1$. Il est clair que chaque y_j doit appartenir au même poids que y, donc que le poids de y est de la forme $(1/2)r\alpha$, où r est un entier. De plus, on a $(\rho(X))^{p+1} y_j = 0$ pour tout j, mais $(\rho(X))^p y_j \neq 0$ pour au moins un j. Il en résulte en vertu de ce qu'on a vu plus haut que $p+r \geqslant 0$, que $(\rho(Y))^{p+r+1} y_j = 0$ pour tout j et que $(\rho(Y))^{p+r} y_j \neq 0$ pour tout indice j tel que $(\rho(X))^p y_j \neq 0$. On a donc $q = p+r$, $r = q-p$; de plus, on a $(\rho(Y))^i (\rho(X))^p y \neq 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant p+q$, et ce vecteur appartient au poids $((1/2)r+p-i)\alpha$. Nous avons donc les résultats suivants :

Lemme 1. Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$; tout poids de ρ est de la forme $(1/2)r\alpha$, où r est un entier. Soit y un vecteur $\neq 0$ de l'espace de la représentation ρ qui appartient au poids $(1/2)r\alpha$. Soient p le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $(\rho(X))^p y \neq 0$ et q le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $(\rho(Y))^q y \neq 0$. On a alors $r = q-p$, $(\rho(Y))^i (\rho(X))^p y \neq 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant p+q$; $(\rho(Y))^i (\rho(X))^p y$ est $\neq 0$ et appartient au poids $((1/2)r+p-i)\alpha$; en particulier, $-(1/2)r\alpha$ est un poids de ρ.

§ 17. PROPRIÉTÉS des RACINES et POIDS.

Rappelons que $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre semi-simple sur le corps algébriquement clos K de caractéristique 0, et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Théorème 3. Soit α une racine $\neq 0$ de $\mathfrak{g}$, et soit w un poids d'une représentation ρ de $\mathfrak{g}$. Il existe alors des entiers p et q qui jouissent des propriétés suivantes : on a $w(H_\alpha)=(1/2)(q-p)\alpha(H_\alpha)$, et $w+k\alpha$ est un poids de ρ pour tous les entiers k tels que $-q \leq k \leq p$; en particulier, $w-2(w(H_\alpha))(\alpha(H_\alpha))^{-1}\alpha$ est un poids de ρ .

Nous avons vu que $\mathfrak{g}$ contient des éléments X et Y , appartenant respectivement aux racines α et $-\alpha$, tels que $[X,Y] = H_\alpha$; de plus les éléments X,Y et H_α forment une base d'une sous-algèbre simple $\mathfrak{g}_\alpha$ de dimension 3 . Soit y un vecteur de l'espace de la représentation ρ qui appartient à w ; le th.3 résulte immédiatement du lemme 1, § 16 si on observe que $(\rho(Y))^i(\rho(X))^p y$ appartient au poids $w+(p-i)\alpha$.

Proposition 1. Soit r la dimension de $\mathfrak{h}$, et soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ r racines linéairement indépendantes. Tout poids de toute représentation de $\mathfrak{g}$ est alors une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$. Les combinaisons linéaires à coefficients rationnels des H_α , pour toutes les racines α , forment un espace vectoriel de dimension r sur le corps des rationnels, soit $\mathfrak{h}_0$. La restriction à $\mathfrak{h}_0$ de la forme quadratique fondamentale de $\mathfrak{g}$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{h}_0$.

Soit w un poids d'une représentation de $\mathfrak{g}$; écrivons $w = \sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i$. Si nous posons $2 \langle w, \alpha_j \rangle = m_j \langle \alpha_j,\alpha_j \rangle$ et $2 \langle \alpha_i,\alpha_j \rangle = m_{ij} \langle \alpha_j,\alpha_j \rangle$ les m_j et m_{ij} sont des entiers, et on a $m_j = \sum_{i=1}^{r} c_i m_{ij}$.

La restriction à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ de la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}$ étant non dégénérée, le déterminant $\det(m_{ij})$ est $\neq 0$; il en résulte que les c_i sont rationnels. En particulier, pour toute racine α, H_α est combinaison linéaire à coefficients rationnels de $H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_n}$, qui sont linéairement indépendants. Soit H un élément de $\mathfrak{h}_o$; tous les $\alpha(H)$ sont donc rationnels. Si m_α est la dimension de l'espace des éléments de $\mathfrak{g}$ qui appartiennent à α, on a $\langle H,H \rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, H)^2 = \sum_\alpha m_\alpha(\alpha(H))^2$; et, si tous les $\alpha(H)$ sont nuls, H est dans le centre de $\mathfrak{g}$, d'où $H=0$. La prop.1 est donc démontrée.

L'espace $\mathfrak{h}_o$ a donc une structure d'espace euclidien sur le corps des rationnels. Si α est une racine $\neq 0$, nous désignerons par P_α l'hyperplan d'équation $\alpha = 0$ dans $\mathfrak{h}_o$; les hyperplans P_α sont appelés les <u>hyperplans radiciaux</u>. Tout poids d'une représentation de $\mathfrak{g}$ peut être considérée comme une fonction linéaire sur $\mathfrak{h}_o$. Soit $\mathfrak{h}_o^*$ le dual de $\mathfrak{h}_o$; la structure euclidienne sur $\mathfrak{h}_o$ définit un isomorphisme de $\mathfrak{h}_o$ sur $\mathfrak{h}_o^*$, donc une structure euclidienne sur $\mathfrak{h}_o^*$, dans laquelle le produit scalaire est l'application $(w,w') \longrightarrow \langle w,w' \rangle$. Si α est une racine $\neq 0$, nous désignerons par P_α^* l'hyperplan de $\mathfrak{h}_o^*$ composé des w tels que $\langle w,\alpha \rangle = 0$; les P_α^* seront encore appelés les <u>hyperplans radiciaux de</u> $\mathfrak{h}_o^*$.

Théorème 4. <u>Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$. La symétrie par rapport à un hyperplan radiciel de $\mathfrak{h}_o^*$ permute entre eux les poids de ρ</u>.

Cela résulte immédiatement de la dernière assertion du th.3 .

Définition 1. <u>On appelle groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ le groupe engendré par les symétries par rapport aux hyperplans radiciaux de $\mathfrak{h}_o^*$</u>.

Il résulte du th.4 que le groupe de Weyl permute entre elles les racines de $\mathfrak{g}$. Puisqu'il existe r racines linéairement indépendantes (où $r = \dim \mathfrak{h}_0^*$), le groupe de Weyl est représenté fidèlement comme groupe de permutations des racines et est par suite fini.

C'est le groupe de Weyl qui va servir à classifier les algèbres semi-simples. Nous verrons que tout groupe fini d'isométries d'un espace euclidien (sur le corps des rationnels) qui est engendré par des symétries par rapport à des hyperplans est le groupe de Weyl d'une algèbre de Lie semi-simple (sur le corps K).

Appelons <u>multiplicité</u> d'un poids w d'une représentation de $\mathfrak{g}$ la dimension de l'espace des vecteurs de l'espace de représentation qui appartiennent à w.

Proposition 2. <u>Soit</u> w <u>un poids de multiplicité un d'une représentation</u> ρ <u>de</u> $\mathfrak{g}$; <u>soit</u> α <u>une racine</u> $\neq 0$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$. <u>Les entiers</u> p <u>et</u> q <u>du th.</u>3 <u>peuvent alors être pris tels que l'ensemble de tous les entiers</u> k <u>tels que</u> $w+k\alpha$ <u>soit un poids de</u> ρ <u>soit exactement l'intervalle</u> $[-q,+p]$ <u>de l'ensemble des entiers. Soit</u> y <u>un vecteur de poids</u> w ; <u>il existe des éléments</u> X <u>et</u> Y <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>appartenant respectivement</u> à α <u>et à</u> $-\alpha$ <u>tel que</u> $(\rho(Y))^i(\rho(X))^p y$ <u>soit</u> $\neq 0$ <u>pour</u> $0 \leqslant i \leqslant p+q$.

Déterminons les entiers p,q comme dans la démonstration du th.3. Soit p' le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $w+p'\alpha$ soit un poids, et soit y' un vecteur appartenant à ce poids. Il existe alors un $q' \geqslant 0$ tel que $(\rho(Y))^i y' \neq 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant p'+q'$ et $q'-p' = q-p$ (lemme 1, § 16). En particulier $(\rho(Y))^{p'} y'$ est $\neq 0$ et appartient à w ; ce vecteur est donc de la forme ay, $a \neq 0$, et on voit que $(\rho(Y))^{q'} y \neq 0$, d'où $q' \leqslant q$; on a donc $p' \leqslant p$, d'où $p'=p$. On voit de même que le plus grand $q' \geqslant 0$ tel que $w-q'\alpha$ soit un poids est q.

NBR 032 50

Proposition 3. <u>Toute racine</u> $\alpha \neq 0$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>est de multiplicité</u> 1 .

Choisissons X et Y comme dans la démonstration du th.3, et soit X' un élément $\neq 0$ appartenant à α . Soient p et q les plus grands entiers $\geqslant 0$ tels que $(\mathrm{ad}\,X)^p X' \neq 0$ et $(\mathrm{ad}\,Y)^q X' \neq 0$ respectivement.

Il résulte alors du lemme 1, § 16 que $\alpha(H_\alpha)=(1/2)(q-p)\alpha(H_\alpha)$, d'où $q-p = 2$, $q \geqslant 2$ et $[X',Y] \neq 0$. Or, si α était de multiplicité $\geqslant 1$, il y aurait un $X' \neq 0$ appartenant à α tel que $\langle X',Y \rangle = 0$, d'où $[X',Y] = 0$ en vertu de la prop.2, § 15 .

Corollaire 1. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>des éléments</u> $\neq 0$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>qui appartiennent à des racines</u> $\alpha \neq 0$ <u>et</u> $\beta \neq 0$ <u>telles que</u> $\alpha+\beta$ <u>soit une racine</u>. <u>On a alors</u> $[X,Y] \neq 0$.

Cela résulte immédiatement des prop.2 et 3 .

Corollaire 2. <u>Soit</u> α <u>une racine</u> $\neq 0$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$. <u>Les seules racines de</u> $\mathfrak{g}$ <u>qui sont linéairement dépendantes de</u> α <u>sont</u> $\alpha, 0$ <u>et</u> $-\alpha$.

Soit β une racine $\neq 0$ de la forme $c\alpha$, $c \in K$. On a $\alpha = c^{-1}\beta$, et il résulte du th.3 que c et c^{-1} sont des demi entiers. Or ni c ni c^{-1} ne peut être ± 2 , en vertu du cor.1 et du fait que $[X,X] = 0$; c est donc ± 1 .

§ 18. GROUPES ENGENDRÉS PAR DES SYMÉTRIES.

Soit V un espace euclidien de dimension finie sur le corps des rationnels, et soit E un ensemble fini d'hyperplans de V tel que les symétries par rapport aux hyperplans $P \in E$ engendrent un groupe fini dont les opérations permutent entre eux les éléments de E (les hyperplans en question sont des hyperplans de la structure d'espace vectoriel de V, i.e. passent par l'origine). Posons $r = \dim V$; nous supposerons que E contient au moins r hyperplans indépendants (i.e. dont l'intersection se réduit à $\{0\}$). Cette condition est satisfaite pour le groupe de Weyl d'une algèbre de Lie semi-simple ; d'ailleurs, si elle ne l'était pas, tout se ramenerait à l'étude du groupe induit par G dans l'espace orthogonal à l'intersection de tous les hyperplans de E.

Considérons le complémentaire U de la réunion de tous les hyperplans de E. Choisissant un point quelconque x_0 de U, soit C l'ensemble des points qui sont (strictement) du même côté que x_0 par rapport à tous les hyperplans de E. Nous dirons que C est une <u>chambre</u> ; les diverses chambres sont les composantes convexes (i.e. les parties convexes maximales) de U ; elles sont permutées entre elles par le groupe G. On peut choisir pour tout $P \in E$ une forme linéaire L_P nulle sur P telle que $L_P(x) > 0$ pour tout $x \in C$; les points x de C sont ceux qui satisfont aux conditions $L_P(x) > 0$ pour tout $P \in E$. Parmi toutes les parties E' de E telles que C puisse encore se définir comme l'ensemble des x tels que $L_P(x) > 0$ pour tout $P \in E'$, choisissons-en une E' minimale, et soient $P_1, \dots, P_m$ les éléments de E'. Nous poserons $L_i = L_{P_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et nous désignerons par s_i la symétrie par rapport à P_i. Montrons que, pour chaque $i (1 \leqslant i \leqslant m)$ il existe un $x \in P_i$ tel que $L_P(x) > 0$ pour tout $P \neq P_i$ dans E. Puisque E' est minimal, il y a un x_1 qui n'est pas dans C tel que $L_j(x_1) > 0$ pour tout $j \neq i$; on a $L_i(x_1) \leqslant 0$. Soit x_2 le point où le segment joignant x_o à x_1 rencontre P_i ; on a $L_j(x_2) > 0$ pour $j \neq i$. Soit y un point de P_i tel que $L_P(y) \neq 0$ pour tout $P \neq P_i$ dans E ; on peut trouver un rationnel t tel que $L_j(x_2+ty) > 0$ pour $j \neq i$ et $L_P(x_2+ty) \neq 0$ pour tout $P \neq P_i$ dans E. Soit $x = x_2+ty$; les fonctions $L_1, \ldots, L_m$ sont toutes > 0 en tout point du segment ouvert d'extrémités x_o et x, ce qui montre que ce segment est dans C, donc que $L_P(x) \geqslant 0$ pour tout $P \in E$. Si $P \neq P_i$, on a $L_P(x) \neq 0$, d'où $L_P(x) > 0$. Réciproquement, si $P \in E$ contient un point x tel que $L_{P'}(x) > 0$ pour tout $P' \neq P$ dans E, P' est l'un des hyperplans $P_1, \ldots, P_m$; car, sinon, on aurait $L_i(x) > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, et x serait dans C. On voit donc que l'ensemble E' est uniquement déterminé. Les hyperplans P_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont appelés les <u>murs</u> de C.

Nous allons maintenant montrer que $s_1, \ldots, s_m$ <u>engendrent</u> G et que G <u>permute les chambres transitivement</u>. Soit G' le groupe engendré par $s_1, \ldots, s_m$, et soit x un point d'une chambre quelconque. Parmi tous les transformés de x par les opérations de G', soit x' l'un de ceux qui sont les plus voisins de x_o. Les transformations de G' étant isométriques, on a $\| x'-x_o \| \leqslant \| x'-s_i x_o \|$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Or P_i est le lieu des points équidistants de x_o et de $s_i x_o$, et x' ne peut appartenir à P_i ; il est donc du même côté de P_i que x_o. Ceci étant vrai pour tout i, on a $x' \in C$, ce qui montre que G' transforme les chambres transitivement. Or tout $P \in E$ est mur d'au moins une chambre. Soit en effet x un point de P qui n'appartient à aucun $P' \neq P$ de E, et soit y un point non dans P. Il existe un t rationnel tel que x et $x+ty$ soient du même côté de tous les $P' \neq P$ de E ; P est alors un mur de la chambre qui contient $x+ty$.

NBR 032 53

Il existe donc une transformation de G' qui transforme P en l'un des P_i ; il en résulte que la symétrie par rapport à P est transformée par un élément de G' en l'une des s_i , donc est dans G' . Ceci étant vrai pour tout $P \in E$, on a $G'=G$.

Nous allons maintenant montrer que $\langle L_i, L_j \rangle \leqslant 0$ si $i \neq j$ ($\langle L_i, L_j \rangle$ est le produit scalaire dans le dual de V que l'on déduit du produit scalaire dans V par l'isomorphisme que la géomètrie euclidienne de V établit entre V et son dual). Observons d'abord que, si a et b sont des nombres rationnels > 0 , il existe un $x \in C$ tel que $L_i(x)=a$, $L_j(x)=b$. En effet, il résulte de ce que nous avons vu que P_i contient un point y tel que $L_k(y) > 0$ pour $k \neq i$; multipliant y par un scalaire convenable, on peut supposer que $L_j(y)=2b$. On voit de même qu'il existe un $z \in P_j$ tel que $L_i(z)=2a$, $L_k(z) > 0$ pour $k \neq j$; il suffit alors de prendre pour x le milieu du segment $\overline{yz}$. Ceci dit, soit x_i le vecteur orthogonal à P_i tel que $L_i(x_i)=1$; on voit tout de suite que $s_i P_j$ est l'hyperplan d'équation $L_j - 2L_j(x_i)L_i = 0$. Cet hyperplan ne peut contenir aucun point de C ; il en résulte que $L_j(x_i) \leqslant 0$, d'où $\langle L_i, L_j \rangle < 0$. De plus on observera que le groupe engendré par s_i et s_j conserve le plan π (à deux dimensions) orthogonal à l'intersection de P_i et de P_j . L'opération $s_i s_j$ est d'ordre fini m_{ij} , et sa restriction à π peut se représenter (par rapport à une base dans π) par une matrice de degré 2 à coefficients rationnels. Les racines caractéristiques de cette matrice sont quadratiques sur le corps des rationnels, et l'une au moins est une racine primitive m_{ij}-ième de l'unité. Il ne résulte que m_{ij} <u>ne peut avoir que l'une des valeurs</u> 2,3,4 <u>ou</u> 6 .

Le nombre m est au moins égal à r . Car sinon, il y aurait un sous-espace $U \neq \{0\}$ de V orthogonal à tous les murs de C ; les points de U seraient laissés fixes par tous les s_i , donc aussi par toutes les opérations de G , et tous les hyperplans de E seraient orthogonaux à U , cas que nous avons exclu. <u>Nous allons maintenant montrer que</u> $m=r$.

On peut supposer $L_1, \ldots, L_r$ linéairement indépendants. Nous allons montrer que, si L est une fonction linéaire sur V telle que $\langle L, L_i \rangle \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, les coefficients $a_1, \ldots, a_r$ de l'expression $L = \sum_{i=1}^{r} a_i L_i$ de L sont tous $\geqslant 0$. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi ; on peut alors supposer que $L = \sum_{i=1}^{h} a_i L_i - \sum_{i=h+1}^{r} a_i' L_i$, où $h < r$, $a_i \geqslant 0$ si $i \leqslant h$, $a_i' > 0$ si $i > h$. Posons $L' = \sum_{i=1}^{h} a_i L_i$ et $L'' = \sum_{i=h+1}^{r} a_i' L_i$, d'où $L''=L'-L$. Si $i > h$, on a $\langle L', L_i \rangle \leqslant 0$ parce que $\langle L_j, L_i \rangle \leqslant 0$ si $j \leqslant h$, et $\langle L, L_i \rangle \geqslant 0$ par hypothèse. On a donc $\langle L'', L_i \rangle \leqslant 0$ $(h+1 \leqslant i \leqslant r)$, d'où $\langle L'', L'' \rangle \leqslant 0$, $L''=0$, ce qui amène à une contradiction. Ceci dit, si on avait $m > r$, on pourrait écrire $L_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} a_i L_i$, et il résulterait de ce qu'on vient de démontrer et du fait que $\langle L_{r+1}, L_i \rangle \leqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ que les a_i seraient tous $\leqslant 0$, ce qui est impossible puisque L_{r+1} est positif en tout point de C . Puisque $m=r$, il est clair qu'étant donnés des nombres rationnels $a_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, il existe un $x \in C$ tel que $L_i(x) = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Puisque tout L_P $(P \in E)$ est positif sur C , on en conclut que les L_P $(P \in E)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$ de $L_1, \ldots, L_r$. En résumé nous avons les résultats suivants :

Proposition 1. <u>Soit</u> V <u>un espace euclidien de dimension</u> r <u>sur le corps des rationnels, et soit</u> E <u>un ensemble fini d'hyperplans</u> (<u>passant par l'origine</u>) <u>de</u> V <u>tel que le groupe engendré par les symétries par rapport aux éléments de</u> E <u>soit fini et permute entre eux les éléments de</u> E .

Supposons qu'aucun point $\neq 0$ de V ne soit invariant par toutes les opérations de G. Il existe alors r hyperplans P_i de E $(1 \leqslant i \leqslant r)$ qui possèdent les propriétés suivantes : les symétries par rapport à ces hyperplans engendrent G ; il existe des équations $L_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ des P_i telles que, tout hyperplan $P \in M$ ait une équation $L_P = 0$ telle que L_P soit une combinaison linéaire à coefficients tous $\geqslant 0$ de $L_1, \ldots, L_r$; tout $x \in V$ peut être transformé par une opération de G en un x' tel que $L_i(x') \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$; on a $\langle L_i, L_j \rangle \leqslant 0$ si $i \neq j$; si L est une fonction linéaire sur V telle que $\langle L, L_i \rangle \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, L est une combinaison linéaire à coefficients $\geqslant 0$ de $L_1, \ldots, L_r$. Si s_i est la symétrie par rapport à P_i, et si $j \neq i$ l'ordre de $s_i s_j$ est l'un des nombres $2, 3, 4$ ou 6.

[Soit $\bar{C}$ l'ensemble des points x tels que $L_i(x) \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$; nous allons maintenant montrer, par un argument topologique, que $\bar{C}$ est un domaine fondamental pour G ; nous n'aurons pas besoin de ce résultat dans la suite (en fait on peut le démontrer au moyen de la théorie des alg. de Lie) ; il n'en serait pas moins intéressant d'avoir une démonstration directe élémentaire ; au concours ! . Nous pouvons supposer que le corps de base est celui des réels (au lieu des rationnels). Chaque chambre découpe sur la sphère unité un simplexe, et on obtient ainsi une subdivision simpliciale de la sphère unité. Considérons la subdivision cellulaire duale de cette subdivision simpliciale.
Les sommets de la subdivision duale correspondent aux chambres ; si A et A' sont deux sommets qui sont les extrémités d'une arête, les chambres qui contiennent A et A' ont un mur commun, et nous ferons correspondre à l'arête AA' la symétrie par rapport à ce mur commun, qui est une opération de G. Si λ est un chemin formé d'arêtes, obtenu en parcourant

successivement les arêtes $a_1,\dots,a_h$, nous ferons correspondre à λ l'élément $s=t_h\dots t_1$ de G, où t_i est la symétrie qui correspond à a_i. Si A et A' sont respectivement l'origine et l'extrémité de λ, s transforme la chambre qui contient A en celle qui contient A'. Si λ et λ' sont deux chemins telles que l'origine de λ' soit l'extrémité de λ, l'élément de G qui correspond au chemin obtenu en décrivant d'abord λ puis λ' est $s's$, où s et s' sont les éléments qui correspondent à λ et à λ'. Soit A_o un sommet quelconque de la subdivision duale, correspondant à une chambre C_o. Tout élément de G peut alors se représenter comme l'élément correspondant à un chemin issu de A_o. Considérons en effet un chemin $a_1,\dots a_h$, issu de A_o et obtenu en parcourant successivement les arêtes $a_1,\dots,a_h$. Soient $s_1,\dots,s_r$ les symétries par rapport aux murs de C_o ; soit $t_1=e$ (l'élément neutre), et soit t_k l'élément qui correspond au chemin $a_1\dots a_{k-1}$. Les symétries par rapport aux murs de t_kC_o sont les $t_ks_it_k^{-1}$; l'élément de G qui correspond au chemin considéré est donc de la forme

$t_{h-1}s_{i(h)}t_{h-1}^{-1}.t_{h-2}s_{i(h-1)}t_{h-2}^{-1}\dots,s_{i(1)}. = s_{i(1)}\dots s_{i(h)}$, et tout élément de G peut se mettre sous cette forme. Les cellules de dimension 2 de la subdivision duale correspondent à des faces de dimension $r-3$ de la subdivision au moyen des chambres ; une telle face est dans l'intersection $P\cap P'$ de deux hyperplans qui sont des murs d'une chambre. Soient s et t les symétries par rapport à ces hyperplans ; st est alors d'ordre m égal à 2,3,4 ou 6, et on voit tout de suite que l'opération de G qui correspond au chemin qui fait une fois le tour d'une cellule de dimension 2 de la subdivision duale est $(st)^m=e$ (l'élément neutre). Ceci dit, si $r>2$, la sphère unité est simplement connexe.

Le groupe de Poincaré du squelette à deux dimensions de la subdivision duale se réduit donc à son élément neutre ; il en résulte que tout chemin fermé d'arêtes peut s'écrire comme combinaisons de chemins de la forme $\lambda\beta\lambda^{-1}$, où λ conduit de l'origine A_0 à un sommet d'une 2-cellule, β est le chemin qui fait le tour de cette 2-cellule et λ^{-1} ramène à A_0 . On en déduit que l'opération de G autre que l'élément neutre ne transforme une chambre en elle-même. La propriété est encore vraie si $r=2$ (vérification triviale).De plus, on voit tout de suite que deux points distincts de la frontière d'une chambre ne peuvent pas être transformés l'un dans l'autre par G , donc que $\overline{C}$ est un domaine fondamental. Enfin, le raisonnement montre que toutes les relations entre les générateurs s_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ de G sont des conséquences des relations $(s_i s_j)^{m_{i,j}} = 1$.

Soit x_0 un point de C . C'est un résultat classique que l'ensemble des points x qui sont strictement plus voisins de x_0 que de tous ses transformés est l'intérieur d'un domaine fondamental ; ce domaine fondamental est contenu dans $\overline{C}$ (comme il résulte du raisonnement par lequel on a établi que G permute transitivement les chambres). Il est donc identique à $\overline{C}$. On en conclut tout de suite que, si $x\in C$, on a $\langle x,x_0\rangle > \langle sx,x_0\rangle$ pour tout $x_0\in C$ et tout $s\in G$. Si nous désignons par x_i les éléments qui correspondent aux L_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ par l'isomorphisme entre le dual de V et V , on voit, en faisant usage de la prop.1, que, si $x\in\overline{C}$, $x-sx$ est une combinaison des x_i à coefficients tous $\geqslant 0$. C'est cette propriété qu'il serait désirable d'établir directement.]

On peut maintenant procéder à la classification des groupes G . Observons d'abord que, si les opérations de G transforment en lui-même un sous-espace U de V , différent de $\{0\}$ et de V , elles transforment aussi en lui-même le supplémentaire orthogonal U' de U . Soit P un hyperplan tel que la symétrie par rapport à P soit dans G ; soit $x=y+y'$ un point de P , avec $y \in U$, $y' \in U'$. Si s est la symétrie par rapport à P , $x=sy+sy'$, $sy \in U$, $sy' \in U'$. On en conclut que $P=(P \cap U)+(P \cap U')$; il résulte tout de suite de là pour des raisons de dimension que P contient l'un des espaces U ou U' . On déduit de là que G est produit direct de deux groupes G_U et $G_{U'}$, les opérations de G_U (resp. $G_{U'}$) laissant fixes les points de U' (resp. U) ; de plus, G_U (resp. $G_{U'}$) induit sur U (resp. U') un groupe engendré par des symétries. Il suffira donc de considérer le cas où V est un espace de représentation simple de G ; c'est ce que nous supposerons.

Utilisant les mêmes notations que plus haut, nous associerons à G un graphe dont les sommets seront désignés par les mêmes lettres $s_1,\dots,s_r$ que les générateurs de G ; les sommets s_i et s_j seront joints par une arête si et seulement si P_i et P_j ne sont pas perpendiculaires ; de plus, nous associerons alors à cette arête l'entier m_{ij} , ordre de l'opération $s_i s_j$. <u>Le graphe ainsi obtenu est connexe</u>. En effet, sinon on pourrait partager l'ensemble $P_1,\dots,P_r$ en deux parties, disons $\{P_1,\dots,P_h\}$ et $\{P_{h+1},\dots,P_r\}$ tel que tout P_k appartenant à l'une de ces parties soit perpendiculaire à tout $P_{k'}$ de l'autre ; les opérations de G conserveraient alors l'espace $P_1 \cap \dots \cap P_h$, ce qui est impossible. Remplaçant le corps des rationnels par une extension totalement réelle convenable (obtenue par adjonction d'irrationalités quadratiques réelles) nous normaliserons les L_i par la condition $\|L_i\| = 2$ $(1 \leq i \leq r)$, et nous poserons $a_{ij} = -\langle L_i, L_j \rangle$. Désignant par s_i l'opération sur le dual de V qui correspond à s_i par l'isomorphisme entre V et son dual, on a alors $s_i L_i = -L_i$, $s_i L_j = a_{ij} L_i + L_j$. Construisant l'équation caractéristique de $s_i s_j$, on trouve facilement que a_{ij}^2 est un entier rationnel qui est 1 si $m_{ij}=3$, 2 si $m_{ij}=4$ et 3 si $m_{ij}=6$. On a

$$\left\| \sum_{i=1}^{t} x_i L_i \right\|^2 = 2\left(\sum_{i=1}^{t} x_i^2 - \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \right).$$

Toute la discussion reviendra à exprimer que cette forme quadratique prend des valeurs >0 pour les valeurs $\geqslant 0$ non toutes nulles des x_i .

Montrons d'abord que l'on ne peut avoir un $m_{ij}=6$ que si $r=2$. Le graphe étant connexe, si on avait $m_{12}=6$, $r>2$, on pourrait supposer que $a_{23}\neq 0$, d'où $a_{23}\geqslant 1$; or la forme quadratique $x_1^2+x_2^2+x_3^2-3^{1/2}x_1x_2-x_2x_3$ est nulle pour $x_1=3^{1/2}$, $x_2=2$, $x_3=1$, ce qui démontre notre assertion. La forme quadratique

$$x_1^2+\ldots+x_k^2-x_1x_2-\ldots-x_{k-1}x_k-x_kx_1$$

est nulle si $x_1=\ldots=x_k=1$; on en conclut tout de suite que le graphe ne peut contenir aucun chemin fermé : c'est un arbre. Soit Q_k la forme quadratique $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_1x_2-\ldots-x_{k-1}x_k$; le minimum de cette forme sur la variété $x_1=1$ est atteint pour $x_i=k^{-1}(k-i+1)$ et a la valeur $1-(1/2)k^{-1}(k-1)$. Ceci dit, supposons que le point s_1 soit un point de ramification d'où partent des branches du graphe de longueurs $k_1,\ldots,k_h$. On obtient alors que $1-(1/2)\sum_{i=1}^{h} k_i^{-1}(k_i-1)$ doit être >0 , d'où $\sum_{i=1}^{h} k_i^{-1} \geqslant h-2$. On a donc $h\leqslant 3$ et, si $h=3$, $k_1^{-1}+k_2^{-1}+k_3^{-1}>1$. Il en résulte que l'un au moins des k_i est 2 , soit $k_1=2$, et que $k_2^{-1}+k_3^{-1}>1/2$. Cette condition est toujours vérifiée si $k_2=2$. Si $k_2=3$, alors $k_3\leqslant 6$. On a donc pour k_1,k_2,k_3 les possibilités (2,2,m) ($m\geqslant 2$ quelconque), (2,3,5), (2,3,4), (2,3,3). Considérons maintenant la forme quadratique $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_1x_2-\ldots-x_{k-2}x_{k-1}-2^{1/2}x_{k-1}x_k$. En y faisant $x_1=\ldots=x_{k-1}=1$, $x_k=2^{-1/2}$, on trouve qu'elle prend la valeur $1-(1/2)$. En observant que $(1/2)(k_1^{-1}+k_2^{-1})-1/2\leqslant 0$, on voit que, si l'un des m_{ij} est 4 , le graphe ne peut présenter aucun point de ramification. De plus, on voit qu'il ne peut pas partir de s_1 deux branches ayant chacune une arête telle que $m_{ij}=4$; il n'y a donc au plus qu'une arête pour laquelle $m_{ij}=4$. De plus, on trouve que la forme quadratique $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2^{1/2}x_1x_2-x_2x_3$ prend la valeur $1-(2/3)$ pour les valeurs $x_1=1$, $x_2=(2/3)2^{1/2}$, $x_3=(1/3)2^{1/2}$; on ne peut avoir $2/3+(1/2)k^{-1}(k-1) > 1$ que si $k=2$. Il en résulte que si une arête pour laquelle $m_{12}=4$ n'a pas pour extrémité une extrémité du graphe, le graphe ne peut comprendre que 4 sommets au plus.

Tenant compte de la discussion précédente, on voit que les seules possibilités sont les suivantes :

I_r :

II_r :

III_r :

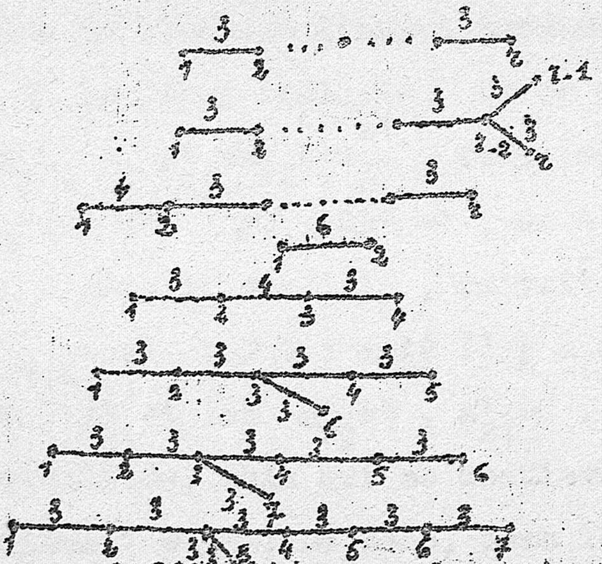
IV_2 :

V_4 :

VI_6 :

VII_7 :

$VIII_8$:



On vérifie sans difficulté que, dans chacun de ces cas, la forme quadratique $\sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$ est définie positive (a_{ij} étant 0 si s_i et s_j ne sont pas les extrémités d'une arête, 1 si $m_{ij}=3$, $2^{1/2}$ si $m_{ij}=4$ et $3^{1/2}$ si $m_{ij}=6$) . Cela résulte d'ailleurs essentiellement des calculs déjà faits : nous avons déterminé des minima exacts pour le cas où l'une des variables, convenablement choisie, est 1 ; il reste à vérifier que la forme est >0 si on donne à cette variable la valeur 0, ce qui, dans chaque cas, est trivial. Il en résulte que le groupe engendré par les opérations s_i définies par

$$s_i L_i = -L_i \qquad s_i L_j = L_j + a_{ij} L_i$$

laisse invariante une forme quadratique positive. Il n'en résulte pas encore que ce groupe est fini, mais cela sera démontré si nous faisons voir que ce groupe peut être transformé par un changement de variables en un groupe à coefficients entiers rationnels. Les seuls changements de variables que nous considèrerons sont de la forme $L'_i = b_i L_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, les b_i étant tous > 0 ; de plus, pour la classification des algèbres de Lie, il importe de déterminer tous les systèmes d'entiers $a'_{ij} \geqslant 0$ tels que le groupe engendré par les opérations s_i définies par

$$s_i L'_i = -L'_i \quad ; \quad s_i L'_j = L'_j + a'_{ij} L'_i$$

puisse se déduire de l'un des groupes trouvés précédemment par une transformation de la forme indiquée. Or on a $a_{ij} = a_{ji}$; on doit donc avoir $a'_{ij} = a_{ij} b_j b_i^{-1}$, $a'_{ji} = a_{ij} b_i b_j^{-1}$. Dans les cas I_r, II_r, VI_6, VII_7 , $VIII_8$, les a_{ij} qui sont $\neq 0$ sont $=1$; on a donc, si $a_{ij} \neq 0$, $a'_{ij} a'_{ji} = 1$, d'où $a'_{ij} = a'_{ji} = 1$. Dans le cas III_r , on voit comme dans le cas précédent que $a'_{i,i+1} = a'_{i+1,i}$ si $i > 1$; mais il y a deux possibilités si $i=1$, à savoir $a'_{12} = 2$, $a'_{21} = 1$ et $a'_{12} = 1$, $a'_{21} = 2$. Dans le cas IV_2 il y a aussi deux possibilités, mais qui se déduisent l'une de l'autre par échange des indices 1 et 2 . De même, dans le cas V_4 , il y a deux possibilités qui se déduisent l'une de l'autre par permutation des indices.

Disons qu'un système d'entiers a_{ij} est un <u>système d'entiers de Cartan</u> si les conditions suivantes sont satisfaites : on a $a_{ii} = -2$, $a_{ij} \geqslant 0$ si $i \neq j$, et le groupe G engendré par les substitutions linéaires s_i définies par $s_i x_j = x_j + a_{ij} x_i$ $(1 \leqslant i , j \leqslant r)$ est fini. S'il en est ainsi, un raisonnement classique montre que G laisse invariante une forme quadratique définie positive à coefficients rationnels, donc qu'il est engendré par des symétries (dans un espace euclidien rationnel) .

Nous dirons que deux systèmes d'entiers de Cartan sont du <u>même type</u> s'ils peuvent se déduire l'un de l'autre par une permutation des indices. Le système (a_{ij}) d'entiers de Cartan est dit <u>simple</u> s'il est impossible de partager les indices $1,\ldots,r$ en deux ensembles non vides tels que $a_{ij}=0$ toutes les fois que i et j n'appartiennent pas au même de ces ensembles.

Nous avons alors les résultats suivants :

I. Si (a_{ij}) est un système d'entiers de Cartan, on peut partager l'ensemble $\{1,\ldots,r\}$ en un certain nombre de parties disjointes $E_1,\ldots,E_h$ telles que $a_{ij}=0$ si i et j appartiennent à deux différentes de ces parties et que les a_{ij} pour i et j dans E_k forment un système simple d'entiers de Cartan.

II. Un système simple d'entiers de Cartan est de l'un des types suivants (où les a_{ij} non donnés sont nuls ou égaux à -2)

A_r	$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$
B_r	$a_{12}=2$, $a_{21}=1$, $a_{i,i+1}= a_{i+1,i}=1$ si $i > 1$
C_r	$a_{12}=1$, $a_{21}=2$, $a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=1$ si $i > 1$
D_r	$a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=1$ $(1 \leqslant i \leqslant r-2)$, $a_{r-2,r}=a_{r,r-2}=1$ $(r \geqslant 3)$
G_2	$a_{12}=3$, $a_{21}=1$
F_4	$a_{12}=a_{21}=1$, $a_{23}=2$, $a_{32}=1$; $a_{34}=a_{43}=1$
E_6	$a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=1$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, $a_{36}=a_{63}=1$
E_7	$a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=1$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, $a_{37}=a_{73}=1$
E_8	$a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=1$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$, $a_{38}=a_{83}=1$.

Par ailleurs, les propriétés suivantes sont vraies de tout système d'entiers de Cartan (simple ou non) :

si i et j sont des entiers tels que $a_{ij}=0$, on a $a_{ji}=0$;

le déterminant de la matrice (a_{ij}) est $\neq 0$; en effet, utilisant les mêmes notations que plus haut, on a $a_{ij} = -b_i b_j^{-1} \langle L_i, L_j \rangle$, et notre assertion résulte du fait que le déterminant de la matrice $(\langle L_i, L_j \rangle)$ est $\neq 0$.

§ 19. APPLICATION AUX ALGÈBRES SEMI-SIMPLES.

Rappelons que $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie semi-simple sur le corps algèbriquement clos K de caractéristique 0, et $\mathfrak{h}$ une algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On désigne par $\mathfrak{h}_0^*$ l'espace des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des racines de $\mathfrak{g}$. A chaque racine $\alpha \neq 0$ est associé un hyperplan P_α^* de $\mathfrak{h}_0^*$, défini par l'équation $\langle w, \alpha \rangle = 0$; les symétries par rapport à ces hyperplans engendrent le groupe de Weyl G de $\mathfrak{g}$. Si α est une racine, désignons par L_α la fonction linéaire $w \to \langle w, \alpha \rangle$ sur $\mathfrak{h}_0^*$; on a donc $L_{-\alpha} = -L_\alpha$. Ceci dit, il résulte de ce que nous avons vu au § 18 que l'espace $\mathfrak{h}_0^*$ est divisé par les hyperplans P_α^* en un certain nombre de chambres qui sont permutées transitivement entre elles par les opérations de G . Soit C l'une de ces chambres ; si $r = \dim \mathfrak{h}$, C a exactement r murs, que nous désignons par $P_{\alpha_1}^*, \dots, P_{\alpha_r}^*$, où les α_i sont des racines linéairement indépendantes. Remplaçant au besoin certaines d'entre elles par leurs opposées, on peut supposer que les fonctions L_{α_i} $(1 \leq i \leq r)$ sont toutes positives sur C . Nous dirons alors que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ constituent un <u>système fondamental de racines de</u> $\mathfrak{g}$. Tous les systèmes fondamentaux se déduisent de l'un d'entre eux par les opérations du groupe G .

Proposition 1. <u>Soit</u> $r = \dim \mathfrak{h}$; <u>pour que</u> r <u>racines</u> $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ <u>forment un système fondamental, il faut et suffit que toute racine puisse</u>

<u>s'exprimer comme combinaison linéaire de</u> $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ <u>avec des coefficients qui sont soit tous</u> $\geqslant 0$ <u>soit tous</u> $\leqslant 0$.

1) La condition est nécessaire. Supposons que $P^*_{\alpha_1},\dots,P^*_{\alpha_r}$ forment les murs d'une chambre C et que $\langle w,\alpha_i\rangle > 0$ pour $w\in C$. Il résulte alors de la prop.1, § 18 que, pour toute racine $\alpha\neq 0$, L_α est une combinaison linéaire à coefficients soit tous $\geqslant 0$ soit tous $\leqslant 0$ de $L_{\alpha_1},\dots,L_{\alpha_r}$; et notre assertion résulte de ce que l'application $\alpha \longrightarrow L_\alpha$ est un isomorphisme.

2) La condition est suffisante. Car, si elle est satisfaite, les $w\in \mathfrak{h}_0^*$ tels que $\langle w,\alpha_i\rangle > 0$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ forment évidemment une chambre.

Nous supposerons à partir de maintenant un système fondamental $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ choisi une fois pour toutes. Soit H_{α_i} l'élément dual de α_i ; au lieu des H_{α_i} , il sera plus commode de considérer les éléments H_i qui sont les multiples scalaires des H_{α_i} normalisés par les conditions $\alpha_i(H_i)=2$ $(1\leqslant i\leqslant r)$. La symétrie s_i par rapport à l'hyperplan $P^*_{\alpha_i}$ est alors définie par

(1) $$s_i w = w - w(H_i)\alpha_i \qquad (w\in \mathfrak{h}_0^*) .$$

De plus, il résulte du th.3, § 17 que, si w est un poids d'une représentation de $\mathfrak{g}$, les $w(H_i)$ sont des entiers. Ceci s'applique en particulier aux racines ; nous poserons

(2) $$a_{ij} = -\alpha_j(H_i) .$$

On a donc

(3) $$s_i\alpha_j = \alpha_j + a_{ij}\alpha_i .$$

Les a_{ij} forment donc un système d'entiers de Cartan ; on dit que ce sont les <u>entiers de Cartan de</u> $\mathfrak{g}$ (relativement à $\mathfrak{h}$ et à $\alpha_1,\dots,\alpha_r$) .

NGR 032

Proposition 2. *Les entiers de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *relativement à un système fondamental* $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ *de racines peuvent être caractérisés comme suit : on a* $a_{ii}=-2$, *et, si* $i\neq j$, a_{ij} *est le plus grand entier* $p\geqslant 0$ *tel que* $\alpha_j+p\alpha_i$ *soit une racine.*

Il résulte immédiatement de la prop.1 que $\alpha_j-\alpha_i$ n'est pas une racine si $i\neq j$; la prop.2 résulte donc du th.3, § 17 .

Toute racine $\alpha\neq 0$ est transformée par le groupe de Weyl d'une des racines α_i $(1\leqslant i\leqslant r)$. En effet, nous avons vu au §18 que P^*_α est mur d'au moins une chambre, donc qu'il existe un $s\in G$ qui transforme P^*_α en l'un des $P^*_{\alpha_i}$. Comme α_i et $-\alpha_i$ sont les seules racines $\neq 0$ qui soient linéairement dépendantes de α_i , $s\alpha$ est soit α_i soit $-\alpha_i$; si $s\alpha=-\alpha_i$, $s_i s\alpha=\alpha_i$. Or il résulte des formules écrites plus haut que s conserve le groupe additif engendré par $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$. On en déduit la

Proposition 3 . *Toute racine est une combinaison linéaire à coefficients entiers de* $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$.

Pour chacune des racines α_i $(1\leqslant i\leqslant r)$, on peut trouver des éléments X_i,Y_i de $\mathfrak{g}$ appartenant respectivement aux racines α_i et $-\alpha_i$ tels que $[X_i,Y_i]=H_i$. On a $\alpha_j(H_i)=-a_{ij}$; de plus, $\alpha_j-\alpha_i$ n'étant pas une racine si $i\neq j$, X_j commute avec Y_i . On a donc les formules suivantes :

$$(4)\quad\begin{cases} [H_i,X_j]=-a_{ij}X_j \quad [H_i,Y_j]=a_{ij}Y_j \quad [H_i,H_j]=0 \quad [X_i,Y_i]=H_i \quad (1\leqslant i,\ j\leqslant r) \\ \qquad [X_i,Y_j]=0 \quad \text{si} \quad i\neq j\ . \end{cases}$$

Montrons que les éléments H_i,X_i,Y_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ engendrent $\mathfrak{g}$. Soit α une racine $\neq 0$; posons $\alpha=\sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i$. Si les c_i sont tous $\geqslant 0$, les $\langle\alpha\ ,\ \alpha_i\rangle$ ne peuvent être tous $\leqslant 0$ (prop.1, § 18) ; il y a donc dans ce cas un i $(1\leqslant i\leqslant r)$ tel que $\langle\alpha,\ \alpha_i\rangle>0$; il en résulte en vertu du th.3, § 17 que $\alpha-\alpha_i$ est une racine. Si $\alpha-\alpha_i\neq 0$, soit X' un élément $\neq 0$ appartenant à $\alpha-\alpha_i$; on a alors $[X_i,X']\neq 0$

(cor.1 à la prop.3, § 17), et $[X_i, X']$ appartient à α. On voit de même que, si les c_i sont tous $\leqslant 0$, il y a un i tel que $\alpha+\alpha_i$ soit une racine β'. Si $\beta' \neq 0$, il y a un élément $\neq 0$ appartenant à α qui est de la forme $[Y_i, Y']$, où Y' appartient à β'. Procédant alors par récurrence sur $\sum_{i=1}^{r} |c_i|$, et se souvenant que toute racine $\neq 0$ est de multiplicité 1, on voit que pour toute racine $\alpha \neq 0$, les éléments appartenant à α appartiennent à l'algèbre engendrée par les H_i, X_i, Y_i, ce qui démontre notre assertion. On dit que les éléments H_i, X_i, Y_i forment un <u>système canonique de générateurs de</u> $\mathfrak{g}$.

Supposons réciproquement qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit engendrée par $3r$ éléments H_i, X_i, Y_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ liés par les relations (4) ci-dessus, les a_{ij} formant un système d'entiers de Cartan. Soit E l'ensemble des i tels que $H_i \neq 0$; si $i \in E$, on a $X_i \neq 0$, $Y_i \neq 0$ (car $[X_i, Y_i] = H_i$) ; si $j \notin E$, on a $X_j = Y_j = 0$, car $2X_j = [H_j, X_j]$, $2Y_j = -[H_j, Y_j]$. Si $i \in E$, $j \notin E$, on a $[H_j, X_i] = -a_{ji} X_i$, d'où $a_{ji} = 0$; on sait qu'il en résulte que $a_{ij} = 0$ (cf. fin du § 18). L'algèbre $\mathfrak{g}$ est donc engendrée par les H_i, X_i, Y_i pour $i \in E$, et les a_{ij} pour $i \in E$, $j \in E$ forment un système d'entiers de Cartan. Soit $\mathfrak{h}$ le sous-espace engendré par $H_1, \ldots, H_r$; c'est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$. Appelons "purs" les éléments X de $\mathfrak{g}$ tels que $[H, X] = \alpha(H)X$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$, α étant une fonction linéaire sur $\mathfrak{h}$; nous dirons que X appartient à α. Si X et Y sont des éléments purs qui appartiennent aux fonctions α et β, $[X, Y]$ est pur et appartient à $\alpha+\beta$. Il en résulte que l'espace engendré par les éléments purs est une sous-algèbre $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$. Or X_i et Y_i sont purs et appartiennent à des fonctions α_i et $-\alpha_i$ telles que $\alpha_i(H_j) = -a_{ji}$;

on en conclut que $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{x}$ l'algèbre engendrée par les X_i, et $\mathfrak{y}$ l'algèbre engendrée par les Y_i. Il est clair que $\mathfrak{y}+\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On voit tout de suite que l'ensemble $\mathfrak{y}_1$ des $Y \in \mathfrak{y}$ tels que $[X_i, Y] \in \mathfrak{y}+\mathfrak{h}$ pour tout i est une sous-algèbre de $\mathfrak{y}$; or $\mathfrak{y}_1$ contient les Y_j, puisque $[X_i, Y_j] = \delta_{ij} H_i$. On a donc $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}$. On verrait de même que $[Y_i, \mathfrak{x}] \subset \mathfrak{h}+\mathfrak{x}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Il en résulte immédiatement que $\mathfrak{y}+\mathfrak{h}+\mathfrak{x}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, donc que $\mathfrak{y}+\mathfrak{h}+\mathfrak{x} = \mathfrak{g}$. Supposons pour fixer les idées que $E = \{1, \ldots, h\}$, où h est un entier $\leqslant r$. Les a_{ij}, pour $i, j \leqslant h$, formant un système d'entiers de Cartan, on a $\det (a_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant h} \neq 0$, ce qui montre que $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ sont linéairement indépendants.
Or $\mathfrak{x}$ (resp. $\mathfrak{y}$) est engendré en tant qu'espace vectoriel par des éléments purs qui appartiennent à des combinaisons linéaires à coefficients entiers tous $\geqslant 0$ (resp.: tous $\leqslant 0$) et non tous nuls de $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$; il en résulte tout de suite que les seuls éléments de $\mathfrak{g}$ qui commutent avec tous ceux de $\mathfrak{h}$ sont ceux de $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{h}$ est sous-algèbre abélienne maxima de $\mathfrak{g}$. De plus, puisque $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ sont linéairement indépendantes, aucun élément $\neq 0$ de $\mathfrak{h}$ n'est dans le centre de $\mathfrak{g}$; ce dernier se réduit donc à $\{0\}$. On voit que, <u>si on sait par ailleurs que</u> $\mathfrak{g}$ <u>est réductive en elle-même</u>, on peut en conclure que $\mathfrak{g}$ est semi-simple, que $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, que $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ forment un système fondamental de racines de $\mathfrak{g}$ et que les entiers de Cartan correspondants sont les a_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant h$. Mais je ne sais pas si les conditions imposées entraînent d'elles-mêmes que $\mathfrak{g}$ soit semi-simple. Au concours !

NBR/032

Revenons au cas d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$ admettant les entiers de Cartan a_{ij} relativement à un système fondamental de racines $\alpha_1,\dots,\alpha_r$. On définit un ordre partiel dans $\mathfrak{h}_0^*$ en appelant <u>positifs</u> les éléments qui sont des combinaisons des α_i à coefficients $\geqslant 0$. Toute racine est donc soit $\geqslant 0$ soit $\leqslant 0$. Si ρ est une représentation de $\mathfrak{g}$, on appelle <u>poids dominant de</u> ρ tout élément maximal de l'ensemble des poids de ρ dans l'ordre défini plus haut sur $\mathfrak{h}_0^*$.

Proposition 4. <u>Si</u> w <u>est un poids dominant d'une représentation de</u> $\mathfrak{g}$, <u>les nombres</u> $w(H_i)$ <u>sont des entiers</u> $\geqslant 0$.

Nous savons déjà que ces nombres sont entiers. De plus, les $s_i w = w - w(H_i)\alpha_i$ sont des poids de ρ (th.4, § 17) ; puisque w est dominant, on a $w(H_i) \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Soit maintenant ρ une représentation simple de $\mathfrak{g}$, et soit w_0 un poids dominant de ρ. Soient V l'espace de représentation de ρ et x_0 un vecteur $\neq 0$ de poids w_0 dans V. Soit V' l'espace engendré par x_0 et par les éléments $\rho(Y_{i_1})\dots\rho(Y_{i_m})x_0$ (où $1 \leqslant i_1,\dots,i_m \leqslant r$). Montrons que V' est stable par rapport à la représentation ρ. Il est clair que $\rho(Y_{i_1})\dots\rho(Y_{i_m})x_0$, s'il est $\neq 0$, appartient au poids $w_0-(\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_m})$. Il en résulte que V' est appliqué dans lui-même par les $\rho(H_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Il suffira donc de montrer que V' est appliqué dans lui-même par les $\rho(X_i)$. Puisque w_0 est dominant, $w_0+\alpha_i$ n'est pas un poids de ρ, d'où $\rho(X_i)x_0 = 0$. On a donc

$$\rho(X_i)\,\rho(Y_{i_1})\dots\rho(Y_{i_m})x_0 = [\rho(X_i),\rho(Y_{i_1})\dots\rho(Y_{i_m})]\,x_0 .$$

Or on a $[\rho(X_i),\rho(Y_{i_k})] = \delta_{i i_k}\,\rho(H_i)$ et $[\rho(X_i),\rho(Y_{i_1})\dots\rho(Y_{i_m})]$ est la somme des m produits déduits de $\rho(Y_{i_1})\dots\rho(Y_{i_m})$ en remplaçant l'un des facteurs par le crochet de $\rho(X_i)$ avec ce facteur. Il en résult que $\rho(X_i)$ applique V' dans lui-même. Puisque ρ est simple, on a $V'=V$. On obtient donc les résultats suivants :

Proposition 5. Soit ρ une représentation simple de $\mathfrak{g}$, et soit w_0 un poids dominant de ρ. Ce poids est alors de multiplicité 1 et tout autre poids de ρ est de la forme $w_0 - \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_i$, les c_i étant des entiers tous $\geqslant 0$.

§ 20. THÉORÈMES D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ.

Notre objet sera de démontrer les théorèmes suivants.

Théorème 5. Soit $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ un système d'entiers de Cartan, et soit K un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Il existe alors une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ sur K telle que les a_{ij} forment un système d'entiers de Cartan de $\mathfrak{g}$, et toutes les algèbres satisfaisant à ces conditions sont isomorphes.

Le théorème d'isomorphie sera en fait démontré sous la forme plus forte suivante : soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ des algèbres de Lie semi-simples qui admettent les entiers de Cartan a_{ij}, et soient $\{H_i, X_i, Y_i\}$ et $\{H'_i, X'_i, Y'_i\}$ des systèmes de générateurs canoniques de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{g}'$ liés par les formules (4) du § 19 ; il existe alors un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$ qui applique X_i sur X'_i, Y_i sur Y'_i et H_i sur H'_i. Appliquant ceci au cas où $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, $H'_i = -H_i$, $X'_i = Y_i$, $Y'_i = X_i$, on trouve qu'il y a un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui applique H_i sur $-H_i$, X_i sur Y_i et Y_i sur X_i ; ce résultat est important, car c'est en s'en servant qu'on démontre l'existence d'une forme compacte pour les groupes semi-simples complexes.

Théorème 6. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, et soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ un système fondamental de racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à une algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. Soit w_0 une fonction linéaire sur $\mathfrak{h}$

<u>telle que les nombres</u> $2\varpi_0(H_{\alpha_i})(\alpha_i(H_{\alpha_i}))^{-1}$ <u>soient des entiers tous</u> $\geqslant 0$. <u>Il existe alors une représentation simple de</u> $\mathfrak{g}$ <u>admettant</u> ϖ_0 <u>comme poids dominant, et toutes les représentations satisfaisant à ces conditions sont équivalentes</u>.

Soient donnés un système $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ d'entiers de Cartan et r entiers m_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ tous $\geqslant 0$. Si K est un corps donné de caractéristique 0, qui peut être par exemple le corps des rationnels, nous construisons un espace vectoriel de dimension r sur K , une base $\{Z_1,\dots,Z_r\}$ de cet espace et l'algèbre tensorielle T sur cet espace. On démontre facilement le lemme suivant : étant donnés r opérateurs linéaires Φ_j $(1\leqslant j\leqslant r)$ sur l'espace vectoriel sous-jacent de T et un élément t de T , il existe un opérateur linéaire θ et un seul sur T tel que $\theta(Z_j z)=Z_j\theta(z)+\Phi_j(z)$ $(1\leqslant j\leqslant r)$ pour tout $z\in Z$ et $\theta(1)=t$ (procédant par récurrence sur m , on construit $\theta(z)$ quand $z=Z_{i_1}\dots Z_{i_m}$). Nous désignerons par Q_i l'opérateur de multiplication à gauche par Z_i dans T ; les conditions imposées à θ peuvent alors s'écrire $[\theta,Q_j]=\Phi_j$, $\theta(1)=t$. On construit d'abord des opérateurs D_i tels que $[D_i,Q_j]=a_{ij}Q_j$ $(1\leqslant i,\ j\leqslant r)$, $D_i(1)=m_i$. Montrons que ces opérateurs commutent entre eux. On a

$$[[D_i,D_j],Q_k]=a_{ik}[Q_k,D_j]+a_{jk}[D_i,Q_j]=0$$

et $[D_i,D_j](1)=0$; il en résulte que $[D_i,D_j]=0$. On construit ensuite des opérateurs linéaires P_i tels que $[P_i,Q_j]=\delta_{ij}D_i$, $P_i(1)=0$. On a

$$[[P_i,D_j],Q_k]=\delta_{ik}[D_i,D_j]+a_{jk}[P_i,Q_k]=\delta_{ik}a_{jk}D_i$$

d'où $[[P_i,D_j]-a_{ji}P_i,Q_k]=0$; de plus, $[P_i,D_j]-a_{ji}P_i$ applique 1 sur 0 . On a donc $[P_i,D_j]=a_{ji}P_i$, ou $[D_i,P_j]=-a_{ij}P_j$. On voit donc que les D_i,P_i,Q_i sont liés par les mêmes formules ((4) du § 19) que les éléments d'un système de générateurs canonique d'une algèbre de Lie ayant les a_{ij} comme système d'entiers de Carter .

NBR 032 71

Nous désignerons par A l'algèbre associative d'endomorphismes de T engendrée par l'identité I et par les D_i, P_i, Q_i ; soit $\mathfrak{d}$ l'espace vectoriel engendré par $D_1, \dots, D_r$. Soit w une fonction linéaire sur $\mathfrak{d}$ telle que les $w(D_i)$ soient des entiers ; nous dirons qu'un $z \in T$ est <u>isobare de poids</u> w si $Dz = w(D)z$ pour tout $D \in \mathfrak{d}$. L'élément 1 est donc isobare de poids w_o , où $w_o(D_i) = m_i$. Soit W l'ensemble des fonctions linéaires sur $\mathfrak{d}$ qui prennent des valeurs entières en les D_i ; nous dirons qu'un opérateur linéaire M sur T est <u>homogène de degré</u> α s'il transforme tout élément isobare de poids w en un élément isabare de poids $w+\alpha$. Il résulte des formules $[D_i, Q_j] = a_{ij}Q_j$ que Q_j est isobare de poids $-\alpha_j$, où $\alpha_j(D_i) = -a_{ij}$; puisque $[D_i, P_j] = -a_{ij}P_j$, P_j est isobare de poids $-\alpha_j$. Puisque les a_{ij} sont des entiers de Cartan, det $(a_{ij}) \neq 0$; d'autre part, $Q_1, \dots, Q_r$ sont évidemment linéairement indépendants. Il résulte donc des formules $[D_i, Q_j] = a_{ij}Q_j$ que $D_1, \dots, D_r$ sont linéairement indépendants ; de plus, les fonctions $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont linéairement indépendantes. Nous définirons une structure de groupe ordonné sur W en appelant positifs les éléments de W qui sont des combinaisons de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ à coefficients rationnels $\geqslant 0$. Puisque w_o est isobare de poids w_o et Q_j homogène de degré $-\alpha_j$, on voit tout de suite que T est engendré (en tant qu'espace vectoriel) par ses éléments isobares, et que ces derniers sont tous de poids $\leqslant w_o$; les seuls éléments isobares de poids w_o sont les scalaires. Soit T_w l'espace des éléments isobares de poids w ; on voit tout de suite que T est la somme <u>directe</u> des espaces T_w . On peut donc décomposer uniquement tout élément de T en ses composantes isobares. Un raisonnement classique montre que tout sous-espace de T engendré par des éléments isobares est isobare (i.e. les composantes isobares des éléments de l'espace sont encore dans l'espace). <u>Nous désignerons par $\underline{T}$ l'ensemble des</u> $z \in T$ <u>qui possèdent la propriété suivante</u> : <u>pour tout</u> $M \in A$, <u>les composantes isobares</u> $\neq 0$ <u>de</u> Mz <u>sont toutes de poids</u> $< w_0$ (<u>strictement</u>) . Il est clair que $\underline{T}$ est un sous-espace de T qui est appliqué dans lui-même par les opérateurs de A (nous dirons A-stable) et qui ne contient pas 1 . De plus, tout élément de A étant somme d'éléments homogènes, $\underline{T}$ est isobare, et il est clair que tout sous-espace A-stable isobare de T qui n'est pas dans $\underline{T}$ contient 1 , donc est identique à T . D'ailleurs, on voit facilement que, si $z \in T$, les composantes isobares de z sont contenues dans l'espace engendré par les $D_i^k z$ $(0 \leqslant k < \infty)$, ce qui montre que tout sous-espace A-stable de T est isobare ; $\underline{T}$ est donc le plus grand sous-espace A-stable $\neq T$ de T . Nous poserons $V = T/\underline{T}$; V est donc l'espace d'une représentation simple ρ de A . Nous poserons

$$\boxed{H_i = \rho(D_i),\ X_i = \rho(P_i),\ Y_i = \rho(Q_i)} \ .$$

La partie essentielle de la démonstration consiste à établir que V est de dimension finie.

Lemme 1. <u>L'espace $\underline{T}$ contient les éléments</u> $Z_i^{m_i+1}$.

Montrons d'abord que $P_k Z_i^{m_i+1} = 0$ $(1 \leqslant i,\ k \leqslant r)$. Si $k \neq i$, P_k commute avec Q_i , d'où $P_k Z_i^{m_i+1} = P_k(Q_i^{m_i+1}(1)) = Q_i^{m_i+1}(P_k(1)) = 0$. Par ailleurs, on a $[D_i, P_i] = 2P_i$, $[D_i, Q_i] = -2Q_i$ et $[P_i, Q_i] = D_i$. Il résulte donc des formules (3), § 16 que $[P_i, Q_i^{m_i+1}] = (m_i+1)Q_i^{m_i}(D_i - m_i)$; puisque $D_i(1) = m_i$, on voit que $[P_i, Q_i^{m_i+1}]$ applique 1 sur 0 ; il en est de même de $Q_i^{m_i+1} P_i$ (car $P_i(1) = 0$), donc de $P_i Q_i^{m_i+1}$, d'où $P_i(Z_i^{m_i+1}) = 0$. Si $z \in T$, soit M_z l'opérateur de multiplication à gauche par z ; les $[P_i, M_z]$ appartiennent alors à l'algèbre $\underline{Q}$ engendrée par les D_i et les Q_i . Il en est en effet ainsi si z est 1 ou l'un des Z_j ; et, et, si $z' = Z_j z$, on a $[P_i, M_{z'}] = [P_i, Q_j] M_z + Q_j [P_i, M_z] = \delta_{ij} D_i M_z + Q_j [P_i, M_z]$, d'où il résulte immédiatement que notre assertion est vraie pour tout $z \in T$.

Soit $\underline{Z}$ l'idéal à gauche engendré par les $Z_i^{m_i+1}$; il est clair que $\underline{Z}$ est isobare et que les poids des éléments isobares $\neq 0$ de $\underline{Z}$ sont tous $< w_0$ (car $Z_i^{m_i+1}$ est de poids $w_0 - (m_i+1)\alpha_i < w_0$). Puisque $\underline{Z}$ est un idéal à gauche isobare, il est appliqué dans lui-même par les Q_i et les D_i, donc par les éléments de $\underline{Q}$; si $z \in T$, $P_k(zZ_i^{m_i+1}) = [P_k, M_z](Z_i^{m_i+1}) \in \underline{Z}$; $\underline{Z}$ est donc A-stable, d'où $\underline{Z} \subset \underline{T}$.

Lemme 2. <u>Soit</u> ψ_i <u>la dérivation</u> $M \to [Q_i, M]$ <u>de</u> A ; <u>posons, si</u> $i \neq j$, $R_{ij} = \psi_i^{a_{ij}+1} Q_j$; <u>les</u> R_{ij} <u>commutent alors avec tous les</u> P_k.

Si $k \neq i, j$, P_k commute avec Q_i et Q_j, donc avec R_{ij}. Pour traiter le cas $k=i$, désignons par Φ_i et Δ_i les dérivations $M \to [P_i, M]$ et $M \to [D_i, M]$ de A. On a donc $[\Delta_i, \Phi_i] = 2\Phi_i$, $[\Delta_i, \psi_i] = -2\psi_i$ et $[\Phi_i, \psi_i] = \Delta_i$. On a

$$[P_i, R_{ij}] = \Phi_i(\psi_i^{a_{ij}+1} Q_j) = \psi_i^{a_{ij}+1}(\Phi_i Q_j) + [\Phi_i, \psi_i^{a_{ij}+1}] Q_j .$$

Le premier terme est nul parce que $[P_i, Q_j] = 0$ (car $i \neq j$). Il résulte des formules (3), § 16 que $[\Phi_i, \psi_i^{a_{ij}+1}] = (a_{ij}+1)\psi_i^{a_{ij}}(D_i - a_{ij})$, et le second terme est nul parce que $D_i(Y_j) = a_{ij} Y_j$. Considérons enfin le cas où $k=j$; Φ_j commute alors avec ψ_i (car $i \neq j$) et

$$[P_j, R_{ij}] = \psi_i^{a_{ij}+1} \Phi_j Y_j = \psi_i^{a_{ij}+1} H_j .$$

Or $\psi_i H_j = -a_{ji} Y_i$, $\psi_i^2 H_j = 0$; de plus, on sait que, si $a_{ij} = 0$ on a aussi $a_{ji} = 0$ (cf. fin du § 18) ; on a donc $[P_j, R_{ij}] = 0$.

Lemme 3. <u>Posons</u> $S_{ij} = R_{ij}(1)$; <u>l'idéal bilatère engendré par les</u> S_{ij} <u>dans</u> T <u>est alors contenu dans</u> $\underline{T}$.

NBR 032

Soit $\underline{S}$ cet idéal. Utilisant les notations de la démonstration du lemme 1, il est clair que $\underline{S}$ est appliqué dans lui-même par les opérations de $\underline{Q}$. Soient z, z' des éléments de T ; on a $P_k(zS_{ij}z') = [P_k, M_z](S_{ij}z') + zP_k(S_{ij}z') = [P_k, M_z](S_{ij}z') + zS_{ij}P_k(z')$ puisque P_k commute avec R_{ij} ; on a donc $P_k(\underline{S}) \subset \underline{S}$, ce qui montre que $\underline{S}$ est A-stable. Or il est clair que les poids des éléments isobares de $\underline{S}$ sont tous $< w_0$ (car les poids des S_{ij} sont $< w_0$) ; on a donc $\underline{S} \subset \underline{T}$.

Un opérateur M d'un espace vectoriel est dit <u>localement nilpotent</u> si, pour tout vecteur x, il y a un k tel que $M^k x = 0$.

Lemme 4. <u>Les opérateurs</u> X_i, Y_i <u>sont localement nilpotents</u>.

Soit z un élément isobare de poids w de T ; il existe alors un $k > 0$ tel que $w + k\alpha_i$ ne soit pas $\leq w_0$; puisque $P_i^k x$ est isobare de poids $w + k\alpha_i$, ce vecteur est nul, ce qui montre que P_i, et par suite aussi X_i, est localement nilpotent. Soit $\underline{Q}_0$ l'algèbre engendrée par I et par les Q_i ; l'application $Q \to Q(1)$ est donc un isomorphisme de $\underline{Q}_0$ sur T. Cet isomorphisme fait correspondre à la dérivation Ψ_i de $\underline{Q}_0$ ($Q \to [Q_i, Q]$) la dérivation $R_i : z \to [z_i, z]$ de T. Montrons que, pour tout $z \in T$, il y a une puissance de R_i qui applique z dans l'idéal bilatère $\underline{S}$ engendré par les S_{ij}. C'est vrai pour $z=1$. Supposons que ce soit vrai pour z ; on a $R_i^k(Z_j z) = \sum_{a+b=k} \binom{k}{a} (R_i^a Z_j)(R_i^b z)$; or $R_i^{a_{ij}+1} Z_j = S_{ij}$, d'où $R_i^a Z_j \in \underline{S}$ si $a \geq a_{ij}+1$ (si on avait $j=i$, $R_i^a Z_i$ serait nul pour $a > 0$) ; si donc $R_i^b z \in \underline{S}$ pour $b \geq k'$, on a $R_i^k(Z_j z) \in \underline{S}$ pour $k \geq k' + a_{ij} + 1$. Il en résulte immédiatement que notre assertion est vraie pour tout z. Or on a $Q_i = R_i + Q_i'$ où Q_i' est l'opérateur de mutliplication à droite par Z_i et commute avec R_i ;

il est clair que $Q_i'^{m_i+1}$ applique T dans l'idéal à gauche engendré par les $Z_i^{m_i+1}$, donc dans $\underline{T}$. On voit donc que, pour tout $z \in T$, il y a une puissance de Q_i qui applique z dans $\underline{T}$, ce qui montre que Y_i est localement nilpotent.

L'espace $\underline{T}$ étant isobare, on a une notation d'élément isobare dans $V=T/\underline{T}$; si $w \in W$, les éléments isobares de poids w de V sont les éléments de $V_w=(T_w+\underline{T})/\underline{T}$; V est somme directe des V_w et $V_w = \{0\}$ si w n'est pas $\leqslant w_0$.

Introduisons maintenant le groupe G de transformations de W en lui-même engendré par les opérations s_i définies par $s_i\alpha_j = \alpha_j+a_{ij}\alpha_i$ $(1\leqslant i, j\leqslant r)$ d'où $s_i w = w-w(D_i)\alpha_i$ pour tout $w \in W$. Nous allons montrer que G permute entre eux les poids des éléments isobares $\neq 0$ de V. Il suffira de montrer que, si w est le poids d'un élément isobare $x\neq 0$ de V, $s_i w$ est aussi le poids d'un élément isobare $\neq 0$ de V. Supposons d'abord que $w(D_i) \geqslant 0$. Soit alors p le plus grand entier tel que $x'=X_i^p x\neq 0$, et soit $x'_k=Y_i^k x'$ $(k=0,1,\dots)$. On a $[H_i,X_i]=2X_i$, etc..; il résulte donc des formules du § 16 et du fait que $X_i x'=0$ que $X_i x'_{k+1}=(k+1)Y_i^k(H_i-k)x'$. Or x' est isobare de poids $w+p\alpha_i$, d'où $(H_i-k)x'=(w(D_i)+2p-k)x'$, et $X_i x'_{k+1}=(w(D_i)+2p-k)(k+1)x'_k$. Il résulte de là que x'_k est $\neq 0$ pour $0\leqslant k\leqslant 2p+w(D_i)$, en particulier pour $k=p+w(D_i)$. Or, pour cette valeur de k, x'_k est isobare de poids $w-w(D_i)\alpha_i = s_i w$. Si $w(D_i) \leqslant 0$, on procède de manière analogue en partant du plus grand $q \geqslant 0$ tel que $Y_i^q x = x'\neq 0$ et en considérant les $x''_k = X_i^k x''$.

Nous allons maintenant utiliser le fait que les a_{ij} forment un système d'entiers de Cartan. Il en résulte que le groupe G est fini et que, pour tout $w \in W$, il y a un $s \in G$ tel que $(sw)(D_i) \geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant r)$, ce qui entraîne que sw est positif (cf. prop.1, § 18).

Or posons $w_0 = \sum_{i=1}^{r} p_i \alpha_i$; les poids des éléments isobares de T (donc aussi de V) sont de la forme $w_0 - \sum_{i=1}^{r} c_i \alpha_i$, les c_i étant des entiers positifs ; si un tel poids est positif , on a $c_i \leqslant p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, ce qui ne laisse qu'un nombre fini de possibilités. Par ailleurs, si $w' = w_0 - \sum_{i=1}^{r} c_i \alpha_i$, les éléments isobares de poids w' sont les combinaisons linéaires des $Z_{i_1} \dots Z_{i_h}$ tels que $\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_h} = \sum_1^r c_i \alpha_i$, ce qui montre que $T_{w'}$, donc aussi $V_{w'}$, est de dimension finie. Le groupe G étant fini, on voit qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de W qui soient des poids d'éléments $\neq 0$ de V , et que les espaces V_w sont finis. On en conclut que l'espace V est de dimension finie.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'endomorphismes de V engendrée par les H_i, X_i, Y_i ; l'application identique de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des endomorphismes de V est donc une représentation, évidemment simple, de $\mathfrak{g}$. On en conclut que $\mathfrak{g}$ est réductive en elle-même, et par suite, en vertu de ce qui a été vu au § 19, que $\mathfrak{g}$ est semi-simple et admet pour entiers de Cartan les entiers a_{ij} pour i , $j \in E$, où E est l'ensemble des indices i tels que $H_i \neq 0$. Nous désignerons désormais par $\mathfrak{g}(a_{ij}; m_i)$ l'algèbre de Lie que nous venons de construire.

Si nous prenons les m_i tous > 0, les H_i sont tous $\neq 0$. En effet, si on désigne par x_0 la classe de 1 modulo $\underline{T}$, on a $H_i x_0 = m_i x_0$. <u>Nous avons donc démontré l'existence d'une algèbre de Lie semi-simple admettant les entiers de Cartan</u> a_{ij} .

Soit maintenant $\tilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie semi-simple admettant les entiers de Cartan a_{ij} , et soit $\{ \tilde{H}_i, \tilde{X}_i, \tilde{Y}_i \}$ un système de générateurs canonique de $\tilde{\mathfrak{g}}$ relatif aux entiers a_{ij} . Soit de plus $\tilde{\rho}$ une représentation simple de $\mathfrak{g}$, et $\tilde{w}_0$ un poids dominant de $\tilde{\rho}$.

NBK 032

Soit $\tilde{V}$ l'espace de la représentation $\tilde{\rho}$; posons $\tilde{D}_i=\tilde{\rho}(\tilde{H}_i)$, $\tilde{P}_i=\tilde{\rho}(\tilde{X}_i)$, $\tilde{Q}_i=\tilde{\rho}(\tilde{Y}_i)$, et soit $\tilde{x}_o$ un vecteur $\neq 0$ de poids $\tilde{w}_o$. Nous avons vu que $\tilde{V}$ est engendré par les vecteurs $\tilde{Q}_{i_1}\dots\tilde{Q}_{i_m}\tilde{x}_o$; il y a donc un homomorphisme φ de T sur V qui applique 1 sur x_o et qui est tel que $\varphi(Q_i z)=\tilde{Q}_i\varphi(z)$ pour tout $z\in T$. Posons $m_i=\tilde{w}_o(H_i)$, et appliquons les constructions précédentes. Montrons que $\varphi(D_i z)=\tilde{D}_i\varphi(z)$ pour tout $z\in T$. C'est vrai pour $z=1$; et on voit tout de suite que, si c'est vrai pour z , c'est vrai pour $Z_j z$ (en vertu des formules $[D_i,Q_j] = a_{ij}Q_j$, $[\tilde{D}_i,\tilde{Q}_j] = a_{ij}\tilde{Q}_j$). On voit de même que $\varphi(P_i z)=\tilde{P}_i\varphi(z)$ pour tout $z\in T$. Le noyau de φ est donc A-stable, donc contenu dans $\underline{T}$. Puisque V est espace de représentation simple de $\mathfrak{g}$, on voit tout de suite que le noyau est $\underline{T}$, donc qu'il y a un isomorphisme de V avec $\tilde{V}$ qui fait se correspondre H_i et $\tilde{H}_i$, X_i et $\tilde{X}_i$, Y_i et $\tilde{Y}_i$. Il en résulte en particulier que <u>deux représentations simples de $\tilde{\mathfrak{g}}$ de même poids dominant sont équivalentes</u>.

Supposons maintenant que les entiers a_{ij} forment un système de Cartan simple. Alors, si les m_i ne sont pas tous nuls, l'ensemble désigné plus haut par E n'est pas vide, donc est l'ensemble de tous les indices de 1 à r . Or la dimension d'une algèbre semi-simple peut se calculer dès qu'on connaît un système d'entiers de Cartan ; en effet, si α est une racine $\neq 0$, le nombre N des racines $\neq 0$ est l'indice dans le groupe de Weyl du sous-groupe des opérations qui conservent α , et la dimension de $\tilde{\mathfrak{g}}$ est $N+r$. On en déduit que, si les (a_{ij}) forment un système simple et si ρ est une représentation $\neq 0$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\tilde{\rho}(\tilde{\mathfrak{g}})$ a la même dimension que $\tilde{\mathfrak{g}}$ donc que $\tilde{\rho}$ est fidèle. Or une algèbre de Lie semi-simple non simple a des représentations simples non fidèles ;

on voit donc que, si le système (a_{ij}) est simple, $\tilde{\mathfrak{g}}$ est simple (un fait qu'il est d'ailleurs facile d'établir directement) et que deux algèbres simples admettant le même système d'entiers de Cartan sont isomorphes ; d'une manière plus précise, étant donnés des systèmes de générateurs canoniques de ces algèbres, il y a un isomorphisme de l'une sur l'autre qui fait se correspondre ces générateurs canoniques.

Si les a_{ij} ne forment pas un système simple, on peut décomposer $\{1,\ldots,r\}$ en parties disjointes E_k $(1 \leqslant k \leqslant h)$ telles que $a_{ij}=0$ si $i \in E_k$, $j \in E_{k'}$, $k \neq k'$ et que, pour chaque k, les a_{ij} pour i,j dans E_k forment un système simple. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ l'algèbre engendrée par les H_i, X_i, Y_i pour $i \in E_k$. Si i,j appartiennent à des ensembles E_k distincts, il résulte de $a_{ij}=0$ que $\alpha_i+\alpha_j$ n'est pas une racine (α_i étant la racine de $\tilde{\mathfrak{g}}$ à laquelle appartient X_i ; cf.prop.2, § 19) ; on a donc $[X_i,X_j] = [Y_i,Y_j] = 0$. On en conclut que les éléments de $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ commutent avec ceux de $\tilde{\mathfrak{g}}_{k'}$, si $k' \neq k$, donc que $\sum_{k=1}^{h} \tilde{\mathfrak{g}}_k$ est une sous-algèbre de $\tilde{\mathfrak{g}}$, et par suite que $\sum_{k=1}^{h} \tilde{\mathfrak{g}}_k = \tilde{\mathfrak{g}}$ et que les $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ sont des idéaux de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Les $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ sont donc semi-simples, et il est clair que les a_{ij}, $i,j \in E_k$ forment un système d'entiers de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}_k$. Les $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ sont donc simples. Il résulte tout de suite de là et de ce qu'on a démontré plus haut que deux algèbres semi-simples qui ont les mêmes entiers de Cartan sont isomorphes (avec correspondance de systèmes de générateurs canoniques).

Enfin, quels que soient les m_i, l'algèbre $\mathfrak{g}(a_{ij};m_i)$ admet un système d'entiers de Cartan composé des a_{ij} pour i,j dans E ; or E est évidemment la réunion de certains des E_k, ce qui prouve que $\mathfrak{g}(a_{ij};m_i)$ est une image homomorphe de $\tilde{\mathfrak{g}}$. On en conclut tout de suite que, si $\tilde{w}_o$ est une fonction linéaire sur l'espace $\mathfrak{h}$ engendré par les $\tilde{H}_i$ telle que les $\tilde{w}_0(\tilde{H}_i)$ soient des entiers $\geqslant 0$, il existe une représentation simple de $\mathfrak{g}$ de poids dominant $\tilde{w}_0$. Les théorèmes 5 et 6 sont donc complètement démontrés. On notera de plus que, si les $\tilde{w}_0(\tilde{H}_i)$ sont tous > 0, $\tilde{\rho}$ est fidèle ; on voit donc que toute algèbre de Lie semi-simple admet une représentation simple fidèle (noter la différence avec le cas des algèbres associatives !).

On remarquera aussi que l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}(a_{ij};m_i)$ possède une base dont les constantes de structure sont rationnelles (elle peut se déduire par extension du corps de base d'une algèbre de Lie sur le corps des rationnels) ; on voit donc que <u>toute algèbre semi-simple sur un corps algèbriquement clos possède une base dont les constantes de structure sont rationnelles</u>.

§ 21. REMARQUES DIVERSES.

n°1. CERTAINES SOUS-ALGEBRES.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur le corps algèbriquement clos K de caractéristique 0. Désignons par $\mathfrak{h}$ une algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et par R l'ensemble des racines $\neq 0$ de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$. Pour chaque $\alpha \in R$, soit X_α un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{g}$ appartenant à α. Soit S une partie de R qui possède les propriétés suivantes : si $\alpha \in S$, on a $-\alpha \in S$; si α et β sont dans S et si $\alpha+\beta \in R$ on a $\alpha+\beta \in S$. Soit $\mathfrak{g}_1$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les X_α, pour $\alpha \in S$. Si nous désignons par $\mathfrak{h}_1$ le sous-espace de $\mathfrak{h}$ engendré par les H_α, pour $\alpha \in S$ (où H_α est l'élément dual de α), il est clair que les éléments de $\mathfrak{g}_1$ sont les sommes d'éléments de $\mathfrak{h}_1$ et de combinaisons linéaires des X_α pour $\alpha \in S$. L'algèbre $\mathfrak{g}_1$ est semi-simple. Pour le montrer, il suffit de faire voir que la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}_1$ est non dégénérée. Or, soit $X=H+\sum_{\alpha \in S} a_\alpha X_\alpha$ un élément de $\mathfrak{g}_1$ tel que $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} X)(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} Y)=0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}_1$. Observons d'abord que, si α et β sont des éléments de S tels que $\alpha+\beta \neq 0$, $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} X_\alpha)(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} X_\beta)$ est nilpotent, d'où $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} X_\alpha)(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} X_\beta)=0$. On voit de même que $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} H)(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} X_\alpha)=0$ si $H \in \mathfrak{h}_1$. L'algèbre $\mathfrak{g}_1$ contient l'algèbre $\mathfrak{g}_\alpha$ simple de dimension 3 de base $\{H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha}\}$, et la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_1$ induit une représentation fidèle de $\mathfrak{g}_\alpha$; la forme bilinéaire associée à cette représentation n'étant pas nulle, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} X_\alpha)(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} X_{-\alpha}) \neq 0$; on conclut de là que $a_\alpha=0$ pour tout $\alpha \in S$. Par ailleurs, la restriction à l'espace des combinaisons linéaires <u>rationnelles</u> des H_α de la forme quadratique $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1} H)^2$ sur $\mathfrak{h}$ est évidemment positive et ne peut prendre la valeur 0 en un élément H de l'espace en question que si tous les $\alpha(H)$, $\alpha \in S$, sont nuls, c'est-à-dire si H est dans le centre de $\mathfrak{g}_1$. Or, cela entraîne $H=0$, car, si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ est une base de l'espace engendré par les éléments de S , le déterminant $\det(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{1 \leq ij \leq m}$ est $\neq 0$. Il résulte de là que $X=0$, ce qui prouve que $\mathfrak{g}_1$ est semi-simple. Il est clair que $\mathfrak{h}_1$ est une algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_1$ et que les racines $\neq 0$ de $\mathfrak{g}_1$ sont les restrictions à $\mathfrak{h}_1$ des fonctions appartenant à S .

Ce résultat permet de construire certaines sous-algèbres semi-simples de $\mathfrak{g}$, mais <u>pas toutes</u> (cf. plus bas).

NBR 032 81

Considérons maintenant un système fondamental $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ de racines de $\mathfrak{g}$. Soit E une partie quelconque de $\{1,\ldots,r\}$, et soit S l'ensemble des racines $\neq 0$ qui sont des combinaisons linéaires des racines α_i pour lesquelles $i \in E$. Il est clair que S satisfait aux conditions énoncées plus haut, donc définit une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$. On voit tout de suite que les restrictions à $\mathfrak{h}_1$ des racines α_i, $i \in E$, forment un système fondamental de racines de $\mathfrak{g}_1$; les entiers de Cartan correspondants sont les entiers de Cartan de $\mathfrak{g}$ pour les valeurs des indices appartenant à E.

On voit ainsi qu'une algèbre simple de type A_{r+1} (resp.: B_{r+1}, C_{r+1}, D_{r+1}) contient une sous-algèbre de type A_r (resp.: B_r, C_r, D_r), et qu'une algèbre de type E_8 (resp.: E_7) contient une algèbre de type E_7 (resp.: E_6). Mais on ne découvre pas ainsi les inclusions importantes suivantes : $G_2 \subset D_4 \subset B_4 \subset F_4 \subset E_6$, non plus que les inclusions $D_r \subset B_r \subset D_{r+1}$.

n° 2. POIDS DOMINANTS FONDAMENTAUX.

Soit $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ un système fondamental de racines de $\mathfrak{g}$, et soit $\{H_i, X_i, Y_i\}$ un système de générateurs canonique correspondant à ce système. Pour qu'une fonction linéaire w sur $\mathfrak{h}$ soit poids dominant d'une représentation simple, il faut et suffit que les $w(H_i)$ soient des entiers $\geqslant 0$. On appelle <u>poids dominants fondamentaux</u> les fonctions w_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ définies par

$$w_i(H_j) = \delta_{ij} \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant r) ;$$

les représentations simples ayant ces poids dominants sont appelées les <u>représentations simples fondamentales</u>.

Le poids dominant d'une représentation simple quelconque peut donc se mettre sous la forme $\sum_{i=1}^{r} m_i w_i$, où les m_i sont des entiers $\geqslant 0$; nous dirons que la représentation est de type $(m_1,\dots,m_r)$.

Rappelons que nous avons ordonné l'ensemble des combinaisons linéaires rationnelles des α_i en appelant positives les combinaisons à coefficients $\geqslant 0$. Soit w un élément minimal de l'ensemble des combinaisons $\sum_{i=1}^{r} m_i w_i$ des w_i à coefficients entiers $\geqslant 0$ non tous nuls, et soit ρ une représentation simple de poids dominant w . Si w' est un poids quelconque de la représentation ρ , il y a une opération s du groupe de Weyl telle que $(sw')(H_i) \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Comme sw' est un poids de ρ , on a $sw' \leqslant w$, ce qui entraîne ou bien $sw'=w$ ou bien $sw'=0$ (d'où $w'=0$). Dans le premier cas, w' est un poids dominant par rapport à un autre système fondamental de racines, et est par suite de multiplicité 1 . Le degré de ρ sera donc la somme de la multiplicité du poids 0 (si 0 est un poids) et du nombre des transformés distincts de w par les opérations du groupe de Weyl . Cette remarque est commode dans le cas où on sait d'une autre manière que 0 n'est pas un poids de ρ ; c'est ce qui arrivera certainement si w n'est pas une combinaison à coefficients entiers des racines $\alpha_1,\dots,\alpha_r$.

Par ailleurs, on peut démontrer que, si w et w' sont les poids dominants de deux représentations simples ρ et ρ' , et si $w-w'$ est une combinaison à coefficients entiers $\geqslant 0$ de $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ alors tout poids de ρ' est un poids de ρ . Il résulte immédiatement de là que la représentation $\neq 0$ de plus bas degré de $\mathfrak{g}$ est l'une des représentations fondamentales.

Les méthodes transcendantes (H. Weyl) basées sur l'étude des groupes compacts permettent de donner une formule pour le calcul du degré d'une représentation simple de poids dominant donné ; il m'a malheureusement pas été encore possible d'établir cette formule algèbriquement. La formule est la suivante. Désignons par w_0 la demi-somme de toutes les racines >0 , et par w le poids dominant considéré. Le degré est alors

$$\prod_{\alpha>0} \frac{\langle w+w_0, \alpha\rangle}{\langle w_0, \alpha\rangle}$$

le produit étant étendu à toutes les racines >0 .

3. OPÉRATIONS SUR LES REPRÉSENTATIONS.

Soient ρ et ρ' des représentations de $\mathfrak{g}$, V et V' leurs espaces de représentation. Désignons par I et I' les automorphismes identiques de V et de V' respectivement ; on voit alors tout de suite que l'application $X \to \rho(X) \otimes I' + I \otimes \rho'(X)$ est une représentation qu'on peut appeler somme tensorielle de ρ et de ρ' , et désigner par $\rho \oplus \rho'$. Il est clair que les poids de cette représentation sont toutes les sommes d'un poids de ρ et d'un poids de ρ' . Si ρ et ρ' sont simples de poids dominants w et w', le poids dominant de $\rho \oplus \rho'$ sera $w+w'$, mais, bien entendu, $\rho \oplus \rho'$ ne sera pas simple en général, et la théorie des poids ne fournit aucun moyen de décomposer $\rho \oplus \rho'$ en représentations simples (essentiellement parce qu'on ignore tout des multiplicités des poids dans les représentations simples).

Si on considère en particulier le cas où $\rho'=\rho$, $V \otimes V$ se décompose en l'espace des éléments symétriques et en celui des symétriques gauches. Si w est le poids dominant de ρ , le poids dominant de l'espace des éléments symétriques est $2w$; si w' est un élément maximal de l'ensemble des poids $< w$ de ρ , $w+w'$ sera un poids dominant de l'espace des éléments symétriques gauches.

NBR 031

Soit maintenant V^* le dual de V ; l'application $X \to -{}^t(\rho(X))$ est une représentation de $\mathfrak{g}$, qu'on appelle la <u>contragrédiente de</u> ρ. Les poids de $-{}^t\rho$ sont les opposés de ceux de ρ. Pour que $-{}^t\rho$ soit équivalente à ρ, il faut et suffit (si ρ est simple) que l'opposé du poids dominant de ρ soit encore un poids de ρ. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que ρ invarie une forme bilinéaire Γ non dégénérée sur $V \times V$, c'est-à-dire que l'on ait $\Gamma(\rho(X)x,y) + \Gamma(x,\rho(X)y) = 0$ pour tout $(x,y) \in V \times V$ et tout $X \in \mathfrak{g}$. Supposant ρ simple, on voit tout de suite que l'on peut alors supposer que Γ est soit symétrique soit symétrique gauche ; en effet, ρ invarie les formes $(x,y) \to \Gamma(x,y) + \Gamma(y,x)$, $(x,y) \to \Gamma(x,y) - \Gamma(y,x)$, et une forme bilinéaire invariante est soit nulle soit non dégénérée en vertu du fait que l'espace de représentation est simple.

§ 22. ETUDE DES CAS PARTICULIERS.

Considérons une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ admettant le système d'entiers de Cartan a_{ij} $(1 \leq i,j \leq r)$. Soit $\mathfrak{h}_0^*$ l'espace des combinaisons linéaires rationnelles des racines $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ d'un système fondamental donnant lieu aux entiers de Cartan a_{ij}. Posons $\langle \alpha_i,\alpha_i \rangle = 2a_i$ $(1 \leq i \leq r)$ si i et j sont des indices distincts tels que $a_{ij} \neq 0$, on a $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -a_{ij}a_i = -a_{ji}a_j$. Posons

$$Q(x_1,\ldots,x_r) = \left\langle \sum_{i=1}^r x_i\alpha_i \,,\ \sum_{i=1}^r x_i\alpha_i \right\rangle .$$

Cette forme quadratique est alors $2\sum_{i=1}^r a_i x_i^2 - \sum_{i\neq j} a_i a_{ij} x_i x_j$. Nous allons chercher à mettre cette forme quadratique sous une forme plus sympathique.

On notera que si tous les a_{ij} pour $i \neq j$ sont 0 ou 1, les a_i sont tous égaux, en vertu de la connexité d du graphe. Nous désignerons alors leur valeur commune par a .

Considérons d'abord le cas de A_r . Plongeons $\mathfrak{h}_0^*$ dans un espace de dimension r+1 engendré par $\mathfrak{h}_0^*$ et par un vecteur ε_1 , et prolongeons la forme $\langle w,w \rangle$ à $\mathfrak{h}_1^*$ par les conditions $\langle \varepsilon_1,\varepsilon_1 \rangle = a$, $\langle \varepsilon_1,\alpha_1 \rangle = -a$, $\langle \varepsilon_1,\alpha_i \rangle = 0$ si $i > 1$. Posons, pour $k > 1$, $\varepsilon_k = \varepsilon_1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1}$; on trouve alors facilement que $\langle \varepsilon_i,\varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}\, a$. On voit donc qu'on peut mettre les α_i sous la forme

$$\alpha_i = \varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i$$

où $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij} a$. La symétrie par rapport à l'hyperplan $P^*_{\alpha_i}$ de $\mathfrak{h}_0^*$ se prolonge en une opération dans $\mathfrak{h}_1^*$ qui laisse invariante notre forme quadratique prolongée ; on voit tout de suite que cette opération échange ε_i et ε_{i+1} et laisse les autres ε_j fixes.
<u>Le groupe de Weyl d'une algèbre de type</u> A_r <u>est donc le groupe des permutations de</u> r+1 <u>objets</u>. Puisque le groupe de Weyl permet de transformer toute racine $\neq 0$ en l'une des $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, on voit que les <u>racines sont les</u> $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ $(1 \leq i , j \leq r+1)$. La dimension de A_r est donc $r+r(r+1)=(r+1)^2-1$. Cherchons les poids dominants fondamentaux. Ecrivons $\varepsilon_i = \varepsilon'_i + \eta$, où $\varepsilon'_i \in \mathfrak{h}_0^*$ et η est orthogonal à $\mathfrak{h}_0^*$. On a alors $\langle \varepsilon'_i , \alpha_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, $j+1$, $\langle \varepsilon'_i,\alpha_i \rangle = -a$, $\langle \varepsilon'_i, \alpha_{i+1} \rangle = a$.
Les poids fondamentaux sont donc

$$w_1 = -\varepsilon'_1 , \quad w_2 = -(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2), \ldots, \quad w_r = -(\varepsilon'_1+\ldots+\varepsilon'_r)$$

On a d'ailleurs $\varepsilon'_i = \varepsilon'_1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}$, et $\sum_1^{r+1} \varepsilon'_i = 0$, d'où l'expression de ε'_1 : $\varepsilon'_1 = -(r+1)^{-1}(r\alpha_1+\ldots+\alpha_r)$. On voit tout de suite qu'aucun des w_i n'est combinaison à coefficients entiers des racines.

Si donc ρ_i est la représentation simple de poids dominant w_i, 0 n'est pas un poids de ρ_i. Le sous-groupe du groupe de Weyl qui invarie w_i est d'indice $\binom{r+1}{i}$ dans le groupe total ; il en résulte d'abord que ρ_1 est de degré $r+1$. Puisque $\mathfrak{g}$ coïncide avec son algèbre dérivée, les opérations de $\rho_1(\mathfrak{g})$ sont de trace 0. Or ρ_1 est fidèle (parce que $\mathfrak{g}$ est simple) ; $\mathfrak{g}$ étant de dimension $(r+1)^2-1$, on voit que $\rho_1(\mathfrak{g})$ est l'algèbre de tous les endomorphismes de trace 0 de l'espace de représentation V de ρ_1. Donc <u>une algèbre simple de type A_r est isomorphe à l'algèbre des matrices de degré</u> $r+1$ <u>et de trace</u> 0. D'autre part, on voit tout de suite que la représentation de poids dominant w_i est la représentation par les i-vecteurs de V ; le poids dominant de la représentation adjointe est w_1+w_r.

Considérons maintenant le cas de D_r. Il correspond aux racines $\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1}$ de D_r une sous-algèbre de type A_{r-1} de D_r. Il résulte de ce qu'on a vu plus haut qu'on peut trouver une base $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r\}$ de $\mathfrak{h}_0^*$ telle que $\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle = \delta_{ij}a$ $(1\leqslant i,j\leqslant r)$, $\alpha_i=\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i$ $(1\leqslant i\leqslant r-1)$. Posons $\alpha_r = b_1\varepsilon_1+\dots+b_r\varepsilon_r$; la condition $\langle\alpha_r,\alpha_r\rangle=2a$ donne alors $\sum_{i=1}^{r} b_i^2=2$; la condition $\langle\alpha_r,\alpha_i\rangle=0$ pour $i\leqslant r-1$, symétrique gauche $\neq 0$. Il en résulte que les opérations de $\rho_1(D_r)$ laissent une forme quadratique non dégénérée invariante. Représentant cette forme quadratique comme somme de carrés, on voit que les endomorphismes qui la laissent invariante sont ceux qui peuvent être représentés par des matrices symétriques gauches par rapport à une base convenable, donc forment un espace de dimension $r(2r-1) = \dim D_r$. On en conclut qu'<u>une algèbre simple de type</u> D_r <u>est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension</u> $2r$ <u>qui laissent invariante une forme quadratique non dégénérée</u>.

NBR 03V 87

Si $i < r-1$, w_i est le poids dominant de la représentation par les i-vecteurs ; w_{r-1} et w_r donnent les représentations par les deux espèces de demi-spineurs.

Dans le cas de E_8, on procède d'une manière analogue à ce qu'on vient de faire pour D_r . On pose $\alpha_i = \varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq 7)$, où $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}\, a$, et on cherche la forme de α_8 ; il vient $\alpha_8 = (1/2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-(1/2)(\varepsilon_4+\dots+\varepsilon_8)$. Le groupe de Weyl contient certainement le groupe des permutations de $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_8$. On en déduit que $\alpha = (1/2)(\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6)-(1/2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_7+\varepsilon_8)$ est encore une racine. Or, on a $\langle \alpha, \alpha_8 \rangle = -a$; $\alpha+\alpha_8 = -(\varepsilon_7+\varepsilon_8)$ est donc une racine, d'où on déduit que le groupe de Weyl contient le groupe de Weyl de D_8 , donc que toutes les expressions

$$\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leq i,j \leq 8,\ i \neq j) \ ; \quad (1/2)\sum_1^8 \zeta_i \varepsilon_i \ , \ \prod_1^8 \zeta_i = -1$$

sont des racines. Or on vérifie que ces racines sont encore permutées entre elles par la symétrie par rapport à $P^*_{\alpha_8}$; ce sont donc toutes les racines. En les comptant, on trouve qu'<u>une algèbre de type E_8 est</u> de dimension 248. On trouve que le groupe de Weyl est d'ordre $2^{14}.3^5.5^2.7$. La représentation $\neq 0$ de plus bas degré se trouve être la représentation adjointe.

Pour les autres algèbres simples, je me contenterai d'indiquer quelques résultats : E_7 est de dimension 133 , représentation de plus bas degré : 55 ; E_6 de dimension 78, représentation de plus bas degré : 27 ; G_2 de dimension 14, représentation de plus bas degré : 7 ; F_4, de dimension 52, représentation de plus bas degré : 26 .

L'algèbre B_r est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes d'un espace de dimension $2r+1$ qui laissent invariante une forme quadratique non dégénérée ; l'algèbre C_r est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes d'un espace de dimension $2r$ qui laissent invariante une forme bilinéaire symétrique gauche non dégénérée.

§ 23. INVARIANCE DES ENTIERS DE CARTAN. LE RANG.

Jusqu'ici nous avons considéré une sous-algèbre de Cartan fixe $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. A tout système fondamental de racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ nous avons associé un système d'entiers de Cartan ; tous les systèmes fondamentaux relatifs au même $\mathfrak{h}$ étant conjugués entre eux par le groupe de Weyl, les systèmes d'entiers de Cartan qui leur correspondent sont de même type. Il reste à montrer que deux systèmes d'entiers de Cartan de $\mathfrak{g}$ relatives à des sous-algèbres de Cartan distinctes sont de même type.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan ; et soit $\{H_1,\dots,H_r\}$ une base de $\mathfrak{h}$. Soit R l'ensemble des racines $\neq 0$ de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$; si $\alpha \in R$, soit X_α un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{g}$ appartenant à α. Les éléments H_i, X_α forment donc une base de $\mathfrak{g}$. Introduisons $n = \dim \mathfrak{g}$ indéterminées u_i $(1 \leq i \leq r)$, x_α $(\alpha \in R)$, et soit L une clôture algèbrique du corps $K(u_i, x_\alpha)$. Nous dirons qu'un élément $\sum_{i=1}^{r} v_i H_i + \sum_{\alpha \in R} w_\alpha X_\alpha$ de l'algèbre $\mathfrak{g}^L$ déduite de $\mathfrak{g}$ par extension du corps de base est <u>générique</u> si les v_i, w_α sont algèbriquement indépendants sur K. Nous allons montrer qu'il existe un automorphisme de $\mathfrak{g}^L$ qui transforme $\sum_{i=1}^{r} u_i H_i$ en un élément générique. Chaque X_α étant nilpotent, on peut définir un automorphisme $s_\alpha = \exp \operatorname{ad} x_\alpha X_\alpha$ de $\mathfrak{g}^L$. Ayant rangé les racines $\neq 0$ de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ dans un ordre quelconque, nous poserons $s = \prod_{\alpha \in R} s_\alpha$. Soit

$$s\left(\sum_{i=1}^{r} u_i H_i\right) = \sum_{i=1}^{r} v_i H_i + \sum_{\alpha \in R} w_\alpha X_\alpha \;;$$

nous allons montrer que cet élément est générique. Les v_i, w_α sont des polynomes en les u_i, x_α ; il suffira de prouver que leur déterminant fonctionnel n'est pas nul. Nous calculerons ce déterminant fonctionnel pour les valeurs $x_\alpha = 0$ des variables. [N.B. Ce déterminant joue un rôle de premier plan dans la théorie transcendante des groupes compacts ; si f est une fonction centrale sur le groupe, et T un toroïde maximal, l'intégrale de f sur le groupe peut se calculer comme intégrale sur T (par rapport à la mesure invariante de T) de fg , où g est une fonction fixe (ne dépendant pas de f) qui est liée de la façon la plus étroite au déterminant en question]. Nous désignerons par P^* la valeur d'un polynome en les u_i, x_α pour $x_\alpha = 0$. Il est clair que $v_i^* = u_i$, $w_\alpha^* = 0$; on a donc $(\partial v_i / \partial u_j)^* = \delta_{ij}$, $(\partial w_\alpha / \partial u_j)^* = 0$. D'autre part, si on fait $x_\beta = 0$ pour tout $\beta \neq \alpha$, w_α se réduit à $-\alpha(\sum_{i=1}^{l} u_i H_i) x_\alpha$ et w_β à 0 si $\beta \neq \alpha$. On a donc $(\partial w_\alpha / \partial x_\alpha)^* =$ $= -\alpha(\sum_{i=1}^{l} u_i H_i)$, $(\partial w_\alpha / \partial x_\beta)^* = 0$ si $\beta \neq \alpha$. Le nombre des racines $\neq 0$ étant pair, on voit que le déterminant cherché est $\prod_{\alpha \in R} \alpha(\sum_{i=1}^{l} u_i H_i)$; il est $\neq 0$.

On appelle __polynome de Killing__ d'un élément X de $\mathfrak{g}$ (ou de $\mathfrak{g}^L$) le polynome caractéristique de ad X . Il est clair que les polynomes de Killing de deux éléments génériques de $\mathfrak{g}^L$ se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme de L . Par ailleurs, deux éléments de $\mathfrak{g}^L$ qui se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme de $\mathfrak{g}^L$ ont même polynome de Killing. Ceci dit, si on appelle r la dimension de $\mathfrak{h}$, il est clair que le polynome de Killing de $\sum_{i=1}^{l} u_i H_i$ admet 0 comme racine de multiplicité r (ses autres racines sont les $\alpha(\sum_{i=1}^{l} u_i H_i)$, $\alpha \in R$). On déduit tout de suite de là le

Théorème 7. __Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps algèbriquement clos de caractéristique__ 0 ; __toutes les algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ ont alors la même dimension.__

Définition 1. __Les notations étant celles du th.7, la dimension des algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ s'appelle le rang de $\mathfrak{g}$__ .

Par ailleurs, on voit que l'équation de Killing d'un élément générique de $\mathfrak{g}^L$ possède r racines $\xi_1, \ldots, \xi_r$ dans L telles que toute autre racine $\neq 0$ de l'équation soit une combinaison de $\xi_1, \ldots, \xi_r$ à coefficients entiers soit tous $\geqslant 0$ soit tous $\leqslant 0$; et, un tel système de racines ayant été choisi, si on désigne (pour $i \neq j$) par a_{ij} le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $\xi_j + a_{ij}\,\xi_i$ soit une racine de l'équation, les a_{ij} (dont on complète la définition en posant $a_{ii} = -2$) forment un système d'entiers de Cartan de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$. Ces derniers se trouvent ainsi définis sans référence à $\mathfrak{h}$, ce qui prouve le

Théorème 8. <u>Deux systèmes quelconques d'entiers de Cartan d'une algèbre semi-simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 sont du même type</u>.

Pour terminer, j'indiquerai encore quelques résultats intéressants, mais dont la démonstration m'entraînerait un peu loin. Les notations étant celles utilisées plus haut, soit Z le corps obtenu par adjonction à K des v_i, w_α ; les coefficients de l'équation de Killing de l'élément générique $\sum_{i=1}^{r} v_i H_i + \sum_{\alpha \in R} w_\alpha X_\alpha$ appartiennent naturellement à Z, et le corps obtenu par adjonction à Z des racines $\alpha\left(\sum_{i=1}^{r} u_i H_i\right)$ de cette équation est le corps $Z(u_1, \ldots, u_r)$. Ce corps est donc galoisien sur Z, et on peut démontrer que <u>son groupe de Galois est le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$, soit</u> G. Si Z_0 est le sous-corps de Z engendré par les coefficients de l'équation de Killing en question, le groupe de Galois du corps $Z_0(u_1, \ldots, u_r)/Z_0$ est le groupe de toutes les permutations π de l'ensemble R des racines $\neq 0$ qui conservent les relations linéaires (à coefficients entiers) entre les racines. Ce groupe G_1 contient naturellement le groupe de Weyl G comme sous-groupe. De plus, G est sous-groupe distingué de G_1, et G_1/G est isomorphe au groupe des permutations des racines qui conservent les relations linéaires entre les racines <u>et</u> qui permutent entre elles les racines d'un système fondamental donné. Ce groupe est donc le groupe des permutations des indices $1, \ldots, r$ qui conservent les entiers de Cartan a_{ij}. Cette remarque permet de déterminer immédiatement le groupe G_1/G pour les algèbres simples des différents types. Ce groupe

NBR 032 91

est d'ordre 2 pour A_r $(r>1)$, ainsi que pour D_r si $r \geq 3$ et $r \neq 4$; au contraire, pour D_4 (dont le graphe est une étoile à 3 branches), le groupe est d'ordre 6 (c'est la source du principe de trialité de Cartan). Le groupe G_1/G est d'ordre 2 pour E_6 , mais se réduit à son élément neutre dans tous les autres cas.

Le groupe G et le groupe G_1 apparaissent encore d'une autre manière. Soit A le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$; c'est un groupe algèbrique de transformations linéaires sur $\mathfrak{g}$. Mais ce n'est pas en général une variété irréductible ; A possède un sous-groupe A_0 d'indice fini qui est engendré par les opérations exp ad X , X nilpotent dans $\mathfrak{g}$, et qui est lui, irréductible ; A_0 n'est autre que le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ si le corps de base est le corps des complexes, c'est la composante topologique de l'élément neutre dans A). Le groupe A est isomorphe au groupe de tous les automorphismes (algèbriques, ou, si on a le corps des complexes, continus) de A_0, et A_0 au groupe des automorphismes intérieurs de A_0 . Le groupe G_1/G est isomorphe à A/A_0 ; c'est le groupe des automorphismes extérieurs de A_0 . Par ailleurs, si on désigne par B le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui appliquent une algèbre de Cartan donnée $\mathfrak{h}$ sur elle-même, tout élément de A peut être transformé par un élément de A_0 en un élément de B . Si on désigne par B_1 le groupe des éléments de A qui laissent tous les éléments de $\mathfrak{h}$ fixes, B/B_1 est isomorphe au groupe G_1 , et, si $B_0 = B \cap A_0$, B_0/B_1 est isomorphe au groupe de Weyl.

Les opérations de A peuvent être considérées comme produisant des substitutions linéaires sur les coefficients v_i, w_α de l'élément générique introduit plus haut. Le corps des fonctions rationnelles en les v_i, w_α qui sont invariantes par toutes ces substitutions est le corps engendré par les coefficients de l'équation de Killing de $\sum_{i=1}^{l} v_i H_i + \sum_{\alpha \in R} w_\alpha X_\alpha$. Ce corps J est contenu dans le corps des fractions rationnelles qui ne sont invariantes que par les opérations de A_0 ; si J_0 est ce nouveau corps, le groupe de Galois de J_0/J est naturellement G_1/G . Pour obtenir J_0 il faut adjoindre à J les coefficients des équations caractéristiques des $\rho\left(\sum_{i=1}^{l} v_i H_i + \sum_{\alpha \in R} w_\alpha X_\alpha\right)$ pour les diverses représentations ρ de $\mathfrak{g}$.
