RÉDACTION N° 123

COTE NBR 030

TITRE AXIOME DE FAMILLES D'ENSEMBLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 3

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 3

CONSULTABLE ULTERIEUREMENT

Archives

NBR030 123 2

AXIOME DES FAMILLES D'ENSEMBLES.

Je propose de commencer le paragraphe sur les familles d'ensembles à peu près comme suit.

Soit I un ensemble. Soit R une relation typique à deux arguments, l'un i du type "élément de I" , l'autre X du type "ensemble". (On est canulé si I est vide ; il y a là un point qui n'est pas encore bien clair : est-il vraiment nécessaire de s'interdire d'écrire des arguments d'un type avant de savoir que ce type n'est pas vide ? On pourrait s'en tirer comme suit : on dirait que le type des éléments de I est défini non pas par la relation "$i \in I$" mais par la relation "si I n'est pas vide, $i \in I$ "). Quoiqu'il en soit de ce canular, supposons que R soit fonctionnelle en X . On dit alors que la relation R définit une <u>famille d'ensembles</u> indexée par I ; " X est <u>membre</u> de cette famille " signifie $(\exists i)\, R(i,X)$.

Les axiomes précédemment posés ne permettent pas d'affirmer que la relation R définit une application de I dans un ensemble d'ensembles : pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un ensemble Y tel que $(\exists i)R(i,X) \Rightarrow (X \in Y)$ soit vraie. On peut alors en effet construire la partie F de $I \times Y$ définie par la condition que $(i,X) \in F$ soit équivalente à $R(i,X)$, et F est une application de I dans Y . On va en fait poser un axiome (en réalité un schéma d'axiomes) plus fort, à savoir :

" <u>Si</u> R <u>est une relation du type décrit plus haut, alors il existe un ensemble</u> Z <u>tel que</u> $(\exists i)R(i,X)$ <u>entraîne</u> $X \subset Z$ " .

Ceci entraîne bien l'existence d'un ensemble Y dont membres de la famille soient éléments, puisque $X \subset Z$ entraîne $X \in P(Z)$.

- Suite -

Une fois posé cet axiome, on peut définir la réunion ou l'intersection d'une famille (non vide dans le cas de l'intersection) d'ensembles, et on n'a plus à se poser la question gênante de savoir si la réunion d'une famille de parties d'un sous-ensemble A d'un ensemble E est bien la même, que l'on considère les membres de la famille comme des parties de A ou de E . De même pour le produit d'une famille d'ensembles. De plus, si E,F,G sont par exemple trois ensembles, on a l'ensemble $\{E,F,G\}$; cela permet de ramener sans difficulté la notion de réunion ou intersection de deux (ou trois,...) ensembles à celle de réunion d'une famille d'ensembles.

Enfin, l'axiome que je propose est bien entendu indispensable pour faire la théorie des ordinaux et cardinaux.
