RÉDACTION N° 116

COTE : NBR 024

TITRE : LIVRE IV. CHAP. IV (ÉTAT 2BIS)
ÉTUDE LOCALE DES FONCTIONS

NOMBRE DE PAGES : 17

NOMBRE DE FEUILLES : 17

NBR 024 116

LIVRE IV

CHAPITRE IV - (Etat 2^{bis})

Etude locale des fonctions

§ 1. Comparaison des fonctions sur un ensemble filtré.

Soit E un ensemble, filtré par un filtre $\mathfrak{F}$; dans ce chapitre, nous considèrerons des fonctions dont l'ensemble de définition est une partie de E appartenant à $\mathfrak{F}$, (partie dépendant de la fonction considérée), et qui prennent leurs valeurs, soit dans $\mathcal{R}$, soit plus généralement, dans un espace vectoriel normé sur $\mathcal{R}$.

Dans les applications, E sera le plus souvent une partie d'un espace numérique $\mathcal{R}^n$, ou de la droite achevée $\overline{\mathcal{R}}$, et $\mathfrak{F}$ la trace sur E du filtre des voisinages d'un point adhérent à E , ou encore le filtre des complémentaires des ensembles relativement compacts dans E . ("Voisinages du point à l'infini").

Il ne suffira pas en général de savoir qu'une telle fonction tend vers une limite donnée suivant $\mathfrak{F}$ pour pouvoir traiter tous les problèmes de "passage à la limite suivant $\mathfrak{F}$ " où interviennent des expressions formées avec cette fonction.

Par exemple, lorsque la variable réelle x tend vers $+\infty$, les trois fonctions, x, x^2 , $\sqrt{x}$ tendent toutes trois vers $+\infty$, mais des expressions

$$(x+1)^2-x^2 \quad ; \quad (x+1)-x \quad ; \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

La première tend vers $+\infty$, la seconde vers 1 , la troisième vers 0 .

Il importera donc de connaître, non seulement la valeur limite d'une fonction, mais encore la "manière" dont elle se comporte quand elle tend vers cette limite.

1.- <u>Relations de comparaison</u> - Nous désignerons, en général, par F l'ensemble dans lequel les fonctions considérées prendront leurs valeurs. Soit alors $\mathcal{H}(F ; \mathcal{F})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans F , dont chacune a pour ensemble de définition une partie X de E appartenant à $\mathcal{F}$. Si f et g sont deux telles fonctions définies respectivement dans $X \in \mathcal{F}$ et dans $Y \in \mathcal{F}$, la relation "il existe une partie Z de $X \cap Y$, appartenant à $\mathcal{F}$ et telle que $f = g$ dans Z " (ou la relation équivalente l'ensemble des $t \in X \cap Y$ tels que $f(t)=g(t)$ appartient au filtre $\mathcal{F}$) constitue, comme on le voit, par application des axiomes des filtres, une <u>relation d'équivalence</u> dans $\mathcal{H}(F , \mathcal{F})$: En effet, soient f, g, h trois fonctions de cet ensemble, soient X , Y , Z les parties de E , appartenant à $\mathcal{F}$ sur lesquelles elles sont définies, soit U l'ensemble des $t \in X \cap Y$ tels que $f(t)=g(t)$, puis V l'ensemble des $t \in Y \cap Z$ tels que $g(t) = h(t)$. U et V appartiennent à $\mathcal{F}$; soit enfin W_1 l'ensemble des $t \in X \cap Y \cap Z$ tels que $f(t) = g(t) = h(t)$. Il est clair, d'après l'axiome (F_{II}), que $W_1 = U \cap V$ appartient encore à $\mathcal{F}$; si donc W est l'ensemble des $t \in X \cap Z$ tels que $f(t)= h(t)$, on a $W_1 \subset W$, et d'après (F_I), W appartient aussi à $\mathcal{F}$, ce qui établit la transitivité de la relation considérée. La réflexivité et la symétrie de cette relation sont d'ailleurs évidentes. Nous noterons cette relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$, et nous considérerons les classes d'équivalence par rapport à cette relation, c'est-à-dire les éléments de l'ensemble quotient $\mathcal{H}_o(F, \mathcal{F}) = \mathcal{H}(F, \mathcal{F})/\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$. Toutes les relations entre éléments de $\mathcal{H}(F, \mathcal{F})$ qui vont être définies seront <u>compatibles</u> avec la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(F, \mathcal{F})$, nous désignerons par $\tilde{f}$ sa classe modulo $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions coïncidant avec f sur un ensemble de $\mathcal{F}$.

La "comparaison" relativement au filtre $\mathfrak{F}$, des fonctions numériques, ou des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, définies sur des ensembles appartenant à $\mathfrak{F}$, repose sur la considération d'un certain nombre de groupes ou de monoïdes.

1°) Supposons que F soit un groupe abélien additif, (en particulier un espace normé sur $\mathbb{R}$), la relation "il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $h(t) = f(t) + g(t)$ pour $t \in X$ " est compatible, (en f, g, h) avec la relation $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$. En effet si f', g', h' appartiennent respectivement aux mêmes classes que f, g, h et coïncident avec elles sur U, V, W appartenant à $\mathfrak{F}$, on a $h' = f'+g'$ sur l'intersection Y de X avec U, V, W, et cette intersection appartient bien à $\mathfrak{F}$. Par passage aux quotients on déduit de là une loi de composition $(\tilde{f}, \tilde{g}) \rightarrow \tilde{f} + \tilde{g}$ sur l'ensemble $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$ et on vérifie aussitôt que cette loi définit sur cet ensemble une structure de <u>groupe additif</u> : Il suffit de prendre pour élément $\tilde{0}$ la classe des fonctions nulles dans un ensemble de $\mathfrak{F}$. L'élément $-\tilde{f}$ est alors la classe des fonctions opposées à f sur un ensemble de $\mathfrak{F}$.

<u>Remarque</u> - Si, pour tout couple (f,g) de fonctions de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$, on désigne par f+g la fonction égale à f(t)+g(t) dans l'ensemble où f et g sont toutes deux définies, la loi de composition $(f,g) \rightarrow f+g$ <u>n'est pas</u> une loi de groupe, car si f n'est pas définie dans E tout entier, il n'existe pas de fonction $g \in \mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$ telle que $f+g = 0$.

Supposons de plus que F soit un <u>anneau</u>. En procédant comme plus haut on définira une seconde loi de composition $(\tilde{f}, \tilde{g}) \rightarrow \tilde{f}\tilde{g}$: la relation "il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $h(t)=f(t)g(t)$ pour $t \in X$ " est en effet compatible, en f,g,h, avec la relation $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$. Dès lors, $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$ muni de ces deux lois-quotients, est un anneau ;

l'élément $\tilde{1}$ est la classe des fonctions égales à l'élément unité de F dans un ensemble de $\mathfrak{F}$. Pour qu'une classe $\tilde{f}$ soit <u>inversible</u> dans l'anneau $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$, il faut et il suffit qu'il existe $f \in \tilde{f}$ telle que $f(t)$ soit inversible dans un ensemble de $\mathfrak{F}$; en particulier si F est égal à R ou C, pour que $\tilde{f}$ soit inversible, il faut et il suffit qu'il existe $f \in \tilde{f}$ telle que $f(t) \neq 0$ dans un ensemble de $\mathfrak{F}$. (dans ce cas <u>toutes</u> les fonctions de $\tilde{f}$ ont cette propriété).

2°) Supposons maintenant que $F = R_+^*$. L'ensemble $\mathcal{H}_0(R_+^*, \mathfrak{F})$ est, d'après ce qui précède un <u>sous-groupe</u> du groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{H}_0(R, \mathfrak{F})$, sous-groupe que nous noterons Γ. Dans Γ nous distinguerons encore deux sous-groupes : a) le groupe Γ_1 des classes de fonctions qui <u>tendent vers la limite 1</u> suivant le filtre $\mathfrak{F}$.- b) le groupe Γ_0 des classes des <u>constantes</u> > 0 dans E, (groupe isomorphe à R_+^*). Il est clair que ce sont bien là des sous-groupes de Γ. Il est clair aussi que $\Gamma_1 \cap \Gamma_0$ se réduit à l'élément neutre de Γ, (classe des fonctions égales à 1 sur un ensemble de $\mathfrak{F}$) ; par suite $\Gamma_1 \cdot \Gamma_0$ est le produit direct de Γ_1 et de Γ_0 : c'est le groupe multiplicatif des classes de fonctions <u>tendant vers une limite finie et strictement positive</u> suivant le filtre $\mathfrak{F}$.

3°) Supposons enfin que F soit un espace vectoriel normé sur R ; la relation "il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $h(t) = f(t)\,g(t)$ pour $t \in X$" entre deux fonctions g et h de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$, et une fonction f de $\mathcal{H}(R, \mathfrak{F})$ est manifestement compatible, en f, g, h, avec $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$, et on en déduit une loi de composition <u>externe</u>, $(\tilde{f}\,;\,g) \to \tilde{f}\,\tilde{g}$ sur $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$ ayant l'anneau $\mathcal{H}_0(R, \mathfrak{F})$ comme domaine d'opérateurs. On vérifie aussitôt que cette loi et l'addition dans $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$ définissent sur cet ensemble une structure de <u>module</u> par rapport à à l'anneau $\mathcal{H}_0(R, \mathfrak{F})$. Nous distinguerons dans ce module les sous-groupes suivants : a) le groupe $\mathcal{O}_F$ des classes $\tilde{g}$ telles que pour toute fonction g de cette classe, il existe un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ dans lequel $\|g\|$ soit bornée ; b) le sous-groupe σ_F de $\mathcal{O}_F$ formé des classes $\tilde{g}$ des fonctions g qui <u>tendent vers 0</u> suivant le filtre $\mathfrak{F}$.

En particulier, pour $F = R$, on définit ainsi des groupes $\mathcal{O}_R$ et σ_R de classes de fonctions numériques. De plus, il est clair dans ce cas que $\Gamma \cap \mathcal{O}_R$ est un <u>monoïde</u> multiplicatif ; les éléments de ce monoïde dont l'inverse appartient au monoïde, forment un sous-groupe multiplicatif Γ' de Γ, qui contient manifestement Γ_0 et Γ_1. Pour que $\tilde{f} \in \Gamma'$ il faut et il suffit qu'il existe $X \in \mathfrak{F}$, et deux nombres a et b tels que $0 < a < b$ et que l'on ait $a \leqslant f(t) \leqslant b$ dans X. De même pour qu'une fonction f soit telle que $\tilde{f} \in \Gamma_1$ il faut et il suffit que $\tilde{f} - \tilde{1} \in \sigma_R$; enfin pour que $\tilde{f} \in \Gamma_1 \cdot \Gamma_0$ il faut et il suffit qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $\tilde{f} - \tilde{a} \in \sigma_R$.

2.- <u>Conventions et notations</u> -

<u>Convention 1</u>.- Par abus de langage, on parlera désormais de fonctions (de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$), au lieu de classes de fonctions modulo $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$, étant entendu que l'on ne distinguera pas entre deux fonctions d'une même classe.

<u>Définition 1</u>.- Soient g et h deux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé sur R ; s'il existe une fonction $f \in \Gamma_1$ et un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ tels que $h(t) = f(t)\, g(t)$ sur X, on dit que h est <u>équivalente</u> à g et on écrit $h \sim g$.

<u>Définition 2</u> - Soient g et h deux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$; s'il existe une fonction $f \in \Gamma'$ et un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ tels que $h(t) = f(t)\, g(t)$ sur X, on dit que h est <u>semblable</u> à g et on écrit $h \asymp g$.

Le fait que Γ_1 et Γ' sont des sous-groupes de Γ entraîne que ces deux relations sont des relations d'équivalence entre éléments de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$. Plus particulièrement, si h et g appartiennent à Γ, les relations $h \sim g$, $h \asymp g$ signifient respectivement que h et g appartiennent à une même classe, dans Γ, modulo Γ_1 et modulo Γ'. Autrement dit encore, $h \sim g$ signifie que $\lim_{\mathfrak{F}} (h/g) = 1$, tandis que $h \asymp g$ signifie qu'il existe $X \in \mathfrak{F}$ sur lequel h/g et g/h sont bornées.

<u>Définition 3</u> - Soient g une fonction de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$, puis f une fonction de Γ. On écrira $g \preccurlyeq f$ si $g/f \in \mathcal{O}_F$, c'est-à-dire s'il existe $X \in \mathfrak{F}$ dans lequel $\| g \| / f$ soit bornée.

<u>Définition 4</u> - Soient g une fonction de $\mathcal{H}(F ; \mathfrak{F})$, puis f une fonction de Γ. On dira que g est <u>négligeable</u> devant f, et on écrira $g \prec f$ si $g/f \in \mathcal{O}_F$, c'est-à-dire si $\lim_{\mathfrak{F}} (g/f) = 0$.

<u>Convention 2</u> - Dans le cours d'une démonstration, ou de l'énoncé d'un théorème, on notera éventuellement $O_1(f)$, $O_2(f)$, ... etc., des fonctions ayant toutes la propriété d'être $\preccurlyeq f$.

<u>Convention 3</u> - De la même façon, on notera éventuellement $o_1(f)$, $o_2(f)$, ... etc., des fonctions ayant toutes la propriété d'être négligeables ~~aux~~ devant f.

Toutes les fois que ces notations apparaîtront, il sera entendu, (sans qu'il en soit fait mention explicite) que les fonctions notées $O_i(f)$, $o_j(f)$ pour toutes les valeurs des indices i, j apparaissant dans le texte sont $\preccurlyeq f$, resp. $\prec f$.

(Certains auteurs se dispensent souvent, par abus de langage, d'introduire un indice attaché aux symboles $O(f)$, $o(f)$. Nous éviterons toujours ce dangereux abus, dans la suite de ce traité, (sauf lorsqu'on aura affaire seulement à une fonction ayant la propriété en question, auquel cas il n'est pas besoin d'indice).

Les définitions 3 et 4 entraînent immédiatement que toute combinaison linéaire à coefficients constants de fonctions $g \in \mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$ satisfaisant à la condition $g \preccurlyeq f$, (resp. $g \prec f$) satisfait encore à la même condition. Autrement dit, pour tout $f \in \Gamma$, chacune de ces deux conditions détermine un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$, regardé comme espace vectoriel sur le corps R. On pourra donc écrire dans une démonstration :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i O_i(f) = O_{n+1}(f) ; \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i o_i(f) = o_{n+1}(f) .$$

<u>Définition 5</u>.- Soient maintenant f et g deux fonctions de Γ. Alors, on considèrera les relations $f \succcurlyeq g$, $f \succ g$ comme respectivement équivalentes à $g \preccurlyeq f$, $g \preccurlyeq f$. Si g est négligeable devant f, on dira que f est <u>prépondérante</u> par rapport à g.

<u>Définition 6</u>.- Soient toujours f et g deux fonctions de Γ. On dit que f est <u>comparable</u> à g si l'une, (au moins) des relations $f \preccurlyeq g$, $f \succcurlyeq g$ a lieu. On dit que f est <u>strictement comparable</u> à g si g est négligeable devant f, ou si f est négligeable devant g, ou si f est équivalente à ag, a étant une constante non nulle.

<u>Exemples</u> - 1) La relation $f = O(1)$ revient à dire que f est <u>bornée</u> sur un ensemble de $\mathfrak{F}$; la relation $f = o(1)$ équivaut à $\lim_{\mathfrak{F}} f=0$.

2) Lorsque x réel tend vers $+\infty$ la relation $\alpha < \beta$ entraîne $x^\alpha \prec x^\beta$.

3) Dans les mêmes conditions, on a vu, (Chap.II, § ,prop.) qu'on a $x^n \prec e^x$ pour tout entier $n > 0$.

4) Si $P_m(x)$, $Q_n(x)$ désignent des polynomes en la variable réelle x , de degré m et n , on a, pour x tendant vers $+\infty$, pourvu que les termes du plus haut degré aient des coefficients réels et positifs :

$$Q_n(x) \prec P_m(x) \qquad \text{pour} \quad m > n \; ;$$

$$Q_n(x) \asymp P_m(x) \qquad \text{pour} \quad m = n$$

$$P_m(x) \asymp x^m \; ; \qquad P_m(x)/Q_n(x) \asymp x^{m-n}$$

5) Si $a_0 x^m$ est le terme du plus haut degré du polynome $P_m(x)$, on a $P_m(x) \sim a_0 x^m$ lorsque x tend par valeurs réelles vers $+\infty$.
La même relation a lieu lorsque les coefficients du polynome et la variable sont complexes, et que $|x|$ tend vers $+\infty$.

6) Lorsque la variable complexe z tend vers 0 , on a $e^z - 1 \sim z$ (Chap. II, § , n°).

7) x étant toujours réel et tendant vers $+\infty$, on a

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \asymp x \; , \quad (a > 0)$$

$$\sqrt{x+a} \sim \sqrt{x}$$

8) En se plaçant à nouveau dans les conditions de l'exemple 4 , on a :

$$\text{Log } P_m(x) \asymp \text{Log } Q_n(x)$$

$$\text{Log.Log. } P_m(x) \sim \text{Log.Log } Q_n(x) \; .$$

9) x étant toujours réel et tendant vers $+\infty$, on a

$$e^{a+\sin x} \asymp 1 \; ; \quad \cos h\, x \sim \sin h\, x \sim \tfrac{1}{2} e^x$$

10) Dans le plan R^2 , au voisinage du point $(0,0)$, on a

$$x^2 + y^2 = O(|x| + |y|)$$

11) Deux fonctions données f et g ne sont pas nécessairement comparables.
Par exemple $x \sin x$ n'est pas comparable à la constante 1 lorsque x tend vers $+\infty$ par valeurs réelles. De même deux fonctions peuvent être comparables sans l'être strictement, par exemple on a $\sin x = O(1)$. Lorsque x tend vers $+\infty$, mais $\sin x$ n'est pas strictement comparable à la constante 1 .

3.- <u>Propriétés de transitivité : relations d'ordre</u> - Reprenons deux fonctions f et g de Γ ; on a la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u> - <u>Les relations</u> $f \preccurlyeq g$, $g \preccurlyeq h$ <u>entraînent</u> $f \preccurlyeq h$; <u>les relations</u> $f \prec g$; $g \preccurlyeq h$ <u>entraînent</u> $f \prec h$; <u>il en est de même des relations</u> $f \preccurlyeq g$; $g \prec h$. <u>Enfin les relations</u> $f \sim g$ <u>et</u> $g \sim h$ <u>entraînent</u> $f \sim h$.

On a déjà indiqué la transitivité de la relation $f \sim g$, comme relation d'équivalence, dans Γ , modulo Γ_1 . Montrons par exemple la transitivité de la relation $f \preccurlyeq g$.

Si $f \preccurlyeq g$ et $g \preccurlyeq h$, on a par définition :

$$f/g \in \sigma_R \qquad ; \qquad g/h \in \sigma_R$$

Mais, f, g, h appartiennent à Γ , et $\Gamma \cap \sigma_R$ est un monoïde multiplicatif, donc $f/h \in \sigma_R$, ce qui équivaut à $f \preccurlyeq h$.

Pour établir les deux autres transitivités indiquées dans l'énoncé, il suffit d'observer que $\Gamma \cap \sigma_R$ est une partie du monoïde $\Gamma \cap \sigma_R$ qui est manifestement stable relativement à la loi multiplicative.

<u>Proposition 2</u> - <u>La relation</u> " $f \preccurlyeq g$ et $g \preccurlyeq f$ " <u>est équivalente à</u> $f \asymp g$.

En effet, on a alors $f/g \in \sigma_R$ et $g/f \in \sigma_R$, donc f/g est un élément inversible du monoïde $\Gamma \cap \sigma_R$, il appartient par suite au sous-groupe Γ' de Γ .

Il résulte de là, par passage au groupe-quotient Γ/Γ', que $f \preccurlyeq g$ définit sur ce nouveau groupe une structure de <u>groupe ordonné</u>. (Ens. Chap. IV, § 1).

Nous avons vu de même que la relation " f/g a une limite strictement positive " définit dans le groupe multiplicatif Γ une relation d'équivalence ; passons au groupe-quotient $\Gamma/(\Gamma_0 . \Gamma_1)$;

NGR 044

dans ce nouveau groupe la relation " $f \prec g$ ou f/g a, suivant le filtre $\mathcal{F}$, une limite strictement positive " donne encore une relation d'ordre.

Il est à noter que les deux ensembles ordonnés Γ / Γ' et $\Gamma/(\Gamma_1 \cdot \Gamma_2)$ ainsi définis <u>ne sont pas totalement ordonnés</u>.

Cela résulte de ce que, dans l'ensemble Γ , il existe des couples de fonctions non comparables ; par exemple, pour x tendant vers $+\infty$ par valeurs réelles, la fonction $x^2\sin^2 x + \frac{1}{x^2}\cos^2 x$ appartient à Γ , mais n'est pas comparable à la constante 1 . On peut même donner des exemples de couples de fonctions strictement croissantes dans le voisinage de $+\infty$, et non comparables. (Exerc. 1). A fortiori, (et malgré l'analogie suggérée par les notations) la négation de $f \preccurlyeq g$ <u>n'est pas</u> $f \succ g$, dans l'ensemble Γ ; de même la relation " $f \preccurlyeq g$ " <u>n'est pas équivalente</u> à la relation " $f \prec g$ ou $f \asymp g$ " comme le montre l'exemple : $f = x^2\sin^2 x + 1$; $g = x^2$;

<u>Proposition 3</u> - <u>f et g étant toujours dans Γ , les relations " $f \sim g$ " et " $f-g \prec g$ ", (qui s'écrit aussi "$f = g+o(g)$") sont équivalentes</u>.

On a en effet $\lim_{\mathcal{F}} \left(\frac{f}{g} - 1\right) = 0$.

La proposition 1 se généralise facilement comme suit :

<u>Proposition 4</u> - <u>Soient f et g deux fonctions de Γ , h une fonction de $\mathcal{H}(F, \mathcal{F})$; si $f \preccurlyeq g$, la relation $h \preccurlyeq f$ entraîne $h \preccurlyeq g$; et $h \prec f$ entraîne $h \prec g$</u> .

On a en effet $f/g \in \mathcal{O}_R$, puis, dans le premier cas, $h/f \in \mathcal{O}_F$; or, $\mathcal{O}_F$ est un module sur à $\mathcal{H}_o(R ; \mathcal{F})$, dont $\mathcal{O}_R$ est une partie ; donc $h/g \in \mathcal{O}_F$. Dans le second cas, il suffit de remplacer $\mathcal{O}_F$ par o_F .

<u>Corollaire 1 - Soient</u> u <u>et</u> v <u>deux fonctions de</u> $\mathcal{H}(\mathfrak{F};\mathfrak{F})$, <u>puis</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions de</u> Γ. <u>Si</u> $u \preccurlyeq f$, $v \preccurlyeq g$, <u>on a</u> $u+v \preccurlyeq f+g$; <u>il en est encore de même quand on remplace le signe</u> $\preccurlyeq$ <u>par le signe</u> $\prec$. On a en effet $f \preccurlyeq f+g$, $g \preccurlyeq f+g$, puis, par application de la proposition 4 : $u \preccurlyeq f+g$; $v \preccurlyeq f+g$, d'où le corollaire.

<u>Corollaire 2 - Soient</u> u <u>et</u> v <u>deux fonctions de</u> $\mathcal{H}(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$, <u>puis</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions de</u> Γ. <u>Si</u> $u \sim f$ <u>et</u> $v \sim g$ <u>on a</u> $u+v \sim f+g$. On a en effet $u-f \prec f$; $v-g \prec g$. Il suffit d'appliquer le corollaire 1 et la proposition 3.

ζ On notera que les hypothèses du corollaire 2 <u>n'entraînent pas</u> en général $u-v \sim f-g$. Par exemple, pour x tendant vers $+\infty$ on a $x^2+x \sim x^2+1$; $x^2 \sim x^2$; mais $(x^2+x)-x^2 = x \succ 1 = (x^2+1)-x^2$.

<u>Proposition 5 - Si</u> u <u>et</u> v <u>appartiennent à</u> $\mathcal{H}(\mathfrak{R};\mathfrak{F})$, <u>si</u> f <u>et</u> g <u>appartiennent à</u> Γ, 1°) $u \preccurlyeq f$, $v \preccurlyeq g$ entraînent $uv \preccurlyeq fg$;

2°) $u \prec f$, $v \preccurlyeq g$ <u>entraînent</u> $uv \prec fg$

3°) $u \sim f$; v g <u>entraînent</u> $uv \sim fg$

Le 1°, résulte de ce que $\Gamma \cap \mathcal{O}_{\mathfrak{R}}$ est un monoïde multiplicatif ; le 2° résulte de ce que $\Gamma \cap o_{\mathfrak{R}}$ est une partie stable de ce monoïde ; le 3° est une conséquence triviale de la proposition 3.

<u>Corollaire</u>. <u>Les relations</u> $f \preccurlyeq g$ <u>et</u> $f \preccurlyeq ag$, (<u>resp</u>. $f \prec g$ <u>et</u> $f \prec ag$) <u>sont équivalentes pour toute constante</u> $a \neq 0$.

4.- <u>Relations de comparaison et fonctions composées</u>.-

* * * * * * * * * * * * * * * *

(Reprendre sans changement le même n° de la rédaction antérieure ; les propositions prennent les n^{os} 6 et 7 ; la définition prend le n° 7. Vider le ζ qui le précède).

----

§ 2. Développements asymptotiques.

Le n° 1 et le début du n° 2 sans changement (jusqu'à la déf.2 exclue).

Définition 2 - On dit qu'une fonction f, définie dans un ensemble de $\mathfrak{F}$, *admet un développement asymptotique à la précision* g_α (relativement à l'échelle $\mathcal{E}$) *s'il existe une famille* $(a_\lambda)_{\lambda \geqslant \alpha}$ *de nombres réels, nuls sauf un nombre fini d'entre eux, tels que* $f - \sum_{\lambda\geqslant\alpha} a_\lambda g_\lambda \prec g_\alpha$. *On dit que* $\sum_{\lambda\geqslant\alpha} a_\lambda g_\lambda$ *est un développement asymptotique de f à la précision* g_α, *que les* $a_\lambda g_\lambda$ ($\lambda \geqslant \alpha$) *sont les termes, les* a_λ *les coefficients, et la fonction* $r_\alpha = f - \sum_{\lambda\geqslant\alpha} a_\lambda g_\lambda$ *le reste de ce développement*.

Pour exprimer que $\sum_{\lambda\geqslant\alpha} a_\lambda g_\lambda$ est un développement asymptotique de f à la précision g_α, on se borne à écrire

$$f = \sum_{\lambda\geqslant\alpha} a_\lambda g_\lambda + o(g_\alpha) .$$

De deux développements asymptotiques, on dit que celui dont la précision a le plus petit indice est *le plus précis*.

Il est immédiat que pour tout $\beta > \alpha$, $\sum_{\lambda\geqslant\beta} a_\lambda g_\lambda$ est un développement asymptotique à la précision g_β, d'après le cor. de la prop.4 du § 1 ; on dit qu'on l'obtient en *réduisant à la précision* g_β le développement donné de f. D'autre part, en vertu du même corollaire, si $\sum_{\lambda\geqslant\alpha} a_\lambda g_\lambda$ et $\sum_{\lambda\geqslant\alpha} b_\lambda g_\lambda$ sont des développements asymptotiques à la précision g_α de deux fonctions f_1, f_2, $\sum_{\lambda\geqslant\alpha} (a_\lambda + b_\lambda) g_\lambda$ est un développement asymptotique à la précision g_α de f_1+f_2, $\sum_{\lambda\geqslant\alpha} c a_\lambda g_\lambda$ un développement asymptotique à la précision g_α de cf_1 (c constante). On en déduit aussitôt que si une fonction f admet un développement asymptotique à la précision g_α, ce développement est *unique* : il suffit en effet de voir que la fonction 0 ne peut admettre de développement asymptotique à la précision g_α ayant des coefficients $\neq 0$. Or, si $0 = \sum_{\lambda \geqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda + r_\alpha$, et si γ est le plus grand indice $\geqslant \alpha$ tel que $a_\lambda \neq 0$, on aurait $a_\gamma g_\gamma = -\sum_{\gamma > \lambda \geqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda - r_\alpha \prec g_\gamma$, ce qui est absurde.

Dire que f admet un développement asymptotique à la précision g_α dont tous les coefficients sont nuls équivaut à la relation $f \prec g_\alpha$. Si f admet un développement asymptotique $\sum_{\lambda \geqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda$ à la précision g_α dont tous les coefficients ne sont pas nuls, et si γ est le plus grand des indices tels que $a_\lambda \neq 0$, $a_\gamma g_\gamma$ est la partie principale de f, car on a $f - a_\gamma g_\gamma = \sum_{\gamma > \lambda \geqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda + r_\alpha \prec g_\gamma$.

Les développements asymptotiques les plus importants en pratique sont les développements tayloriens : on appelle ainsi les développements asymptotiques relatifs à l'échelle des $|x|^n$ (n entier positif ou négatif) lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou relatifs à l'échelle des $|x-c|^n$ lorsque x tend vers c (à droite ou à gauche). On a vu au chap. I (§ 3) que toute fonction numérique f, k fois dérivable au point $c \in \mathbb{R}$ admet en ce point un développement taylorien à la précision $|x-c|^k$.

3.- Sommes et produits de développements asymptotiques.

Si f_1, f_2 admettent des développements asymptotiques à la précision g_α et g_β respectivement, on en déduit des développements à la précision $g_{\max(\alpha,\beta)}$ en limitant à cette précision celui des deux développements qui est le plus précis ; nous avons vu alors ci-dessus comment on obtient un développement de f_1+f_2 à la précision $g_{\max(\alpha,\beta)}$.

Nous supposerons désormais que l'échelle $\mathcal{E}$ est telle que le produit de deux fonctions quelconques de $\mathcal{E}$ appartient encore à $\mathcal{E}$.

Soient f_1, f_2 deux fonctions admettant par rapport à $\mathcal{E}$ des développements asymptotiques $f = \sum_{\lambda \geqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda + r_\alpha$, $f_2 = \sum_{\mu \geqslant \beta} b_\mu g_\mu + r_\beta$ à la précision g_α et g_β respectivement ; supposons en outre que les a_λ

ni les b_μ ne soient tous nuls, et soient $a_\gamma g_\gamma$ et $b_\delta g_\delta$ les parties principales de f_1 et f_2. Par hypothèse on peut écrire $g_\gamma g_\beta = g_\rho$ et $g_\delta g_\alpha = g_\sigma$; montrons que la somme $\sum a_\lambda b_\mu g_\lambda g_\mu$, étendue aux couples (λ, μ) tels que $g_\lambda g_\mu \not\prec g_{\max(\rho,\sigma)}$ est un développement asymptotique de $f_1 f_2$, à la précision $g_{\max(\rho,\sigma)}$. En effet, la différence entre $f_1 f_2$ et cette somme est somme d'un nombre fini de termes qui sont, soit de la forme $a_\lambda b_\mu g_\lambda g_\mu$ avec $g_\lambda g_\mu \prec g_{\max(\rho,\sigma)}$, soit de la forme $a_\lambda g_\lambda r_\beta$ où $\lambda \leq \gamma$, soit de la forme où $\mu \leq \delta$ $b_\mu g_\mu r_\alpha$; comme $g_\lambda r_\beta \preccurlyeq g_\gamma r_\beta \prec g_\gamma g_\beta = g_\rho$ pour $\lambda \leq \gamma$ et $g_\mu r_\alpha \preccurlyeq g_\delta r_\alpha \prec g_\delta g_\alpha = g_\sigma$ pour $\mu \leq \delta$, la proposition résulte du cor. de la prop.4 du § 1.

Si tous les a_λ sont nuls, on a $f_1 f_2 \prec g_\alpha g_\delta$, autrement dit, on a un développement asymptotique de $f_1 f_2$ à termes nuls, à la précision $g_\alpha g_\delta$; de même si tous les a_λ et tous les b_μ sont nuls, on a un développement asymptotique de $f_1 f_2$ à termes nuls, à la précision $g_\alpha g_\beta$.

En particulier, on voit qu'on peut obtenir un développement asymptotique relatif à l'échelle $\mathcal{E}$ pour tout polynome par rapport à un nombre quelconque de fonctions admettant chacune un développement asymptotique relatif à $\mathcal{E}$; les règles précédentes permettent en outre de déterminer exactement la précision du développement obtenu, connaissant celles des développements des fonctions données.

4. Composition des développements asymptotiques.

Supposons que f admette un développement asymptotique à la précision g_α, et en outre ait pour limite 0 suivant le filtre $\mathfrak{F}$. Soit d'autre part φ une fonction numérique n fois dérivable au voisinage du point 0 ; on a donc, dans un voisinage de 0, $\varphi(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n + r(t)$, où $r(t) \prec t^n$, d'où, dans un ensemble convenable du filtre $\mathfrak{F}$,

$\varphi\circ f = c_0 + c_1 f + \ldots + c_n f^n + r\circ f$, avec $r\circ f \prec f^n$.

Nous avons vu au n°3 comment on peut former un développement asymptotique de $c_0 + c_1 f + \ldots + c_n f^n$, à une précision g_ρ bien déterminée par la précision du développement de f ; d'autre part, si on suppose que les coefficients du développement de f ne soient pas tous nuls, et que $a_\gamma g_\gamma$ est la partie principale de f , on aura $r\circ f \prec g_\alpha^n = g_\sigma$; en limitant le développement de $\sum_{k=0}^{n} c_k f^k$ à la précision g_σ si $\rho < \sigma$, on aura un développement de $\varphi\circ f$ à cette précision ; si au contraire $\rho \geqslant \sigma$, le développement de $\sum_{k=0}^{n} c_k f^k$ est aussi un développement de $\varphi\circ f$ à la précision g_ρ .

Si tous les termes du développement de f sont nuls, on a $f \prec g_\alpha$, et $g_\alpha \prec 1$, donc $f^k \prec g_\alpha^k \prec g_\alpha$; si c_h est le premier coefficient d'indice > 0 qui ne soit pas nul, c_0 est un développement de $\varphi\circ f$ à la précision g_α^h .

Supposons maintenant que pour toute fonction $g \in \mathcal{E}$ et tout nombre réel ν , g^ν appartienne encore à $\mathcal{E}$: cette condition est par exemple remplie par l'échelle des x^α (α réel quelconque) au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de 0 . On en déduit que le quotient de deux fonctions de $\mathcal{E}$ appartient encore à $\mathcal{E}$. Cela étant, du développement de f , on peut déduire un développement de $|f|^\nu$ pour tout nombre réel ν . Bornons-nous en effet au cas où les coefficients du développement de f ne sont pas tous nuls, et soit $a_\gamma g_\gamma$ la partie principale de f ; on peut écrire

$$|f|^\nu = |a_\gamma|^\nu \, g_\gamma^\nu (1+h)^\nu$$

avec (1) $$h = \sum_{\gamma>\lambda\geq\alpha} \frac{a_\lambda}{a_\gamma} \frac{g_\lambda}{g_\gamma} + o\left(\frac{g_\alpha}{g_\gamma}\right)$$

En vertu des hypothèses faites, $\sum_{\gamma>\lambda\geq\alpha} \frac{a_\lambda}{a_\gamma} \frac{g_\lambda}{g_\gamma}$ est un développement asymptotique de h , à la précision $\frac{g_\alpha}{g_\gamma}$; comme h tend vers 0 suivant $\mathfrak{F}$, la méthode décrite ci-dessus donne un développement asymptotique de $(1+h)^{\nu}$, puis de $|f|^{\nu}$ par multiplication par $|a_\gamma|^{\nu} g_\gamma^{\nu}$.

Dans les mêmes hypothèses sur f on peut écrire

$$\log|f| = \log |a_\gamma g_\gamma| + \log(1+h)$$

et log(1+h) se développe comme il a été dit plus haut (en prenant $\varphi(t)=\log(1+t)$) ; si en outre $\log g_\gamma$ admet un développement asymptotique par rapport à l'échelle $\mathcal{E}$ ou par rapport à une échelle $\mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}$, on est ramené à faire la somme de deux développements asymptotiques.

<u>Exemple</u>.- Comme dans l'état 2 .

Le développement de e^f ne pose de nouveaux problèmes que lorsque $|f| \succ 1$; il faut distinguer deux cas, suivant que $g_\alpha \succ 1$ ou $g_\alpha \preccurlyeq 1$. Dans le premier cas, la donnée du développement de f ne permet pas d'obtenir une partie principale de e^f , car on ignore alors en général si r_α tend vers 0 , donc si e^{r_α} tend vers 1 . Au contraire, si $g_\alpha \preccurlyeq 1$, on a $r_\alpha \prec 1$, donc $e^f \sim \exp(\sum_{\lambda \geqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda)$. On peut préciser ce résultat : soit $a_\gamma g_\gamma$ la partie principale de f , et soit δ l'indice (tel que $\gamma > \delta \geqslant \alpha$) pour lequel $g_\delta = 1$; écrivons $f_1 = \sum_{\lambda \geqslant \delta} a_\lambda g_\lambda$, $f_2 = \sum_{\delta > \lambda \geqslant \alpha} a_\lambda g_\lambda + r_\alpha$; on a $f = f_1 + f_2$ donc $e^f = e^{f_1} e^{f_2}$, et la méthode générale exposée au début de ce n° permet de former un développement asymptotique de e^{f_2} (en prenant $\varphi(t)=e^t$). On aura donc encore un développement asymptotique de e^f si $e^{f_1} = \prod_{\lambda \geqslant \delta} \exp(a_\lambda g_\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}$, ou à une échelle $\mathcal{E}_1$ contenant $\mathcal{E}$.

<u>Exemple</u>.- Comme dans l'état 2 .

Le reste du chapitre ne comporte que des modifications de langage évidentes, découlant de la modification de la définition du développement asymptotique.
