# RÉDACTION N° 122

COTE : NBR 029

TITRE : LE RADICAL D'UN ANNEAU

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 9

NOMBRE DE FEUILLES : 9

NBR 029 122 2

# LE RADICAL D'UN ANNEAU

(Contre-rédaction ROGER)

## 1. Représentations linéaires.

Etant donnés un anneau A d'éléments $a, b, c, \ldots$ et un A-module à gauche (resp. à droite) E d'éléments $x, y, z, \ldots$, l'application $x \to ax$ (resp. $x \to xa$) est une transformation linéaire $T_a$ de E en lui-même : $T_a(x+y) = T_a x + T_a y$, ou encore un endomorphisme de E ; et l'application $a \to T_a$ est une représentation des éléments de A par des endomorphismes de E, c'est-à-dire une correspondance conservant la somme : $T_{a+b} = T_a + T_b$ et conservant le produit : $T_{ab} = T_a T_b$ (resp. inversant l'ordre du produit : $T_{ab} = T_b T_a$ ).

Définition 1.- On appelle représentation linéaire gauche (resp. droite) d'un anneau A dans un groupe commutatif E noté additivement, tout homomorphisme de A (resp. de l'anneau opposé de A) dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E .

Quand nous ne préciserons pas le côté, c'est qu'il s'agira de représentations linéaires gauches, donc de A-modules à gauche.

Définition 2.- Deux représentations linéaires d'un anneau A dans deux groupes commutatifs E et E' sont dites équivalentes (ou semblables ?) si les A-modules E et E' sont isomorphes, c'est-à-dire s'il existe une application biunivoque $x' = \varphi(x)$ de E sur E' telle que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad , \qquad a\varphi(x) = \varphi(ax)$$

quels que soient $x \in E$ , $y \in E$ , $a \in A$ .

Etant donnés un A-module E et une partie quelconque E' de E , nous appellerons annulateur de E' (chap.II, § 1, n°9) et nous noterons $\mathfrak{A}(E') = A'$ , l'ensemble des éléments $a'$ de A tels que $a'x' = 0$ quel que soit $x' \in E'$ ; manifestement A' est un idéal à gauche de A . Si $E' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E'_\lambda$ , on a $\mathfrak{A}(E') = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}(E'_\lambda)$ ; en particulier

 



$\mathfrak{A}(E') = \bigcap_{x' \in E'} \mathfrak{A}(x')$ en notant $\mathfrak{A}(x')$ l'annulateur de la partie $\{x'\}$ réduite au seul élément x' de E . Si E' est un sous-module de E , son annulateur $\mathfrak{A}(E')$ est un idéal bilatère. En particulier, il en est ainsi de l'annulateur du module E lui-même, qu'on appelle le noyau de la représentation linéaire corrèspondante. Les A-modules E dont l'annulateur est A tout entier seront dits modules triviaux ; tandis que ceux dont l'annulateur est nul seront dits modules fidèles par ce qu'alors l'homomorphisme de la définition 1 est un isomorphisme en sorte que les éléments de A sont fidèlement représentés par les transformations linéaires correspondantes de E en lui-même.

Nous dirons d'une représentation linéaire de A dans E qu'elle est algèbriquement irréductible lorsque, dans leur ensemble, les transformations linéaires correspondantes ne laissent invariant aucun vrai sous-groupe de E ; ou encore :

Définition 3.- Une représentation linéaire d'un anneau A dans un groupe commutatif E est dite algèbriquement irréductible si le A-module E est simple, c'est-à-dire ne possède d'autres sous-modules que lui-même et $\{0\}$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un A-module non trivial E soit simple est que, pour tout couple x,y d'éléments de E avec $x \neq 0$ , on puisse résoudre $ax = y$ pour au moins un $a \in A$ . La condition est évidemment suffisante ; sa nécessité résulte de la proposition suivante :

Proposition 1.- Tout A-module simple non trivial E est monogène et peut être engendré par n'importe lequel de ses éléments non nuls.

Car l'ensemble E' des éléments x' de E qui sont annulés par A tout entier, est un sous-module de E ; comme E est simple et non trivial, E' se réduit à $\{0\}$ ; en sorte que le sous-module de E de la forme $Ax_0$ où $x_0 \in E$ , $x_0 \neq 0$ , ne pouvant être $\{0\}$ coïncide avec E lui-même.

## 2. Structure des modules monogènes. Idéaux unitaires. Eléments conversibles.

Proposition 2.- *Tout A-module monogène $E = Ax_0$ est isomorphe au A-module interne $A/\mathfrak{a}(x_0)$ où $\mathfrak{a}(x_0)$ est l'idéal à gauche annulateur de $x_0$.*

En effet, les éléments de $E$, $x = ax_0$, et les classes $\bar{a}$ d'éléments de $A$ modulo l'annulateur $\mathfrak{a}(x_0)$, sont en correspondance biunivoque, cette correspondance respectant la somme et la multiplication par les éléments de $A$.

En particulier, il existe toute une classe d'éléments $e$ de $A$ tel que $ex_0 = x_0$ d'où, quel que soit $a \in A$, $ae\, x_0 = ax_0$ soit $ae = a \in \mathfrak{a}(x_0)$.

Définition 4.- *Un idéal à gauche $A'$ distinct de $A$ est dit unitaire s'il existe une unité à droite $e$ modulo $A'$, c'est-à-dire un élément $e$ de $A$ (défini modulo $A'$) tel que $ae - a \in A'$ quel que soit $a \in A$.*

Etant donné un idéal à gauche unitaire $A'$, relativement aux classes $\bar{a}$ du A-module interne $A/A' = \bar{A}$, on a $a\bar{e} = \overline{ae} = \bar{a}$ quel que soit $a \in A$ ; en sorte que $\bar{A}$ est engendré par la classe $\bar{e}$ des unités à droite modulo $A'$. En définitive :

Proposition 3.- *Pour qu'un A-module interne $A/A'$ soit monogène, il faut et il suffit que l'idéal à gauche $A'$ soit unitaire.*

Remarques.- 1°) Si $A$ admet un élément unité, tout idéal à gauche (ou à droite) est unitaire.

2°) Tout idéal à gauche contenant un idéal unitaire est unitaire.

3°) Si un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ est unitaire en tant qu'idéal à gauche et à droite, l'anneau quotient $A/\mathfrak{a}$ possède un élément unité, et réciproquement.

Proposition 4.- *Une unité à droite $e$ non triviale, c'est-à-dire modulo un idéal à gauche $A'$ distinct de $A$, n'appartient jamais à l'idéal unitaire $A'$ correspondant.*

 



En effet, de $e \in A'$ et $ae-a \in A'$ quel que soit $a \in A$, on déduit $ae \in A'$ et $a = ae-(ae-a) \in A'$.

Dès lors il est impossible de trouver un élément $a$ de $A$ tel que $ae-a = e$.

Définition 5.- Un élément $c$ de $A$ est dit conversible à gauche dans $A$ lorsqu'il existe un élément $b$ de $A$ (dit converse à gauche de $c$) tel que $bc-b-c = 0$ ; l'élément $b$ est alors dit conversable à droite, de converse à droite $c$. Un élément conversible à la fois à droite et à gauche est dit conversible.

Remarques.- 1°) Lorsque l'anneau $A$ admet un élément unité $e_o$, il revient au même de dire qu'un élément $c$ de $A$ est conversible à gauche (resp. à droite) ou que l'élément $e_o-c$ est inversible à gauche (resp. à droite).

2°) De même qu'un élément inversible admet un seul inverse, un élément conversible admet un seul converse. Car de $bc-b-c = 0$ et $cb'-c-b' = 0$ résulte $bcb'-bb'-cb'=0$ et $bcb'-bc-bb'=0$ d'où $bc = cb'$ et $b + c = c + b'$ : $b=b'$.

Nous venons de voir qu'une unité à droite $e$ non triviale n'est jamais conversible à gauche dans $A$. Inversement, soit $c$ un élément de $A$ conversible à gauche dans $A$ ; $c$ ne peut être unité à droite que modulo un idéal à gauche contenant l'ensemble des éléments de la forme $ac-a$ où $a$ parcourt $A$ ; or cet ensemble est un idéal à gauche $A'$ : il est unitaire et contient l'unité à droite correspondante $c$ (pour $a$ converse à gauche de $c$) donc (prop.4) il se confond avec $A$. Dès lors :

Proposition 5.- L'ensemble des unités à droite dans $A$ non triviales, c'est-à-dire modulo un idéal à gauche quelconque mais distinct de $A$, et l'ensemble des éléments conversibles à gauche dans $A$, sont complémentaires.

NBR 029 6



Proposition 6.- Etant donné un idéal à gauche unitaire A', l'annulateur $\mathfrak{A}(A/A')$ est le plus grand idéal bilatère contenu dans A'.

$\mathfrak{A}(A/A')=A''$ est, en effet, l'ensemble des éléments a" de A tels que $a''a \in A'$ quel que soit $a \in A$ ; en particulier, pour une unité à droite e modulo A', $a''e \in A'$ ; mais aussi $a''e-a'' \in A'$ d'où $a'' \in A'$ soit $A'' \subset A'$. Par ailleurs, soit B' un idéal à droite de A , contenu dans A' ; quels que soient $b' \in B'$, $a \in A$, on a $b'a \in B' \subset A'$ d'où $B' \subset A''$ ; en sorte que l'idéal à droite (et même bilatère) $\mathfrak{A}(A/A')=A''$ est le plus grand idéal à droite contenu dans l'idéal à gauche unitaire A' .

3. Idéaux maximaux. Idéaux primitifs. Radical.

Etant donnés un anneau A et un idéal à gauche A', si le A-module interne A/A' n'est pas simple, c'est qu'il possède un vrai sous-module ; l'ensemble A" des éléments a" de A appartenant aux classes modulo A' qui forment ce sous-module, est manifestement un idéal à gauche de A , strictement compris entre A et A'. Inversement, s'il existe un idéal à gauche A" strictement compris entre A et A', les classes modulo A' des éléments de A" formant un vrai sous-module de A/A'. En sorte qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un A-module interne A/A' soit simple est que A' soit un idéal à gauche maximal (*).

Dès lors, ou bien A/A' est annulé par A , autrement dit $A^2$ appartient à A', ou bien A/A' est monogène donc A' est unitaire : tout idéal à gauche maximal ne contenant pas l'idéal bilatère $A^2$ est ~~bx~~ unitaire.

En définitive, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.- Tout A-module simple non trivial E est isomorphe à un A-module interne A/A' où A' est un idéal à gauche de A maximal et unitaire, l'annulateur d'un élément convenable de E .

(*) voir la note, p.11, de la rédaction Samuel.

Bien entendu, suivant l'élément x choisi dans E , on associe ainsi à E une infinité d'idéaux $A' = \mathfrak{a}(x)$ ayant en commun l'annulateur de E : $\mathfrak{a}(E) = \bigcap_{x \in E} \mathfrak{a}(x)$ .

A' étant un idéal à gauche de A , maximal et unitaire, le A-module interne A/A' est simple et un annulateur $\mathfrak{a}(A/A')$ est contenu dans A' (prop.6). De sorte qu'en passant aux quotients par $\mathfrak{a}$ , B/B' où $B = A/\mathfrak{a}$ et $B' = A'/\mathfrak{a}$ est un B-module interne, simple comme l'est A/A' et de plus fidèle.

Définition 6.- Un anneau B est dit primitif à gauche (resp. à droite) s'il admet un B-module à gauche (resp. à droite) simple et fidèle. Un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ d'un anneau A est dit primitif à gauche (**) (resp. à droite) si l'anneau quotient $A/\mathfrak{a}$ est primitif à gauche (resp. à droite).

Soit donc un idéal bilatère primitif à gauche $\mathfrak{a}$ : il existe un $A/\mathfrak{a}$ -module à gauche simple et fidèle E . Si, pour tout $a \in A$ et $x \in E$ , nous posons $ax = \bar{a}x$ où $\bar{a}$ est la classe dans A de l'élément a modulo $\mathfrak{a}$ , nous organisons E en A-module. Celui-ci est simple et un annulateur est $\mathfrak{a}$ . Par unité :

Proposition 7.- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de A soit l'annulateur d'un A-module simple E est que l'idéal $\mathfrak{a}$ soit primitif.

De plus $\mathfrak{a} = \bigcap_{x \in E} \mathfrak{a}(x)$ où chaque $\mathfrak{a}(x)$ pour $x \neq 0$ est un idéal à gauche maximal et unitaire. Dès lors :

Proposition 8.- Tout idéal bilatère primitif à gauche $\mathfrak{a}$ de A est l'intersection des idéaux à gauche maximaux et unitaires qui le contiennent.

(**) Ou mieux peut être : idéal de primitivité à gauche ; car ce n'est pas $\mathfrak{a}$, en tant que sous-anneau de A , qui est primitif, mais l'anneau quotient $A/\mathfrak{a}$ .

Théorème 2 (Ségal).- Toute unité à droite e modulo un idéal à gauche A' distinct de A , l'est aussi modulo un idéal à gauche maximal.

Car e étant unité à droite dans A modulo A', l'est aussi modulo tout idéal à gauche A" contenant A' et, si A" est distinct de A , resté, d'après la proposition 4, étranger à A". Il suffit alors d'appliquer le théorème de Zorn.

Proposition 9.- Tout idéal bilatère maximal et unitaire $\mathfrak{a}$ de A est primitif à gauche et à droite.

En effet, $\mathfrak{a}$ étant unitaire est, d'après le théorème 2, contenu dans au moins un idéal à gauche (resp. à droite) maximal et unitaire A' ; et étant maximal ne peut, d'après la proposition 6 , qu'être confondu avec l'annulateur $\mathfrak{a}$ (A/A').

Définition 7.- Etant donné un anneau A , on appelle radical à gauche $\mathcal{R}_g(A)$ l'ensemble des éléments de A qui annulent tout A-module à gauche simple.

D'après la proposition 7 , $\mathcal{R}_g(A)$ est donc l'idéal bilatère, intersection de tous les idéaux bilatères primitifs à gauche de A . C'est aussi (prop.8) l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux et unitaires de A .

Proposition 10.- Le radical à gauche d'un anneau A est l'ensemble des éléments de A dont tous les multiples à gauche sont conversibles à gauche dans A .

1°) Tout élément de A non conversible à gauche est étranger à $\mathcal{R}_g(A)$.

Car, d'après la proposition 5, un tel élément est unité à droite e modulo un idéal gauche A' distinct de A . D'après le théorème 2 , il l'est aussi modulo un idéal maximal auquel il est étranger.

Dès lors, tout élément $c_o$ de $\mathcal{R}_g(A)$ est conversible à gauche dans A et comme $\mathcal{R}_g(A)$ est un idéal à gauche (et même bilatère), il en est de même de tous les multiples à gauche de la forme $ac_o$ où a parcourt A .

NBK029 9



2°) Tout élément étranger à $\mathcal{R}_g(A)$ possède un multiple à gauche non conversible à gauche dans A . Soit, en effet, $a_o \notin \mathcal{R}_g(A)$ ; d'après la définition 7, il existe un A-module à gauche simple E possédant un élément $x_o$ (nécessairement $\neq 0$) tel que $a_o x_o \neq 0$ . D'après la proposition 1, E est de la forme $A(a_o x_o)$ ; il existe donc un élément $b_o$ de A tel que $b_o(a_o x_o) = x_o$ . Et le multiple à gauche $b_o a_o$ de $a_o$ étant unité à droite modulo l'annulateur $\mathfrak{A}(x_o)$ distinct de A puisque ne contenant pas $a_o$, n'est pas conversible à gauche dans A , d'après la proposition 5 .

Théorème 3.- Etant donné un anneau A , il existe un idéal bilatère dont tous les éléments sont conversibles et dont tous les éléments étrangers possèdent au moins un multiple non conversible. Ce plus grand idéal bilatère d'éléments conversibles coïncide avec le radical à gauche ~~xxxxx~~ aussi bien qu'avec le radical à droite : c'est le radical de l'anneau A .

D'après la proposition 10 (2°), il suffit de montrer que tout élément de $\mathcal{R}_g(A)$ est conversible. Or, d'après la proposition 10 (1°), un tel élément $c_o$ est conversible à gauche : il existe dans A un élément $b_o$ (alors conversible à droite) tel que $b_o c_o - b_o - c_o = 0$ ; mais $b_o c_o \in \mathcal{R}_g(A)$ d'où $b_o = b_o c_o - c_o \in \mathcal{R}_g(A)$. $b_o$ est donc aussi conversible à gauche, donc admet un seul converse qui est alors $c_o$ .

-----------