RÉDACTION N° 124

COTE : **NBR 031**

TITRE : **ALGÈBRE**
CHAPITRE VII (OU IX ?) ANNEAUX PRIMITIFS

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 24

NOMBRE DE FEUILLES : 24

Archives

NBR 031 124 2

A L G È B R E

CHAPITRE VII (ou IX ?)

ANNEAUX PRIMITIFS (État 2 bis)

(Laïus préliminaire comme dans l'état 2).

§ 1 - Anneaux primitifs et semi-primitifs. Le radical.

1) - Sommes produits et intersections d'idéaux.

Soit A un anneau à opérateurs (en particulier une algèbre) ; rappelons (chap.I, § 8,n°6) que l'intersection d'une famille $\mathfrak{a}_\alpha$ ($\alpha \in \Lambda$) d'idéaux de A est un idéal de A . D'autre part le plus petit idéal contenant tous les idéaux $\mathfrak{a}_\alpha$ est l'idéal somme $\sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{a}_\alpha$, ensemble des sommes $\sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha$, où $a_\alpha \in \mathfrak{a}_\alpha$ et $a_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Il est clair que l'on a les inclusions suivantes :

(1) $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') \supset (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}')$

(2) $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}') \subset (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}')$

L'égalité des deux membres dans (1) et (2) n'est pas toujours vraie (cf. exercice 1).

Définition 1 - Soient B et B' deux sous-groupes du groupe additif sous-jacent de l'anneau A ; par abus de langage nous appellerons produit de B ~~et de~~ B' et nous noterons BB' l'ensemble des sommes $\sum_i b_i b'_i$ où $b_i \in B$ et $b'_i \in B'$.

On se gardera de confondre le produit BB' avec l'ensemble E des produits bb' où $b \in B$ et $b' \in B'$, ensemble que désignerait la notation BB' appliquée sans abus de langage (chap.I, § 1,n°1). On notera que BB' est le sous-groupe additif engendré par E .

Il est clair que BB' est un sous groupe additif de A ; si B est un idéal à gauche, BB' est un idéal à gauche ; si, de plus, B' est un idéal à droite BB' est un idéal bilatère. On vérifie aussitôt les relations suivantes :

(3) B(C+C') = BC + BC' .

(4) (BC)D = B(CD)

(5) $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ lorsque $\mathfrak{b}$ est un idéal à droite, et $\mathfrak{b}'$ un idéal à gauche.

(6) $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{c}' \supset (\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}')$ si $\mathfrak{b}$ est un idéal bilatère.

L'égalité des deux membres des formules (5) et (6) n'est pas toujours vraie (cf. exercices).

Nous noterons $\mathfrak{a}^n$ et appellerons n-ème puissance de $\mathfrak{a}$ le produit de n idéaux à $\mathfrak{a}$; on a évidemment $\mathfrak{a}^{n+1} \subset \mathfrak{a}^n$. Si $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ on dit que $\mathfrak{a}$ est un idéal <u>idempotent</u> ; s'il existe $n > 0$ tel que $\mathfrak{b}^n = (0)$ on dira que $\mathfrak{b}$ est un idéal <u>nilpotent</u> .

Il n'est pas vrai qu'un idéal dont tous les éléments sont nilpotents (un "nilidéal") soit nilpotent (cf. exercice).

2) <u>Modules simples et semi simples</u>.

Soit A un anneau à opérateurs et C l'ensemble de ses opérateurs. Nous dirons qu'un groupe abélien E est un <u>module à gauche</u> sur A s'il existe deux lois de composition externes définies sur E , dont les domaines d'opérateurs sont A et C , et qui, notées multiplicativement satisfont aux conditions suivantes :

(a) E est un module à gauche sur l'anneau sans opérateurs sous jacent de A (chap.II, § 1,n°1, déf.1)

(b) On a $\alpha(ax) = a(\alpha x) = (\alpha a)x$ pour tous $\alpha \in C$; $a \in A$; $x \in E$.

En particulier tout opérateur de C et tout opérateur de A , opérant sur E sont permutables. Définitions analogues pour les modules à droite.

<u>Remarques</u>. 1) Dans de nombreux cas l'ensemble C sera muni d'une structure d'anneau commutatif. E sera alors muni d'une structure de <u>bimodule</u> à gauche par rapport à A et C (chap.III, App.II, déf.1). Si la structure de C-module de E est donnée, la donnée de cette structure de bimodule revient à se donner un homomorphisme φ de l'anneau à opérateurs A dans l'anneau des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ (chap.II, § 2,

du C-module E , considéré comme algèbre sur C . La restriction de commutativité de C est fort peu restrictive, car il résulte de (b) que, pour tous $a \in A$, $x \in E$, $\alpha \in C$ et $\beta \in C$, on a $(\alpha\beta)ax = (\beta\alpha)ax$.

2) Lorsque A est muni d'une structure d'anneau sans opérateurs, on pourra toujours supposer que $C = Z$.

3) Lorsque A est muni d'une structure d'<u>algèbre</u> sur un corps commutatif k, E est muni d'une structure d'espace vectoriel sur k , et les éléments de A opèrent sur E comme des endomorphismes de la structure d'espace vectoriel de E . Si, en particulier A possède un élément unité noté 1 et si E est un A-module unitaire, les opérateurs α et $\alpha.1$ $(\alpha \in k)$ opèrent de la même manière sur E en vertu de (b), et la structure de E considéré comme module sur l'anneau sans opérateurs sous jacent de A détermine la structure de E considéré comme module sur l'algèbre A .

Nous supposerons désormais que C est un anneau commutatif. Définir sur le C-module E une structure de <u>module à droite</u> sur l'algèbre A (sur C) revient à se donner un homomorphisme dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ de l'algèbre A' <u>opposée</u> de A (chap.II, § 7,n°1). Nous ne parlerons plus que de modules à gauche.

Soit E un A-module sur l'algèbre A (sur C). Conformément aux définitions générales nous dirons qu'un sous-groupe additif F de E est un <u>sous-module</u> de E s'il est stable pour les deux lois de composition externes définies sur E . De même si E et E' sont deux A-modules à gauche et si φ et φ' sont les homomorphismes de ~~xx~~ l'algèbre A dans $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{L}(E')$, nous dirons que E et E' sont deux modules isomorphes s'il existe un isomorphisme ψ de E sur E', considérés comme C-modules, tel que $\varphi'(a).\psi(x) = \psi(\varphi(a).x)$ pour tous $a \in A$, $x \in E$.

Nous noterons en général les éléments de A par des minuscules latines du début de l'alphabet (a,b,c,..), ceux de E par des minuscules latines de la fin de l'alphabet (x,y,z,...), et ceux de C par des minuscules grecques.

Conformément à la terminologie relative aux groupes à opérateurs nous dirons qu'un module E sur l'anneau à opérateurs A est <u>simple</u> s'il n'est pas réduit à $\{0\}$ et s'il ne possède d'autre sous module que lui-même et $\{0\}$ (chap.I, § 6, n°14, déf. 14). Nous dirons qu'un module E est <u>semi-simple</u> (ou <u>complètement réductible</u>) s'il est somme directe d'une famille quelconque de modules simples.

<u>Remarques</u> 1) Cette dernière définition généralise la déf.15, n°15, § 7, chap.I, relative aux groupes à opérateurs, mais sans limiter la notion de semi simplicité au cas où la famille de modules simples est finie ; nous dirons dans ce dernier cas que le module E est semi-simple de longueur finie.

2) Par définition le module $\{0\}$ n'est pas simple ; il est par contre semi simple en tant que somme directe de la famille vide de modules simples.

<u>Exemples</u>. 1) Les modules simples sur l'anneau Z des entiers rationnels sont les groupes abéliens simples, c'est-à-dire les groupes Z/(p) où p est un nombre premier.

2) Les modules simples sur un corps k sont les espaces vectoriels de dimension 1 sur k , isomorphes à k_s .

3) Soit E un espace vectoriel sur un corps k ; dire que E est un module simple sur un sous-anneau A de l'anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E revient à dire que A opère transitivement sur E ; en particulier E est un module simple sur $\mathcal{L}(E)$, et, si E est de dimension infinie sur k , sur le sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ composé des endomorphismes

a de E tels que l'image a(E) soit de dimension finie sur k ("endomorphismes d'image finie").

Ce dernier exemple est un cas particulier de la proposition plus générale suivante :

Proposition 1.- Pour qu'un module E sur un anneau à opérateurs A soit simple il faut et il suffit que E ne soit pas réduit à $\{0\}$ et que le sous-module engendré par tout élément non nul $x \in E$ soit identique à E .

Le sous-module engendré par x est l'ensemble des éléments $n.x+ax+\alpha x$ pour tous $n \in Z$, $a \in A$ et $\alpha \in C$. La démonstration est immédiate.

On peut donc dire que les modules simples sont les modules monogènes non nuls engendrés par n'importe lequel de leurs éléments non nuls.

Proposition 2.- Soit E un module somme d'une famille (E_{λ}) $(\lambda \in \Lambda)$ de sous-modules simples ; tout sous-module F de E admet un supplémentaire qui est un module semi-simple.

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $E_{\lambda} \cap F$ est un sous-module de E_{λ}, donc est égal à E_{λ} ou à $\{0\}$. Soit I l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que $E_{\lambda} \cap = F = \{0\}$. Au moyen du th. de Zorn nous extrayons de I un sous-ensemble maximal I' tel que la somme $\sum_{\lambda \in I'} E_{\lambda}$ soit directe et que $(\sum_{\lambda \in I'} E_{\lambda}) \cap F = \{0\}$; soit $F' = \sum_{\lambda \in I'} E_{\lambda}$. Pour tout $\mu \in \Lambda$ on a $E_{\mu} \subset F+F'$ sinon $F+F'+E_{\mu}$ serait une somme directe contrairement à la maximalité de I' . On a donc $F+F' = E$ et F' est supplémentaire de F ; F' est semi-simple par construction

Corollaire 1 - Si un module E est somme d'une famille (E_{λ}) $(\lambda \in \Lambda)$ de sous-modules simples, il est semi-simple et somme directe d'une sous-famille (E_i) $(i \in I)$ de la famille (E_{λ}).

Il suffit en effet de prendre $F = \{0\}$.

Corollaire 2 - Tout sous-module F d'un module semi-simple E est semi-simple

En effet la prop.2 montre que F admet un supplémentaire F' ; appliquant la prop.2 à F' nous voyons que F' admet un supplémentaire semi-simple F'', lequel est isomorphe à F (chap.II, § 1, n°4, cor. de la prop.1).

<u>Proposition 3 - Pour qu'un module E soit semi-simple il faut et il suffit que tout sous-module F de E admette un supplémentaire.</u>

La nécessité résulte de la prop.2 . Pour la suffisance nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme - Tout module monogène G admet un module quotient simple.</u>

Soit $G = Zx+Ax+Cx$; la famille des sous-modules de G qui ne contiennent pas x est inductive si on l'ordonne par inclusion ; soit donc, d'après le th. de Zorn, H un élément maximal de cette famille ; si G/H n'était pas un module simple, il admettrait un sous-module non trivial de la forme H'/H ; mais H' ne peut contenir x sinon $H' = G$; ceci est contraire à la maximalité de H .

Nous revenons à la démonstration de la prop.3 . Soit E un module tel que tout sous-module F de E admette un supplémentaire. Tout sous-module E' de E jouit de la même propriété : si en effet F' est un sous-module de E' , E' admet un supplémentaire F_1 dans E , et F_1+F' admet un supplémentaire F_2 dans E , supplémentaire dont la projection sur E' est évidemment un supplémentaire de F' dans E' . Soit E' la somme de tous les sous-modules simples de E . Si on avait $E'\neq E$, E' admettrait un supplémentaire non nul F ; soit G un sous-module monogène non nul de F ; d'après le lemme il existe un sous-module H de G tel que G/H soit simple ; comme H admet un supplémentaire H' dans G , le module H' est simple ; et H' n'est pas contenu dans E' contrairement à la définition de E' . Ainsi $E'=E$ et E est semi-simple d'après le cor.1 de la prop.2 .

Lorsque A admet un élément unité, le lemme appliqué au module A_s redonne le th. de Krull (chap.I, § 8, n°7 , th.2) .

3)- Définition des anneaux primitifs et semi-primitifs.

Soit E un module sur l'algèbre A, D une partie quelconque de E. Conformément à la terminologie relative aux modules ordinaires (chap. II, §1, n°9) nous appelerons annulateur de D et noterons $\mathfrak{a}(D)$ l'ensemble des $a \in A$ tels que $ax=0$ pour tout $x \in D$; ici $\mathfrak{a}(D)$ est un idéal à gauche stable de A ; si $D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$, alors $\mathfrak{a}(D) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{a}(D_\lambda)$; si D est la partie $\{x\}$ réduite à un élément l'annulateur de D se note $\mathfrak{a}(x)$. Lorsque D est un sous-module de E on montre comme au chap. II que $\mathfrak{a}(D)$ est un idéal bilatère (stable) de A ; en particulier l'annulateur du module E lui-même est un idéal bilatère $\mathfrak{a}(E)$ que l'on appelle le noyau de E ; on a $\mathfrak{a}(E) = \overset{-1}{\phi}(\{0\})$ si ϕ désigne l'homomorphisme de A dans $\mathcal{L}(E)$; lorsque $\mathfrak{a}(E)=(0)$ on dit que E est un module fidèle (ou normal).

Remarquons que le groupe abélien sous jacent peut être muni canoniquement d'une structure de $A/\mathfrak{a}(E)$-module ; muni de cette structure c'est un module fidèle.

Le but de ce chapitre est d'étudier certaines classes d'algèbres au moyen de modules sur ces algèbres :

Définition 3 - On dit qu'une algèbre A est primitive (resp. semi-primitive) s'il existe un A-module simple (resp. semi-simple) et fidèle. On appelle radical d'une algèbre A l'intersection des annulateurs de tous les A-modules simples.

Remarques - 1) Toutes ces notions s'appliquent à un anneau quelconque à opérateurs A. Pour les appliquer à un anneau sans opérateurs A, il suffira de considérer A comme algèbre sur Z.

2) En tant qu'intersection d'idéaux bilatères, le radical d'une algèbre est un idéal bilatère.

3) Une algèbre semi primitive est caractérisée par le fait que son radical est réduit à (0). En effet si E est un module semi-simple et fidèle sur A, somme directe des modules simples (E_λ),

on a $(0) = \mathfrak{a}(E) = \bigcap_\lambda \mathfrak{a}(E_\lambda)$; si, réciproquement il existe une famille (F_μ) de A-modules simples telle que $\bigcap_\mu \mathfrak{a}(F_\mu) = (0)$ la somme directe F des (F_μ) est un A-module semi-simple et fidèle.

4) On peut généraliser la déf.3 au cas où A est seulement muni d'une structure de <u>groupe abélien</u> (à opérateurs) opérant sur des groupes abéliens E de sorte que $(a+b)x = ax+bx$ et $a(x+y) = ax+ay$; l'annulateur d'une partie de E est alors un sous-groupe stable de A. Ceci sera appliqué dans le cas où A est le groupe additif sous-jacent d'une algèbre de Lie.

<u>Exemples.</u>- 1) Tout corps K est un anneau primitif puisque le K-module K_s est simple et fidèle.

2) Si E est un espace vectoriel sur un corps K, l'anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E admet E pour module, simple et fidèle par définition ; ainsi $\mathcal{L}(E)$ est un anneau primitif ; tout sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ opérant transitivement sur E (cf. ex.3, p.4) est aussi un anneau primitif ; en particulier l'idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$ composé des endomorphismes d'image finie.

3) Ce dernier exemple est un cas particulier du suivant : soit A un anneau primitif, E un A-module simple et fidèle ; pour tout sous-anneau B de A, E est un module fidèle ; pour que B soit un anneau primitif, il suffira donc que E soit un B-module simple, c'est-à-dire que B opère transitivement sur E ; si B jouit de cette propriété, il en sera a fortiori de même de tout sous-anneau intermédiaire B' ($B \subset B' \subset A$). Un cas particulier important est celui où B est un <u>idéal bilatère</u> non nul de A ; pour tout $x \in E$, Bx est un sous-module de E ; l'ensemble des $x \in E$ tels que $Bx = \{0\}$ est un sous-module de E puisque B est un idéal bilatère, et ce module n'est pas $\{0\}$ car, sinon on aurait $BE = \{0\}$ puisque E est simple, ce qui est impossible car E est fidèle ; donc, pour tout $x \neq 0$, on a $Bx \neq \{0\}$ donc $Bx = E$, et E est un B-module simple. Par conséquent tout idéal bilatère non nul B d'un anneau primitif A est un anneau primitif, ainsi que tous les sous-anneaux intermédiaires entre B et A.

4) Soit A une algèbre ayant un élément unité ; si $\mathfrak{a}$ est un idéal maximal à gauche de A, le module quotient $A/\mathfrak{a}$ est simple ; si $\mathfrak{b}$ est son noyau, $A/\mathfrak{a}$ est un $A/\mathfrak{b}$-module simple et fidèle ; donc $A/\mathfrak{b}$ est un anneau primitif. Si, en particulier, A ne possède pas d'idéaux bilatères autres que A et (0), c'est-à-dire si A est un anneau <u>simple</u>, on a $\mathfrak{b} \neq A$ puisque $A/\mathfrak{a}$ est un module unitaire ; donc $\mathfrak{b} = (0)$ et A est un anneau primitif.
Il faut se garder de croire que tout anneau primitif soit simple (cf. ex. 2).

5) Si les (A_λ) sont des algèbres primitives, de modules simples et fidèles (E_λ), la somme directe $\sum_\lambda E_\lambda$ est un module semi-simple et fidèle sur l'algèbre produit $\prod_\lambda A_\lambda$ (opérant par coordonnées sur $\sum_\lambda E_\lambda$) ; donc un produit d'algèbres primitives est une algèbre semi-primitive.

6) L'anneau Z des entiers est un anneau semi-primitif ; considéron on effet la somme directe E des Z-modules $Z/(p)$ où p parcourt l'ensemble des nombres premiers ; E est un Z-module semi-simple dont le noyau se compose des entiers n tels que n soit multiple de p pour tout p ; ce noyau est donc (0), et le Z-module E est fidèle.

4) - Commutants et bicommutants.

Soit E un module sur l'algèbre A, C l'anneau d'opérateurs de A et E, $\mathcal{L}(E)$ l'anneau des endomorphismes de E considéré comme C-module, et φ l'homomorphisme canonique de A dans $\mathcal{L}(E)$. Rappelons qu'il revient au même de dire que φ est un isomorphisme, et de dire que E est un A-module fidèle.

On peut supposer plus généralement que A est un ensemble d'opérateurs opérant sur le groupe abélien E et prendre pour $\mathcal{L}(E)$ l'anneau des endomorphismes du groupe abélien E.

L'ensemble A' des éléments $\alpha \in \mathcal{L}(E)$ qui permutent avec tout élément de $\varphi(A)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ qu'on appelle le commutant de $\varphi(A)$, ou encore le commutant de A relatif au module E ; on dira quelquefois, par abus de langage, que A' est le commutant du A-module E. Comme l'anneau C des opérateurs de l'algèbre A est commutatif, les éléments de C définissent des endomorphismes de E, considéré comme C-module ; il existe donc un homomorphisme ψ de C dans $\mathcal{L}(E)$, et il est clair que $\psi(C)$ est contenu dans le commutant A'.

Le commutant de A', ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ permutables avec tout élément de A', est un sous-anneau A" de $\mathcal{L}(E)$ que l'on appelle le bicommutant de $\varphi(A)$, ou encore le bicommutant de A relatif au module E ; on dira quelquefois, par abus de langage, que A" est le bicommutant du A-module E. Il est clair que l'on a $\varphi(A) \subset A''$.

Dans de nombreux cas $\psi(C)$ est contenu dans le centre du commutant A', et ainsi A' est muni d'une structure d'algèbre sur C ; alors $\psi(C)$ est aussi contenu dans le centre du bicommutant A", qui est donc aussi une algèbre sur C.

Ce sera le cas lorsque, pour tout $y \neq 0$ de E, on a $Ay \neq \{0\}$; en effet, pour tous $a \in A$, $x \in E$, $\alpha \in A'$, $\lambda \in C$ on a
$a(\alpha\lambda).x = (a\alpha)\lambda.x = \alpha(a\lambda).x = \alpha(\lambda a).x = (\lambda a)\alpha.x = a(\lambda\alpha).x$,
d'où $a(\alpha\lambda - \lambda\alpha)x = 0$ pour tous $a \in A$ et $x \in E$, ce qui prouve, en posant $y = (\alpha\lambda - \lambda\alpha)x$ que l'on a $y=0$.

Théorème 1 (lemme de Schur) - *Soit E un module simple sur l'algèbre A ; le commutant A' de A relatif à E est un corps.*

Il nous suffira de montrer que tout élément $\alpha \neq 0$ de A' admet un inverse dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire que α est un automorphisme de E considéré comme C-module. Il est clair que $\alpha(E)$ est un sous A-module de E ; puisque $\alpha \neq 0$, on a $\alpha(E)=E$. D'autre part $\overset{-1}{\alpha}(\{0\})$ est aussi un sous A-module de E ; puisque $\alpha \neq 0$, on a $\overset{-1}{\alpha}(\{0\}) \neq E$, donc $\overset{-1}{\alpha}(\{0\}) = \{0\}$. Ceci prouve que α est un automorphisme.

Lorsque E est un groupe abélien et A un ensemble d'opérateurs opérant transitivement sur $E \cap \complement\{0\}$ (c'est-à-dire que le module associé à E par la méthode du n°9, § 7, chap. II, est simple), on montre, comme dans le th. 1 que le commutant de A relatif à E est un corps (il suffit de remplacer les mots "sous module" par "sous groupe stable")

Exemples - 1) Si K est un corps le commutant de K relatif au module simple K_s est l'ensemble des multiplications à droite par des éléments de K (chap. II, § 4, prop. 1) qui est un corps isomorphe au corps opposé K' de K.

2) Plus généralement si A est l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel V sur un corps K, K est le commutant de A relatif au A-module E. Lorsque E est de dimension finie sur K on remarquera (chap. II, § 6, n°3) que A est isomorphe à l'anneau des matrices carrées sur le corps K' opposé de K.

Le lemme de Schur nous montre donc que E a une structure d'espace vectoriel à gauche sur le corps $K=A'$; nous noterons E_K le groupe E muni de cette structure. L'anticommutant A'' est donc l'anneau de tous les endomorphismes de E_K, anneau dont la structure est bien connue (cf. § 2, n°4).

Le théorème suivant va donner quelques indications sur l'inclusion de $\varphi(A)$ dans A'', et en particulier sur celle de A dans A'' lorsque E est un A-module fidèle :

Théorème 2 (théorème de densité) - Soient E un A-module semi-simple, A' et A'' le commutant et le bicommutant de A relatifs au module E ; quels que soient $\alpha \in A''$ et les éléments $x_1, \ldots, x_n$ de E en nombre fini, il existe $a \in A$ tel que $ax_i = \alpha x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Si l'on munit E de la topologie discrète et $\mathcal{L}(E)$ de la topologie de la convergence simple (induite par celle de l'espace produit E^E), le th.2 exprime que $\varphi(A)$ est dense dans A'' ; ceci explique les mots "théorème de densité". Le fait pour un élément $\alpha \in \mathcal{L}(E)$ d'appartenir à A'' s'exprimant par des conditions algèbriques, A'' est fermé dans $\mathcal{L}(E)$; le bicommutant A'' est donc caractérisé comme adhérence de $\varphi(A)$ dans $\mathcal{L}(E)$; comme A'' et $\mathcal{L}(E)$ sont fermés dans E^E qui est complet (Top.Géné. chap.X,) ce sont des espaces complets et A'' est la complétion de $\varphi(A)$ par rapport à la structure uniforme de la convergence simple sur E.

Pour démontrer le th.2 nous allons d'abord déterminer le commutant B' d'une algèbre B relatif au B-module produit F^n, F étant un B-module quelconque. Soit D le commutant de B relatif au module F ; pour tout endomorphisme β du groupe additif de F^n nous noterons β_{ij} l'endomorphisme du groupe additif de F défini par $\beta_{ij} = \overset{-1}{\varphi_i} \circ \pi_i \circ \beta \circ \varphi_j$, φ_i désignant l'application canonique de F sur le i-ème axe de coordonnées F_i de F^n et π_i la projection de F^n sur F_i ; ainsi, si $(y_1,\ldots,y_n)$ est un élément de F^n , on a $\beta(y_1,\ldots,y_n)=(\sum_j \beta_{ij}y_j)$. Le fait que β appartient au commutant B' s'exprimera donc en écrivant que, pour tout $b\in B$, on a $\beta b(x_1,\ldots,x_n)= b\beta(x_1,\ldots,x_n)$, c'est-à-dire $(\sum_j \beta_{ij}bx_j) =b(\sum_j \beta_{ij}x_j) = (\sum_j b\beta_{ij}x_j)$ (pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in F^n$), ce qui équivaut à $b\beta_{ij} = \beta_{ij}b$ pour tous i,j et tout b . Les éléments du commutant B' de A relatif au module F^n sont donc les endomorphismes tels que β_{ij} appartienne au commutant D de A relatif au module F .

Appliquant ce résultat à E^n considéré comme module sur le commutant B' de A relatif à E^n , nous voyons que l'endomorphisme $\bar\alpha$ de E^n défini par $\bar\alpha(x_1,\ldots,x_n)=(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)$, α appartenant au bicommutant A" de A relatif au module E , est élément du bicommutant B" de A relatif au module E^n . Soient maintenant $X=(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$, F_1 le sous-module AX et F_2 un supplémentaire de F_1 (prop.3) qui existe puisque E^n est un A-module semi-simple. Les opérateurs de projection de E^n sur F_1 et F_2 appartiennent à B', en sorte que B" conserve F_1 et F_2 ;. En particulier $\bar\alpha X \in AX$, et il existe $a\in A$ tel que $\alpha x_i = ax_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$.

<u>Corollaire - Les notations étant les mêmes que dans le th.2, et E étant de plus un module simple de commutant</u> $A'=K$, <u>étant donnés</u> n <u>éléments</u> $y_1,\ldots,y_n$ <u>de</u> E , <u>linéairement indépendants sur</u> K , <u>et</u> n <u>éléments arbitraires</u> $z_1,\ldots z_n$ <u>de</u> E , <u>il existe</u> $a\in A$ <u>tel que</u> $ay_i=z_i$ <u>pour</u> $1\leqslant i\leqslant n$.

En effet il existe un endomorphisme α de E_K tel que $\alpha\, y_i = z_i$.

5) <u>Le radical d'une algèbre ayant un élément unité.</u>

Soit A une algèbre ayant un élément unité noté 1 . Rappelons que le radical R de A est l'ensemble des $a\in A$ tels que $\varphi(a)=0$ pour tout homomorphisme de A dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un module E (sur l'anneau d'opérateurs C de A), tel que la structure de A-module à gauche ainsi définie sur E soit une structure de module simple ; nous dirons aussi que φ est une <u>représentation irréductible</u> de A (cf. § 5). Comme A possède un élément unité, la structure du module E sur l'algèbre A est déterminée par sa structure de module sur l'anneau sous-jacent de A (remarque 3, p.3). La notion de radical étant définie au moyen des A-modules à gauche, nous parlerons du radical <u>à gauche</u> de A (et de même du radical à droite, affilié au RPF) .

<u>Théorème 3 - Pour que $a \in A$ appartienne au radical à gauche R d'une algèbre A possédant un élément unité, il faut et il suffit que, pour tout $x \in A$, $1-xa$ soit inversible à gauche ; dans ces conditions $1-xa$ et $1-ax$ sont inversibles pour tout $x \in A$.</u>

<u>Corollaire - Dans ces conditions le radical à droite est identique au radical à gauche</u> (et a donc la double appartenance)

1) Si $1-a$ n'est pas inversible à gauche, alors $a \notin R$; en effet l'idéal à gauche $A(1-a)$ étant différent de A , il existe un idéal à gauche maximal M contenant $1-a$ (chap.I, § 8,th.2) ; A/M est un module a gauche simple sur A non annulé par a car $a(1+M) \neq M$, sinon $a \in M$ contrairement au fait que $1-a \in M$. Ceci prouve que, si $1-xa$ n'est pas inversible à gauche, alors $xa \notin R$, donc $a \notin R$.

2) Réciproquement si $a \in R$, il existe un A-module à gauche simple E et un élément $z \in E$ tels que $a.z \neq 0$; donc $a.z$ engendre E (prop.1) et il existe $x \in A$ tel que $xa.z = z$; ainsi $(1-xa).z = 0$, ce qui prouve que $1-xa$ n'est pas inversible à gauche.

3) Supposons que $a \in R$; alors $1-a$ est inversible à gauche, et soit $1-b$ un inverse à gauche de $1-a$; on a $b = -ba-a$, donc $b \in R$; ainsi $1-b$ est inversible à gauche ; son inverse à gauche est nécessairement $1-a$, d'où le résultat.

<u>Remarques</u>.- 1) Si M est un idéal à gauche de A, le noyau B du module A/M est l'ensemble des $b \in A$ tels que $bA \subset M$; ceci montre que B est le plus grand idéal à droite contenu dans M ; B est d'ailleurs un idéal bilatère.

2) En prenant pour M un idéal à gauche maximal nous voyons donc que le radical R est contenu dans l'intersection R' de tous les idéaux à gauche maximaux de A. Soit réciproquement $a \in R'$; si a n'appartenait pas à R il existerait, en vertu du th.3, un élément $b \in A$ tel que $1-ba$ ne soit pas inversible à gauche, donc un idéal maximal à gauche M contenant $1-ba$, ce qui, étant donné que $ba \in R' \subset M$, entraîne la contradiction $1 \in M$. Le radical R est donc l'<u>intersection</u> de tous les idéaux maximaux à gauche de A.

3) Le th.3 montre alors que R est l'intersection de tous les idéaux à droite maximaux de A.

4) Le th.3 montre que les notions de semi-primitivité à gauche et de semi-primitivité à droite sont identiques. C'est par contre un problème non résolu que de montrer que tout anneau primitif à gauche est primitif à droite ; il semble probable que la question sera résolue par la négative.

<u>Exemples</u>. 1) Soit A l'anneau des polynomes en s lettres sur un corps commutatif k ; si un polynome P est tel que $1-FP$ soit inversible pour tout F A, il ne peut être de degré total strictement positif, ni un polynome constant non nul. Ceci montre que A est un anneau semi-primitif.

2) On voit par contre que l'anneau des séries formelles B en s lettres $(s \geqslant 1)$ sur K admet pour radical l'ensemble des séries formelles d'ordre non nul. Ce n'est donc pas un anneau semi-primitif

6) <u>Le radical d'une algèbre quelconque</u>.

Soit A une algèbre sur un anneau C ; si A n'a pas d'élément unité nous allons former <u>une algèbre à élément unité</u> A' <u>contenant</u> A (cf., chap.I, § 8, exercice 3). Sur l'ensemble $C \times A = A'$ on définit les lois de composition suivantes :

$$(\alpha,a)+(\beta,b) = (\alpha+\beta\ ;\ a+b)$$

$$(\alpha,\ a)(\beta,b) = (\alpha\beta,\ \alpha b + \beta a + ab)$$

$$\alpha(\beta,a) = (\alpha\beta,\ \alpha a)\ .$$

On vérifie aussitôt que ces lois définissent sur A' une structure d'algèbre sur C, et que $(1,0)$ est élément unité de A' ; l'ensemble $(0)\times A$ est un idéal bilatère de A' isomorphe à A.

Si E est un A-module nous définirons sur le groupe additif sous-jacent de E une structure de A'-module par la formule :

$$(\alpha,\ a).x = \alpha.x + a.x\ .$$

Il est clair que la structure de A-module de E se déduit de sa structure de A'-module par restriction à A de l'algèbre d'opérateur et que E est un A'-module unitaire. Si F est un sous A-module de E, et si $x\in F$, on a $(\alpha,a).x = \alpha.x + a.x$ qui appartient à F par définition ; donc F est un sous A'-module de E. Comme A s'identifie à une sous-algèbre de A', les sous A-modules et les sous A'-modules de E sont <u>identiques</u>. En particulier E est module simple (ou semi-simple) simultanément sur A et sur A'.

Le <u>radical</u> R de A sera donc l'<u>intersection</u> de A avec le radical de A'. Dire que $(0,a)$ appartient à R équivaut donc à dire que, pour tout $(\beta,b)\in A'$, $1-(\beta,b)(0,a)$ est inversible (th.3) ; comme son inverse est nécessairement de la forme $(1,c)$, ceci veut dire que pour tout $(\beta,b)\in A'$, il existe $c\in A$ tel que $c+(b+\beta)a+c(b+\beta)a = 0$. Si nous appelons

<u>conversible</u> à gauche (resp. à droite) tout élément a' de A tel qu'il existe $c \in A$ tel que $c+a'+ca' = 0$ (ceci veut dire que $1-c$ est inverse à gauche de $1-a'$ dans A') (resp. $c+a'+a'c = 0$) nous voyons que le radical R de A est l'ensemble des éléments a de A tels que $ba+\beta a$ soit conversible à gauche pour tous $b \in A$ et $\beta \in C$.

On déduit alors du th.3 le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 4 - <u>Pour que</u> $a \in A$ <u>appartienne au radical à gauche d'une algèbre</u> A , <u>il faut et il suffit que, pour tous</u> $b \in A$ <u>et</u> $\beta \in C$, $ba + \beta a$ <u>soit conversible à gauche</u> ; <u>dans ces conditions</u> $ba+\beta a$ <u>et</u> $ab+a\beta$ <u>sont conversibles</u>.

Conformément à la terminologie des éléments inversibles, nous disons que c est conversible s'il est conversible à la fois à gauche et à droite ; de même que pour les inverses il existe alors un seul et même élément c' tel que $c+c'+cc' = 0$ et $c+c'+c'c = 0$ (que l'on appelle le converse de c) .

De même qu'au n° 5 on déduit du th.4 le corollaire suivant :

<u>Corollaire</u> - <u>Dans une algèbre quelconque le radical à droite est identique au radical à gauche</u>.

Exercices.

1) Soit A l'anneau de carré nul (chap. I, § 8, n° 1, exemple III) sur le groupe abélien $G \times G$; on note $\mathfrak{b}$ la diagonale, $\mathfrak{a} = G \times (0)$ et $\mathfrak{a}' = (0) \times G$; montrer que les idéaux $\mathfrak{b} \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}')$ et $(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}')$, $\mathfrak{b} + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}')$ et $(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}')$ sont distincts.

2) Montrer, au moyen de deux idéaux de Z, que l'on peut avoir $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$.

3) Montrer que l'on peut avoir $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}') \neq \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ (prendre $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = (0)$ et $\mathfrak{b}$ non idempotent).

4) Montrer que tout élément nilpotent du centre d'un anneau A engendre un idéal nilpotent.

5) Montrer que tout nilidéal ayant une base finie d'un anneau commutatif est nilpotent.

6) Soit A la somme directe des anneaux $Z/(p^n)$ (p premier, $n \in N$) ; montrer que la somme des idéaux $(p)/(p^n)$ est un nilidéal non nilpotent.

7) Montrer que tout anneau primitif commutatif A est un corps (considérer un A-module simple et fidèle sous la forme A/M, M étant un idéal maximal de A).

8) Montrer que le centre $\mathfrak{C}$ d'un anneau primitif A est un anneau d'intégrité (utiliser un A-module simple et fidèle) et que tout élément non nul de $\mathfrak{C}$ n'est pas diviseur de zéro dans A .

9) Montrer que la caractéristique d'un anneau primitif ayant un élément unité est un nombre premier.

10) Soit E un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps k , et A l'anneau des endomorphismes de E . On rappelle qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in A$ soit multiple à gauche (resp. à droite) de b A , est que l'on ait $\overset{-1}{a}(\{0\}) \supset \overset{-1}{b}(\{0\})$ (resp. $a(E) \subset b(E)$) (chap. II, § 2, exerc. 6 et § 3, exer. 7).

a) Montrer que si un idéal bilatère de A contient un endomorphisme d'image finie, il contient tous les endomorphismes d'image finie.

b) Montrer que si un idéal bilatère de A contient u tel que $u(E)$ ait une base de puissance infinie P, il contient tous les endomorphismes v tels que $v(E)$ ait une base de puissance $\leqslant P$. En déduire que les seuls idéaux bilatères de A sont les ensembles d'endomorphismes u tels que $u(E)$ ait une base de puissance $\leqslant$ (resp. $<$) à un cardinal infini donné, et qu'ils forment une famille bien ordonnée par inclusion.

c) Soit F l'idéal bilatère des endomorphismes d'image finie ; tout sous-anneau B tel que $F \subset B \subset A$ est primitif. En déduire un exemple d'anneau primitif dont un quotient ait un radical $\neq (0)$ (prendre $k=Q$, $B=F+Z.1$) et un exemple d'anneau primitif dont le centre ait un radical $\neq(0)$ (prendre $k=Q$, $B=F+Z_p.1$, Z_p étant l'ensemble des fractions irréductibles dont le dénominateur ne contient pas le nombre premier p).

11) Soit A l'anneau des "polynomes" en deux lettres <u>non permutables</u> sur un corps k (c'est-à-dire l'algèbre du monoïde libre à deux générateurs x et y sur le corps commutatif k). Montrer que A est un anneau primitif (Soit E un espace vectoriel de base dénombrable (v_n) $(n \geqslant 2)$ sur k ; on considère les endomorphismes a et b de E définis par $a(v_2)=0$, $a(v_n)=v_{n-1}$ $(n>2)$, $b(v_n)=v_{n^k}$; et on considère l'homomorphisme de A dans $\mathcal{L}(E)$ défini par $\varphi(x)=a$ et $\varphi(y)=b$; on montrera d'abord que ceci définit sur E une structure de A-module simple, en constatant que, étant donnés deux vecteurs u et v de E il existe deux éléments c et d du sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ engendré par a et b tels que $c(u)=v_2$ et $d(v_2)=v$; on montrera ensuite que E est un module fidèle en construisant, étant donné un élément non nul $P\in A$, un vecteur (v_n) de la base de E non annulé par P ; pour ce faire on note, pour tout monôme (F_j) apparaissant dans P, $G_j(n)$ l'indice du vecteur v_s défini par $v_s=F_j.v_n$, n étant assez grand pour que $G_j(n)$ soit un polynome en n ; montrer que deux monômes distincts donnent lieu à des polynomes $G_j(n)$ distincts et prendre n assez grand et distinct des racines des équations $G_j(n)=G_{j'}(n)$ $(j\neq j')$;

constater qu'alors $P.v_n$ est combinaison linéaire de vecteurs (v_s) à coefficients non nuls). Montrer que l'anneau primitif A admet une infinité de modules simples et fidèles non isomorphes (considérer les structures de A-module sur E définies par $b(v_n)=v_n k$ et $b(v_n)=v_n k'$ pour $k \neq k'$).

12) Montrer que tout anneau semi-primitif ayant un élément unité, et tel que l'intersection de tous ses idéaux bilatères non nuls est $\neq (0)$, est un anneau primitif (montrer l'existence d'un idéal maximal à gauche ne contenant aucun idéal bilatère non nul).

13) Si B est un idéal bilatère et I un idéal à gauche (non nuls) de l'anneau primitif A, on a $IB \neq (0)$; en déduire que l'intersection d'une famille finie d'idéaux bilatères non nuls de A est $\neq (0)$.

14) Soit A l'anneau des endomorphismes d'image finie d'un espace vectoriel E de dimension infinie sur un corps K, et B l'algèbre obtenue à partir de A A par adjonction d'un élément unité (cf. n°6) ; montrer que B est semi-primitive mais n'est pas composée directe d'algèbres primitives.

15) On dit qu'un anneau A ayant un élément unité est un <u>anneau de Von Neumann</u> si, pour tout $a \in A$, il existe un idéal à gauche I_a supplémentaire de Aa (c'est-à-dire tel que $I_a + Aa = A$, $I_a \cap Aa = (0)$). Deux éléments a et b de A seront dits équivalents à gauche si $Aa = Ab$.

a) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A soit un anneau de Von Neumann est que tout élément $a \in A$ soit équivalent à gauche à un idempotent (écrire $1 = xa + a'$, $a' \in I_a$, et multiplier à gauche par xa, qui est idempotent). Dans ces conditions I_a est un idéal principal.

b) En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A soit un anneau de Von Neumann, est que, pour tout $a \in A$, il existe $x \in A$ tel que $a = axa$. Montrer alors que les notions d'anneau de Von Neumann définies par les idéaux à gauche et à droite sont identiques.

c) Montrer que si Ae (e:idempotent) est un idéal bilatère, e est élément du centre de l'anneau de Von Neumann A (montrer d'abord que e est élément unité du sous-anneau Ae, en considérant l'annulateur à droite de Ae).

d) Montrer que la somme de deux idéaux à gauche principaux de A est un idéal principal (si e est un idempotent équivalent à gauche à a ; on a $Aa+Ab = Ae+Ab(1-e)$; considérer $f=e+e'-ee'$, e' étant un idempotent équivalent à gauche à $b(1-e)$). En déduire que l'intersection de deux idéaux à gauche principaux est un idéal principal (passer par les annulateurs).

e) Montrer que le centre $\mathcal{C}$ d'un anneau de Von Neumann est un anneau de Von Neumann (si $a \in C$, on a $a=axa$; montrer que $x'=a^2x^3 \in C$, et que $a=ax'a$). C est un anneau sans éléments nilpotents où tout élément non diviseur de zéro est inversible.

f) Montrer (au moyen du th.3) que tout anneau de Von Neumann A est semi-primitif ; en déduire que tout idéal bilatère de A est intersection des idéaux maximaux à gauche le contenant.

g) Donner un exemple d'anneau primitif qui ne soit pas un anneau de Von Neumann (cf. exercice 10 c)). Montrer que l'anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel est un ~~anpx~~ anneau de Von Neumann.

h) Montrer qu'un anneau commutatif ayant un élément unité et tel que tout idéal principal soit intersection des idéaux maximaux le contenant est un anneau de Von Neumann. Montrer que pour qu'un anneau commutatif ayant un élément unité soit un anneau de Von Neumann, il faut et il suffit que tout idéal irréductible de cet anneau soit premier. Montrer que les idempotents d'un anneau de Von Neumann commutatif A forment un anneau booléien B pour les lois $(e,f) \to ef$ et $(e,f) \to e+f-2ef$, et que les idéaux de A et B sont en correspondance biunivoque monotone.

16) Soit A un anneau quelconque. Tout module monogène $E=Ax$ est isomorphe au module quotient $A/\mathfrak{a}(x)$, où $\mathfrak{a}(x)$ est l'annulateur de x. On dit qu'un idéal à gauche I de A est <u>unitaire</u> s'il existe une unité à droite mod. I, c'est-à-dire un élément e de A tel que $ae-a$ soit élément de I quel que soit $a \in A$.

a) Montrer que, pour que A/I soit un module monogène, il faut et il suffit que I soit un idéal à gauche unitaire. Si $I \neq A$ et si e est unité à droite mod. I, on a $e \notin I$.

b) Montrer que tout idéal à gauche maximal ne contenant pas A^2 est unitaire.

c) Montrer que l'ensemble des unités à droite modulo des idéaux non triviaux de A et l'ensemble des éléments conversibles à gauche de A sont complémentaires.

d) Montrer que l'annulateur de A/I, I étant un idéal à gauche unitaire, est le plus grand idéal bilatère contenu dans I. On dit qu'un idéal bilatère B de A est <u>primitif</u> si A/B est un anneau primitif. Montrer que les idéaux primitifs de A sont les annulateurs des modules A/I, I étant idéal unitaire maximal à gauche de A. Dans ces conditions B est l'intersection des idéaux unitaires maximaux à gauche qui le contiennent.

e) Montrer que toute unité à droite modulo un idéal à gauche non trivial est aussi unité à droite modulo un idéal à gauche unitaire maximal. En déduire une nouvelle démonstration du th.4.

Modifications au reste du chapitre.

1) La prop.5, §1 ("un anneau semi-primitif à module semi-simple et fidèle de longueur finie est primitif") étant canulée (cf. exerc. 14), il convient de démontrer ainsi le th. de Wedderburn (th.3, n°3, §3) : la prop.3 (p.18, bas, état 2) est inchangée ; ensuite :

"Soit A un anneau d'Artan semi primitif et soit (B_i) une famille finie minimale d'idéaux bilatères primitifs telle que $\bigcap_i B_i = (0)$, et soit E_i un module simple et fidèle annulé par B_i ; d'après la démonstration du th.2, E_i est un espace vectoriel de dimension finie n_i sur le corps commutant K_i de A relatif à E_i puisque l'anneau quotient A/B_i est un anneau d'Artin primitif. Considérons l'anneau produit $\prod_i A/B_i$ et l'application φ de A dans $\prod_i A/B_i$ définie par $\varphi(a)=(a+B_i)$ pour tout $a \in A$; il est clair que φ est un homomorphisme, et, en vertu de la minimalité de la famille (B_i), c'est un isomorphisme de A dans $\prod_i A/B_i$. Il s'agit de montrer que φ est un isomorphisme de A <u>sur</u> $\prod_i A/B_i$; soit E le module $\sum_i E_i$; c'est un module semi-simple et fidèle sur A et sur $\prod_i A/B_i$; et il est clair que $\prod_i A/B_i$ est contenu dans le <u>bicommutant</u> de A ; si (x_{ij}) $(1 \leqslant j \leqslant n_i)$ est une base de E_i sur K_i, il existe donc (th.2, §1) pour tout $\alpha \in \prod_i A/B_i$, un élément $a \in A$ tel que $a.x_{ij}=\alpha.x_{ij}$ pour tous i et j ; ceci veut dire que les opérateurs externes a et α (sur E) sont égaux, c'est-à-dire que φ est un isomorphisme de A sur $\prod_i A/B_i$. On en déduit donc le théorème suivant : ..... "

2) Le th.1 (p.25) sur les produits tensoriels de corps commutatifs étant canulé, on ne démontrera que le th. suivant :

<u>Théorème</u> 1 - <u>Le produit tensoriel</u> $E \otimes F$ <u>d'une extension finie</u> E <u>et d'une extension quelconque</u> F <u>d'un corps</u> k <u>est une algèbre semi-primitive si l'une des deux extensions</u> E <u>ou</u> F <u>est séparable</u>.

a) Comme E est finie sur k, $E \otimes F$ est un anneau d'Artin. On est donc ramené à l'étude de ses éléments nilpotents.

b) En caractéristique 0, on utilise le th. de l'élément primitif pour E, et on se sert de la méthode du bas de la p.24.

c) En caractéristique $p \neq 0$; on remarque que, si $x \in E \otimes F$ est nilpotent on a $x^{p^f} = 0$ pour f assez grand. On suppose, par exemple, que F est séparable et on écrit $x = \sum_\lambda x_\lambda f_\lambda$ ($x_\lambda \in E$, (f_λ) : base de F sur k) ; on a alors $0 = x^{p^f} = \sum_\lambda x_\lambda^{p^f} f_\lambda^{p^f}$, ce qui montre, si $x \neq 0$, que les $f_\lambda^{p^f}$ ne sont pas linéairement indépendants sur k d'après la définition du produit tensoriel ; ceci contredit la séparabilité de F.
