LIVRE IV
CHAPITRE V (ETAT 2)
EQUATIONS DIFFERENTIELLES
(THEORIE ELEMENTAIRE)

Rédaction n° 117

Nombre de pages : 64

Nombre de feuilles : 64

Livre IV Chap. V. $\boxed{\text{Etat 2}}$
Equations différentielles

$\boxed{117}$

Delsarte

A 117

LIVRE IV

CHAPITRE V (Etat 2)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(Théorie élémentaire)

------

§ 1. Théorèmes d'existence.

1. La notion d'équation différentielle.

D'une façon générale, une équation différentielle (par rapport à la variable réelle x) est une relation entre un élément x d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, une application dérivable y de I dans un espace vectoriel topologique E sur le corps $\mathbb{R}$, et sa dérivée y'. Une application dérivable u de I dans E est dite solution (ou intégrale) de l'équation différentielle si, en remplaçant y et y' par u et u' dans la relation donnée, la relation obtenue est vraie pour tout $x \in I$.

Par exemple, pour $I = E = \mathbb{R}$, les relations

$$y' = 2x \quad , \quad xy' - 2y = 0 \quad , \quad y'^2 - 4y = 0$$

sont des équations différentielles, qui admettent toutes trois pour solution la fonction x^2.

Dans ce chapitre, nous ne considèrerons que le cas où E est un espace normé complet sur $\mathbb{R}$, et où les équations différentielles sont des relations de la forme

$$(1) \qquad y' = f(x, y)$$

où f est une fonction définie dans $I \times H$, (H étant une partie ouverte de E), à valeurs dans E. Nous élargirons d'autre part un peu la notion de solution (ou intégrale) d'une telle équation en désignant sous ce nom une fonction u, définie et continue dans I, à valeurs dans H, admettant une dérivée sauf aux points d'une partie dénombrable A de I, et telle que pour tout $x \in I \cap \complement A$, on ait $u'(x) = f(x, u(x))$;

si u est dérivable et vérifie la relation précédente en <u>tout point</u> de I, nous dirons que c'est une solution <u>stricte</u> de (1).

Dans le cas particulier d'une équation différentielle de la forme $y' = f(x)$, f étant une application de I dans E, les solutions au sens précédent sont donc les <u>primitives</u> de la fonction f, et les solutions strictes sont les <u>primitives strictes</u>.

Un cas particulier important d'équation différentielle de la forme (1) est celui où $E = \mathbb{R}^n$; en posant $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $f = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, l'équation (1) est alors équivalente au système d'équations

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{2}$$

appelé <u>système d'équations différentielles scalaires</u>. Si $u = (u_i)$ est une solution de ce système, la partie de l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ définie par les relations $x \in I$, $y_1 = u_1(x)$, $y_2 = u_2(x), \ldots, y_n = u_n(x)$, est appelée <u>courbe intégrale</u> du système (2).

On ramène aussitôt aux systèmes (2) les relations de la forme

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) \tag{3}$$

où y est une fonction numérique n fois dérivable dans I (<u>équation différentielle scalaire d'ordre n</u>) ; en posant en effet $y_1 = y$, $y_p = y^{(p-1)}$ pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la relation (3) est équivalente au système

$$\begin{cases} y'_i = y_{i+1} & (1 \leqslant i \leqslant n-1) \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) . \end{cases} \tag{4}$$

<u>2. Equations différentielles admettant pour solutions des primitives de fonctions réglées.</u>

Nous allons nous restreindre aux équations différentielles (1) dont toute solution est primitive d'une fonction <u>réglée</u> dans I. Cette condition est évidemment satisfaite si pour toute application <u>continue</u> z de I dans H, $f(x, z(x))$ est réglée dans I ; le lemme suivant donne une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi :

<u>Lemme 1.- Soit</u> f <u>une application de</u> $I \times H$ <u>dans</u> E <u>telle que, en désignant par</u> f_y <u>(pour tout</u> $y \in H$) <u>l'application</u> $x \to f(x,y)$ <u>de</u> I <u>dans</u> E , <u>les conditions suivantes soient satisfaites</u> : 1° f_y <u>est règlée dans</u> I ; 2° <u>l'application</u> $y \to f_y$ <u>de</u> H <u>dans</u> $\mathcal{F}(I,E)$ <u>est continue quand on munit</u> $\mathcal{F}(I,E)$ <u>de la topologie de la convergence compacte. Dans ces conditions, pour toute application continue</u> z <u>de</u> I <u>dans</u> H , $x \longrightarrow f(x, z(x))$ <u>est règlée dans</u> I .

En effet, soit a un point de I distinct de son extrêmité et soit $[a,b]$ un intervalle compact non réduit à un point, contenu dans I ; par hypothèse pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la relation $\|y_1 - y_2\| \leqslant \delta$ entraîne $\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$; d'autre part, il existe $h > 0$ tel que pour $a < x < a+h$, on ait $\|z(x) - z(a)\| \leqslant \delta$, d'où $\|f(x, z(x)) - f(x, z(a))\| \leqslant \varepsilon$; comme $x \to f(x, z(a))$ est règlée, elle tend vers une limite c lorsque x tend vers a en restant $> a$; $f(x, z(x)) - c$ est donc aussi petit qu'on veut lorsque x est $> a$ et assez voisin de a , ce qui montre que c est limite à droite de $f(x, z(x))$ au point a . On voit de même que $f(x, z(x))$ admet une limite à gauche en tout point de I distinct de son origine, d'où le lemme.

Nous supposerons désormais, dans tout ce qui suit, que les conditions du lemme sont vérifiées. On notera qu'il en est toujours ainsi dans le cas (le plus important) où f est <u>continue</u> dans $I \times H$; en outre, dans ce cas $f(x, z(x))$ est <u>continue</u> dans I pour toute application continue z de I dans H ; donc toute solution de (1) est alors une solution <u>stricte</u>.

Cela étant, soit x_0 un point de I ; si une solution u de (1) prend la valeur $y_0 \in H$ au point x_0 , on a, pour tout $x \in I$

$$(5) \qquad u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt$$

puisque $f(x, u(x))$ est une fonction règlée dans I . Réciproquement, si une fonction u , continue dans I , satisfait à la relation (5) (qui a un sens, puisque $f(x, u(x))$ est règlée), elle est solution de l'équation (1) et prend la valeur y_0 au point x_0 . Nous allons dans ce qui suit nous donner (arbitrairement) y_0 dans H et chercher s'il existe dans I (ou dans un intervalle contenant x_0 et contenu dans I) des solutions de (1) prenant la valeur y_0 au point x_0 , ou, ce qui revient au même, des solutions de l'équation (5).

On notera qu'il résulte de la relation (5) qu'en tout point de I distinct de l'origine (resp. l'extrémité), u admet une dérivée à gauche (resp. à droite) égale à la limite à gauche (resp. à droite) de la fonction $f(t, u(t))$ en ce point.

3. Formation de solutions approchées.

Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$, nous dirons qu'une application continue u de I dans H est une solution approchée de (1) à ε près, si, en tous les points du complémentaire par rapport à I d'un ensemble dénombrable, u admet une dérivée qui satisfait à la condition

$$(6) \qquad \| u'(x) - f(x, u(x)) \| \leqslant \varepsilon$$

Soit S une boule ouverte de centre y_0 et de rayon r , contenue dans H , et telle que $f(x, y)$ soit bornée dans $I \times S$; nous désignerons par M la borne supérieure de $\| f(x, y) \|$ dans cet ensemble. Alors

PROPOSITION 1.- Dans tout intervalle compact d'origine (ou d'extrémité) x_0 , contenu dans I et de longueur $\leqslant r/(M+\varepsilon)$, il existe une solution approchée de (1) à ε près, à valeurs dans S et prenant la valeur y_0 au point x_0 .

Nous allons supposer que x_0 n'est pas l'extrémité de I , et démontrer la proposition pour les intervalles d'origine x_0 . Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des solutions approchées de (1) à ε près, définies dans un intervalle non réduit à un point et d'origine x_0 , contenu dans I , prenant leurs valeurs dans S et égales à y_0 au point x_0 . Montrons d'abord que $\mathfrak{M}$ n'est pas vide. Soit c la limite à droite de $f(x, y_0)$ au point x_0 ; d'après le lemme 1, la fonction $f(x, y_0+c(x-x_0))$ a une limite à droite égale à c au point x_0 , donc la fonction $y_0+c(x-x_0)$ appartient à $\mathfrak{M}$.

En second lieu, ordonnons l'ensemble $\mathfrak{M}$ par la relation " v est un prolongement de u " , et montrons que $\mathfrak{M}$ est <u>inductif</u>. En effet, soit (u_α) une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{M}$, u_β étant donc un prolongement de u_α pour $\alpha \leqslant \beta$; soit $[x_0, b_\alpha[$ l'intervalle où u est définie. La réunion des $[x_0, b_\alpha[$ est un intervalle d'origine x_0 , et si b est son extrémité, il existe une fonction et une seule u définie dans $[x_0, b[$ et coïncidant avec u_α dans $[x_0, b_\alpha[$ pour tout α ; parmi les b_α , il existe une suite (b_{α_n}) croissante et tendant vers b ; tout point de $[x_0, b[$ appartenant à un intervalle $[x_0, b_{\alpha_n}[$, on voit que u est une solution approchée de (1) à ε près dans $[x_0, b[$ et est donc la borne supérieure des u_α . Enfin, quels que soient les points y,z de $[x_0, b[$, on a d'après le théorème des accroissements finis, $\| u(y)-u(z) \| \leqslant (M+\varepsilon)|y-z|$; le critère de Cauchy montre donc que u admet une limite à gauche au point b , et en prolongeant u par continuité en ce point, on définit u dans $[x_0, b]$, et u appartient alors à $\mathfrak{M}$ sauf si b est l'extrémité de I et n'appartient pas à I .

D'après le th. de Zorn, $\mathfrak{M}$ admet un élément maximal u_0 ; nous allons montrer que si x_1 est l'extrémité de l'intervalle où est définie u_0, ou bien x_1 est l'extrémité de I, ou bien on a $x_1 - x_0 \geq r/(M+\varepsilon)$. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'aucune de ces deux hypothèses ne soit vérifiée ; alors, on vient de voir qu'on peut supposer u_0 définie dans $[x_0, x_1]$; soit $y_1 = u_0(x_1)$, et soit c_1 la limite à droite au point x_1 de la fonction $f(x, y_1)$; le même raisonnement qu'au début de la démonstration prouve qu'on peut prolonger u_0 dans un intervalle d'origine x_1 par la fonction $y_1 + c_1(x - x_1)$, de sorte que la fonction prolongée appartienne encore à $\mathfrak{M}$, ce qui est absurde. La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION 2.- <u>L'ensemble des solutions approchées de (1) à ε près, définies dans un même intervalle $J \subset I$ et prenant leurs valeurs dans S, est uniformément équicontinu.</u>

En effet, si u est une fonction quelconque appartenant à cet ensemble, y et z deux points quelconques de J, on a, d'après le th. des accroissements finis, $\| u(y) - u(z) \| \leq (M+\varepsilon) | y - z |$.

COROLLAIRE (théorème de Peano).- <u>Si E est de dimension finie, dans tout intervalle compact J d'origine (ou d'extrémité) x_0, contenu dans I et de longueur $< r/M$, il existe une solution de (1) à valeurs dans S, prenant la valeur y_0 au point x_0.</u>

En effet, dès que n est assez grand, il existe une solution approchée u_n de (1) à $1/n$ près, définie dans J, à valeurs dans S, et égale à y_0 au point x_0. L'ensemble des u_n est équicontinu, et comme E est de dimension finie, S est relativement compact, donc l'ensemble des $u_n(x)$ est relativement compact pour tout $x \in J$. D'après le th. d'Ascoli, l'ensemble des u_n est donc relativement compact dans l'espace $\mathcal{F}(J, E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Il existe par suite une suite (u_{n_k}) extraite de (u_n) qui converge uniformément dans J vers une limite u ; d'après l'hypothèse, $f(x, u_{n_k}(x))$ converge aussi uniformément dans J vers $f(x, u(x))$; il en résulte (chap. II, § 1, th. 1) que u est solution de (1), à valeurs dans S et évidemment égale à y_0 au point x_0.

Remarque.- Il peut exister une infinité d'intégrales de (1) prenant la même valeur en un point donné. Par exemple l'équation différentielle scalaire $y'=2\sqrt{|y|}$ admet pour intégrales prenant la valeur 0 au point $x=0$ toutes les fonctions définies par

$$u(x)=0 \quad \text{pour} \quad -\beta \leqslant x \leqslant \alpha$$
$$u(x)=-(x+\beta)^2 \quad \text{pour} \quad x \leqslant -\beta$$
$$u(x)=(x-\alpha)^2 \quad \text{pour} \quad x \geqslant \alpha$$

quels que soient les nombres positifs α et β.

4. Comparaison des solutions approchées.

DÉFINITION 1.- On dit qu'une application f de $I \times H$ dans E est lipschitzienne si pour tout $y \in H$ l'application $x \to f(x,y)$ est réglée dans I, et s'il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que, pour tout $x \in I$ et tout couple de points y_1, y_2 de H, on ait

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leqslant k \| y_2 - y_1 \| \tag{7}$$

Il est immédiat qu'une fonction lipschitzienne satisfait aux conditions du lemme 1 (la réciproque étant inexacte) ; lorsque f est lipschitzienne, on dit que l'équation différentielle (1) est lipschitzienne.

Exemple.- Lorsque $E = \mathbb{R}$, et que H est un intervalle dans $\mathbb{R}$, si en tout point (x,y) de $I \times H$ la fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ telle que $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leqslant k$ dans $I \times H$, la condition (7) est vérifiée en raison du th. des accroissements finis.

9

La condition (7) entraîne en particulier que pour toute boule $S \subset H$, f est bornée dans $I \times S$. La prop.1 est donc applicable et démontre l'existence de solutions approchées de (1). Mais en outre, on a le théorème suivant qui permet de comparer deux quelconques de ces solutions:

THÉORÈME 1.-Soit f une fonction lipschitzienne (pour la constante k) dans $I \times H$. Si u et v sont deux solutions approchées de (1) à ε_1 et ε_2 après respectivement, prenant leurs valeurs dans H, on a, pour tout $x \in I$

$$(8) \qquad \| u(x) - v(x) \| \leq \| u(x_0) - v(x_0) \| \, e^{k|x-x_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{(e^{k|x-x_0|} - 1)}{k}$$

En effet, on déduit d'abord des hypothèses, par application du th. des accroissements finis, que l'on a

$$\left\| u(x) - u(x_0) - \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt \right\| \leq \varepsilon_1 |x - x_0|$$

$$\left\| v(x) - v(x_0) - \int_{x_0}^{x} f(t, v(t))dt \right\| \leq \varepsilon_2 |x - x_0|$$

d'où

$$\| u(x) - v(x) \| \leq \| u(x_0) - v(x_0) \| + \left\| \int_{x_0}^{x} (f(t, u(t)) - f(t, v(t)))dt \right\| + $$
$$+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) |x - x_0|$$

Supposons par exemple que $x > x_0$; alors, d'après (7), on a

$$\left\| \int_{x_0}^{x} (f(t, u(t)) - f(t, v(t)))dt \right\| \leq \int_{x_0}^{x} \| f(t, u(t)) - f(t, v(t)) \| dt \leq$$
$$\leq k \int_{x_0}^{x} \| u(t) - v(t) \| dt$$

d'où, en posant $w(x) = \| u(x) - v(x) \|$, $a = \| u(x_0) - v(x_0) \|$, $b = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$$(9) \qquad w(x) \leq a + b(x - x_0) + k \int_{x_0}^{x} w(t)dt$$

Si $g(x) = \int_{x_0}^{x} w(t)dt$, cette relation s'écrit aussi

$$g'(x) - kg(x) \leq a + b(x - x_0)$$

ou encore, si $h(x) = g(x)e^{-k(x-x_0)}$

$$h'(x) \leq (a + b(x - x_0))e^{-k(x-x_0)}$$

Appliquant le th. des accroissements finis à cette inégalité, il vient, par un calcul élémentaire

$$g(x) \leqslant \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{k^2}\right)(e^{k(x-x_0)}-1) - \frac{b(x-x_0)}{k}$$

et, en portant dans (9)

$$w(x) \leqslant ae^{k(x-x_0)} + \frac{b}{k}(e^{k(x-x_0)}-1)$$

ce qui n'est autre que (8). Démonstration analogue pour $x < x_0$.

5. Existence et unicité des solutions des équations lipschitziennes et localement lipschitziennes.

THÉORÈME 2.- Etant donnée une équation lipschitzienne (1), soit x_0 un point quelconque de I, S une boule ouverte de centre y_0 et de rayon r, contenue dans H, M la borne supérieure de $\| f(x,y) \|$ dans $I \times S$. Dans ces conditions, pour tout intervalle compact J contenu dans l'intersection de I et de $\left]x_0 - \frac{r}{M}, x_0 + \frac{r}{M}\right[$, et contenant x_0, il existe une solution et une seule de (1) définie dans J, à valeurs dans S, et égale à y_0 au point x_0.

En effet, pour tout n assez grand, il existe dans J une solution approchée u_n de (1) à $1/n$ près, à valeurs dans S et égale à y_0 au point x_0 (prop.1). L'inégalité (8) montre que, pour $p \geqslant n$ et $q \geqslant n$, on a dans J

$$\| u_p(x) - u_q(x) \| \leqslant \frac{2}{n} \; \frac{(e^{k|x-x_0|}-1)}{k}$$

Donc, la suite (u_n) converge uniformément dans J vers une fonction continue u, égale à y_0 au point x_0, et prenant ses valeurs dans S ; $f(x, u_n(x))$ tend uniformément dans J vers $f(x, u(x))$, donc u satisfait à l'équation (5) dans J, et est donc solution de (1). L'unicité de la solution découle aussitôt de l'inégalité (8), où on fait $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, $u(x_0)=v(x_0)=0$.

Si on ne fait aucune autre hypothèse sur f, il n'est pas possible de remplacer l'intervalle $\left]x_0 - \frac{r}{M}, x_0 + \frac{r}{M}\right[$ par un intervalle plus grand dans l'énoncé du th.2 (exerc.1).

Nous dirons qu'une fonction f est <u>localement lipschitzienne</u> dans $I \times H$ si, pour tout point (x, y) de $I \times H$, il existe un voisinage V de x et un voisinage S de y tels que f soit lipschitzienne dans $V \times S$ (pour une constante k dépendant de V et de S). Il est immédiat qu'une fonction localement lipschitzienne satisfait aux conditions du lemme 1 ; lorsque f est localement lipschitzienne, nous dirons que l'équation (1) est <u>localement lipschitzienne</u>.

Le th.2 se généralise alors de la façon suivante :

THÉORÈME 3.- <u>Etant donnée une équation</u> (1) <u>localement lipschitzienne dans</u> $I \times H$, <u>soit</u> x_0 <u>un point quelconque de</u> I, y_0 <u>un point quelconque de</u> H. <u>Il existe un plus grand intervalle</u> J <u>contenu dans</u> I, <u>contenant</u> x_0, <u>et dans lequel il existe une intégrale</u> u <u>de</u> (1), <u>prenant ses valeurs dans</u> H <u>et égale à</u> y_0 <u>au point</u> x_0. <u>Cette intégrale est unique ; en outre, à l'origine</u> α (resp. <u>l'extrémité</u> β) de J, <u>l'une des trois conditions suivantes est réalisée</u> :

a) $\alpha = -\infty$ (resp. $\beta = +\infty$) ;

b) $u(x)$ <u>tend vers une limite lorsque</u> x <u>tend vers</u> α (resp. β) ; <u>en outre, lorsque</u> α (resp. β) <u>n'est pas l'origine</u> (resp. <u>l'extrémité</u>) <u>de</u> I, <u>cette limite appartient à la frontière de</u> H.

c) <u>pour tout nombre</u> $M > 0$, <u>soit</u> G_M <u>la partie de</u> $I \times H$ <u>formée des points tels que</u> $\| f(x, y) \| \leq M$; <u>alors pour tout</u> $M > 0$, <u>dans tout voisinage de</u> α (resp. β) <u>par rapport à</u> J, <u>il existe un point</u> x <u>tel que le point</u> $(x, u(x))$ <u>n'appartienne pas à</u> G_M.

En effet, d'après le th.2, il existe un intervalle contenu dans I, contenant x_0 et non réduit à ce point tel qu'il existe dans cet intervalle une solution de (1) prenant ses valeurs dans H et égale à y_0 au point x_0. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble de tous les intervalles ayant cette propriété, J leur réunion, qui est évidemment un intervalle .

Si K et K' sont deux intervalles appartenant à $\mathfrak{M}$, u, v deux intégrales de (1) définies respectivement dans K et K', à valeurs dans H , et égales à y_0 au point x_0 , nous allons voir qu'on a $u(x)= v(x)$ dans $K \cap K'$. En effet, soit x_1 la borne supérieure de l'ensemble des $x \in K \cap K'$ tels que $u(z)= v(z)$ pour $x_0 \leq z \leq x$; tout revient à prouver que x_1 est l'extrémité de $K \cap K'$. Dans le cas contraire, on aurait $u(x_1)= v(x_1)$ par continuité, et $y_1 = u(x_1)$ appartiendrait à H ; comme f est localement lipschitzienne, le th.1 prouve qu'il ne peut exister qu'une seule intégrale de (1) définie dans un voisinage de x_1 , à valeurs dans H et égale à y_1 au point x_1 ; il y a donc contradiction à supposer que x_1 soit intérieur à $K \cap K'$. Ceci montre qu'il existe une intégrale et une seule u de (1) définie dans J et prenant la valeur y_0 au point x_0 . Supposons alors qu'au point α aucune des hypothèses a),c) ne soit réalisée ; il existe donc un nombre $M > 0$ et un intervalle $]\alpha,\alpha+h[$ $(h > 0)$ tel que $\|u'(x)\| \leq M$ dans cet intervalle (à l'exception éventuelle des points d'un ensemble dénombrable). On en déduit $\|u(t)- u(t')\| \leq M|t-t'|$ pour t et t' dans $]\alpha,\alpha+h[$, et le critère de Cauchy prouve donc que u admet une limite $c \in \overline{H}$ au point α ; en outre si α n'est pas l'origine de I , c ne peut être intérieur à H , car il existerait alors, d'après le th.2 un voisinage V de α , contenu dans I , une solution et une seule de (1) prenant la valeur c au point α , définie dans V et à valeurs dans H ; elle coïnciderait nécessairement avec u dans $J \cap V$, ce qui contredit la définition de J .

COROLLAIRE.- Lorsque, pour tout $x \in I$, il existe un voisinage V de x dans I tel que f soit lipschitzienne dans $V \times H$, le cas c) ne peut se produire que si α (resp. β) est l'origine (resp. l'extrémité) de I et n'appartient pas à I .

En effet, si $a \in I$, il existe un voisinage V de a dans lequel $f(x, y_0)$ est bornée, et par suite, on a $\|f(x,y)\| \leqslant k\|y\| + b$ dans $V \times H$ (k et b constantes) ; de l'inégalité $\|u'\| \leqslant k\|u\| + b$ pour une intégrale quelconque de (1) dans $V \times H$, on déduit aisément, comme dans la démonstration du th.1, que $\|u(x)\| \leqslant ce^{kx} + d$, c et d constantes, pour tout $x \in V$; il en résulte que u' est bornée dans V, autrement dit, on est nécessairement dans le cas b).

Exemples.- 1) Pour une équation différentielle de la forme $y' = g(x)$, où g est règlée dans I, on a évidemment $J=I$. On aura un exemple du cas c) de l'énoncé en prenant pour g la fonction scalaire $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$, définie dans $I =]0, +\infty[$; la fonction $\sin\frac{1}{x}$ est une intégrale de l'équation, qui ne tend vers aucune limite au point 0.

2) Pour l'équation $y' = \sqrt{1-y^2}$, on a $I = \mathbb{R}$, $H =]-1,+1[$; si on prend $x_0 = y_0 = 0$, $\sin x$ est l'intégrale correspondante, on a $J = \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, et aux extrémités de J, l'intégrale tend vers une extrémité de H.

3) Pour l'équation $y' = 1 + y^2$, avec $I = H = \mathbb{R}$, $x_0 = y_0 = 0$, l'intégrale est $\operatorname{tg} x$, et on a donc $J = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$; aux extrémités de J, on est dans le cas c) de l'énoncé.

4) Pour l'équation $y' = \sin xy$, avec $I = H = \mathbb{R}$, on a $G_1 = I \times H$, et comme H n'a pas de frontière, on est nécessairement dans le cas a) du th.3, autrement dit, on a $J = \mathbb{R}$.

La détermination de l'intervalle J pour une équation différentielle explicitée est en général un problème fort difficile (exerc.2,3 et 8) ; les propositions suivantes permettent souvent d'obtenir un intervalle contenu dans J et plus grand que celui que donnerait l'application brutale du th.2 :

PROPOSITION 3.- <u>Etant donnée une équation différentielle</u> (1), <u>lipschitzienne pour la constante</u> k <u>dans</u> $I \times H$, <u>soit</u> v <u>une intégrale approchée de cette équation à</u> ε <u>près, définie dans un intervalle</u> $K_0 \subset I$ <u>contenant</u> x_0, <u>à valeurs dans</u> H <u>et égale à</u> y_0 <u>au point</u> x_0. <u>Soit</u> K <u>le plus grand intervalle contenu dans</u> K_0, <u>contenant</u> x_0, <u>et dans lequel la distance de</u> $v(x)$ <u>à la frontière de</u> H <u>soit</u> $> \varphi(x) = \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|x-x_0|}-1)$. <u>Dans ces conditions, il existe dans</u> K <u>une solution</u> (<u>et une seule</u>) u <u>de</u> (1) <u>prenant ses valeurs dans</u> H, <u>égale à</u> y_0 <u>au point</u> x_0 ; <u>en outre, on a</u> $\|u(x) - v(x)\| \leqslant \varphi(x)$ <u>pour tout</u> $x \in K$.

D'après le th.3 il existe un plus grand intervalle $J \subset I$, contenant x_0 et tel que, dans J, il existe une solution et une seule u de (1) telle que $u(x_0) = y_0$, et prenant ses valeurs dans H ; nous allons montrer que l'on a $J \supset K$. Dans le cas contraire, l'extrémité x_1 de J, par exemple, serait intérieure à K ; on aurait donc

$\|v'(x) - f(x, v(x))\| \leqslant \varepsilon$ dans $[x_0, x_1[$ (à l'exception des points d'un ensemble dénombrable), et le th.1 montre alors que l'on aurait aussi $\|u(x) - v(x)\| \leqslant \varphi(x)$ dans $[x_0, x_1[$; d'après le th.3, $u(x)$ aurait une limite c au point x_1, telle que $\|v(x_1) - c\| \leqslant \varphi(x_1)$; mais, d'après la définition de K, c serait intérieur à H, ce qui contredit le th.3.

PROPOSITION 4.- <u>Soient</u> f <u>une fonction lipschitzienne pour la constante</u> k, g <u>une fonction localement lipschitzienne dans</u> $I \times H$, <u>telles que l'on ait</u> $\|f(x,y) - g(x,y)\| \leqslant \varepsilon$ <u>dans cet ensemble</u>. <u>Soit</u> u <u>une intégrale de</u> $y' = f(x,y)$, <u>définie dans un intervalle</u> $K_0 \subset I$, <u>contenant</u> x_0, <u>à valeurs dans</u> H <u>et égale à</u> y_0 <u>au point</u> x_0. <u>Soit</u> K <u>le plus grand intervalle contenu dans</u> K_0, <u>contenant</u> x_0, <u>et dans lequel la distance de</u> $u(x)$ <u>à la frontière de</u> H <u>soit</u> $> \varphi(x) = \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|x-x_0|}-1)$.

Dans ces conditions, il existe dans K une solution v et une seule de $y' = g(x,y)$, prenant ses valeurs dans H, et égale à y_0 au point x_0 ; en outre, on a $\| u(x) - v(x) \| \leqslant \varphi(x)$ dans K.

Le raisonnement est tout à fait analogue à celui de la prop.3 ; si J est le plus grand intervalle contenu dans I, contenant x_0 et dans lequel existe une intégrale de $y' = g(x,y)$ prenant la valeur y_0 au point x_0, il suffit de prouver que l'extrémité x_1 de J ne peut être intérieure à K ; comme $f(x,y)$ est bornée pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ et $y \in H$, il en est de même de $g(x,y)$, et on en déduit que v tend vers une limite c au point x_1 ; d'autre part, on aurait, d'après le th.1, $\| u(x) - v(x) \| \leqslant \varphi(x)$ dans $[x_0, x_1[$, donc $\| u(x_1) - c \| \leqslant \varphi(x_1)$; c serait donc intérieur à H, ce qui contredit de nouveau le th.3.

6. Dépendance des conditions initiales.

Avec les hypothèses du th.3, pour tout point (x_0, y_0) de $I \times H$, il existe un intervalle $J(x_0, y_0)$ non réduit à un point, contenant x_0, et dans lequel existe une solution de (1) égale à y_0 au point x_0 ; nous allons préciser la manière dont cette solution et l'intervalle $J(x_0, y_0)$ dépendent de (x_0, y_0) :

PROPOSITION 5.- Soit f une fonction localement lipschitzienne dans $I \times H$. Pour tout point (x_0, y_0) de $I \times H$, il existe un intervalle $J \subset I$, voisinage de x_0 dans I, un voisinage $V \subset H$ de y_0 et une application continue u de $J \times J \times V$ dans H telle que, pour tout $a \in J$ et tout $z \in V$, l'application partielle $x \rightarrow u(x, a, z)$ soit solution (unique) de (1) définie dans J, et égale à z au point a. En outre, il existe un voisinage $W \subset V$ de y_0 tel que l'on ait identiquement $z = u(a, x, u(x, a, z))$ pour $x \in J$, $a \in J$ et $z \in W$ (ce qui implique que l'image de $J \times J \times V$ par u contient W, et que, pour x et a donnés, pour tout $z \in W$ il existe un $y \in V$ et un seul tel que $z = u(x, a, y)$).

Soit S une boule de centre y_0 et de centre r , K_0 un intervalle voisinage de x_0 dans I tels que f soit lipschitzienne pour la constante k dans $K_0 \times S$; nous désignerons par M la borne supérieure de $\|f(x,y)\|$ dans cet ensemble. Il existe alors (th.2) un intervalle $K \subset K_0$, voisinage de x_0 dans I et une solution v de (1) définie dans K , à valeurs dans S , égale à y_0 au point x_0 . Nous allons voir qu'en prenant pour V la boule ouverte de centre y_0 et de rayon $r/4$, pour J l'intersection de K et de l'intervalle $]x_0-\ell, x_0+\ell[$, où ℓ est choisi assez petit pour satisfaire à l'inégalité

$$(10) \qquad 2M\ell + \frac{r}{2}(e^{2k\ell}-1) < \frac{r}{4}$$

on satisfait aux conditions de l'énoncé. Remarquons d'abord que, les valeurs que v prend dans J appartiennent à V , car on a $\|v(x)-v(x_0)\| = \|v(x)-y_0\| \leqslant M|x-x_0| \leqslant M\ell < r/4$. Considérons alors, pour un point $a \in J$, et un point $z \in V$, l'intégrale $u(x,a,z)$ de (1) qui prend la valeur z au point a , et montrons qu'elle est définie dans J . Posons en effet $u(x,a,z) = z + w(x)$, et $v(x) = v(a) + w_0(x)$; w_0 et w sont respectivement les solutions des équations différentielles $y' = f(x, v(a)+y)$, $y' = f(x, z+y)$ qui s'annulent au point a . Appliquons la prop.4 ; on a

$$\|f(x,v(a)+y) - f(x,z+y)\| \leqslant k\,\|v(a)-z\| \leqslant kr/2$$

pour $x \in J$ et $\|y\| \leqslant r/2$; il nous suffit de montrer que, dans J , on a $\|w(x)\| + \frac{r}{2}(e^{k|x-a|}-1) < r/2$, ce qui est une conséquence immédiate de (10) ; w est donc définie dans J , et par suite $u(x,a,z)$ dans $J \times J \times V$. Il est clair que l'on a $\|u(x',a,z) - u(x,a,z)\| \leqslant M|x'-x|$ pour x et x' dans J , d'après le th. des accroissements finis ; d'autre part, le th.1 montre que l'on a $\|u(x,a,z_1) - u(x,a,z_2)\| \leqslant \|z_1 - z_2\|\, e^{2k\ell}$. Enfin, on a

$\| u(\alpha,\beta,z) - z \| = \| u(\alpha,\beta,z) - u(\beta,\beta,z) \| \leq M\,|\beta-\alpha|$, d'où, d'après le th.1, $\| u(x,\alpha,z) - u(x,\beta,z) \| \leq Me^{2k\ell}|\beta-\alpha|$; ces trois inégalités montrent que u est <u>continue</u> dans $J \times J \times V$.

On notera qu'on a $\| u(x,\alpha,z) - z \| \leq M|x-\alpha| \leq 2M\ell$ dans $J \times J \times V$; par suite, si W est la boule ouverte de centre y_0 et de rayon r_0 tel que $r_0 + 2M\ell < r/4$ (ce qui est possible d'après (10)), $u(x,\alpha,z)$ appartient à V pour $z \in W$, x et α quelconques dans J ; mais comme $u(t,x,u(x,\alpha,z))$ est l'unique intégrale de (1) définie dans J et égale à $u(x,\alpha,z)$ au point x, on a nécessairement $u(t,\alpha,z) = u(t,x,u(x,\alpha,z))$, et en faisant $t=\alpha$, $z = u(\alpha,x,u(x,\alpha,z))$.

<u>Exercices</u>.- 1) Etant donnés deux nombres >0, b et M, et un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$, donner un exemple d'une équation différentielle scalaire $y'=g(y)$ telle que $|g(y)| \leq M$ pour $|y| \leq b$, et qui admet une intégrale $y=u(x)$ continue dans l'intervalle $\left[-\frac{b}{M}, \frac{b}{M}\right]$, mais n'ayant pas de limite finie au point $x = \frac{b}{M} + \varepsilon$ (définir g de sorte que l'intégrale considérée ait une dérivée continue dans $\left]-\frac{b}{M} - \varepsilon, \frac{b}{M} + \varepsilon\right[$, cette dérivée étant égale à M dans $\left[-\frac{b}{M}, \frac{b}{M}\right]$).

2) Soit f une fonction lipschitzienne pour la constante k dans $I \times S$, où S est une boule ouverte de centre y_0 et de rayon r ; on suppose en outre que $f(x, y_0)$ est bornée dans I, et on désigne par M_0 la borne supérieure de $\| f(x,y_0) \|$ dans cet intervalle. Montrer que, pour tout $x_0 \in I$, il existe une solution u de (1) à valeurs dans S, égale à y_0 au point x_0, et définie dans l'intersection de I et de l'intervalle $\left]x_0 - \lambda, x_0 + \lambda\right[$, avec $\lambda = \frac{1}{k}\log(1 + \frac{kb}{M_0})$ (remarquer qu'on a

$$\|u(x)-y_0\| \leq M_0(x-x_0)+k\int_{x_0}^{x}\|u(t)-y_0\|dt$$

pour $x > x_0$) .

3) Soit $I=]x_0-a, x_0+a[$ un intervalle ouvert dans R , S une boule ouverte de centre y_0 et de rayon r dans E , f une fonction localement lipschitzienne dans $I\times S$. Soit $h(t,z)$ une fonction $\geqslant 0$ des variables réelles t, z , définie et continue pour $0\leqslant t\leqslant a$ et $0\leqslant z\leqslant r$, telle que, pour tout t , l'application $z\to h(t,z)$ soit croissante ; on suppose que dans $I\times S$, on ait $\|f(x,y)\|\leqslant h(|x-x_0|, \|y-y_0\|)$. Soit φ une fonction numérique définie dans un intervalle $[0,\alpha]$ $(\alpha < a)$, à valeurs dans $[0,r[$, réglée telle que $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(t)\geqslant h(t,\varphi(t))$ sauf aux points d'un ensemble dénombrable dans $[0,\alpha]$.

Montrer que l'intégrale u de (1) égale à y_0 au point x_0 , est définie dans $]x_0-\alpha , x_0+\alpha[$, et que dans cet intervalle, on a $\|u(x)-y_0\| \leqslant \varphi(|x-x_0|)$.

4) Soit f une fonction définie dans $I\times H$, satisfaisant aux conditions du lemme 1, et telle qu'il existe, pour tout $x_0\in I$, une constante $k<1$ telle que, pour y_1 et y_2 quelconques dans H et x quelconque dans I , on ait

$$\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\| \leqslant \frac{k}{|x-x_0|}\|y_1-y_2\|$$

Montrer que, si u et v sont deux solutions approchées de (1) à ε_1 et ε_2 près respectivement, définies dans I et à valeurs dans H , et égales au point $x_0\in I$, on a, pour tout $x\in I$

$$\|u(x)-v(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{1-k}|x-x_0|$$

En déduire que les th.2 et 3 sont encore valables pour l'équation (1) dans les conditions indiquées ; généraliser aussi à ce cas le résultat de l'exerc. 3 .

19

5) Soient I un intervalle dans $\mathbb{R}$, S une boule de rayon r et de centre y_0 dans E, G l'espace normé des applications bornées de $I \times S$ dans E (avec $\|f\| = \sup \|f(x,y)\|$) ; pour tout $M > 0$ soit G_M la boule $\|f\| \leqslant M$ dans G. Soit L la partie de G formée des applications lipschitziennes de $I \times S$ dans E ; pour toute fonction $f \in L \cap G_M$, soit $u = U(f)$ l'intégrale de $y' = f(x,y)$, telle que $u(x_0) = y_0$, à valeurs dans S et définie dans l'intersection J_M de I et de l'intervalle $\left]x_0 - \frac{r}{M}, x_0 + \frac{r}{M}\right[$.

a) Si une suite (f_n) de fonctions appartenant à $L \cap G_M$ converge uniformément vers une fonction f dans $I \times S$, toute valeur d'adhérence de la suite des $u_n = U(f_n)$ dans l'espace normé F des applications bornées de J_M dans E, est une intégrale de $y' = f(x,y)$ prenant la valeur y_0 au point x_0 (utiliser le fait que l'ensemble des u_n est équicontinu). Réciproquement, si v est une intégrale de $y' = f(x,y)$ telle que $v(x_0) = y_0$, v est aussi intégrale d'une équation $y' = g(x,y)$, où g est lipschitzienne et arbitrairement voisine de f dans G_M (considérer l'équation $y' = f_n(x,y) + v'(x) - f_n(x, v(x))$).

b) On suppose en outre que E soit de dimension <u>finie</u>. Montrer que, si $f \in G_M$ et satisfait aux conditions du lemme 1, pour tout $x \in J_M$, l'ensemble des valeurs en x des intégrales de $y' = f(x,y)$ qui prennent la valeur y_0 au point x_0, est un ensemble <u>compact</u> et <u>connexe</u> (pour voir qu'il est fermé, utiliser le th. d'Ascoli ; pour voir qu'il est connexe, utiliser a) : si y_1, y_2 sont deux points de l'ensemble considéré, pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un ensemble connexe Φ de fonctions g appartenant à $L \cap G_M$, telles que $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$ pour toute fonction $g \in \Phi$, et que l'ensemble des valeurs des fonctions $U(g)$ au point x soit connexe et et contienne y_1 et y_2. Conclure en passant à la limite suivant un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans R_+).

6) Soit f une fonction continue numérique définie dans le pavé $|x-x_0| \leqslant a$, $|y-y_0| \leqslant b$ de R^2. Montrer que l'enveloppe inférieure et l'enveloppe supérieure de l'ensemble Φ des intégrales u de $y'=f(x,y)$ telles que $u(x_0)=y_0$, dans l'intervalle $I=]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, où $\alpha=\mathrm{Min}(a, \frac{b}{M})$ (M maximum de $|f(x,y)|$) sont encore des intégrales de $y'=f(x,y)$ dans I, qu'on appelle respectivement intégrale <u>minimale</u> et intégrale <u>maximale</u> correspondant au point (x_0,y_0) (remarquer que l'ensemble Φ est équicontinu et fermé pour la topologie de la convergence uniforme dans I).

Pour tout $\xi \in I$, soit η la valeur de l'intégrale minimale (correspondant au point (x_0,y_0)) au point ξ. Montrer que l'intégrale minimale correspondant au point (ξ,η) est identique à l'intégrale minimale correspondant au point (x_0,y_0) dans un intervalle $[\xi, \xi+h[$ si $\xi > x_0$, dans un intervalle $]\xi-h, \xi]$ si $\xi < x_0$.

En déduire que l'intégrale minimale u correspondant au point (x_0,y_0) peut être prolongée par continuité dans un intervalle $]x_1,x_2[$ contenu dans $]x_0-a,x_0+a[$, de sorte qu'en tout point x de cet intervalle, u soit identique à l'intégrale minimale correspondans au point $(x,u(x))$ dans un intervalle $[x,x+h[$ si $x > x_0$, dans un intervalle $]x-h,x]$ si $x < x_0$ et que l'on ait, soit $x_1=x_0-a$ (resp. $x_2=x_0+a$), soit $\lim\limits_{x \to x_1} u(x)=y_0 \pm b$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_2} u(x)=y_0 \pm b$).

7) a) Dans le pavé $|x-x_0| \leqslant a$, $|y-y_0| \leqslant b$, soient g et h deux fonctions continues telles que $g(x,y) < h(x,y)$. Soit u (resp. v) une intégrale de $y'=g(x,y)$ (resp. $y'=h(x,y)$) telle que $u(x_0)=y_0$

(resp. $v(x_0)=y_0$), définie dans un intervalle $[x_0, x_0+c[$; montrer que, pour $x_0 < x < x_0+c$, on a $u(x) < v(x)$ (considérer la borne supérieure ξ des x tels que cette inégalité ait lieu).

b) Soit u l'intégrale maximale de $y'=g(x,y)$ au point (x_0,y_0), définie dans l'intervalle $[x_0, x_0+c[$. Montrer que, pour tout intervalle compact $[x_0, x_0+d]$ contenu dans $[x_0, x_0+c[$, l'intégrale minimale et l'intégrale maximale au point (x_0,y_0) de l'équation $y'=g(x,y)+\varepsilon$, sont définies, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, et convergent uniformément vers u lorsque ε tend vers 0 par valeurs >0.

c) On suppose que $g(x,y) \leqslant h(x,y)$ dans le pavé $|x-x_0| \leqslant a$, $|y-y_0| \leqslant b$. Dans un intervalle $[x_0, x_0+c[$, on suppose définies une intégrale u de $y'=g(x,y)$ telle que $u(x_0)=y_0$, et l'intégrale maximale v de $y'=h(x,y)$ au point (x_0,y_0). Montrer que, dans cet intervalle, on a $u(x) \leqslant v(x)$ (se ramener au cas a) à l'aide de b)).

8) Soit u l'intégrale de l'équation $y' = \lambda + \dfrac{y^2}{1+x^2}$, égale à 0 pour $x=0$, et soit J le plus grand intervalle d'origine 0 où est définie u.

a) Montrer que si $\lambda \leqslant \frac{1}{4}$, on a $J=[0,+\infty[$ (utiliser l'exerc.3).

b) Montrer que, si $\lambda > \frac{1}{4}$, on a $J=[0,\alpha[$, avec

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} < \alpha < \operatorname{sh} \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda-1}}$$

(poser $y = z\sqrt{1+x^2}$, et utiliser l'exerc. 7).

9) On considère dans le plan R^2 l'ensemble défini par les relations $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$, $\omega(x) \leqslant y \leqslant \Omega(x)$, où ω et Ω sont continues et dérivables pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$; on suppose que la fonction $f(x,y)$ est définie et continue dans cet ensemble, et qu'on a, pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$, $\omega'(x) \leqslant f(x,\omega(x))$, et $\Omega'(x) \geqslant f(x,\Omega(x))$. Montrer que si $\omega(x_0) \leqslant y_0 \leqslant \Omega(x_0)$ il existe une intégrale u de $y'=f(x,y)$, définie pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$, telle que $u(x_0)=y_0$ et que $\omega(x) \leqslant u(x) \leqslant \Omega(x)$.

(Prolonger la fonction $f(x,y)$ pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$ et y quelconque, en posant $f(x,y)=f(x,\omega(x))$ pour $y<\omega(x)$ et $f(x,y)=f(x,\Omega(x))$ pour $y>\Omega(x)$; montrer ensuite que pour toute intégrale u de l'équation $y'=f(x,y)$ telle que $u(x_0)=y_0$, on a $\omega(x)\leqslant u(x)\leqslant\Omega(x)$. Pour cela, raisonner par l'absurde en remarquant que si on avait $\omega(x)>u(x)$ pour une valeur de x, il existerait un $\alpha>0$ assez petit et un $x>x_0$ tels que $u(x)=\omega(x)-\alpha(x-x_0)$).

10) a) Soit $\omega(x,z)$ une fonction continue définie pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$, $z\in\mathbb{R}$, qui soit $\geqslant 0$ dans cet ensemble. Soit f une application définie dans $I\times S$, où $I=\left[x_0,x_0+c\right[$, et S une boule de centre y_0 dans un espace complet E ; f prend ses valeurs dans E, et on suppose que, quels que soient $x\in I$, y_1 et y_2 dans S, on a $\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\leqslant\omega(x,\|y_1-y_2\|)$. Soient u et v deux intégrales de $y'=f(x,y)$ définies dans I, telles que $u(x_0)=y_1$, $v(x_0)=y_2$; soit w l'intégrale <u>maximale</u> (exerc.6) de $z'=\omega(x,z)$ correspondant au point $(x_0,\|y_1-y_2\|)$ supposée définie dans I ; montrer que, dans I, on a $\|u(x)-v(x)\|\leqslant w(x)$. (Soit $w(x,\varepsilon)$ l'intégrale maximale de $z'=\omega(x,z)+\varepsilon$ correspondant au point $(x_0,\|y_1-y_2\|)$ pour $\varepsilon>0$ assez petit. Montrer que $\|u(x)-v(x)\|\leqslant w(x,\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon>0$, en raisonnant par l'absurde).

b) Dans les hypothèses de a), on remplace l'intervalle I par l'intervalle $I'=\left]x_0-c,x_0\right]$. Montrer que si w est, dans cet intervalle, l'intégrale <u>minimale</u> de $z'=\omega(x,z)$ correspondant au point $(x_0,\|y_1-y_2\|)$, on a, dans I', $\|u(x)-v(x)\|\geqslant w(x)$ (même méthode).

22

Delsarte

11) a) Soit $\omega(x,z)$ une fonction continue et $\geqslant 0$ définie pour $0 < x \leqslant a$ et $z \geqslant 0$. On suppose que $z=0$ soit la seule intégrale de $z'=\omega(x,z)$ définie pour $0<x\leqslant a$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0} z(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{z(x)}{x} = 0$. Soit f une application continue de $I \times S$ (où $I = [x_0, x_0+a[$) dans E ; on suppose que, quels que soient y_1 et y_2 dans S, et $x\in I$, on a $\| f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \leqslant \omega(|x-x_0|, \|y_1-y_2\|)$. Montrer que, dans l'intervalle I, l'équation $y'=f(x,y)$ possède une seule solution u telle que $u(x_0)= y_0$. (Raisonner par l'absurde ; si v est une seconde intégrale de $y'=f(x,y)$ telle que $v(x_0)= y_0$, minorer $\|v(x)-u(x)\|$ dans un intervalle $]x_0, x_0+c[$ à l'aide de l'exerc. 10 b), et obtenir ainsi une contradiction).

Appliquer au cas où $\omega(x,z)= k\frac{z}{x}$, avec $0\leqslant k<1$ (cf.exerc. 4).

b) Le résultat de a) s'applique au cas où $\omega(x,z)=\frac{z}{x}$; mais montrer dans ce cas par un exemple que si u, v sont deux intégrales approchées à ε près de $y'=f(x,y)$, égales à y_0 au point x_0, il n'est pas possible de majorer $\|u(x)-v(x)\|$ par un nombre ne dépendant que de x et de ε (prendre pour f une application continue de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, égale à y/x pour $x \geqslant \alpha$ (où $\alpha > 0$), et pour $0\leqslant x<\alpha$ et $|y| \leqslant x^2$, et indépendante de x pour les autres points (x,y)).

c) Soit $\theta(x)$ une fonction numérique positive, continue pour $0\leqslant x\leqslant a$. Montrer que si l'intégrale $\int_0^a \frac{\theta(x)}{x}dx$ est convergente, le résultat de a) s'applique pour $\omega(x,z) = \frac{1+\theta(x)}{x} z$; au contraire, si $\int_0^a \frac{\theta(x)}{x}dx$ est infinie, donner un exemple de fonction continue f telle que l'on ait

$$\| f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \leqslant \frac{1+\theta(|x-x_0|)}{|x-x_0|} \| y_1 - y_2 \|$$

mais telle que l'équation $y' = f(x,y)$ ait une infinité d'intégrales égales à y_0 au point x_0 (construire f comme dans b)).

12) Soit $f(x,y)$ une fonction continue numérique définie pour $|x-x_0| \leq a$, $|y-y_0| \leq b$, telle que $f(x,y) < 0$ pour $xy > 0$, $f(x,y) > 0$ pour $xy < 0$; montrer que $y=0$ est la seule intégrale de l'équation $y'=f(x,y)$ qui prenne la valeur 0 au point $x=0$ (Raisonner par l'absurde).

13) Soit E un espace vectoriel de dimension <u>finie</u>, f une fonction bornée satisfaisant aux conditions du lemme 1, et telle que l'équation différentielle $y'=f(x,y)$ admette <u>une seule</u> solution u définie dans I, prenant la valeur y_0 au point x_0. On suppose en outre que pour tout n assez grand, il existe une intégrale approchée u_n de $y'=f(x,y)$ à $1/n$ près, définie dans I et à valeurs dans E, égale à y_0 au point x_0. Montrer que la suite (u_n) converge uniformément vers u dans tout intervalle compact contenu dans I (utiliser le fait que la suite (u_n) est équicontinue dans I).

§ 2. Equations différentielles linéaires.

<u>1. Existence et limitation des intégrales d'une équation linéaire homogène</u>

Soit E un espace normé complet sur le corps $\mathbf{R}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$. On dit qu'une équation différentielle $y'=f(x,y)$, où f est définie dans $I \times E$, est une équation <u>linéaire</u> si pour tout $x \in I$, l'application $y \to f(x,y)$ est <u>une application linéaire affine continue</u> de E dans lui-même ; si on pose $b(x)=f(x,0)$, l'application $y \to f(x,y)-f(x,0)=f(x,y)-b(x)$ est une application linéaire <u>homogène</u> continue de E dans lui-même ; nous la désignerons désormais par $\underline{A}(x)$, et nous écrirons par définition $\underline{A}(x).y = f(x,y)-b(x)$;

l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ s'écrit donc

(1) $$y' = \underline{A}(x).y + b(x)$$

où b est une application de I dans E ; lorsque $b = 0$, on dit que l'équation (1) est <u>homogène</u>.

Lorsque $E = R^n$, on peut identifier $\underline{A}(x)$ à sa matrice $(a_{ij}(x))$ par rapport à une base quelconque de E ; lorsqu'on identifie un vecteur $y \in E$ à la matrice à une colonne (y_j) de ses composantes par rapport à la base choisie, l'écriture $\underline{A}(x).y$ de la valeur de l'application linéaire homogène $\underline{A}(x)$ est bien conforme aux conventions générales d'Algèbre (<u>Alg.</u>, chap.II, § 6, n°4), d'où son extension au cas général. Dans le cas particulier envisagé, l'équation (1) est équivalente au système d'équations différentielles scalaires

(2) $$y'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + b_i(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Pour tout $x \in I$, $\underline{A}(x)$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires continues de E dans lui-même ; on sait (<u>Top.gén.</u>, chap.X, § 1, n°) que $\mathcal{L}(E)$, muni de la norme $\|\underline{U}\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|\underline{U}(y)\|$, est une <u>algèbre normée complète</u> sur le corps R. Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que les conditions suivantes sont satisfaites (cf. exerc. 4) :

a) <u>L'application</u> $x \to \underline{A}(x)$ <u>de</u> I <u>dans</u> $\mathcal{L}(E)$ <u>est continue</u>.

b) <u>L'application</u> $x \to b(x)$ <u>de</u> I <u>dans</u> E <u>est réglée</u>.

Lorsque $E = R^n$, $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à R^{n^2} (en tant qu'espace topologique), et la condition a) signifie que chacun des éléments $a_{ij}(x)$ de la matrice $\underline{A}(x)$ est <u>continu</u> dans I.

Comme on a $\|\underline{A}(x')y - \underline{A}(x)y\| \leqslant \|\underline{A}(x') - \underline{A}(x)\| \cdot \|y\|$, l'application $x \to \underline{A}(x)y + b(x)$ est réglée pour tout $y \in E$; en outre, dans tout intervalle compact $K \subset I$, $x \to \underline{A}(x)$ est bornée ; si $k = \sup_{x \in K} \|\underline{A}(x)\|$, on a $\| \underline{A}(x) y_1 - \underline{A}(x) y_2 \| = \| \underline{A}(x)(y_1 - y_2) \| \leqslant k . \| y_1 - y_2 \|$ quels que soient $x \in K$, y_1 et y_2 dans E ; en d'autres termes, le second membre de (1) satisfait aux conditions du lemme 1 du § 1 et est une fonction <u>lipschitzienne</u> dans $K \times E$.

Cela étant, bornons-nous d'abord au cas d'une équation linéaire <u>homogène</u>

$$(3) \qquad y' = \underline{A}(x) . y$$

Soit (x_0, y_0) un point quelconque de $I \times E$; comme la frontière de E est vide, le th.3 du § 1 et son corollaire montrent qu'il existe une intégrale et une seule $x \rightarrow U(x, x_0, y_0)$ de l'équation (3), définie <u>dans</u> I <u>tout entier</u> et prenant la valeur y_0 au point x_0. Si $y_0 = 0$, on a évidemment $U(x, x_0, 0) = 0$. Soit alors K un intervalle compact contenu dans I et contenant x_0, et soit $k = \sup_{x \in K} \| \underline{A}(x) \|$; si on applique la prop.4 du § 1 aux deux équations $y' = \underline{A}(x) y$, et $y' = \underline{A}(x)(y + y_0)$ et aux intégrales prenant la valeur 0 en x_0, en utilisant l'inégalité $\| \underline{A}(x)(y + y_0) - \underline{A}(x) y \| \leqslant k \| y_0 \|$ (pour $x \in K$ et $y \in E$), on voit qu'on a

$$(4) \qquad \| U(x, x_0, y_0) - y_0 \| \leqslant \| y_0 \| (e^{k|x - x_0|} - 1) .$$

En résumé :

THÉORÈME 1.- <u>Soit</u> $x \rightarrow \underline{A}(x)$ <u>une application continue de</u> I <u>dans</u> $\mathcal{L}(E)$. <u>Pour tout point</u> $(x_0, y_0) \in I \times E$, <u>l'équation linéaire homogène</u> $y' = \underline{A}(x) . y$ <u>admet une intégrale et une seule</u> $U(x, x_0, y_0)$, <u>définie</u> <u>dans</u> I <u>et telle que</u> $U(x_0, x_0, y_0) = y_0$. <u>En outre, pour tout intervalle compact</u> $K \subset I$, <u>contenant</u> x_0, <u>si on pose</u> $k = \sup_{x \in K} \| \underline{A}(x) \|$, <u>on a la relation</u> (4) <u>pour tout</u> $x \in K$.

<u>2. Dépendance des conditions initiales.</u>

Soient y_1, y_2 deux points quelconques de E ; on a identiquement, dans les hypothèses du th.1, $U(x, x_0, y_1) + U(x, x_0, y_2) = U(x, x_0, y_1 + y_2)$, car il est immédiat que $u(x,x_0,y_1)+u(x,x_0,y_2)$ est une intégrale de (3) et prend la valeur y_1+y_2 au point x_0 ; de même, pour tout t réel, on a identiquement $u(x,x_0,t\,y)=t\,u(x,x_0,y)$; autrement dit, $y \to u(x,x_0,y)$ est une <u>application linéaire</u> (homogène) de E dans lui-même, que nous désignerons par $\underline{C}(x,x_0)$, écrivant comme ci-dessus $\underline{C}(x,x_0).\,y_0$ sa valeur en un point $y_0 \in E$.

THEOREME 2.- <u>Si</u> $x \to \underline{A}(x)$ <u>est continue dans</u> I :

a) <u>pour tout couple</u> (x,x_0) <u>de points de</u> I, $\underline{C}(x,x_0)$ <u>est une application linéaire biunivoque de</u> E <u>sur lui-même</u> ; $\underline{C}(x_0,x_0)$ <u>est l'application identique, et on a</u>

(5) $$\underline{C}(x,x_0)=\underline{C}(x,x_1)\underline{C}(x_1,x_0) \quad , \quad \underline{C}(x_0,x)=(\underline{C}(x,x_0))^{-1}$$

<u>quels que soient</u> x,x_0,x_1 <u>dans</u> I ;

b) $\underline{C}(x,x_0)$ <u>est une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> E (et par <u>suite</u> un élément inversible de $\mathcal{L}(E)$) ;

c) <u>l'application</u> $x \to \underline{C}(x,x_0)$ <u>de</u> I <u>dans</u> $\mathcal{L}(E)$ <u>est continue et dérivable, et on a</u>

(6) $$\underline{C}'(x,x_0)=\underline{A}(x)\underline{C}(x,x_0) .$$

a) Comme $\underline{C}(x,x_0)\,y_0$ est l'intégrale de (3) égale à $\underline{C}(x_1,x_0)\,y_0$ au point x_1, on a, d'après la définition,

$\underline{C}(x,x_0)\,y_0=\underline{C}(x,x_1).(\underline{C}(x_1,x_0)\,y_0)=(\underline{C}(x,x_1)\underline{C}(x_1,x_0))\,y_0$ quel que soit y_0, d'où la première des relations (5) ; il est évident que $\underline{C}(x_0,x_0)$ est l'application identique, d'où $y_0=(\underline{C}(x_0,x)\underline{C}(x,x_0))\,y_0$ identiquement, ce qui prouve que $\underline{C}(x,x_0)$ est une application linéaire biunivoque de E sur lui-même, et $\underline{C}(x_0,x)$ l'application réciproque.

b) De la relation (4) on tire en particulier

$$\|\underline{C}(x,x_0)\,y_0\| \leq e^{k|x-x_0|}\,\|y_0\|$$

en désignant par k la borne supérieure de $\|\underline{A}(t)\|$ dans l'intervalle d'extrémités x_0 et x ; cela prouve que $\underline{C}(x,x_0)$ est une application linéaire continue dans E (Top.gén.,chap.IX, § 3,th.1).

c) Montrons d'abord que $x \to \underline{C}(x,x_0)$ est continue dans I . Soit K un intervalle compact, voisinage de x dans I , et soit $k=\sup_{t\in K}\|\underline{A}(t)\|$; pour tout $x'\in K$, on a, d'après (3) et (4)

$$\|u'(x',x_0,y_0)\| \leqslant k\|u(x',x_0,y_0)\| \leqslant ke^{k|x'x_0|}\|y_0\|$$

ou, en désignant par h la borne supérieure de $ke^{k|x'x_0|}$ dans K , $\|u'(x',x_0,y_0)\| \leqslant h\|y_0\|$; le théorème des accroissements finis montre donc que $\|u(x',x_0,y_0)-u(x,x_0,y_0)\| \leqslant h\|y_0\| \cdot |x'-x|$ quel que soit $y_0\in E$, c'est-à-dire, d'après la définition de la norme dans $\mathcal{L}(E)$, $\|\underline{C}(x',x_0)-\underline{C}(x,x_0)\| \leqslant h|x'-x|$, ce qui établit notre assertion.

Montrons enfin que $x \to \underline{C}(x,x_0)$ est dérivable et que sa dérivée satisfait à la relation (6). D'après le th. des accroissements finis, on a, pour $x+t\in K$

$$(7)\quad \|u(x+t,x_0,y_0)-u(x,x_0,y_0)-tu'(x,x_0,y_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant |t| \cdot \sup_{x\leqslant z\leqslant x+t}\|u'(z,x_0,y_0)-u'(x,x_0,y_0)\|$$

Or, on peut écrire $u'(z,x_0,y_0)-u'(x,x_0,y_0)=(\underline{A}(z)\underline{C}(z,x_0)-$ $-\underline{A}(x)\underline{C}(x,x_0))\,y_0$, donc, d'après la définition de la norme dans $\mathcal{L}(E)$, on a

$$\sup_{x\leqslant z\leqslant x+t}\|u'(z,x_0,y_0)-u'(x,x_0,y_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|y_0\| \cdot \sup_{x\leqslant z\leqslant x+t}\|\underline{A}(z)\underline{C}(z,x_0)-\underline{A}(x)\underline{C}(x,x_0)\|$$

Par hypothèse, $x \to \underline{A}(x)$ est continue dans I , et nous venons de prouver qu'il en est de même de $x \to \underline{C}(x,x_0)$; comme $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre normée, l'application $x \to \underline{A}(x)\underline{C}(x,x_0)$ est donc continue, et par suite pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que $|t|\leqslant\delta$ entraîne

$\| \underline{A}(z)\underline{C}(z,x_0)-\underline{A}(x)\underline{C}(x,x_0)\| \leqslant \varepsilon$ pour $x \leqslant z \leqslant x+t$. Dans ces conditions, la formule (7) prouve que

$$\| \frac{1}{t} (\underline{C}(x+t,x_0)-\underline{C}(x,x_0))-\underline{A}(x)\underline{C}(x,x_0)\| \leqslant \varepsilon$$

pour $0 \leqslant t \leqslant \delta$, ce qui prouve l'existence de la dérivée à droite de $\underline{C}(x,x_0)$ donnée par la formule (6) ; on démontre de même que la dérivée à gauche existe et est donnée par la même formule.

COROLLAIRE.- <u>L'application $(x,x_0) \to \underline{C}(x,x_0)$ est continue dans</u> $I \times I$.

Remarquons d'abord qu'on a $\underline{C}(x,x_0)=(\underline{C}(x_0,x))^{-1}$; comme $V \to V^{-1}$ est continue dans le groupe (ouvert) des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ (<u>Top.gén.</u>, chap.IX, §3,prop.14) l'application $x_0 \to \underline{C}(x,x_0)$ est continue dans I . Cela étant, on peut écrire, d'après (5)

$$\underline{C}(x',x_0')-\underline{C}(x,x_0)=\underline{C}(x',x)\underline{C}(x,x_0')-\underline{C}(x,x_0)$$

d'après ce qui précède, dès que x' est assez voisin de x et x_0' assez voisin de x_0 , $\underline{C}(x',x)$ est aussi voisin qu'on veut de l'élément unité de $\mathcal{L}(E)$, et $\underline{C}(x,x_0')$ de $\underline{C}(x,x_0)$; le corollaire résulte donc de la continuité du produit dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

On notera que l'application $x \to \underline{C}(x_0,x)=(\underline{C}(x,x_0))^{-1}$ admet une dérivée égale à $(\underline{C}(x,x_0))^{-1}\underline{C}'(x,x_0)(\underline{C}(x,x_0))^{-1}$, c'est-à-dire, d'après la formule (6), à $\underline{C}(x_0,x)\underline{A}(x)$ (cf. chap.I, §1, prop.4).

3. <u>Intégration de l'équation linéaire non homogène.</u>

L'intégration de l'équation linéaire non homogène (1) se ramène à l'intégration de l'équation homogène correspondante (3) et au calcul d'une primitive. Posons en effet $y=\underline{C}(x,x_0)z$, d'où, d'après la seconde formule (5), $z=\underline{C}(x_0,x)y$; si y est une intégrale de (1), z est une intégrale de l'équation $(\underline{C}(x,x_0)z)' = \underline{A}(x)\underline{C}(x,x_0)z+b(x)$; comme l'application $(\underline{U},v) \to \underline{U}(v)$ de $\mathcal{L}(E) \times E$ dans E est continue,

z est dérivable et on a (chap. I, § 1, prop.3),

$(\underline{C}(x,x_0)z)' = \underline{C}'(x,x_0)z + \underline{C}(x,x_0)z' = \underline{A}(x)\underline{C}(x,x_0)z + \underline{C}(x,x_0)z'$

(en vertu de (5)) ; donc l'équation en z se réduit à $\underline{C}(x,x_0)z' = b(x)$, ou encore, d'après la seconde formule (6), à $z' = \underline{C}(x_0,x)b(x)$; l'intégrale de cette équation qui prend la valeur y_0 au point x_0 est $z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \underline{C}(x_0,t)\,b(t)dt$ (car la fonction $t \to \underline{C}(x_0,t)\,b(t)$ est règlée d'après le critère du chap.II, § 1, th.3). Tenant compte de la première formule (6) ci-dessus et de la formule (10) du chap.II, § 1, on a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 1.- <u>Avec les notations du th.2, pour tout couple</u> $(x_0, y_0) \in I \times E$, <u>l'équation linéaire</u> (1) <u>admet une solution et une seule, définie dans</u> I <u>et égale à</u> y_0 <u>au point</u> x_0 , <u>et donnée par la formule</u>

$$u(x) = \underline{C}(x,x_0)\,y_0 + \int_{x_0}^{x} \underline{C}(x,t)\,b(t)dt \,. \tag{8}$$

La méthode qui conduit à la formule (8), et qui consiste à prendre la fonction z comme nouvelle fonction inconnue, est souvent appelée "méthode de variation des constantes" : la relation entre z et y est en effet la même que la relation entre la "constante" y_0 et l'intégrale $u(x,x_0,y_0)$ de l'équation linéaire homogène (3).

<u>4. Equation adjointe</u>.

Dans tout le reste de ce paragraphe (à l'exception du n°9), nous nous bornerons au cas où l'espace E est un espace de dimension <u>finie</u> n sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie définie dans <u>Top.gén</u>., chap.VI, § 1, n°5 . L'espace <u>dual</u> E^* de E (Alg., chap.II, § 4, n°1) qui est lui aussi de dimension n sur $\mathbb{R}$, sera muni de la topologie analogue ; alors, la forme bilinéaire canonique $\langle x, x' \rangle$ (<u>Alg</u>., chap.II, § 4, n°1) est continue dans $E \times E^*$ (étant un polynome par rapport aux coordonnées de x et x').

Etant donnée l'équation homogène (3) où $x \to A(x)$ est toujours supposée continue dans I, proposons nous de chercher s'il existe une application dérivable $x \to v(x)$ de I dans E^* telle que l'application numérique $x \to \langle u(x), v(x)\rangle$ soit constante lorsque u est une solution quelconque de (3) ; il revient au même d'écrire que la dérivée de cette fonction doit être identiquement nulle, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\langle u'(x), v(x)\rangle + \langle u(x), v'(x)\rangle = 0$ (chap. I, § 1, prop. 3). Or, on a, d'après (3), $\langle u'(x), v(x)\rangle = \langle \underline{A}(x)\, u(x), v(x)\rangle = \langle (x), {}^t\underline{A}(x)\, v(x)\rangle$, où ${}^t\underline{A}(x)$ est la transposée de $\underline{A}(x)$ (*Alg.*, chap. II, § 4, n°9). La relation à laquelle doit satisfaire v s'écrit donc

$$\langle u(x), v'(x) + {}^t\underline{A}(x)\, v(x)\rangle = 0$$

Or, pour tout $x \in I$ et tout $y_0 \in E$, il existe d'après le th. 1 une solution u de (3) égale à y_0 au point x ; comme on doit avoir $\langle y_0, v'(x) + {}^t\underline{A}(x)\, v(x)\rangle = 0$ pour tout $y_0 \in E$, il en résulte que v doit vérifier la relation $v'(x) + {}^t\underline{A}(x)\, v(x) = 0$ pour tout $x \in I$. En d'autres termes :

PROPOSITION 2.- *Pour qu'une application dérivable v de I dans E soit telle que $\langle u(x), v(x)\rangle$ soit constante dans I pour toute solution u de l'équation (3), il faut et il suffit que v soit solution* ~~de l'équation (3), il faut et il suffit que soit solution~~ *de l'équation linéaire homogène*

$$y' = -\,{}^t\underline{A}(x) . y \qquad (9)$$

L'équation (9) est dite *adjointe* de (3) ; il est clair qu'inversement (3) est adjointe de (9). On notera que $x \to {}^t\underline{A}(x)$ est continue dans I, comme le montre aussitôt l'écriture de $\underline{A}(x)$ et de ${}^t\underline{A}(x)$ sous forme de matrices ; les th. 1 et 2 sont donc applicables à l'équation scalaire.

Au Livre V, lorsque nous aurons défini le <u>dual</u> (topologique) d'un espace normé E , nous verrons que les résultats précédents s'étendent presque sans modification lorsque E est un espace normé complet quelconque sur $\mathbb{R}$.

<u>5. Systèmes fondamentaux d'intégrales d'un système linéaire d'équations différentielles scalaires.</u>

Nous allons plus particulièrement considérer dans ce qui suit le cas où E est un espace vectoriel de dimension n <u>par rapport au corps</u> $\mathbb{C}$ des nombres complexes (donc de dimension 2n par rapport à $\mathbb{R}$), et où $A(x)$ est une application linéaire (homogène) de E dans lui-même <u>pour la structure d'espace vectoriel sur</u> $\mathbb{C}$; on peut alors identifier $\underline{A}(x)$ à sa matrice $(a_{ij}(x))$ par rapport à une base de E (sur le corps $\mathbb{C}$), les a_{ij} étant cette fois n^2 fonctions <u>complexes</u> définies et continues dans I ; y_j désignant les composantes (complexes) de y par rapport à la même base, l'équation linéaire (1) est encore équivalente au système (2). Les th.1 et 2 signifient alors que pour tout $y_0=(y_{k_0})_{1\leqslant k\leqslant n}$ dans E , il existe une intégrale et une seule $u=(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de (3), définie dans I et égale à y_0 au point x_0 , et que cette intégrale peut s'écrire $u(x,x_0,y_0)=\underline{C}(x,x_0)\,y_0$, où $\underline{C}(x,x_0)=(c_{ij}(x,x_0))$ est une matrice carrée inversible d'ordre n , où les c_{ij} sont des fonctions complexes continues dans $I\times I$ et telles que $x\to c_{ij}(x,x_0)$ soit dérivable dans I .

Lorsque les fonctions $b_j(x)$ et $a_{ij}(x)$ sont <u>réelles</u>, et qu'on cherche les intégrales <u>réelles</u> du système correspondant (2), on peut considérer qu'il s'agit d'un système du type précédent, mais dont on n'étudie que les intégrales réelles.

Dans le cas particulier où n=1, le système se réduit à une seule équation scalaire $y'=a(x)y$ (a fonction complexe continue dans I) ;

il est immédiat que l'intégrale prenant la valeur y_0 au point x_0 est donnée par la formule

$$(10)\qquad u(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \qquad \text{(cf. exerc. 3)}.$$

On dit que p intégrales υ_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ de (3) sont <u>linéairement indépendantes</u> si, pour tout $x \in I$, les p vecteurs $\upsilon_j(x)$ forment un système libre ; comme on a $\upsilon_j(x) = \underline{C}(x,x_0)\,\upsilon_j(x_0)$, et que la matrice $\underline{C}(x,x_0)$ est inversible pour tout x, il faut et il suffit, pour que les υ_j soient linéairement indépendantes, que leurs valeurs en <u>un point</u> $x_0 \in I$ soient p vecteurs linéairement indépendants. En particulier, on dit que n intégrales linéairement indépendantes υ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ forment un <u>système fondamental</u> d'intégrales de (3) ; pour tout $x \in I$, les n vecteurs $\upsilon_j(x)$ forment donc une base de E (sur le corps $\mathbb{C}$), et inversement, si $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une base quelconque de E, les n intégrales $\upsilon_j(x) = \underline{C}(x,x_0)\,e_j$ forment un système fondamental ; si on rapporte $\underline{C}$ à la base (e_j), on voit donc que les intégrales υ_j sont <u>les colonnes</u> de la matrice $\underline{C}(x,x_0)$. L'intégrale prenant au point x_0 la valeur $y_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ est alors $\underline{C}(x,x_0)\,y_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \upsilon_k(x)$.

Si $\upsilon_j(x) = \sum_{k=1}^{n} u_{kj}(x)\,e_k$ sont n intégrales quelconques de (3), nous appellerons <u>déterminant</u> du système d'intégrales υ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ (rapporté à la base (e_j)) le déterminant $\Delta(x) = \det(u_{kj}(x))$. D'après ce qui précède, pour que les υ_j forment un système fondamental, il faut et il suffit que $\Delta(x)$ soit $\neq 0$ dans I (ou seulement en un point $x_0 \in I$). La valeur de $\Delta(x)$ en un point quelconque est d'ailleurs déterminée par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.- <u>Le déterminant d'un système fondamental d'intégrales est donné par la formule</u>

(11) $$\Delta(x) = \Delta(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{Tr}(\underline{A}(t))dt}$$

En effet, on a vu que $\Delta(x)$ n'est autre que le déterminant de la matrice inversible $\underline{C}(x,x_0)$; on a donc (chap.I, § 1, formule (3))

$$\Delta'(x)=\mathrm{Tr}(\underline{C}'(x,x_0)(\underline{C}(x,x_0))^{-1})\ \Delta(x)$$

et, d'après l'équation (6)

$$\Delta'(x)=\mathrm{Tr}(\underline{A}(x))\ \Delta(x)$$

La formule (11) est alors une conséquence immédiate de (10).

Si on rapporte l'espace dual E^* de E (sur le corps $\mathbb{C}$) à la base (e_j') <u>duale</u> de (e_j) (<u>Alg.</u>,chap.II, § 4,n°4), le système différentiel scalaire équivalent à l'équation adjointe (n°4) $y'=-{}^t\underline{A}(x)y$ de l'équation (3) est

(12) $$y_i' = -\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(x)y_j \qquad (1 \leq i \leq n).$$

D'après la prop.2 et la définition des bases duales, si $u(x)=\sum_{j=1}^{n} u_j(x)e_j$ est une intégrale quelconque de (3), $v(x)=\sum_{j=1}^{n} v_j(x)e_j'$ une intégrale quelconque de (9), la fonction scalaire (complexe) $\sum_{j=1}^{n} u_j(x)v_j(x)$ est <u>constante</u> dans I .

De cette propriété, on déduit que la connaissance d'un <u>système fondamental d'intégrales</u> $(v_j)_{1\leq j\leq n}$ de l'équation adjointe (9) permet de déterminer <u>toutes</u> les intégrales de l'équation donnée (3). En effet, toute intégrale u de (3) satisfait à n relations $\langle u(x), v_j(x)\rangle = \alpha_j$ $(1\leq j\leq n)$, où les α_j sont des constantes ; or, comme les $v_j(x)$ sont linéairement indépendants pour tout x , les n équations linéaires précédentes en $u(x)$ ont une solution et une seule, qu'on obtient par exemple par les formules de Cramer.

Plus généralement, montrons que, si on connaît p <u>intégrales linéairement indépendantes</u> v_j $(1\leq j\leq p)$ de l'équation adjointe (9), l'intégration du système donné (3) peut se ramener à celle d'un système linéaire <u>non homogène</u> de n-p équations différentielles scalaires ;

en effet, des p équations $\langle U(x), v_j(x)\rangle = a_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$, on tire p des composantes de $U(x)$, par exemple $u_1(x),..,u_p(x)$ en fonction des n-p autres, soit $u_j(x)=\varphi_1(x)+\sum_{k=p+1}^{n} c_k(x)u_k(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$; portant dans les n-p dernières équations $u'_h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}(x)u_k(x)$ $(p+1 \leqslant h \leqslant n)$, il vient $u'_h(x)= \psi_h(x)+ \sum_{k=p+1}^{n} d_{hk}(x)u_k(x)$, c'est-à-dire un système de n-p équations linéaires non homogènes.

On conclut enfin de là que, si on connaît p intégrales linéairement indépendantes U_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ de l'équation (3) elle-même, son intégration se ramène à celle d'un système non homogène de n-p équations ; en effet, l'équation (3) étant l'adjointe de (9), l'intégration de l'équation adjointe (9) est ramené à celle d'un système non homogène de n-p équations et on a vu plus haut que lorsqu'on connaît un système fondamental d'intégrales de l'adjointe de (3), on en déduit celles de (3) par un calcul algèbrique.

Dans le dernier cas envisagé, on peut procéder autrement (sans utiliser l'équation adjointe) pour ramener (3) à un système non homogène de n-p équations. En effet, pour tout $x_0 \in V$, les p vecteurs $U_j(x_0)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ forment un système libre ; d'après le th. d'échange, il y a n-p des vecteurs e_j de la base considérée dans E, qui forment avec les $U_j(x_0)$ une base de E ; supposons par exemple que ce soient $e_{p+1}, \dots e_n$; ces vecteurs formeront alors encore une base de E avec les $U_j(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ pour tout x appartenant à un voisinage V convenable de x_0 dans I. Il existe donc une matrice inversible $\underline{B}(x)$, dont les éléments sont fonctions dérivables de x dans V, telle que $\underline{B}(x)\, e_j = U_j(x)$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$, $\underline{B}(x)\, e_j = e_j$ pour $p+1 \leqslant j \leqslant n$. Posons $y = \underline{B}(x)z$; z satisfait à l'équation $B'(x)z+B(x)z'=\underline{A}(x)\underline{B}(x)z$, ou $Z' = (\underline{B}(x))^{-1}(\underline{A}(x)\underline{B}(x) - \underline{B}'(x))Z = \underline{D}(x)Z$, où $\underline{D}(x) = (d_{jk}(x))$ est une matrice à coefficients continus dans V . D'après la définition de $\underline{B}(x)$, cette équation admet les p vecteurs constants e_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ comme intégrales ; on en conclut aussitôt qu'on a nécessairement $d_{jk}(x) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$; les composantes z_k d'indice $k \geqslant p+1$ satisfont donc à un système linéaire homogène de n-p équations ; si on connaît les solutions de ce système, les z'_j d'indice $j \leqslant p$ sont fonctions linéaires des z_k d'indice $\geqslant p+1$, donc sont connues, et en prenant leurs primitives, on obtient les z_j d'indice $\leqslant p$.

6. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Les hypothèses sur E étant les mêmes, considérons en particulier l'équation linéaire homogène

$$y' = \underline{A}.y \tag{13}$$

où $\underline{A}$ est un endomorphisme de E (sur le corps $\mathbb{C}$) indépendant de x ; lorsqu'on rapporte E à une base quelconque, l'équation (13) est équivalente à un système de n équations différentielles scalaires où les coefficients a_{ij} sont des constantes.

Soients r_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ les racines caractéristiques distinctes de $\underline{A}$ (Alg.,chap.VI, §) dans le corps $\mathbb{C}$; si n_i est l'ordre de multiplicité de r_i (comme racine du polynome caractéristique $\chi(r) = \det(\underline{A} - r\underline{I})$) , on a $\sum_{i=1}^{q} n_i = n$. A chaque racine r_i correspond un sous-espace E_i de E , de dimension n_i , tel que E_i soit invariant par $\underline{A}$, et que E soit somme directe des E_i ; en outre, si $\underline{A}_i$ est la restriction de $\underline{A}$ au sous-espace E_i , on a $(\underline{A}_i - r_i\underline{I}_{k_i})^{n_i} = 0$. Cela étant, soit $(\upsilon_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n_i}$ un système fondamental d'intégrales de l'équation $z'_i = \underline{A}_i . z_i$, à valeurs dans E_i ; il est clair que les n fonctions υ_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant n_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$, $\sum_{i=1}^{q} n_i = n)$ forment un système fondamental d'intégrales de (13).

Nous pouvons donc nous borner au cas où $\underline{A}$ n'a qu'une seule racine caractéristique r d'ordre n ; soit $m \leqslant n$ le plus petit des entiers h tels que $(\underline{A}-r\underline{I})^h=0$; de l'équation (13), on tire

(14) $$(D-r)y=(\underline{A}-r\underline{I})\,y$$

ce qui peut s'écrire, en posant $y = e^{rx} z$

(15) $$D\,z=(\underline{A}-r\underline{I})\,z$$

d'où pour tout entier $h > 0$

(16) $$D^h z=(\underline{A}-r\underline{I})^h\,z$$

En particulier, pour $h=m$, on a $D^m z=0$; par suite, toute intégrale z de (15) est un polynome en x de degré $\leqslant m-1$, à coefficients dans E ; il est facile d'ailleurs de déterminer explicitement l'intégrale de (15) qui prend la valeur z_0 au point x_0 ; en posant $z(x)= \sum_{k=0}^{m-1} c_k(x-x_0)^k$ les coefficients c_k sont donnés par récurrence par les formules

(17) $$\begin{cases} c_0 = z_0 \\ k\,c_k = (\underline{A}-r\underline{I})\,c_{k-1} \qquad (1 \leqslant k \leqslant m-1) \end{cases}$$

On sait (Alg., chap. VI, §) que le nombre m n'est autre que le plus grand des degrés des diviseurs élémentaires $(X-r)^h$ du polynome caractéristique $\chi(X)$ de $\underline{A}$.

Un cas particulier important est celui où l'équation caractéristique de $\underline{A}$ a toutes ses racines r_i simples $(1 \leqslant i \leqslant n)$; alors les sous-espaces E_i sont de dimension 1 (sur $\mathbb{C}$), et il existe donc n vecteurs c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que les n fonctions $e^{r_i x}\,c_i$ forment un système fondamental d'intégrales de (13).

Lorsqu'il existe une base de E telle que la matrice de $\underline{A}$, par rapport à cette base, ait ses éléments réels, l'équation caractéristique de $\underline{A}$ a ses coefficients réels. Pour tout vecteur $z=(\zeta_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E, rapporté à la base considérée, soit $\bar{z}=(\bar{\zeta}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$; l'application $z \to \bar{z}$ est une involution antilinéaire de E . On sait (Alg.,chap.VI) que, si r_k est une racine non réelle de l'équation caractéristique de $\underline{\underline{A}}$, E_k le sous-espace invariant correspondant dans E , $\overline{r}_k$ est une racine caractéristique ayant même ordre de multiplicité n_k , et l'image E'_k de E_k par $z \to \overline{z}$ est le sous-espace invariant correspondant à la racine $\overline{r}_k$. Par suite, si les $e^{r_k x}\, \mathfrak{p}_j(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant n_k)$ sont n_k intégrales linéairement indépendantes correspondant à la racine r_k , les $e^{\overline{r}_k x}\, \overline{\mathfrak{p}_j}(x)$ (où les coefficients de $\mathfrak{p}_j$ sont les images de ceux de $\mathfrak{p}_j$ par l'application $z \to \overline{z}$) sont n_k intégrales linéairement indépendantes correspondant à la racine $\overline{r}_k$. Il en résulte que les $2n_k$ intégrales

$$\frac{1}{2}\left(e^{r_k x}\, \mathfrak{p}_j(x)+e^{\overline{r}_k x}\, \overline{\mathfrak{p}}_j(x)\right) , \quad \frac{1}{2i}\left(e^{r_k x}\, \mathfrak{p}_j(x)-e^{\overline{r}_k x}\, \overline{\mathfrak{p}}_j(x)\right)$$

$(1 \leqslant j \leqslant n_k)$ sont linéairement indépendantes et ont, par rapport à la base choisie dans E , des composantes qui sont des fonctions réelles de x .

7. Equations linéaires scalaires d'ordre n .

On appelle équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre n toute équation de la forme

$$(18) \qquad y^{(n)}-a_1(x)y^{(n-1)}-\dots-a_{n-1}(x)y'-a_n(x)y = b(x)$$

où les a_i $(1 \leqslant j \leqslant n)$ et b sont des fonctions scalaires (complexes) de x définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. D'après la méthode générale du § 1, n°1, une telle équation équivaut au système linéaire de n équations du premier ordre

$$(19) \qquad \begin{cases} y'_k = y_{k+1} & (1 \leqslant k \leqslant n-1) \\ y'_n=a_1(x)y_n+a_2(x)y_{n-1}+\dots+a_n(x)y_k+b(x) \end{cases}$$

c'est-à-dire à l'équation linéaire

$$(20) \qquad \mathfrak{y}' = \underline{A}(x).\, \mathfrak{y} + \mathfrak{b}(x)$$

où $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in \mathbb{C}^n$, $b(x)=(0,0,\dots,0,b(x))$, et la matrice $\underline{A}(x)$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_n(x) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}(x) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & a_{n-2}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1(x) \end{pmatrix}$$

L'étude de l'équation linéaire d'ordre n consiste donc à appliquer à l'équation (20) les résultats généraux qui précèdent. Dans tout intervalle J où les n fonctions $a_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ sont continues l'équation <u>homogène</u>

(21) $$y^{(n)}-a_1(x)y^{(n-1)}-\dots-a_{n-1}(x)y'-a_n(x)y = 0$$

admet une solution et une seule u telle que

(22) $$u(x_0)=y_0\ ,\quad u'(x_0)=y'_0\ ,\dots,\quad u^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

où x_0 est un élément quelconque de J , et $y_0,y'_0,\dots,y_0^{(n-1)}$ n nombres complexes arbitraires.

On dit que p intégrales u_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ de l'équation homogène (21) sont <u>linéairement dépendantes</u> dans J s'il existe p constantes c_i non toutes nulles, pour lesquelles on a <u>identiquement</u> dans I $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)=0$. Cette identité entraîne évidemment $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i^{(k)}(x)=0$ pour tout $x\in J$, et pour tout entier $k\geqslant 1$; il en résulte en particulier que les p intégrales $U_i=(u_i,u'_i,u''_i,\dots,u_i^{(n-1)})$ de l'équation homogène $y'=\underline{A}.y$ sont linéairement dépendantes ; la réciproque est évidente.

En particulier, si n intégrales u_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont linéairement indépendantes, toute intégrale de (21) est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x)$ les scalaires $\lambda_i\in\mathbb{C}$ étant arbitraires.

Pour n intégrales quelconques u_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de (21), on appelle <u>wronskien</u> de ce système d'intégrales le déterminant du système des intégrales correspondantes υ_i de $y' = \underline{A}.y$; pour que les u_i soient linéairement indépendantes dans J , il faut et il suffit que le wronskien W(x) soit $\neq 0$; il suffit même qu'il le soit en <u>un point</u> x_0 de J , car la prop.3 montre que l'on a

(23) $$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$$

Désignons en particulier par $v_j(x,x_0)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ les n intégrales de (21) telles que les n intégrales correspondantes $v_j(x,x_0)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ de $y' = \underline{A}.y$ soient les n colonnes de la matrice $\underline{C}(x,x_0)$: cela signifie que $v_j^{(k-1)}(x_0,x_0) = \delta_{jk}$ (indice de Kronecker), en convenant de poser $v_j^{(0)} = v_j$. La formule (8), appliquée à l'équation (20) donne alors comme intégrale particulière de (18), égale à 0 ainsi que ses n-1 premières dérivées au point x_0, la fonction

(24) $$w(x) = \int_{x_0}^{x} v_n(x,t)b(t)dt$$

Dans le cas particulier de l'équation $y^{(n)} = b(x)$, la formule (24) redonne la formule exprimant la primitive n-ème de la fonction b(x) qui s'annule ainsi que ses n-1 premières dérivées au point x_0 (chap.II, § 1,formule (20)) ; en effet, v_n est alors l'intégrale de l'équation $y^{(n)}=0$ qui est nulle ainsi que ses n-2 premières dérivées au point x_0 et dont la dérivée (n-1)-ème est égale à 1 , c'est-à-dire le polynome $(x-x_0)^{n-1}/(n-1)!$.

L'équation adjointe de $y' = \underline{A}(x).y$ est, d'après l'expression de $\underline{A}(x)$, équivalente au système linéaire

40

$$(25)\quad \begin{cases} z_1' = -a_n(x)z_n \\ z_2' = -z_1 - a_{n-1}(x)z_n \\ z_3' = -z_2 - a_{n-2}(x)z_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n' = -z_{n-1} - a_1(x)z_n \end{cases}$$

On en déduit aussitôt que $z=z_n$ est une solution de l'équation linéaire homogène d'ordre n

$$(27)\quad z^{(n)}+(a_1z)^{(n-1)}-(a_2z)^{(n-2)}+\ldots+(-1)^n(a_{n-1}z)'+(-1)^{n+1}a_nz = 0$$

pourvu que l'on suppose possibles toutes les dérivations qui figurent dans cette expression ; l'équation (27) est appelée l'<u>équation adjointe</u> de l'équation (21). Inversement, si z est une solution de (27), on a une solution de (25) en posant $z_n=z$, et définissant par récurrence sur p les fonctions z_{n-p} $(1 \leq p \leq n-1)$ au moyen des n-1 dernières équations (25), ce qui donne

$$(28)\quad \begin{cases} z_{n-1} = -z'-a_1z \\ z_{n-2} = z''+(a_1z)'-a_2z \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_1=(-1)^{n-1}z^{(n-1)}+(-1)^{n-1}(a_1z)^{n-2}+\ldots+(a_{n-2}z)'-a_{n-1}z. \end{cases}$$

Si y est une intégrale quelconque de l'équation (21), z une intégrale quelconque de l'équation adjointe (27), il résulte de la prop.2 que la fonction

$$yz_1+y'z_2+\ldots+y^{(n-2)}z_{n-1}+y^{(n-1)}z$$

est <u>constante</u> dans I , les z_k $(1 \leq k \leq n-1)$ étant remplacés par leurs expressions (28). On peut retrouver ce résultat de la manière suivante: y et z étant deux fonctions n fois dérivables dans I , mais par ailleurs <u>quelconques</u>, et les fonctions z_k $(1 \leq k \leq n-1)$ étant définies par les relations (28), ou, ce qui revient au même, par les n-1 dernières équations (25), on a

$$D(yz_1+y'z_2+..+y^{(n-1)}z)=yz_1'+y'(z_2'+z_1)+y''(z_3'+z_2)+...+y^{(n-1)}(z'+z_{n-1})+y^{(n)}z$$
$$= yz_1'+z(y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-2}y''+a_{n-1}y')$$
$$= y((-1)^{n-1}z^{(n)}+(-1)^{n-1}(a_1z)^{(n-1)}+..-(a_{n-1})z')$$
$$+z(y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y')$$

ou encore, en désignant par $L(y)$ le premier membre de (21), par $L^*(z)$ le premier membre de (27)

(29) $$zL(y)-(-1)^n yL^*(z) = D(yz_1+y'z_2+...+y^{(n-1)}z)$$

relation dite <u>identité de Lagrange</u>.

<u>8. Equations linéaires d'ordre n à coefficients constants.</u>

Supposons que, dans l'équation (18), les coefficients a_i soient <u>constants</u> ; il est immédiat que l'équation caractéristique de la matrice $\underline{A}$ correspondante est

(30) $$r^n-a_1r^{n-1}-...-a_{n-1}r-a_n = 0 .$$

Soient r_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ les racines distinctes de cette équation, n_i la multiplicité de la racine r_i $\left(\sum_{i=1}^{q} n_i=n\right)$. D'après le n°6, à chaque racine r_i correspond un système de n_i intégrale <u>linéairement indépendantes</u> $y_{ij}=e^{r_ix}\,p_{ij}(x)$, où p_{ij} est un polynome (à coefficients complexes) de degré $\leqslant n_i-1$; en outre, les n intégrales y_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant q\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i)$ ainsi obtenues forment un système de n intégrales linéairement indépendantes de l'équation homogène (21).

Du fait que les n_i intégrales y_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant n_i)$ sont linéairement indépendantes, les n_i polynomes p_{ij} sont linéairement indépendants dans l'espace des polynomes en x de degré $\leqslant n_i-1$, donc forment une <u>base</u> de cet espace (sur $\mathbb{C}$) puisqu'il est de dimension n_i ; autrement dit, les n fonctions $x^ke^{r_ix}$ $(1 \leqslant k \leqslant n_i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant q)$ forment un système de n intégrales linéairement indépendantes de l'équation homogène (21).

9. Continuité des solutions par rapport au paramètre.

Considérons une équation linéaire homogène

(31) $$y' = \underline{A}(x,\alpha).y$$

où α est un élément d'un espace topologique F ; on suppose que pour tout $\alpha \in F$, l'application $x \to \underline{A}(x,\alpha)$ de I dans $\mathcal{L}(E)$ soit continue ; nous désignerons par $\underline{C}(x,x_0,\alpha).y_0$ la solution de (31) qui prend la valeur y_0 au point $x_0 \in I$. Cela étant, la prop.4 du § 1 se précise de la manière suivante :

PROPOSITION 4.- Si l'application $(x,\alpha) \to \underline{A}(x,\alpha)$ de $I \times F$ dans $\mathcal{L}(E)$ est continue, l'application $(x,x_0,\alpha) \to \underline{C}(x,x_0,\alpha)$ de $I \times I \times F$ dans $\mathcal{L}(E)$ est continue.

Soit (x,α) un point quelconque de $I \times F$. Remarquons d'abord qu'il existe un voisinage K de x dans I, un voisinage U de α dans F, et un nombre fini $h > 0$, tels que $\|\underline{A}(x',\beta)\| \leq h$ pour $(x',\beta) \in K \times U$. Comme dans le th.2, on en déduit l'inégalité $\|\underline{C}(x',x_0,\beta)-\underline{C}(x,x_0,\beta)\| \leq h|x'-x|$ pour $(x',\beta) \in K \times U$. Le raisonnement du corollaire du th.2 montre alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $|x'-x| \leq \delta$, $|x'_0-x_0| \leq \delta$ entraînent $\|\underline{C}(x',x'_0,\beta)-\underline{C}(x,x_0,\beta)\| \leq \varepsilon$ pour tout $\beta \in U$.

En vertu de l'hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de α tel que pour tout $\beta \in V$ et tout z appartenant à l'intervalle compact H d'extrémités x_0 et x, on ait $\|\underline{A}(z,\beta)-\underline{A}(z,\alpha)\| \leq \varepsilon$ (Top.gén., chap.X, §   ) ; on en conclut que $\|\underline{A}(z,\beta)\|$ est bornée dans $H \times V$, soit b sa borne supérieure ; soit d'autre part a la borne supérieure de $\|\underline{C}(z,x_0,\alpha)\|$ pour $z \in H$. Pour tout $\beta \in V$ et tout $z \in H$, posons $u(z)=\underline{C}(z,x_0,\alpha)y_0$, $v(z)=\underline{C}(z,x_0,\beta)y_0$; on a $\|u(z)\| \leq a\|y_0\|$ et $\|u'(z)-\underline{A}(z,\beta)u(z)\| = \|\underline{A}(z,\alpha)u(z)-\underline{A}(z,\beta)u(z)\| \leq \varepsilon\|u(z)\| \leq$ $\leq \varepsilon a\|y_0\|$. D'après le th.1 du § 1, on a donc

$$\| u(x) - v(x) \| \leqslant \frac{\varepsilon a}{b} (e^{b|x-x_0|} - 1) \| y_0 \|$$

pour tout $y_0 \in E$, ce qui signifie encore que

$$\| \underline{C}(x,x_0,\alpha) - \underline{C}(x,x_0,\beta) \| \leqslant \frac{\varepsilon a}{b} (e^{b|x-x_0|} - 1)$$

Comme b décroît lorsque ε tend vers 0, et que la fonction $(e^{\lambda t}-1)/t$ est croissante pour $t \geqslant 0$ $(\lambda > 0)$, la proposition est démontrée.

<u>Exercices</u>.- 1) Soit J un intervalle compact contenu dans I et contenant x_0, k la borne supérieure de $\| \underline{A}(t) \|$ dans J, h la borne supérieure de $ke^{k|x'-x_0|}$ lorsque x' parcourt J. Montrer que, quels que soient x,x' dans J, on a

$$\| \underline{C}(x_0,x) - \underline{C}(x_0,x') \| \leqslant h|x'-x| .$$

2) Soit $u(x)$ l'intégrale de l'équation homogène $y' = \underline{A}(x) y$ prenant la valeur y_0 au point x_0, $v(x)$ l'intégrale de l'équation non homogène $y' = \underline{A}(x) y + b(x)$ prenant la valeur y_0 au point x_0; montrer que si k est la borne supérieure de $\| \underline{A}(t) \|$ dans l'intervalle d'extrémités x_0 et x, on a

$$\| u(x) - v(x) \| \leqslant e^{2k|x-x_0|} \int_{x_0}^{x} \| b(t) \| dt .$$

3) Soit $x \to \underline{A}(x)$ une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ telle que pour deux points quelconques x,y de I, $\underline{A}(x)$ et $\underline{A}(y)$ soient <u>permutables</u>. On pose $\underline{B}(x) = \int_{x_0}^{x} \underline{A}(t)dt$. Montrer que la série

$$\underline{I} + \frac{1}{1!} \underline{B}(x) + \frac{1}{2!} (\underline{B}(x))^2 + \ldots + \frac{1}{n!} (\underline{B}(x))^n + \ldots$$

est normalement convergente dans tout intervalle compact contenu dans I, et que sa somme est égale à $\underline{C}(x,x_0)$. On écrit dans ce cas $\underline{C}(x,x_0) = \exp(\int_{x_0}^{x} \underline{A}(t)dt)$. Si $\underline{A}_1(x)$, $\underline{A}_2(x)$ sont telles que $\underline{A}_1(x)$, $\underline{A}_1(y)$, $\underline{A}_2(x)$, $\underline{A}_2(y)$ soient deux à deux permutables quels que soient x,y dans I, montrer que l'on a

(1) $\exp(\int_{x_0}^{x}(\underline{A}_1(t)+\underline{A}_2(t)dt) = \exp(\int_{x_0}^{x}\underline{A}_1(t)dt)\exp(\int_{x_0}^{x}\underline{A}_2(t)dt)$.

Cas où $\underline{A}(x)$ est constant. Donner un exemple où $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ sont constants et non permutables, et où la relation (1) n'est pas vérifiée (prendre pour E un espace de dimension 2).

4) a) Soit $x \to \underline{A}(x)$ une application de I dans $\mathcal{L}$ (E) telle que, pour tout $y \in E$, l'application $x \to \underline{A}(x)y$ de I dans E soit continue. Montrer que dans tout intervalle compact K contenu dans I , $\|\underline{A}(x)\|$ est <u>bornée</u> (utiliser le th. de Baire). En déduire que dans ces conditions, le th.1 ~~dans~~ est encore valable, ainsi que les parties a) et b) du th.2, et que $x \to \underline{C}(x, x_0)$ est continue dans I .

b) On prend pour E l'espace des suites $z = (\zeta_n)_{n \in N}$ des nombres réels telles que $\lim_{n \to \infty} \zeta_n = 0$, avec la norme $\|z\| = \sup_n |\zeta_n|$. Soit $\underline{A}(x)$ l'application linéaire de E dans lui-même telle que $\underline{A}(x). z = (\frac{1}{1+nx}\zeta_n)_{n \in N}$. Montrer que $\underline{A}$ satisfait aux conditions de a), mais que l'application $x \to \underline{A}(x)$ de $I = [0,1]$ dans $\mathcal{L}$ (E) n'est pas continue, et que, pour l'équation différentielle $y' = \underline{A}(x)y$, l'application $x \to \underline{C}(x,x_0)$ n'est pas dérivable.

----

6. Systèmes linéaires à coefficients constants. Supposons que E soit de dimension n sur le corps $\mathbb{C}$ et considérons l'équation $y'=A(y)$ où A est un endomorphisme de E, indépendant de x ; si on rapporte E à une base quelconque, l'équation est équivalente à un système de n équations linéaires et homogènes, dont les coefficients a_{ij} sont constants.

On sait (Alg., chap.V) que E est somme directe de sous-espaces minimaux E_i $(1 \leq i \leq p)$ invariants par A ; soit A_i la restriction de A à E_i, qui est un endomorphisme de E_i ; si n_i est la dimension de E_i, soit $(u_{ij})_{1 \leq j \leq n_i}$ un système fondamental d'intégrales de l'équation $z_i' = A_i(z_i)$ dans E_i ; il est clair que les n fonctions u_{ij} $(1 \leq j \leq n_i\ ,\ 1 \leq i \leq p\ ,\ \sum_{i=1}^{p} n_i = n)$ forment un système fondamental d'intégrales de $y'=A(y)$.

On est donc ramené au cas où E est sous-espace minimal invariant par A, autrement dit (puisque le corps $\mathbb{C}$ est algèbriquement stable) au cas où la matrice associée à A, reporté à une base convenable, est une matrice de Jordan

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix}$$

Le système scalaire correspondant s'écrit alors

$$\begin{aligned} y_1' &= r y_1 \\ y_2' &= y_1 + r y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ y_n' &= y_{n-1} + r y_n \end{aligned}$$

d'où successivement $y_1 = c_1 e^{rx}$, $y_2 = (c_1 x + c_2) e^{rx}$,

$y_3=(c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3)\,e^{rx},\ldots,y_n=(c_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+c_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+c_{n-1}x+c_n)e^{rx}$,

où les c_i sont des constantes arbitraires.

Revenons au cas général ; soient r_i $(1\leqslant i\leqslant q)$ les racines distinctes de l'équation caractéristique de l'endomorphisme A ; soit k_i la multiplicité de la racine r_i ; on a donc $\sum_{i=1}^{q}k_i=n$. A chaque racine r_i peuvent correspondre un certain nombre de sous-espaces minimaux invariants par A , dont la somme (directe) est de dimension k_i ; il en résulte qu'à chaque racine r_i correspond un système de k_i <u>intégrales linéairement indépendantes</u> y_{ij} $(1\leqslant j\leqslant k_i)$ de la forme $y_{ij}=e^{r_ix}p_{ij}(x)$, où p_{ij} est un polynome (à coefficients dans E) de degré $\leqslant k_i-1$. On peut noter qu'il existe toujours au moins <u>une</u> intégrale de la forme $y=c.e^{r_ix}$, où c est un élément $\neq 0$ de E ; en substituant dans l'équation $y'=A(y)$, on a en effet la relation $r_ic=A(c)$ pour déterminer c , et comme r_i est racine caractéristique de A , cette équation a au moins une solution $\neq 0$.

Un cas particulier important est celui où l'équation caractéristique de A a toutes ses racines <u>simples</u> ; alors il existe n vecteurs linéairement indépendants c_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ tels que les n fonctions $c_i.e^{r_ix}$ forment un système fondamental d'intégrales.

Lorsqu'il existe une base de E telle que la matrice de A , rapportée à cette base, ait ses termes <u>réels</u>, l'équation caractéristique de A a ses coefficients réels. Pour tout vecteur $z=(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de E , rapporté à la base considérée, soit $\overline{z}=(\overline{\xi_k})$; l'application $z\rightarrow\overline{z}$ est une involution antilinéaire de E . Si r_k est une racine complexe de l'équation caractéristique de A , $\overline{r}_k$ est aussi une racine, ayant même ordre de multiplicité ; si $E_1,..,E_q$ sont les sous-espaces minimaux invariants de E correspondant à la racine r_k , et si E'_i désigne l'image de E_i par $z\rightarrow\overline{z}$, les E'_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ sont des sous-espaces minimaux invariants en lesquels se décompose le sous-espace de E correspondant à la racine $\overline{r}_k$; par suite, si les $e^{r_k x} p_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n_k)$ sont n_k intégrales linéairement indépendantes correspondant à la racine r_k , les $e^{\overline{r}_k x} \overline{p}_i(x)$ (où les coefficients de $\overline{p}_i$ sont images de ceux de $p_i(x)$ par l'application $z \to \overline{z}$) sont n_k intégrales linéairement indépendantes correspondant à la racine $\overline{r}_k$. Il en résulte que les $2n_k$ intégrales $\frac{1}{2}(e^{r_k x} p_i(x)+e^{\overline{r}_k x} \overline{p}_i(x))$ et $\frac{1}{2i}(e^{r_k x} p_i(x)-e^{\overline{r}_k x} \overline{p}_i(x))$ $(1 \leqslant i \leqslant n_k)$ sont linéairement indépendantes, et ont, par rapport à la base choisie dans E , des composantes qui sont des fonctions <u>réelles</u> de x .

7. <u>Equations linéaires scalaires d'ordre n</u> . On appelle équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre n toute équation scalaire de la forme

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y = b(x) \tag{5}$$

où les a_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ et b sont des fonctions scalaires(complexes) de x définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. D'après la méthode générale du § 1, n° 1 une telle équation équivaut au système scalaire de n équations du premier ordre

$$\left\{\begin{array}{ll} y'_p = y_{p+1} & (1 \leqslant p \leqslant n-1) \\ a_0(x)y'_n+a_1(x)y_n+a_2(x)y_{n-1}+\ldots+a_n(x)y_1=b(x) & \end{array}\right. \tag{6}$$

c'est-à-dire à l'équation linéaire

$$y' = A.y+b \tag{7}$$

où $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{C}^n$, $b=(0,0,\ldots,0,b(x))$, et la matrice A est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_n(x)}{a_o(x)} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_o(x)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\frac{a_{n-2}(x)}{a_o(x)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_1(x)}{a_o(x)} \end{pmatrix}$$

La théorie de l'équation linéaire d'ordre n se borne donc à appliquer à l'équation (7) les résultats généraux qui précèdent. Dans tout intervalle V où les n+1 fonctions $a_i(x)$ sont continues et $a_o(x)\neq 0$, l'équation <u>homogène</u> (5) (c'est-à-dire telle que $b(x)=0$) admet une intégrale et une seule u telle que $u(x_o)=y_o$, $u'(x_o)=y'_o$, ..., $u^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$, où $x_o \in V$, et $y_o, y'_o, \dots, y_o^{(n-1)}$ sont n scalaires arbitraires.

On dit que p intégrales u_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ de l'équation homogène (5) sont <u>linéairement dépendantes</u> dans V s'il existe p constantes c_i non toutes nulles et vérifiant dans V <u>l'identité</u> $\sum_{i=1}^{p} c_i u_i(x)=0$. Cette identité entraîne évidemment $\sum_{i=1}^{p} c_i u_i^{(k)}(x)=0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ dans V, c'est-à-dire que les p intégrales $\mathcal{U}_i=(u_i, u'_i, u''_i, \dots, u_i^{(n-1)})$ de l'équation homogène (7) sont linéairement dépendantes ; la réciproque est immédiate.

En particulier, si n intégrales u_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont linéairement indépendantes, toute intégrale de (5) est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x)$, les scalaires λ_i étant arbitraires. En outre, la prop.2 montre qu'on a

$$(8)\quad \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & \dots & u_n''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & \dots & \dots & u_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & \dots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}$$

Le déterminant du premier membre est appelé le <u>wronskien</u> des n intégrales u_i au point x .

Supposons pour simplifier que $a_0(x)=1$; alors le système <u>adjoint</u> au système (6) est

$$(9)\quad \begin{cases} z_1' = a_n z_n \\ z_2' = -z_1 + a_{n-1} z_n \\ z_3' = -z_2 + a_{n-2} z_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_n' = -z_{n-1} + a_1 z_n \end{cases}$$

On en déduit aussitôt que $z=z_n$ est une intégrale de l'équation linéaire d'ordre n

$$(10)\quad z^{(n)} - (a_1 z)^{(n-1)} + (a_2 z)^{(n-2)} - \dots + (-1)^{n-1}(a_{n-1} z)' + (-1)^n a_n z = 0$$

qu'on appelle l'<u>équation adjointe</u> de l'équation homogène (5), pourvu que l'on suppose possibles toutes les dérivations qui figurent dans l'expression (10). Inversement, si z satisfait à (10), on a un système d'intégrales de (9) en posant $z_n=z$ et définissant par récurrence sur p les fonctions z_{n-p} $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ au moyen des n-1 dernières équations (9) , ce qui donne

$$(11)\quad \begin{cases} z_{n-1} = -z' + a_1 z \\ z_{n-2} = z'' - (a_1 z)' + a_2 z \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_1 = (-1)^{n-1} z^{(n-1)} + (-1)^{n-2} (a_1 z)^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} z \end{cases}$$

Si y est une intégrale quelconque de l'équation homogène (5), z une intégrale quelconque de (10), il résulte de la prop.1 que la fonction

(12) $$yz_1 + y'z_2 + y''z_3 + \ldots + y^{(n-1)}z$$

est constante dans V, les z_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ étant remplacés par leurs expressions (11). On peut retrouver ce résultat de la manière suivante y et z étant deux fonctions n fois dérivable dans V, mais par ailleurs quelconques, et les fonctions z_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ étant définies par les relations (11), ou, ce qui revient au même, par les $n-1$ dernières équations (9), on a

$$\frac{d}{dx}(yz_1+y'z_2+\ldots+y^{(n-1)}z) = yz_1'+y'(z_2'+z_1)+y''(z_3'+z_2)+\ldots+y^{(n-1)}(z'+z_{n-1})+y^{(n)}z$$
$$= yz_1'+z(y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-2}y''+a_{n-1}y')$$
$$= y((-1)^{n-1}z^{(n)}+(-1)^{n-2}(a_1z)^{n-1}+\ldots+(a_{n-1}z)')$$
$$+ z(y^{(n)}+ a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y')$$

ou encore, en désignant par $L(y)$ le premier membre de (5), par $L^*(z)$ le premier membre de (10)

(13) $$zL(y)-(-1)^n yL^*(z) = \frac{d}{dx}(yz_1+y'z_2+\ldots+y^{(n-1)}z)$$

relation dite identité de Lagrange.

8. Equations linéaires d'ordre n à coefficients constants. Supposons que, dans l'équation (5), les a_i soient constants ; on voit aussitôt que l'équation caractéristique de la matrice A correspondante est

(14) $$a_0r^n+ a_1r^{n-1}+\ldots+a_{n-1}r+ a_n = 0$$

Soient r_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ les racines de cette équation, k_i la multiplicité de la racine r_i $(\sum_{i=1}^{q} k_i = n)$. D'après le n°6, à chaque racine r_i correspond un système de k_i intégrales linéairement indépendantes $y_{ij} = e^{r_ix}p_{ij}(x)$, où p_{ij} est un polynome (à coefficients scalaires) de degré $\leqslant k_i-1$, et les n intégrales y_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant q,\ 1 \leqslant j \leqslant k_i)$

ainsi obtenues forment un système de n intégrales linéairement indépendantes de l'équation homogène (5).

Le fait que les k_i intégrales y_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant k_i)$ sont linéairement indépendantes, les k_i polynomes p_{ij} sont linéairement indépendants dans l'espace des polynomes de degré $\leqslant k_i - 1$, donc forment une <u>base</u> de cet espace ; autrement dit, pour <u>tout</u> polynome $p(x)$ de degré $\leqslant k_i - 1$, $e^{r_i x} p(x)$ est une intégrale de l'équation homogène (5) à coefficients constants.

<u>9. La méthode d'Heaviside</u>. On peut retrouver ce résultat par une autre méthode si φ est le polynome caractéristique (premier membre de (14)), l'équation homogène (5) peut s'écrire $\varphi(D)y=0$, ou encore

$$a_0(D-r_1)^{k_1}(D-r_2)^{k_2} \dots (D-r_q)^{k_q} y = 0$$

et telle est donc en particulier vérifiée par toute intégrale de l'une quelconque des équations $(D-r_i)^{k_i} y=0$. Or, on a identiquement, pour toute fonction y k fois dérivable,

$$D^k(e^{-rx}y) = e^{-rx}(D-r)^k y \tag{15}$$

comme on le voit aussitôt par récurrence sur k ; donc, l'équation $(D-r)^k y=0$ équivaut à $D^k(e^{-rx}y)=0$, dont toute intégrale est de la forme $y=e^{rx}p(x)$, où p est un polynome arbitraire de degré $\leqslant k-1$.

L'identité (15) permet d'avoir aisément une intégrale particulière de l'équation non homogène $(D-r)^k y=b(x)$; en effet, cette équation s'écrit $D^k(e^{-rx}y)=e^{-rx}b(x)$; on en déduit, à l'aide de la formule donnant une primitive d'ordre k d'une fonction, que

$$y = e^{rx}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-rt} b(t)dt$$

est une intégrale particulière de l'équation considérée.

Fixons une fois pour toutes le point $x_0 \in V$; pour toute fonction $g(x)$ définie et continue dans V, nous poserons

$$(16)\qquad \frac{1}{(D-r)^k}\, g(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{r(x-t)} g(t)\,dt$$

Soient maintenant φ et ψ deux polynomes premiers entre eux, et soit $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \theta(t) + \sum_i \left(\sum_j \frac{a_{ij}}{(t-r_i)^j} \right)$ la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{\varphi}{\psi}$ (θ polynome) ; on posera par définition

$$\frac{\varphi(D)}{\psi(D)}\, g(x) = \theta(D) g(x) + \sum_i \left(\sum_j \frac{a_{ij}}{(D-r_i)^j}\, g(x) \right)$$

Avec ces conventions, on a identiquement $D\left(\frac{\varphi(D)}{\psi(D)}\, g(x)\right) = \left(D\, \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} \right) g(x)$. Il suffit de le vérifier pour $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{1}{(t-r)^k}$, ce qui résulte aisément de la formule (16).

Cela étant :

Proposition 1. Etant donné un système linéaire à coefficients constants

$$(17)\qquad \begin{cases} (a_{11}D+b_{11})y_1 + (a_{12}D+b_{12})y_2 + \dots + (a_{1n}D+b_{1n})y_n = g_1(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{n1}D+b_{n1})y_1 + (a_{n2}D+b_{n2})y_2 + \dots + (a_{nn}D+b_{nn})y_n = g_n(x) \end{cases}$$

on pose $\Delta(t) = \boxed{a_{ij}t+b_{ij}}$, et on désigne par $\Delta_{ij}(t)$ le mineur de l'élément $a_{ij}t+b_{ij}$ du déterminant $\Delta(t)$, multiplié par $(-1)^{i+j}$; on suppose que $\Delta(t)$ n'est pas identiquement nul. Avec ces notations, les fonctions

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{ji}(D)}{\Delta(D)}\, g_j(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

forment un système d'intégrales de (17).

En effet, on a

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}D+b_{ij})y_j = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}D+b_{ij}) \left(\frac{\Delta_{kj}(D)}{\Delta(D)}\, g_k(x)\right)\right)$$

et, d'après ce qui précède

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}D+b_{ij})y_j = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}D+b_{ij}) \frac{\Delta_{kj}(D)}{\Delta(D)} \right) g_k(x)\right)$$

Or, on a

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}D+b_{ij})\,\frac{\Delta_{kj}(D)}{\Delta(D)}=0 \qquad \text{si} \quad k\neq i$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}D+b_{ij})\,\frac{\Delta_{ij}(D)}{\Delta(D)}=1$$

d'où la proposition.

En d'autres termes, pour obtenir un système d'intégrales de (17), on résout (17) par rapport aux y_j, par les formules de Cramer, comme si D était un scalaire ; cette méthode est connue sous le nom de <u>méthode d'Heaviside</u>.

<u>10. Application à la différentiation par rapport au paramètre d'une intégrale d'une équation différentielle</u>. Soient E et F deux espaces normés, E étant supposé <u>complet</u>, V un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, S (resp. S') une boule ouverte dans E (resp. F) de centre y_0 (resp. α_0). Soit g une application continue de $V\times S\times S'$ dans E ; on suppose que, dans $V\times S\times S'$, les différentielles partielles $d_2g(x,y,\alpha;h)$ et $d_3g(x;y,\alpha;\lambda)$ existent, et que les applications $(x,y,\alpha)\to d_{2;x,y,\alpha}g$ et $(x,y,\alpha)\longrightarrow d_{3;x,y,\alpha}g$ dans $\mathcal{L}(E,E)$ et $\mathcal{L}(F,E)$ respectivement, sont continues et bornées.

On a donc, dans $V\times S\times S'$

(18) $\qquad \|g(x,y_1,\alpha_1)-g(x,y_2,\alpha_2)\|\leqslant a\|y_1-y_2\|+b\|\alpha_1-\alpha_2\|$

a et b étant deux constantes. On en déduit tout d'abord que, pour tout $\alpha\in S'$, $g(x,y,\alpha)$ est <u>lipschitzienne</u> dans $S\times V$. D'après le th.2 du 1, il existe donc un intervalle ouvert I contenant $x_0\in V$, tel que, pour <u>tout</u> $\alpha\in S'$, il existe une intégrale et une seule $u(x,\alpha)$ de l'équation $y'=g(x,y,\alpha)$, définie dans I, prenant ses valeurs dans S, et telle que $u(x_0,\alpha)=y_0$; le même théorème entraîne en outre que l'on a, pour tout $x\in I$

(19) $\qquad \|u(x,\alpha)-u(x,\beta)\|\leqslant c\|\alpha-\beta\|$

quels que soient α,β dans S', d'après l'inégalité (18) appliquée pour $y_1=y_2$ (c constante). mais les hypothèses entraînent le théorème beaucoup plus précis suivant :

<u>Théorème 3. Pour tout point</u> $(x,\alpha)\in I\times S'$, <u>la différentielle partielle</u> $d_3u(x,\alpha;\lambda)$ <u>existe, et</u> (considérée comme fonction de x) <u>vérifie dans</u> I <u>l'équation différentielle linéaire</u>

(20) $$\frac{dz}{dx} = A_x(z)+b(x)$$

<u>où on a posé</u> $A_x=d_{2;x,u(x,\alpha),\alpha}g$ <u>et</u> $b(x)=d_3g(x,u(x,\alpha),\alpha;\lambda)$, <u>ainsi que la condition initiale</u> $d_2u(x_0,\alpha;\lambda)=0$.

Remarquons tout d'abord que, d'après (19), $u(x,\alpha)-u(x,\beta)$ tend <u>vers</u> 0 <u>uniformément</u> dans I , lorsque β tend vers α . D'après la prop.4 du chap.I, §1, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que pour $\|\beta-\alpha\|\leqslant r$, on ait, pour tout $x\in I$

$$\|g(x,u(x,\alpha),\alpha)-g(x,u(x,\beta),\beta)-d_2g(x,u(x,\alpha),\alpha;u(x,\alpha)-u(x,\beta)) \\ -d_3g(x,u(x,\alpha),\alpha;\alpha-\beta)\|\leqslant\varepsilon\|\alpha-\beta\|$$

c'est-à-dire, en posant $\beta-\alpha=\lambda$

(21) $$\left\|\frac{d}{dx}(u(x,\beta)-u(x,\alpha))-A_x(u(x,\beta)-u(x,\alpha))-b(x)\right\|\leqslant\varepsilon\|\lambda\|$$

Soit alors $v(x)$ l'intégrale de l'équation (20) telle que $v(x_0)=0$. Si on pose $w(x)=u(x,\beta)-u(x,\alpha)-v(x)$, on a, d'après (21), pour tout $x\in I$, $\left\|\frac{d}{dx}w(x)-A_x(w)\right\|\leqslant\varepsilon\|\lambda\|$ et $w(x_0)=0$. Comme $\|A_x\|$ est bornée dans I , la prop.2 du §1 montre qu'il existe une constante k , <u>indépendante de</u> λ , telle que $\|w(x)\|\leqslant k\varepsilon\|\lambda\|$ dans I , ce qui démontre la proposition d'après la définition de la différentielle, et le fait que l'intégrale de (20) qui s'annule pour x_0 est une fonction linéaire de λ pour tout x fixe dans I .

<u>Remarque</u>. Une fois qu'on sait que $d_2u(x,\alpha;\lambda)$ existe, l'équation (20) qu'elle vérifie s'obtient en différentiant l'identité $\frac{d}{dx}u(x,\alpha)=g(x,u(x,\alpha),\alpha)$ par rapport à α et remarquant qu'on a $d_2(\frac{d}{dx}u)=\frac{d}{dx}(d_2u)$ (chap.I, §3).

<u>Corollaire</u>. <u>Dans</u> $I\times S'$, <u>la fonction</u> $u(x,\alpha)$ <u>est continument différentiable</u>.

Tout revient à prouver que $(x,\alpha)\to d_{2;x,\alpha}u$ est une application continue de $I\times S'$ dans $\mathcal{L}(F,E)$. Changeant légèrement les notations du th.3, posons $d_{2;x,u(x,\alpha),\alpha}g = A_{x,\alpha}$ et $b(x,\alpha;\lambda) = d_3g(x,u(x,\alpha),\alpha;\lambda)$. Désignons par $C_{x,\alpha}(z_0)$ l'intégrale de l'équation $z'=A_{x,\alpha}(z)$ qui prend la valeur z_0 au point x_0 ; d'après le corollaire du th.2, et la continuité de l'application $(x,\alpha)\to A_{x,\alpha}$ l'application $(x,\alpha)\to C_{x,\alpha}$ et l'application $(x,\alpha)\to C^{-1}_{x,\alpha}$ sont continues ; d'autre part, si on désigne par $B_{x,\alpha}$ l'application linéaire $\lambda\to b(x,\alpha;\lambda)$, l'application $(x,\alpha)\to B_{x,\alpha}$ est aussi continue. On en déduit tout d'abord que l'application $t\to C^{-1}_{t,\alpha}\circ B_{t,\alpha}$ de V dans $\mathcal{L}(F,E)$ est continue, donc que l'intégrale $\int_{x_0}^{x}(C^{-1}_{t,\alpha}\circ B_{t,\alpha})dt = U_{x,\alpha}$ a un sens, et on a $U_{x,\alpha}(\lambda) = \int_{x_0}^{x}C^{-1}_{t,\alpha}(b(t,\alpha;\lambda))dt$; d'après le n° 3, on a donc

$$d_{2;x,\alpha}u = C_{x,\alpha}\circ U_{x,\alpha}$$

Or, l'application $(x,\alpha)\to U_{x,\alpha}$ est continue (<u>Fonct.var.réelle</u>, chap.I, §4), donc il en est de même de $(x,\alpha)\to d_{2;x,\alpha}u$.

11. <u>Différentiation par rapport à la valeur initiale</u>. Les notations étant les mêmes, soit g une application continue de $V\times S$ dans E, telle que la différentielle partielle $d_{2;x,y}g$ existe en tout point de $V\times S$, et que l'application $(x,y)\to d_{2;x,y}g$ soit continue et bornée dans ce sous-espace. Dans ces conditions, g est lipschitzienne dans $V\times S$; soit S' une boule de même centre y_0 que S, mais de rayon strictement inférieur ;

il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que, pour tout $\eta \in S'$, il existe une intégrale et une seule $u(x,\eta)$ de $y'=g(x,y)$, définie dans I, prenant ses valeurs dans S et telle que $u(x_0,\eta)=\eta$; il suffit pour le voir d'appliquer le th.2 du § 1 à l'équation $y'=g(x,\eta-y_0+y)$, avec la condition initiale $y(x_0)=y_0$; si $v(x,\eta)$ est l'intégrale de cette équation définie dans I, on a $u(x,\eta)=\eta-y_0+v(x,\eta)$

Cela étant, posons $A_{x,\eta}=d_{2;x,u(x,\eta)}g$; le th.3 montre que la différentielle $d_2 v(x,\eta;\lambda)=z_{x,\eta}(\lambda)$ existe et vérifie dans I l'équation différentielle linéaire

$$(21)\qquad \frac{d}{dx} z_{x,\eta}(\lambda) = A_{x,\eta}(z_{x,\eta}(\lambda)+\lambda)$$

avec la condition initiale $z_{x_0,\eta}(\lambda)=0$.

En outre, le corollaire du th.3 montre que, dans $I\times S'$, $u(x,\eta)$ est continument différentiable, et que $d_2 u(x_0,\eta;\lambda)$ se réduit à λ quel que soit η. Par suite, l'application de la prop.2 du chap.I, § 2, donne le complément suivant au th.3 du § 1 :

Proposition 4. Si $d_{2;x,y}g$ existe dans $V\times S$ et si l'application $(x,y)\to d_{2,x,y}g$ est continue et bornée dans $V\times S$, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une boule S' de centre y_0 tels que, pour tout $\eta\in S'$, il existe dans I une intégrale et une seule $u(x,\eta)$ de $y'=g(x,\eta)$ prenant ses valeurs dans S et telle que $u(x_0,\eta)=\eta$. La fonction $u(x,\eta)$ est continument différentiable dans $I\times S'$; en outre, il existe une boule T de centre y_0 telle que, pour tout $x\in I$ et tout $y\in T$, il existe un $\eta\in S'$ et un seul tel que $y=u(x,\eta)$; si on pose $\eta=w(x,y)$, w est une application continument différentiable de $I\times T$ dans S'.

Exercices. 1) Avec les notations du th.2, montrer qu'on a dans V, $\| C_{x'}^{-1} - C_x^{-1} \| \leqslant k' |x'-x|$.

2) Soit $u(x,y_0)$ l'intégrale de l'équation homogène $y'=A_x(y)$ prenant la valeur y_0 au point x_0, $v(x,y_0)$ l'intégrab de l'équation non homogène $y'=A_x(y)+b(x)$ prenant la valeur y_0 au point x_0 ; montrer qu'on a dans V

$$\| v(x,y_0)-u(x,y_0)\| \leqslant e^{2k|x-x_0|} \left| \int_{x_0}^{x} \|b(t)\| dt \right|$$

3) Soit A un endomorphisme fixe de E ; si l'intégrale de $y'=A(y)$ prenant la valeur y_0 au point x_0 est $C_x(y_0)$, montrer qu'on a

$$C_x = 1 + (x-x_0)A + \frac{(x-x_0)^2}{2!} A^2 + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} A^n + \ldots$$

la série étant uniformément convergente dans $\mathcal{L}(E)$ pour x variable dans un intervalle compact ; on convient d'écrire cette série $e^{(x-x_0)A}$. Montrer que, si A et B sont permutables dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$, on a

$$e^{(x-x_0)A} . e^{(x-x_0)B} = e^{(x-x_0)(A+B)}$$

Donner un exemple de deux endomorphismes A,B non permutables ne vérifiant pas l'identité précédente (prendre pour E un espace de dimension 2).

4) Etant donné le système linéaire (17) à coefficients constants et homogène (les g_i étant nulles), soit ~~m~~ n le degré du polynome $\Delta(t)$. Montrer que l'ensemble des $y_0=(y_{10},y_{20},\ldots,y_{n0})$ tels qu'il existe une solution $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ prenant la valeur y_0 au point x_0, est un sous-espace de dimension m (soit r le rang de la matrice (a_{ij}) ; montrer que, par une transformation linéaire à coefficients constants, on peut se ramener au cas où les n-r dernières équations sont $y_{r+1}=0,\ldots,y_n=0$; en déduire la proposition en remarquant que m=r).

5) Soit E l'espace des suites (ξ_n) de nombres réels telles que $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, avec la norme $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$. On considère l'équation linéaire $(y'_n) = (\frac{1}{1+nt} y_n)$ dans E ; montrer que (avec les notations du n°1), pour tout y E, l'application $t \to A_t(y)$ est continue, mais que l'application $t \to A_t$ de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}(E)$ n'est pas continue, et que l'application $t \to C_t$ n'est pas dérivable.

§3. Equations aux différentielles totales complètement intégrables.

1. Equations aux différentielles totales. Soit E un espace normé, F un espace normé complet (sur l'un des corps R ou C) ; soit A un ensemble ouvert dans E, B un ensemble ouvert dans F ; pour tout couple $(x,y) \in A \times B$, soit $h \to g(x,y;h)$ une application linéaire continue de E dans F, qu'on notera aussi $g_{x,y}$. On dit qu'une fonction f, définie dans un ensemble ouvert $V \subset A$, continue et différentiable dans cet ensemble, est une solution (ou intégrale) dans V de l'équation aux différentielles totales

$$(1) \qquad dy = g(x,y;dx)$$

si, pour tout $x \in V$, on a $f(x) \in B$, et, identiquement en $h \in E$

$$df(x;h) = g(x,f(x);h) .$$

Lorsque $E = R$, la notion d'équation aux différentielles totales se réduit donc à celle d'équation différentielle du premier ordre (résolue par rapport à y').

On dit que l'équation (1) est complètement intégrable dans $A \times B$, si, pour tout $x_0 \in A$ et tout $y_0 \in B$, il existe, dans un voisinage V de x_0 (dépendant de x_0) une intégrale et une seule f de (1), telle que $f(x_0) = y_0$.

Dans ce qui suit, nous allons supposer que l'application $(x,y) \to g_{x,y}$ de $A \times B$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ admet une différentielle $(k,\ell) \to dg_{x,y;k,\ell}$ dans $A \times B$; si $d_{x,y}g$ est cette différentielle nous supposerons en outre que $(x,y) \to d_{x,y}g$ est une application <u>continue</u> et <u>bornée</u> de $A \times B$ dans $\mathcal{L}(E \times F, \mathcal{L}(E,F))$; en particulier, il existe un nombre $a > 0$ tel que $\| dg_{x,y;k,\ell} \| \leqslant a(\|k\| + \|\ell\|)$ pour tout $(x,y) \in A \times B$, ce qui, d'après la définition de la norme dans $\mathcal{L}(E,F)$, équivaut à $\| dg_{x,y;k,\ell}(h) \| \leqslant a\|h\|(\|k\| + \|\ell\|)$; posons $d_1g(x,y;h;k) = dg_{x,y;k,0}(h)$ et $d_2g(x,y;h;\ell) = dg_{x,y;0,\ell}(h)$; les applications $(h,k) \to d_1g(x,y;h;k)$ et $(h,\ell) \to d_2g(x,y;h;\ell)$ sont donc des applications bilinéaires continues de $E \times E$ et $E \times F$ respectivement dans F, et on a, quels que soient $x \in A$ et $y \in B$,

(2) $\qquad \| d_1g(x,y;h;k) \| \leqslant a\|h\| \cdot \|k\| \qquad \| d_2g(x,y;h;\ell) \| \leqslant a\|h\| \cdot \|\ell\|$

D'ailleurs, pour tout h fixe, $k \to d_1g(x,y;h;k)$ est la différentielle de $x \to g(x,y;h)$, $\ell \to d_2g(x,y;h;\ell)$ celle de $y \to g(x,y;h)$. D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que, si y_1 et y_2 sont deux points de B tels que le segment d'extrémités ces points soit contenu dans B, on a

(3) $\qquad \| g(x,y_1;h) - g(x,y_2;h) \| \leqslant a\|h\| \cdot \|y_1 - y_2\|$

Dans ces conditions :

<u>Théorème 1</u>. <u>Pour que l'équation</u> (1) <u>soit complètement intégrable dans</u> $A \times B$, <u>il faut et il suffit qu'on ait identiquement dans</u> $A \times B$

(4) $\quad d_1g(x,y;h;k) + d_2g(x,y;h;g(x,y;k)) = d_1g(x,y;k;h) + d_2g(x,y;k;g(x,y;h))$.

1° La condition est <u>nécessaire</u>. Soit (x_0,y_0) un point quelconque de $A \times B$; par hypothèse, il existe dans une boule S de centre x_0 une intégrale u de (1) et une seule telle que $u(x_0) = y_0$. Soit x un point quelconque de S ; pour tout nombre réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant 1$, posons

posons $z = x_0+t(x-x_0)$; l'application $t \to u(z)=u(x_0+t(x-x_0))$ de $I = [0,1]$ dans F est dérivable et on a $\frac{d}{dt}u(x_0+t(x-x_0))=du(z;x-x_0)$; donc, d'après (1), $u(x_0+t(x-x_0))=v(t)$ est une intégrale de l'équation différentielle du premier ordre

$$(5) \qquad v'(t)=g(x_0+t(x-x_0),v(t);x-x_0)=\varphi(t,v;x)$$

prenant la valeur y_0 pour $t=0$. D'après (3), le second membre de (5) est lipschitzienne, donc il existe une intégrale et une seule $v(t,x)$ dans I prenant la valeur y_0 pour $t=0$; l'hypothèse entraîne donc qu'on a $v(t,x)=u(x_0+t(x-x_0))$, et par suite $u(x)=v(1,x)$.

Cela étant, les hypothèses sur g entraînent l'existence des différentielles $d_2\varphi(t,v;x;\ell) = d_2g(x_0+t(x-x_0),v;x-x_0;\ell)$ et $d_3\varphi(t,v;x;k) = td_1g(x_0+t(x-x_0),v;x-x_0;k)+g(x_0+t(x-x_0);v;k)$, et montrent que les applications $(t,v,x) \to d_{2;t,v,x}\varphi$ et $(t,v,x) \to d_{3;t,v,x}\varphi$ sont continues dans $I\times S'\times S$, S' étant une boule de centre y_0 dans F . D'après le th.3 du § 2, $w(t,x;h)=d_2v(t,x;h)$, différentielle de v par rapport à x, existe dans $I\times S$ et en tant que fonction de t , satisfait à l'équation différentielle

$$(6) \qquad \frac{dw}{dt} = d_2g(z,v(t,x);x-x_0;w)+td_1g(z,v(t,x);x-x_0;h)+g(z,v(t,x);h)$$

D'autre part, la relation $v(t,x)=u(x_0+t(x-x_0))$ entraîne, puisque par hypothèse u est différentiable, $d_2v(t,x;h)=tdu(x_0+t(x-x_0);h)$ et par suite $w(t,x;h)=d_2v(t,x;h) = tg(x_0+t(x-x_0),v(t,x);h)$. Par suite, on a aussi

$$(7) \qquad \frac{dw}{dt} = g(z,v(t,x);h)+td_1g(z,v(t,x);h;x-x_0)+td_2g(z,v(t,x);h;d_1v(t,x;1))$$

Mais $d_1v(t,x;1)=du(x_0+t(x-x_0);x-x_0)$, donc la comparaison de (6) et (7) prouve qu'on a identiquement dans $I\times S$

$$d_1 g(z,v(t,x);x-x_0;h)+d_2 g(z,v(t,x);x-x_0;g(z,v(t,x);h)) = d_1 g(z,v(t,x);h;x-x_0)+d_2 g(z,v(t,x);h;g(z,v(t,x);x-x_0))$$

Posons alors $x-x_0=\lambda k$ et faisons tendre le scalaire λ vers 0 après avoir divisé par les deux membres de l'identité précédente ; à la limite, il vient la relation (4), où (x,y) est remplacé par (x_0,y_0). Comme (x_0,y_0) est arbitraire dans $A\times B$ par hypothèse, l'identité (4) est démontrée.

2° La condition est <u>suffisante</u>. La boule S' de centre y_0 et rayon r étant fixée, la borne supérieure de $\|g(z,v;x-x_0)\|$ pour $x\in S$, $z\in S$ $v\in S'$ tend vers 0 avec le rayon de S ; on peut donc toujours supposer le rayon de S choisi assez petit pour que cette borne M soit telle que $\frac{r}{M}>1$; d'après la prop.3 du §1, pour tout $x\in S$, l'équation différentielle (5) a une intégrale et une seule $v(t,x)$ définie dans $I=[0,1]$ et prenant la valeur y_0 pour $t=0$. Pour tout scalaire $\lambda\in I$, soit $w(t)=v(t,x_0+\lambda(x-x_0))$; d'après (5), on a $w'(t)=g(x_0+\lambda t(x-x_0),w(t);\lambda(x-x_0))=\lambda g(x_0+\lambda t(x-x_0),w(t);x-x_0)$, et $w(0)=y_0$; d'autre part, on a aussi $\frac{d}{dt}v(\lambda t,x)=\lambda g(x_0+\lambda t(x-x_0),v(\lambda t,x);x-x_0)$ et $v(0,x)=y_0$; d'après l'unicité de l'intégrale de $y'=\lambda g(x_0+\lambda t(x-x_0),y;x-x_0)$ prenant la valeur y_0 pour $t=0$, on a la relation $v(t,x_0+\lambda(x-x_0))=v(\lambda t,x)$; faisant en particulier $t=1$ dans cette identité et remplaçant λ par t, il vient $v(1,x_0+t(x-x_0))=v(t,x)$; si on pose $u(x)=v(1,x)$, on a donc encore $v(t,x)=u(x_0+t(x-x_0))$. Cela étant, le même raisonnement que dans la première partie de la démonstration montre que $w(t,x;h)=d_2v(t,x;h)$ existe dans $I\times S$ et satisfait à (6) en tant que fonction de t, avec la condition $w(0,x;h)=0$. La fonction $u(x)$ est donc différentiable dans S, et on a encore $d_1v(t,x;1)=du(x_0+t(x-x_0));x-x_0)$; l'identité (4) prouve alors que w satisfait à l'équation différentielle (7) ;

or, le second membre de (7) est la dérivée par rapport à t de la fonction $tg(x_0+t(x-x_0),v(t,x);h)$; comme cette fonction s'annule pour $t=0$, on a $w(t,x;h)=tg(x_0+t(x-x_0),v(t,x);h)$ identiquement ; faisant $t=1$, on a donc $du(x;h)=g(x,u(x);h)$, ce qui achève de prouver le th.1.

<u>2. Systèmes de Pfaff complètement intégrables</u>. Dans l'espace R^n, soient $\omega_i(x;dx) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)d\xi_j$ $p<n$ formes différentielles, définies dans un ensemble ouvert A ; nous supposerons que les a_{ij} sont continues et continument différentiables dans A, et qu'en tout point de A les p formes ω_i constituent un système libre. En tout point $x_0 \in A$, un des déterminants d'ordre p de la matrice $(a_{ij}(x_0))$ est donc $\neq 0$; par suite le déterminant formé des mêmes colonnes dans la matrice $(a_{ij}(x))$ est aussi $\neq 0$ dans un voisinage V de x_0 ; les p équations $\omega_i(x;dx)=0$ équivalent donc dans V à un système de la forme

(8) $$d\xi_i = \sum_{j=p+1}^{n} b_{ij}(x)d\xi_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

(en supposant par exemple que le déterminant $\neq 0$ soit celui formé des p premières colonnes) ; les b_{ij} étant continument différentiables dans V. Soit E (resp. F) le sous-espace coordonné de R^n formé des points où les $n-p$ dernières coordonnées (resp. les p premières coordonnées) s'annulent ; si on pose $y=(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, $z=(\xi_j)_{p+1 \leqslant j \leqslant n}$ et $B_{y,z}=(b_{ij}(x))$, le système (8) s'écrit aussi

(9) $$dy = B_{y,z}.dz$$

On dit que le <u>système de Pfaff</u>

(10) $$\omega_i(x;dx) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

est <u>complètement intégrable</u> dans A si, en chaque point $x_0 \in A$, l'équation aux différentielles totales (9) est complètement intégrable.

Pour appliquer la condition (4) remarquons qu'ici le premier membre de (4) est un vecteur $v=(v_i) \in E$, fonction de deux vecteurs

$h=(h_j)\in F$ et $k=(k_j)\in F$; c'est la différentielle par rapport à x du vecteur $u(h)=(u_i(h))$ défini par

$$(11) \qquad u_i(h)=\sum_{j=p+1}^{n} b_{ij}(x)h_j \qquad (1\leqslant i\leqslant p)$$

dans laquelle on remplace l'accroissement de x par le vecteur dont les p premières composantes sont les $u_i(k)$, les $n-p$ dernières les k_j. Or, on peut aussi considérer que $u(h)$ est défini par les équations équivalentes à (11)

$$(12) \qquad \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(x)u_j(h)+\sum_{\alpha=p+1}^{n} a_{i\alpha}(x)h_\alpha=0 \qquad (1\leqslant i\leqslant p)$$

donc sa différentielle vérifie

$$(13) \qquad \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(x)du_j(h;\ell)+\sum_{j=1}^{p} da_{ij}(x;\ell)u_j(h)+\sum_{\alpha=p+1}^{n} da_{i\alpha}(x;\ell)h_\alpha=0$$

et par suite on a, pour déterminer v, les équations

$$(14) \qquad \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(x)v_j+\sum_{j=1}^{p} da_{ij}(x;(u(k),k))u_j(h)+\sum_{\alpha=p+1}^{n} da_{i\alpha}(x;(u(k),k))h_\alpha=0$$

De même le second membre w de (4) est déterminé par

$$(15) \qquad \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(x)w_j+\sum_{j=1}^{p} da_{ij}(x;(u(h),h))u_j(k)+\sum_{\alpha=p+1}^{n} da_{i\alpha}(x;(u(h),h))k_\alpha=0$$

Comme par hypothèse le déterminant $\boxed{a_{ij}(x)}_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ n'est pas nul, on voit que la condition (4), qui signifie que $v_j=w_j$ pour $1\leqslant j\leqslant p$, s'écrit : $d\omega_i(x;(u(k),k);(u(h),h))=d\omega_i(x;(u(h),h);(u(k,k))$ pour $1\leqslant i\leqslant p$. Comme tout vecteur $s=(u(h),h)$ peut être défini par les relations $\omega_i(x;s)=0$ $(1\leqslant i\leqslant p)$ et réciproquement, on voit finalement que :

__Théorème 2__ __(Frobenius)__. __Pour que le système de Pfaff__ (10) __soit complètement intégrable dans__ A , __il faut et il suffit que, pour tout__ $x\in A$, __les__ p __formes alternées d'ordre__ 2 , $\vartheta\omega_i(x;s,t)$ __s'annulent pour tout couple de vecteurs__ s,t __tels que__ $\omega_i(x;s)=\omega_i(x;t)=0$ __pour__ $1\leqslant i\leqslant p$.

Cette condition peut encore s'exprimer comme suit (__Alg.__, chap. III): les p formes extérieures $\omega_1\wedge\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_p\wedge\vartheta\omega_i$ d'ordre $p+1$ doivent être __identiquement nulles__ dans A .