RÉDACTION N° 113

TITRE : LIVRE VI. E.V.T.
CHAP. I (ÉTAT 3) E.V.T. SUR UN CORPS VALUÉ

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 37

NOMBRE DE FEUILLES : 37

Archives

NBR 042 113

LIVRE VI

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE I (Etat 3)

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES SUR UN CORPS VALUÉ

Sommaire

LIVRE VI
ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES
CHAPITRE I (Etat 3)
ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES SUR UN CORPS VALUÉ

------

§ 1. Espaces vectoriels topologiques.

1. Définition d'un espace vectoriel topologique.

DÉFINITION 1.- *On appelle espace vectoriel topologique (à gauche) sur un corps valué* K (Top.gén., chap.IX, § 3, n°2) *un ensemble* E *muni d'une structure d'espace vectoriel à gauche par rapport à* K, *et d'une topologie compatible avec la structure de groupe additif de* E, *et satisfaisant en outre à l'axiome suivant* :

(L) *L'application* $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ *de* $K \times E$ *dans* E *est continue*.

Une structure d'espace vectoriel à gauche par rapport à K et une topologie étant données sur un ensemble E, on dira qu'elles sont *compatibles* si la topologie et la structure de groupe additif de E sont compatibles (*Top.gén.*, chap.III, § 1, n°1) et si en outre l'axiome (L) est vérifié.

Exemples.- 1) Etant donné un corps valué quelconque K, la topologie produit sur l'espace vectoriel K^n est compatible avec la structure d'espace vectoriel, car elle est compatible avec la structure de groupe produit (*Top.gén.*, chap.III, § 2, n°9), et pour tout $x=(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de K^n, et tout $\lambda\in K$, on a $\lambda x=(\lambda\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, ce qui montre aussitôt (*Top.gén.*, chap.I, § 8, cor.2 du th.1) que l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ est continue.

2) On a vu (Top.gén., chap.IX, § 3, n°3) que tout espace *normé* sur un corps valué K a une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel.

On définit de la même manière un espace vectoriel topologique <u>à droite</u> sur un corps valué K : si on remarque qu'une valeur absolue sur K est aussi une valeur absolue sur le corps opposé K^{o}, et que tout espace vectoriel à droite sur K peut être considéré comme espace vectoriel à gauche sur K^{o} (<u>Alg.</u>, chap.II, § 1, n°1), on voit qu'on peut se borner, pour exposer les propriétés des espaces vectoriels topologiques, à ne considérer que des espaces vectoriels à gauche, ou que des espaces vectoriels à droite. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons toujours qu'il s'agit d'espaces vectoriels à gauche.

Si K' est un sous-corps de K, il est clair que la topologie de E est encore compatible avec la structure d'espace vectoriel par rapport à K', obtenue par restriction à K' du corps des scalaires.

La topologie d'un espace vectoriel topologique E, étant compatible avec sa structure de groupe additif, définit sur E une <u>structure uniforme</u> (Top.gén., chap.III, § 3) ; lorsque nous parlerons de la structure uniforme d'un espace vectoriel topologique E, c'est toujours de cette structure qu'il sera question, sauf mention expresse du contraire.

PROPOSITION 1.- <u>Pour tout</u> $x_0 \in E$, <u>l'application</u> $\lambda \longrightarrow \lambda x_0$ <u>de</u> K <u>dans</u> E <u>est uniformément continue</u>.

Cela résulte de l'axiome (L) et de ce que $\lambda \longrightarrow \lambda x_0$ est une représentation du groupe additif K dans le groupe additif E.

PROPOSITION 2.- <u>Pour tout</u> $\lambda_0 \in K$, <u>l'homothétie</u> $x \longrightarrow \lambda_0 x$ <u>est uniformément continue dans</u> E.

Cela résulte de même de (L) et de ce que $x \longrightarrow \lambda_0 x$ est une représentation du groupe additif E dans lui-même.

En particulier, pour tout $\lambda \neq 0$, l'homothétie $x \longrightarrow \lambda x$ est un <u>homéomorphisme</u> de E sur lui-même, puisque l'application réciproque est l'homothétie $x \longrightarrow \lambda^{-1}x$. Plus particulièrement :

COROLLAIRE.- <u>Si A est un ensemble ouvert</u> (resp. <u>fermé</u>) <u>dans</u> E , λA <u>est ouvert</u> (resp. <u>fermé</u>) <u>dans</u> E <u>pour tout</u> $\lambda \neq 0$.

De même, toute translation étant un homéomorphisme de E , une <u>homothétie de centre</u> x_0 , qui est de la forme $x \rightarrow x_0 + \lambda(x-x_0)$ est un homéomorphisme de E sur lui-même pour $\lambda \neq 0$.

Conformément aux définitions générales, si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques sur un corps valué K , une application biunivoque f de E sur F est un <u>isomorphisme</u> de l'espace vectoriel topologique de E sur l'espace vectoriel topologique F si f est <u>linéaire</u> et <u>bicontinue</u>. En particulier, pour tout $\lambda \neq 0$ appartenant au <u>centre</u> de K , l'homothétie $x \rightarrow \lambda x$ est un <u>automorphisme</u> de la structure d'espace vectoriel topologique de E .

2. <u>Voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique</u>.

Considérons sur un espace vectoriel E par rapport à un corps valué K , une topologie compatible avec sa structure de <u>groupe</u> additif. En raison de l'identité

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(x-x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x-x_0)$$

on voit que l'axiome (L) est équivalent au système des trois axiomes suivants :

(L'_I) <u>Quel que soit</u> $x_0 \in E$, $\lambda \rightarrow \lambda x_0$ <u>est continue au point</u> $\lambda = 0$.

(L'_{II}) <u>Quel que soit</u> $\lambda_0 \in K$, $x \rightarrow \lambda_0 x$ <u>est continue au point</u> $x=0$.

(L'_{III}) <u>L'application</u> $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ <u>est continue au point</u> (0,0) <u>de</u> $K \times E$.

Nous allons obtenir des conditions équivalentes pour le filtre de voisinages de 0 dans E :

PROPOSITION 3.- <u>Dans un espace topologique E sur un corps valué K dont la valeur absolue n'est pas impropre, il existe un système fondamental</u> $\mathfrak{G}$ <u>de voisinages de 0 , satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

 6

(L''_{I}) <u>Quels que soient</u> $V \in \mathfrak{S}$ <u>et</u> $x \in V$, <u>la relation</u> $|\lambda| \leq 1$ <u>entraîne</u> $\lambda x \in V$.

(L''_{II}) <u>Quels que soient</u> $V \in \mathfrak{S}$ <u>et</u> $x_0 \in E$, <u>il existe un nombre</u> $\alpha > 0$ <u>tel que la relation</u> $|\lambda| \leq \alpha$ <u>entraîne</u> $\lambda x_0 \in V$.

(L''_{III}) <u>Quels que soient</u> $V \in \mathfrak{S}$ <u>et</u> $\lambda \neq 0$ <u>dans</u> K, <u>on a</u> $\lambda V \in \mathfrak{S}$ (invariance de $\mathfrak{S}$ par homothétie).

(L''_{IV}) <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{S}$, <u>il existe</u> $W \in \mathfrak{S}$ <u>tel que</u> $W+W \subset V$.

<u>Inversement, si une base de filtre</u> $\mathfrak{S}$ <u>sur un espace vectoriel</u> E <u>satisfait à ces conditions, il existe une topologie sur</u> E <u>compatible avec la structure d'espace vectoriel de</u> E, <u>et pour laquelle</u> $\mathfrak{S}$ <u>est un système fondamental de voisinages de</u> E.

Montrons d'abord que les conditions sont <u>nécessaires</u>. Soit $\mathfrak{V}$ le filtre des voisinages de 0 dans E. La condition (L'_{II}) (ou le fait que toute homothétie de rapport $\neq 0$ est un homéomorphisme) montre que $\mathfrak{V}$ est invariant par toute homothétie de rapport $\neq 0$; la condition (L'_{I}) montre que $\mathfrak{V}$ satisfait à (L''_{II}) ; la condition (L'_{III}) prouve que, pour tout voisinage $V \in \mathfrak{V}$, il existe un nombre $\alpha > 0$ est un voisinage $W \in \mathfrak{V}$ tels que la relation $|\lambda| \leq \alpha$ entraîne $\lambda W \subset V$. Si on pose $V' = \bigcup_{|\lambda| \leq \alpha} \lambda W$, V' est un voisinage de 0 dans E (puisqu'il existe $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \leq \alpha$ et $\lambda \neq 0$), contenu dans V et tel que les relations $x \in V'$ et $|\lambda| \leq 1$ entraînent $\lambda x \in V'$. Si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des voisinages de 0 satisfaisant à cette dernière condition, on voit donc que $\mathfrak{S}$ est un <u>système fondamental de voisinages de</u> 0 dans E ; ce qui précède prouve qu'il satisfait aux axiomes (L''_{I}), (L''_{II}) et (L''_{III}) ; enfin, il satisfait à (L''_{IV}) d'après l'axiome (GV'_{I}) des systèmes fondamentaux de voisinages de l'élément neutre dans un groupe topologique.

NBR022 - 7

Montrons maintenant que les conditions sont __suffisantes__. En effet (L''_I) montre pour tout $V \in \mathfrak{S}$, on a $-V=V$ et $0 \in V$; ces relations et (L''_{IV}) prouvent que $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages symétriques de 0 pour une topologie sur E compatible avec la structure de __groupe__ additif de E . Comme d'autre part les conditions (L'_I), (L'_{II}) et (L'_{III}) sont des conséquences immédiates de (L''_I) et (L''_{II}), la topologie ainsi définie satisfait à l'axiome (L), ce qui achève la démonstration.

On notera que la condition (L''_{II}) signifie que tout voisinage $V \in \mathfrak{S}$ ~~entraîne~~ __engendre__ l'espace vectoriel E .

COROLLAIRE.- __Soit__ φ __une application de__ E __dans__ K __telle qu'il existe un voisinage__ V __de__ 0 __dans lequel l'application__ $x \to |\varphi(x)|$ __soit bornée__ ; __alors l'application__ $x \to \varphi(x).x$ __de__ E __dans lui-même est continue au point__ $x=0$.

En effet, soit W un voisinage quelconque de 0 contenu dans V , et appartenant à $\mathfrak{S}$, et supposons qu'on ait $|\varphi(x)| \leqslant k$ dans V . Il existe $\lambda_0 \in K$ tel que $|\lambda_0| > k$, donc $|\varphi(x).\lambda_0^{-1}| \leqslant 1$; alors la relation $x \in \lambda_0^{-1}W$ entraîne $\varphi(x).x=(\varphi(x)\lambda_0^{-1})(\lambda_0 x) \in W$, d'où le corollaire.

3. Complétion d'un espace vectoriel topologique.

Soit E un espace vectoriel topologique __séparé__ sur un corps valué K , $\hat{E}$ le groupe additif complété du groupe topologique E (__Top.gén.__ chap.III § 3,th.2) ; soit $\hat{K}$ le corps valué complété du corps K (__Top.gén.__ chap.IX § 3,prop.6). L'application bilinéaire $(\lambda,x) \to \lambda x$ du produit $K \times E$ dans E se prolonge par continuité en une application bilinéaire de $\hat{K} \times \hat{E}$ dans $\hat{E}$ (__Top. gén.__,chap.III, § 5,th.1) que nous désignerons encore par $(\lambda,x) \to \lambda x$; d'après le principe de prolongement des identités on a encore $1.x=x$ et $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ pour $\lambda \in \hat{K}$, $\mu \in \hat{K}$ et $x \in \hat{E}$;

donc la loi externe $(\lambda, x) \to \lambda x$ définit sur $\hat{E}$ une structure d'espace vectoriel par rapport à $\hat{K}$, et cette structure est par définition compatible avec la topologie de $\hat{E}$. Nous dirons que l'espace vectoriel topologique $\hat{E}$ ainsi défini est <u>le complété</u> de l'espace vectoriel topologique E.

4. Sous-espaces vectoriels et espaces quotients d'un espace vectoriel topologique.

Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique E ; il est clair que la topologie induite sur V par celle de E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de V ; quand on considère V comme espace vectoriel topologique, il s'agit toujours, sauf mention expresse du contraire, de l'espace obtenu en munissant V de la topologie induite par celle de E.

Sur l'espace vectoriel quotient E/V, on sait que la topologie quotient de celle de E par V est compatible avec la structure de groupe additif (<u>Top.gén.</u>, chap.III, § 2, n°4) ; montrons qu'elle est aussi compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire que l'application $(\lambda, \dot{x}) \to \lambda\dot{x}$ de $K \times (E/V)$ dans E/V est continue ($x \to \dot{x}$ étant l'application canonique de E sur E/V). Or (<u>Top.gén.</u>, chap.I, § 9, th.1) il suffit pour cela de montrer que l'application $(\lambda, x) \to \lambda\dot{x}$ de $K \times E$ dans E/V est continue (puisqu'on peut identifier les groupes $K \times (E/V)$ et $(K \times E)/(\{0\} \times V)$ (<u>Top.gén.</u>, chap.III, § 2, prop.17)). Mais cette application est composée de l'application canonique de E sur E/V et de l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E$ dans E, qui sont toutes deux continues.

Quand nous considèrerons E/V comme espace vectoriel topologique, il sera toujours sous-entendu (sauf mention expresse du contraire) qu'il est muni de la topologie quotient de celle de E par V.

Remarque.- On sait (Alg., chap. II, § 3, prop. 5) que V admet dans E un supplémentaire W, dont la structure d'espace vectoriel (non topologique) est isomorphe à celle de E/V ; mais il se peut que, pour aucun sous-espace W supplémentaire de V dans E, la structure d'espace vectoriel topologique de W ne soit isomorphe à celle de E/V (cf. § 3, exerc. 16).

Z

On sait que, pour que E/V soit séparé, il faut et il suffit que V soit fermé (Top. gén., chap. III, § 2, th. 2). Supposons en particulier que E ne soit pas séparé, et soit N l'adhérence de l'origine dans E (intersection des voisinages de 0) ; on sait que N est un sous-groupe du groupe additif de E (Top. gén., chap. III, § 2, n°1) ; il est clair en outre que N est invariant par toute homothétie (prop. 2), donc N est un sous-espace vectoriel fermé de E. L'espace vectoriel quotient E/N, qui est séparé, est appelé l'espace vectoriel séparé associé à l'espace non séparé E.

5. Produit d'espaces vectoriels topologiques.

Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque d'espaces vectoriels topologiques sur un corps valué K, et soit E l'espace vectoriel produit des E_ι. On sait (Top. gén., chap. III, § 2, n°9) que la topologie produit de celles des E_ι est compatible avec la structure de groupe additif produit de celles des E_ι. Montrons en outre que cette topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ; il suffit pour cela de voir que l'application $(\lambda, (x_\iota)) \rightarrow (\lambda x_\iota)$ de $K \times E$ dans E est continue, ou encore (Top. gén., chap. I, § 8, th. 1) que, pour chaque indice $\varkappa$, $(\lambda, (x_\iota)) \longrightarrow \lambda x_\varkappa$ est une application continue de $K \times E$ dans $E_\varkappa$; or, cette application est composée de $(\lambda, x_\varkappa) \longrightarrow \lambda x_\varkappa$ et de $(\lambda, x) \rightarrow (\lambda, pr_\varkappa x)$, qui sont toutes deux continues.

Quand nous considèrerons $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ comme un espace vectoriel topologique, il sera toujours sous-entendu, sauf mention expresse du contraire, qu'il est muni de la topologie produit de celles des E_ι.

PROPOSITION 4.- Dans l'espace vectoriel produit $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$, le sous-espace F somme directe (Alg.,chap.II, §1,n°7) des E_ι est partout dense.

En effet, F est l'ensemble des points $x=(x_\iota)_{\iota \in I}$ tels que les x_ι soient nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux. Soit $y=(y_\iota)$ un point quelconque de E , et V un voisinage quelconque de y ; V contient un ensemble élémentaire (Top.gén.,chap.I, §8) $\prod_{\iota \in I} V_\iota$, où $V_\iota = E_\iota$ pour les indices ι du complémentaire dans I d'une partie finie H de I , et où V_ι est un voisinage de y_ι pour les indices $\iota \in H$. Si (x_ι) est le point de F tel que $x_\iota = y_\iota$ pour $\iota \in H$, $x_\iota = 0$ pour $\iota \notin H$, x appartient à V , d'où la proposition.

6. Somme directe topologique de sous-espaces.

DÉFINITION 2.- Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps valué, $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels fermés, telle que E soit somme directe des V_i . On dit que E est somme directe topologique des V_i si l'application canonique $(x_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i$ de l'espace produit $\prod_{i=1}^{n} V_i$ sur E est un isomorphisme (pour les structures d'espace vectoriel topologique).

Comme l'application $(x_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i$ est continue dans tous les cas, il revient au même de dire que son application réciproque est continue, ou encore que pour chaque indice i l'application $x \longrightarrow k_i(x)$ qui à tout $x \in E$ fait correspondre son composant dans V_i , est continue.

Lorsque E est somme directe topologique de deux sous-espaces vectoriels fermés V et W , on dit encore que W est un supplémentaire topologique de V ; E/V est alors isomorphe à W .

PROPOSITION 5.- *Pour qu'un sous-espace vectoriel fermé* V *de* E *admette dans* E *un supplémentaire topologique, il faut et il suffit qu'il existe une application linéaire continue* u *de* E *sur* V *telle que, pour tout* $x \in V$, $u(x)=x$.

La condition est évidemment nécessaire, en prenant pour u l'application qui fait correspondre à tout $x \in E$ son composant dans V . Inversement, supposons qu'il existe une telle application u , et soit $W = \overset{-1}{u}(0)$ son noyau ; W est un sous-espace vectoriel fermé, et l'hypothèse $u(x)=x$ pour tout $x \in V$ entraîne que $V \cap W = \{0\}$; d'autre part, pour tout $y \in E$, $u(y) \in V$, et $u(y-u(y)) = u(y) - u(u(y)) = 0$, donc $y-u(y) \in W$, ce qui prouve que E est somme directe de V et W . Enfin, $u(y)$ étant le composant de y dans V d'après le calcul précédent, et $y-u(y)$ son composant dans W , les deux applications $y \to u(y)$ et $y \to y-u(y)$ sont continues, d'où la proposition.

Il est clair que si E est somme directe topologique d'une famille finie $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ de sous-espaces, et si chaque V_i est somme directe topologique d'une famille finie $(W_{ij})_{j \in H_i}$ de sous-espaces, E est somme directe topologique de la famille $(W_{ij})_{j \in H_i},\ 1 \leqslant i \leqslant m$.

7. Ensembles bornés.

DÉFINITION 3.- *Dans un espace vectoriel topologique* E *sur un corps valué* K *dont la valeur absolue n'est pas impropre, on dit qu'un ensemble* B *est borné si, pour tout voisinage* V *de* 0 *dans* E , *il existe* $\lambda \in K$ *tel que* $\lambda \neq 0$ *et* $\lambda B \subset V$ (ou, ce qui revient au même, $B \subset \lambda^{-1} V$) .

Si E est un espace *normé* sur K , les boules $\| x \| \leqslant a$ $(a > 0)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 invariant par homothétie. Pour qu'un ensemble B soit borné dans E , il faut et il suffit qu'il soit contenu dans une boule, ou, ce qu'il revient au même, que $\sup\limits_{x \in B} \| x \| < +\infty$: autrement dit, B doit être

<u>borné</u> au sens de la théorie des espaces métriques (<u>Top.gén.</u>, chap.IX, § 2,n°2), ce qui justifie la terminologie introduite.

On notera qu'il peut se faire que, dans un espace vectoriel topologique, <u>aucun voisinage ne soit borné</u> (exerc. 7 et 8).

Tout ensemble réduit à un point est borné, d'après la condition (L''_{II}) de la prop.3 . Toute partie d'un ensemble borné est bornée.

PROPOSITION 6.- <u>Si l'ensemble B est borné, il en est de même de l'ensemble</u> $S.B$, <u>réunion des ensembles</u> μB , <u>où</u> μ <u>parcourt l'ensemble</u> S <u>des</u> μ <u>tels que</u> $|\mu| \leqslant \alpha$ (α nombre >0 quelconque). <u>Si</u> B_1 <u>et</u> B_2 <u>sont bornés, il en est de même de</u> $B_1 \cup B_2$ <u>et de</u> B_1+B_2 .

Nous démontrerons par exemple que B_1+B_2 est borné, les autres démonstrations étant analogues. Pour tout voisinage V de 0 dans E , soit W un voisinage de 0 tel que $W+W \subset V$ et que la relation $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda W \subset W$ (prop.3). Par hypothèse, il existe λ_1 et λ_2 non nuls dans K tels que $\lambda_1 B_1 \subset W$ et $\lambda_2 B_2 \subset W$; supposons par exemple que $|\lambda_2| \geqslant |\lambda_1|$, et posons $\mu = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$; on a $|\mu| \leqslant 1$, donc $\lambda_1 B_2 = \mu(\lambda_2 B_2) \subset W$, et par suite $\lambda_1(B_1+B_2) \subset W+W \subset V$.

COROLLAIRE.- <u>Tout ensemble fini est borné</u>.

PROPOSITION 7.- <u>L'adhérence d'un ensemble borné B est un ensemble borné</u>.

En effet, soit V un voisinage quelconque de 0 , W un voisinage ouvert symétrique de 0 tel que $W+W \subset V$; il existe $\lambda \in K$ non nul et tel que $B \subset \lambda W$; pour tout point $x \in \overline{B}$, il existe un point $y \in B$ contenu dans $x+\lambda W$, donc $\overline{B} \subset B+\lambda W \subset \lambda(W+W) \subset \lambda V$.

PROPOSITION 8.- <u>Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur K , f une application linéaire continue de E dans F ; pour tout ensemble borné</u> $B \subset E$, $f(B)$ <u>est borné dans F</u> .

En effet, pour tout voisinage W de 0 dans F , $\overset{-1}{f}(W)$ est un voisinage de 0 dans E , donc il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $\lambda B \subset \overset{-1}{f}(W)$ et par suite $f(\lambda B) = \lambda f(B) \subset W$.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> $E = \prod_\iota E_\iota$ <u>le produit d'une famille</u> (E_ι) <u>d'espaces vectoriels topologiques sur</u> K . <u>Pour qu'un ensemble</u> $B \subset E$ <u>soit borné, il faut et il suffit que pour tout</u> ι ; $pr_\iota B$ <u>soit borné dans</u> E_ι .

La condition est nécessaire d'après la prop.8, les projections étant des applications linéaires continues. Elle est suffisante ; en effet, soit V un voisinage quelconque de 0 dans E ; V contient un ensemble élémentaire $\prod_\iota V_\iota$, où $V_\iota = E_\iota$ sauf pour les indices d'une partie finie H de l'ensemble d'indices, pour lesquels V_ι est un voisinage ouvert de 0 dans E_ι , tel que $\lambda V_\iota \subset V_\iota$ pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \leq 1$ (prop.3). Pour chaque $\iota \in H$, il existe $\lambda_\iota \in K$ non nul et tel que $\lambda_\iota pr_\iota B \subset V_\iota$. Soit λ_0 celui des λ_ι de plus petite valeur absolue ; on a donc $|\lambda_0 \lambda_\iota^{-1}| \leq 1$ pour tout $\iota \in H$, donc $\lambda_0 pr_\iota B = (\lambda_0 \lambda_\iota^{-1})(\lambda_\iota pr_\iota B) \subset V_\iota$ pour tout $\iota \in H$; on a donc $\lambda_0 B \subset V$.

PROPOSITION 9.- <u>Dans un espace vectoriel topologique séparé</u> E , <u>tout ensemble précompact est borné</u>.

En effet, soit A un ensemble précompact dans E , V un voisinage arbitraire de 0 dans E , W un voisinage de 0 tel que $\lambda W \subset W$ pour $|\lambda| \leq 1$ et que $W+W \subset V$. Par hypothèse, il existe un nombre fini de points $x_i \in A$ tel que les voisinages $x_i + W$ forment un recouvrement de A ; si B est l'ensemble fini des x_i , on a donc $A \subset B+W$. Mais B est borné, donc il existe $\lambda \in K$ non nul tel que $\lambda B \subset W$, et on peut supposer que $|\lambda| \leq 1$ (sinon on aurait $B \subset \lambda^{-1} W \subset W$, donc on pourrait prendre $\lambda = 1$) ; on a par suite $\lambda A \subset \lambda B + \lambda W \subset W+W \subset V$, ce qui démontre la proposition.

§ 2. Variétés linéaires dans un espace vectoriel topologique.

1. Adhérence d'une variété linéaire.

Rappelons (Alg., chap. IX) qu'une variété linéaire affine (ou simplement variété linéaire) dans un espace vectoriel E sur un corps K est la transformée par translation d'un sous-espace vectoriel de E .

PROPOSITION 1.- Dans un espace vectoriel topologique, l'adhérence d'une variété linéaire est une variété linéaire.

En effet, toute translation étant un homéomorphisme de E , il suffit de démontrer la proposition pour un sous-espace vectoriel V de E . Or, l'application continue $(x,y) \rightarrow x+y$ (resp. $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$) applique $V \times V$ dans V (resp. $K \times V$ dans V), donc elle applique $\overline{V} \times \overline{V}$ dans $\overline{V}$ (resp. $K \times \overline{V}$ dans $\overline{V}$) (Top. gén., chap. I, § 4, prop. 1), ce qui montre que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel.

Etant donnée une partie A d'un espace vectoriel topologique E , on appelle sous-espace vectoriel fermé engendré par A l'adhérence dans E du sous-espace vectoriel V engendré par A (c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A) ; c'est aussi le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant A .

DÉFINITION 1.- Dans un espace vectoriel topologique, on dit qu'un ensemble A est total si le sous-espace vectoriel fermé engendré par A est identique à E (ou, en d'autres termes, si l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est partout dense dans E) .

Tout système de générateurs de E est total ; par exemple, il résulte de la condition (L''_{II}) de la prop. 3 du § 1 que tout voisinage de 0 dans E est un système de générateurs de E , et par suite un ensemble total. Toute partie partout dense de E est évidemment un ensemble total.

Du fait que tout voisinage de 0 dans E engendre E , il résulte qu'une variété linéaire fermée V distincte de E ne peut contenir aucun point intérieur ; autrement dit, c'est un ensemble rare dans E .

DÉFINITION 2.- Dans un espace vectoriel topologique E , on dit qu'une famille $(a_\iota)_{\iota \in I}$ de points de E est topologiquement libre si, quel que soit $\varkappa \in I$, le sous-espace vectoriel fermé engendré par les a_ι d'indice $\iota \neq \varkappa$ ne contient pas $a_\varkappa$.

Une famille topologiquement libre est libre (au sens algébrique) (cf. Alg.,chap.II, §3,prop.1) ; la réciproque est inexacte, même pour une famille libre finie dans un espace séparé (cf. remarque suivant le th.2).

Au contraire de ce qui se passe en Algèbre pour les parties libres d'un espace vectoriel, on notera que l'ensemble des parties topologiquement libres d'un espace vectoriel topologique E n'est pas inductif en général (exerc.1) et qu'il n'existe pas en général dans E de partie topologiquement libre maximale (exerc.2).

L'ensemble des éléments d'une famille topologiquement libre sera appelé partie topologiquement libre de E . Toute partie d'une partie topologiquement libre est topologiquement libre ; toute partie réduite à un point est topologiquement libre si l'espace E est séparé.

Soit V un sous-espace fermé de E , $(\mathring{a}_\iota)_{\iota \in I}$ une famille topologiquement libre dans l'espace quotient E/V . Si a_ι est un élément quelconque de la classe $\mathring{a}_\iota$, la famille $(a_\iota)_{\iota \in I}$ est topologiquement libre dans E , car si $a_\varkappa$ était adhérent à l'ensemble des combinaisons linéaires des a_ι $(\iota \neq \varkappa)$, $\mathring{a}_\varkappa$ serait adhérent à l'ensemble des combinaisons linéaires des $\mathring{a}_\iota$ $(\iota \neq \varkappa)$ puisque l'application canonique de E sur E/V est continue. Mais,

Mais, si W est le sous-espace vectoriel fermé engendré par les a_i , on peut avoir $V \cap W \neq \{0\}$ (exerc.1).

2. Droites et hyperplans fermés.

PROPOSITION 2.- Dans un espace vectoriel topologique séparé E sur un corps valué K dont la valeur absolue n'est pas impropre, tout sous-espace vectoriel de dimension 1 est isomorphe à K (considéré comme espace vectoriel topologique à gauche sur lui-même).

Soit $a \neq 0$ un point quelconque de E ; montrons que l'application linéaire $\lambda \to \lambda a$ de K sur le sous-espace $D = K.a$ de dimension 1 est un isomorphisme. Comme elle est biunivoque et continue, il suffit de prouver qu'elle est bicontinue, c'est-à-dire que l'image par cette application de tout voisinage de 0 dans K est un voisinage de 0 dans D . Pour tout $\alpha > 0$, il existe par hypothèse un élément $\xi_0 \in K$ tel que $0 < |\xi_0| < \alpha$; d'autre part, E étant séparé, il existe dans E un voisinage V de 0 ne contenant pas le point $\xi_0 a$, et tel que la relation $|\mu| \leq 1$ entraîne $\mu V \subset V$; si $\xi a \in V$, on a donc $|\xi| < |\xi_0| < \alpha$ sans quoi on aurait $(\xi_0 \xi^{-1})(\xi a) = \xi_0 a \in V$ contrairement à l'hypothèse ; l'image par l'application $\lambda \to \lambda a$ du voisinage $|\xi| < \alpha$ de 0 dans K contient donc $V \cap D$, ce qui établit la proposition.

La proposition est inexacte si la valeur absolue sur K est impropre. En effet, soit K' un corps valué dont la valeur absolue n'est pas impropre, et soit K le corps discret obtenu en munissant K' de la valeur absolue impropre ; il est clair que K' est un espace vectoriel topologique de dimension 1 sur K , mais n'est pas isomorphe à K .

PROPOSITION 3.- Pour qu'un hyperplan soit fermé dans un espace vectoriel topologique E , il faut et il suffit que son complémentaire ait un point intérieur.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si un hyperplan H n'est pas fermé, son adhérence est une variété linéaire (prop.1) distincte de H et contenant H , donc nécessairement l'espace E tout entier ; autrement dit, H est *partout dense* dans E , d'où la proposition.

THÉOREME 1.- *Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps valué K dont la valeur absolue n'est pas impropre. Pour qu'un hyperplan H soit fermé dans E , il faut et il suffit qu'il soit défini par une équation $f(x)=\alpha$, où f est une forme linéaire continue non nulle.*

La condition est évidemment nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante. On peut supposer que H est un hyperplan fermé homogène ; l'espace quotient E/H est alors un espace vectoriel topologique séparé de dimension 1 sur K , et l'application canonique φ de E sur E/V est continue. Soit x_0 un point de E n'appartenant pas à H ; le composant de $x \in E$ sur la droite $D=K.x_0$ s'écrit d'une seule manière $t(x)x_0$, où t est une forme linéaire ; tout revient à prouver que t est continue. Or, on a $\varphi(x)=t(x)\varphi(x_0)$; l'application $x \rightarrow t(x)$ est donc composée de l'application $\lambda\varphi(x_0) \rightarrow \lambda$ et de φ ; comme la première de ces applications est continue d'après la prop.2, le théorème est démontré.

Remarque.- Il existe des espaces vectoriels topologiques séparés sur un corps valué *complet* dans lesquels toute forme linéaire continue est identiquement nulle (exerc.2) ; dans un tel espace, un hyperplan est donc toujours *partout dense*.

COROLLAIRE.- *Dans les conditions du th.1, pour tout sous-espace vectoriel D de dimension 1 supplémentaire d'un hyperplan fermé H , E est somme directe topologique de H et de D .*

En effet, si x_0 est un point de D non nul, nous avons vu que l'application composante $x \rightarrow t(x)x_0$ est continue dans E .

Le th.1 est inexact lorsque la valeur absolue de K est impropre. Par exemple, si K désigne le corps $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue impropre, le plan numérique $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel topologique sur K, mais la forme linéaire $(x,y) \to y$ n'est pas continue dans $\mathbb{R}^2$, bien que l'hyperplan $\mathbb{R} \times \{0\}$ soit fermé.

3. Sous-espaces vectoriels de dimension finie.

THÉORÈME 2.- Dans un espace vectoriel topologique séparé E sur un corps valué complet K, dont la valeur absolue n'est pas impropre, tout sous-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à K_s^n.

Nous venons de voir que le théorème est vrai pour n=1 ; raisonnons par récurrence sur n. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n>1$; soit H un sous-espace vectoriel de dimension n-1 contenu dans F ; par hypothèse H est isomorphe à K^{n-1}, donc est complet, et par suite fermé dans F. D'après le cor. du th.1, H admet un supplémentaire topologique D dans F, et comme D est de dimension 1, D est isomorphe à K (prop.3), donc F est isomorphe à $K \times F$, et par suite à K^n, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE 1.- Dans un espace vectoriel topologique séparé E sur un corps valué complet K dont la valeur absolue n'est pas impropre, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

En effet, c'est un sous-espace complet d'après le th.2.

Toute partie libre finie dans E est donc topologiquement libre.

COROLLAIRE 2.- Soit E un espace vectoriel topologique séparé sur un corps valué complet K non discret. Soient V un sous-espace vectoriel fermé de E, W un sous-espace vectoriel de dimension finie de E ; le sous-espace V+W est fermé dans E.

En effet, l'espace quotient E/V est séparé ; soit φ l'homomorphisme canonique de E sur E/V ; l'espace V+W est égal à $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(W))$, et comme $\varphi(W)$

est de dimension finie dans E/V , $\varphi(W)$ est fermé dans E/V , donc $V+W$ est fermé dans E .

<u>Remarques</u>.- 1) On observera que si V et W sont deux sous-espaces vectoriels fermés quelconques dans E , $V+W$ n'est pas nécessairement fermé (cf.chap.III, § , exerc.)

2) Le th.2 est inexact si K n'est pas complet. En effet, soit alors $\hat{K}$ le corps valué <u>complété</u> de K : pour tout $a \in \hat{K}$, $K.a$ est partout dense dans $\hat{K}$. Si $a \notin K$, le sous-espace $K+K.a$, de dimension 2 , dans l'espace vectoriel topologique $\hat{K}$ sur K , n'est donc pas isomorphe à K^2, puisque tout sous-espace vectoriel de dimension 1 est partout dense dans cet espace.

PROPOSITION 4.- <u>Soit E un espace vectoriel topologique séparé sur un corps valué complet K , dont la valeur absolue n'est pas impropre. Soit V un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie n dans E . Pour tout sous-espace W supplémentaire de V dans E , E est somme directe topologique de V et de W .</u>

La proposition est identique au cor. du th.1 pour $n=1$; démontrons-la par récurrence sur n . Soit W_1 un sous-espace de W de dimension $n-1$; l'hyperplan $H=V+W_1$ est <u>fermé</u> dans E . En effet, son image canonique dans l'espace vectoriel topologique séparé E/V , de dimension n , est de dimension $n-1$, donc (cor. du th.2) est fermée dans cet espace. Si D est un sous-espace de dimension 1, supplémentaire de W_1 dans W , D est supplémentaire de H dans E , donc (cor. du th.1) E est somme directe topologique de H et D . Mais comme V est fermé et de codimension $n-1$ dans H , l'hypothèse de récurrence montre que H est somme directe topologique de V et W_1 , et par suite E somme directe topologique de V et $W_1+D = W$.

La proposition 4 (pour $n>1$) est inexacte si K n'est pas complet ou si sa valeur absolue est impropre (exerc. 5).

4. Espaces vectoriels topologiques localement précompacts.

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique E est <u>localement précompact</u> s'il existe dans E un <u>voisinage précompact</u> de 0.

THÉORÈME 3.- <u>Un espace vectoriel topologique localement précompact E sur un corps valué complet K dont la valeur absolue n'est pas impropre, est de dimension finie</u>.

En effet, soit V un voisinage précompact de 0 dans E ; V est <u>borné</u> (§ 1, prop. 9), donc pour tout voisinage W de 0 dans E, il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $\lambda V \subset W$; cela signifie que, lorsque λ parcourt K^*, les ensembles λV forment un <u>système fondamental de voisinages</u> de 0, et comme E est séparé, l'intersection des λV (λ parcourant K^*) est réduite au point 0.

Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, et α un élément de K tel que $|\alpha| \leqslant \varepsilon$; par hypothèse, il existe un nombre fini de points a_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) de V tels que V soit contenu dans la réunion des voisinages $a_i + \alpha V$; si M est le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les a_i, on a fortiori $V \subset M + \alpha V$. Supposons alors que E ne soit pas de dimension finie ; il existe donc un point b appartenant à $\complement M$. Comme M est fermé (cor. du th. 2), l'ensemble des $|\lambda|$ pour tous les λ tels que $b + \lambda V$ rencontre M, admet une borne inférieure $d > 0$ (puisque les λV, où λ parcourt K^*, forment un système fondamental de voisinages de 0). Il existe donc un point $y \in M$ et un $\mu \in K^*$ tels que $b - y \in \mu V$ et $d \leqslant \mu \leqslant d(1+\varepsilon)$; posons $x_0 = \mu^{-1}(b-y)$. On a $x_0 \in V$, donc $x_0 \in M + \alpha V$, c'est-à-dire $x_0 = z + \alpha t$, avec $z \in M$ et $t \in V$; on en déduit $b = y + \mu z + \mu \alpha t$, ou encore $b - \mu\alpha t = y + \mu z \in M$; comme $|\mu\alpha| \leqslant \varepsilon |\mu| \leqslant \varepsilon d(1+\varepsilon) < d$, nous aboutissons à une contradiction, ce qui démontre le théorème.

Bien entendu, il résulte du th.2 que l'espace E , isomorphe à un K^n , est alors complet, et par suite localement compact, ce qui n'est possible naturellement que si K lui-même est localement compact.

Le théorème est inexact si K n'est pas complet ou si sa valeur absolue est impropre. Par exemple, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel topologique localement compact et de dimension infinie sur le corps $\mathbb{Q}$, ou sur le corps K obtenu en munissant $\mathbb{Q}$ de la valeur absolue impropre.

§3. Dual d'un espace vectoriel topologique.

1. Espaces vectoriels topologiques de fonctions continues.

Soient K un corps valué que nous supposerons d'abord non discret, F un espace vectoriel topologique sur K , E un ensemble quelconque, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E . L'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F est un espace vectoriel sur K ; soit H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. Considérons sur H la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ (Top.gén., chap.X, §1).

PROPOSITION 1.- Pour que la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ soit compatible avec la structure d'espace vectoriel de H , il faut et il suffit que pour tout $u \in H$ et tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$, u(A) soit borné dans F .

En effet, un système fondamental de voisinages de 0 est formé des ensembles T(V,A) définis comme suit : pour tout voisinage V de 0 dans F et tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$, T(V,A) est l'ensemble des u H tels que $u(A) \subset V$. Si on prend V symétrique, on voit d'abord que T(V,A) est symétrique ; d'autre part, si W est un voisinage de 0 dans F tel que $W+W \subset V$, u et v deux éléments de T(W,A) et w=u+v , on a, pour tout $x \in A$, $w(x)=u(x)+v(x) \in W+W \subset V$, donc $T(W,A)+T(W,A) \subset T(V,A)$, ce qui prouve que dans tous les cas, la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est compatible avec la structure de groupe additif de H . Supposons maintenant que V soit tel que la relation $|\mu| \leqslant 1$ entraîne $\mu V \subset V$; alors, si $u \in T(V,A)$, on a aussi $\mu u \in T(V,A)$ pour $|\mu| \leqslant 1$; on a d'autre part $T(\lambda V,A) = \lambda T(V,A)$ quel que soit $\lambda \neq 0$ dans K . Pour que la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ soit compatible avec la structure d'espace vectoriel de H , il faut et il suffit donc que les ensembles $T(V,A)$ satisfassent à la condition $(\mathrm{L}^{*}_{\mathrm{II}})$ de la prop.3 du §1, c'est-à-dire que pour tout $u \in H$, tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage V de 0 dans F , il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $\lambda u \in T(V,A)$, ce qui signifie $\lambda u(A) \subset V$; d'où la proposition.

La condition de la prop.1 est vérifiée dans les deux cas suivants :

1° E et H quelconques, $\mathfrak{S}$ formée des parties finies de E : cela revient à prendre sur H la topologie de la convergence simple, induite par celle de l'espace produit F^E .

2° E est un espace vectoriel topologique sur K , H l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ (sur le centre de K , mais non sur K en général) des applications linéaires continues de E dans F , $\mathfrak{S}$ une partie de l'ensemble des parties bornées de E ; la condition de la prop.1 résulte alors de la prop.8 du §1 .

On retrouve ainsi le fait que, si E et F sont deux espaces normés, la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ (Top.gén.,chap.X, § 2) ; on sait en outre que, dans ce cas, cette topologie peut être définie par la norme $\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$ et que $\mathcal{L}(E,F)$ muni de cette norme, est <u>complet</u> lorsque F est <u>complet</u>. Au contraire, lorsqu'on munit $\mathcal{L}(E,F)$ de la topologie de la convergence <u>simple</u>, l'espace obtenu n'est pas complet en général, même lorsque F est complet (cf. exerc. 5a)).

Si maintenant le corps valué K est supposé <u>discret</u>, la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles d'une partie <u>quelconque</u> $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{P}(E)$ est <u>toujours</u> compatible avec la structure d'espace vectoriel de H . En effet, les conditions (L'_{II}) et (L'_{III}) sont toujours vérifiées lorsque K est discret ; par ailleurs, avec les notations de la prop.1, la relation $T(\lambda V,A)=\lambda T(V,A)$ montre que pour tout $\lambda \in K$, $u \rightarrow \lambda u$ est continue dans H ; comme on a vu dans la démonstration de la prop.1 que $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$ est toujours compatible avec la structure de groupe additif de H , notre assertion s'ensuit.

Lorsque l'espace F est <u>séparé et complet</u>, et l'espace E <u>séparé</u>, toute application linéaire continue de E dans F se prolonge par continuité d'une seule manière au <u>complété</u> $\hat{E}$ de E ; on obtient ainsi une application linéaire biunivoque canonique de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{L}(\hat{E},F)$ qui permet de les <u>identifier</u>, ce que l'on fait d'ordinaire. La topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est alors identifiée avec la topologie de la convergence uniforme dans les <u>adhérences</u> (dans $\hat{E}$) des ensembles de $\mathfrak{S}$ (<u>Top.gén.</u>, chap.X, § 2, prop.). En particulier, la topologie de la <u>convergence compacte</u> sur $\mathcal{L}(\hat{E},F)$ est identifiée à la topologie de la convergence uniforme dans les parties <u>précompactes</u> de E , sur $\mathcal{L}(E,F)$. D'après la prop.1 et la prop.9 du § 1, cette topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ sur le centre de K ; nous désignerons par $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant $\mathcal{L}(E,F)$ de cette topologie.

2. Parties équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$.

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques séparés sur un corps valué quelconque K , et soit $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel (sur le centre de K) des applications linéaires continues de E dans F .

PROPOSITION 2.- Pour qu'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ soit équicontinue dans E , il faut et il suffit qu'elle soit équicontinue au point $x=0$.

La condition est évidemment nécessaire ; inversement, si elle est vérifiée, pour tout $x_0 \in E$ et tout voisinage W de 0 dans F , il existe un voisinage V de 0 dans E tel que l'on ait $u(x-x_0) \in W$ pour tout $u \in H$ et $x \in x_0+V$, ce qui s'écrit $u(x)-u(x_0) \in W$ et démontre la proposition.

PROPOSITION 3.- Pour toute partie équicontinue H de $\mathcal{L}(E,F)$, l'adhérence $\overline{H}$ de H dans l'espace F^E est continue dans $\mathcal{L}(E,F)$ et est équicontinue.

En effet, l'adhérence de H dans F^E est formée de fonctions continues et est équicontinue (Top.gén.,chap.X, §3,prop.   ) ; reste à vérifier que ces fonctions sont des applications linéaires de E dans F , ce qui est immédiat d'après la définition de la convergence simple.

PROPOSITION 4.- Sur toute partie équicontinue H de $\mathcal{L}(E,F)$, la topologie de la convergence simple dans E , la topologie de la convergence simple dans un ensemble total de E , et la topologie de la convergence uniforme dans les parties précompactes de E , sont identiques.

L'identité sur H de la topologie de la convergence simple dans E et de la topologie de la convertence uniforme dans les parties précompactes provient de ce que H peut être identifié à la partie de $\mathcal{L}(\hat{E},\hat{F})$ formée des prolongements à $\hat{E}$ des applications linéaires $u \in H$; la proposition résulte alors de Top.gén.,chap.X, §3,prop.   Si maintenant A est une partie quelconque de E , la topologie de la convergence simple dans A est identique (sur H) à la topologie de la convergence simple dans le sous-espace vectoriel V engendré par A , les relations $u(x_i) \in V$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

entraînant $u(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i) \in (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)V$. Si alors A est total dans E , V est partout dense dans E , et l'identité sur H de la topologie de la convergence simple dans E et de la topologie de la convergence simple dans V résulte de la prop. de Top.gén.,chap.X, § 3 .

3.Dual d'un espace vectoriel topologique.

On sait (Alg.,chap.II, § 4) que le dual d'un espace vectoriel E (à gauche) sur un corps K est l'espace vectoriel (à droite) E^* sur K formé de toutes les formes linéaires dans E . Par abus de langage, lorsque E est un espace vectoriel topologique sur un corps valué quelconque K , nous appellerons dual de E le sous-espace E' de E^* formé des formes linéaires continues dans E ; E^* lui-même, lorsqu'il aura à intervenir, sera appelé le dual algèbrique de E , pour éviter toute confusion. On notera que E' peut être réduit à 0 (§ 2,exerc.2). Le raisonnement de la prop.1 montre que lorsque K est non discret et que $\mathfrak{S}$ une partie de l'ensemble des parties bornées de E , la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel (à droite) de E' sur K ; il en est de même pour $\mathfrak{S}$ quelconque lorsque K est discret ; cette topologie est séparée si tout point de E appartient à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins. En particulier, la topologie de la convergence simple dans E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E' et est séparée ; nous dirons désormais que cette topologie est la topologie faible sur E', et l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant E' de cette topologie sera appelé dual faible de E et noté E'_f pour éviter toute confusion.

Lorsque $E=K_s$, toute forme linéaire sur K étant de la forme $\xi \rightarrow \xi\lambda$ est continue, donc $E'=E^*=K_d$. La topologie faible sur E' est alors identique à la topologie définie par la valeur

NBRe22 26

absolue de K, car si $u(\xi)=\xi\lambda$, la relation $|u(1)|\leqslant \alpha$ est identique à $|\lambda|\leqslant \alpha$, et inversement si on a $|\lambda|\leqslant\alpha$, on en tire $|\xi_i\lambda|\leqslant|\xi_i|\alpha$ pour $1\leqslant i\leqslant n$.

Si E est __normé__, la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E', et est définie par la __norme__ $\|x'\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}|\langle x,x'\rangle|$; l'espace vectoriel E', muni de cette norme, est appelé le __dual fort__ de E ; il est __complet__ lorsque K est __complet__ (cf. chap.IV).

__Exemple__.- Soit K un corps valué complet non discret, $E=K^{(\mathbb{N})}$ l'espace vectoriel des combinaisons linéaires formelles des éléments de $\mathbb{N}$ à coefficients dans K ; tout élément $x\in K^{(\mathbb{N})}$ peut donc s'écrire $x=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n e_n$, où (e_n) est la base canonique de E, et les ξ_n sont nuls sauf un nombre fini. Considérons sur E la norme $\|x\|=\sup_n|\xi_n|$, et déterminons le __dual__ E' de cet espace normé. Soit $x'\in E'$, et posons $\langle e_n,x'\rangle=\lambda_n$; pour tout $x=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n e_n$, on a $\langle x,x'\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\lambda_n$; comme x' est continue par hypothèse, il existe un nombre $a>0$ tel que $\left|\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\lambda_n\right|\leqslant a.\sup_n|\xi_n|$, et réciproquement. Supposons en particulier que $K=\mathbb{R}$; alors pour toute partie finie H de $\mathbb{N}$, on doit avoir en particulier $\left|\sum_{n\in H}\lambda_n\right|\leqslant a$ (en prenant $\xi_n=1$ pour $n\in H$, $\xi_n=0$ pour $n\notin H$) ; ceci montre (Top.gén., chap.IV, § 7, cor. du th.3) que $\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|<+\infty$; la réciproque est immédiate ; en outre, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une partie finie H de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n\in H}|\lambda_n|\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|-\varepsilon$; si on prend $\xi_n=\operatorname{sgn}\lambda_n$ pour $n\in H$, $\xi_n=0$ pour $n\notin H$, on a $\left|\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\lambda_n\right|=\sum_{n\in H}|\lambda_n|$, ce qui montre que la __norme__ $\|x'\|=\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|$.

Si on désigne par $\langle x,x'\rangle$ la <u>forme bilinéaire canonique</u> (<u>Alg</u>., chap.II, § 4, n°1) sur $E\times E'$, chacune des applications partielles $x' \to \langle x,x'\rangle$ est une <u>forme linéaire continue dans</u> E'_f, et par suite aussi dans E' lorsqu'on munit cet espace d'une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel et plus fine que la topologie faible ; toutefois, la notion de "bidual" ne peut ici être définie de façon unique, car elle dépend de la topologie choisie sur E'.

On notera qu'en général l'application $(x,x') \to \langle x,x'\rangle$ <u>n'est pas continue</u> dans $E\times E'$, lorsqu'on munit E' de la topologie faible ou même de la topologie de la convergence uniforme dans <u>toutes</u> les parties bornées de E (chap.IV, §   ).

Soit M (resp. N) une partie quelconque de E (resp. E') ; nous désignerons par M^0 (resp. N^0) l'ensemble des $x'\in E'$ (resp. des $x\in E$) tels que $|\langle x,x'\rangle| \leq 1$ pour tout $x\in M$ (resp. pour tout $x'\in N$), et nous dirons que M^0 (resp. N^0) est l'ensemble <u>polaire</u> de M (resp. N). Pour un $x'\in E'$ fixe, l'ensemble des $x\in E$ tels que $|\langle x,x'\rangle|\leq 1$ est <u>fermé</u> dans E, puisque c'est l'image réciproque par la forme linéaire continue $x \to \langle x,x'\rangle$ de l'ensemble fermé $|\xi| \leq 1$ dans K ; donc N^0 est <u>fermé</u> dans E, et on voit de même que M^0 est <u>fermé</u> dans E' pour la topologie faible (et par suite aussi pour toute topologie plus fine). De même, si $x_0\in \overline{M}$, la relation $|\langle x,x'\rangle| \leq 1$ pour tout $x\in M$ entraîne $|\langle x_0,x'\rangle| \leq 1$, puisque x' est continue, donc on a $(\overline{M})^0 = M^0$, et de même $(\overline{N})^0 = N^0$, $\overline{N}$ désignant l'adhérence de N pour la topologie faible (ou toute topologie plus fine).

Si V (resp. W) est un sous-espace vectoriel de E, et $x'\in V^0$ (resp. $x\in W^0$), on a par hypothèse $|\langle y,x'\rangle| \leq 1$ pour tout $y\in V$ (resp. $|\langle x,y'\rangle| \leq 1$ pour tout $y'\in W$), donc aussi $|\langle \lambda y,x'\rangle| \leq 1$ (resp. $|\langle x,\lambda y'\rangle| \leq 1$) pour tout $\lambda\in K$. Si K n'est pas discret, on en déduit nécessairement $\langle y,x'\rangle = 0$ (resp. $\langle x,y'\rangle = 0$) ;

autrement dit V^0 (resp. W^0) est l'ensemble des $x' \in E'$ (resp. des $x \in E$) qui sont <u>orthogonaux</u> à V (resp. W). W^0 est donc le sous-espace de E <u>orthogonal</u> au sous-espace $W \subset E' \subset E^*$ (<u>Alg.</u>, chap. II, § 4, n°2) ; par abus de langage, on dit aussi que V^0 est le sous-espace de E' <u>orthogonal</u> à V.

Si K est discret, pour toute partie M (resp. N) de E (resp. E'), on a $M^0 = E'$ (resp. $N^0 = E$), et la notion d'ensemble polaire est donc sans intérêt. Nous désignerons encore par V^0 (resp. W^0), pour un <u>sous-espace vectoriel</u> V de E (resp. W de E'), l'ensemble des $x' \in E'$ (resp. $x \in E$) qui sont orthogonaux à V (resp. W), et nous dirons que V^0 est le sous-espace vectoriel <u>orthogonal</u> à V ; on voit comme ci-dessus que W^0 est <u>fermé</u> dans E et V^0 <u>fermé</u> dans E' pour la topologie faible, et que $(\overline{V})^0 = V^0$, $(\overline{W})^0 = W^0$. Notons que si le corps K est <u>complet</u>, l'application qui à tout $x' \in E'$ fait correspondre son prolongement par continuité à $\hat{E}$ est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de E' sur celle de $(\hat{E})'$; mais cette application n'est pas continue en général (son application réciproque est toujours continue) ; en identifiant les supports de E' et $(\hat{E})'$, on peut dire que la topologie faible sur E' est <u>moins fine</u> (et en général <u>strictement moins fine</u>) que la topologie faible sur le dual $(\hat{E})'$ (cf. cor. 2 du th. 1).

<u>4. Dual d'un espace quotient</u>.

PROPOSITION 5.- <u>Soient E un espace vectoriel topologique sur un corps valué non discret K, V un sous-espace vectoriel fermé de E, φ l'application canonique de E sur E/V, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Si, à toute forme linéaire continue u sur E/V, on fait correspondre la forme linéaire continue $u \circ \varphi$ sur E, on définit un isomorphisme de l'espace dual $(E/V)'$ muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\varphi(\mathfrak{S})$, sur le sous-espace V^0 de E' orthogonal à V, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$</u>

En effet, $u \circ \varphi$ est continue dans E et nulle dans V , donc appartient à V^o . Inversement, toute forme linéaire continue dans E et nulle dans V peut s'écrire d'une seule manière $u \circ \varphi$ (*Top.gén.*, chap.I, § 9, th.1), donc $u \to u \circ \varphi$ est bien un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de $(E/V)'$ sur celle de V^o. Cet isomorphisme est bicontinu en raison même de la définition des topologie sur $(E/V)'$ et E' .

En particulier, si on prend pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties *finies* de E , on voit que l'application $u \to u \circ \varphi$ est un isomorphisme du *dual faible* $(E/V)'_f$ sur le sous-espace V^o du *dual faible* E'_f .

Soit $N = E'^o$ le sous-espace de E orthogonal à E' (c'est-à-dire le sous-espace où s'annulent toutes les formes linéaires continues) ; on a évidemment $N^o = E'$, donc la prop.5 montre que si φ est l'application canonique de E sur E/N , E' , muni de la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, est isomorphe à $(E/N)'$, muni de la topologie $\mathcal{T}_{\varphi(\mathfrak{S})}$.

5. Dual d'un produit.

Soit $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'espaces vectoriels topologiques sur un corps valué non discret K , et soit $E = \prod_{i=1}^{n} F_i$ leur produit ; nous identifierons canoniquement chacun des F_i au sous-espace composant correspondant dans E , de sorte que E peut être considéré comme *somme directe topologique* des F_i , et $pr_i(x)$, pour chaque $x \in E$, comme le composant de x sur le sous-espace F_i . Avec ces conventions :

PROPOSITION 6.- *Soit* $\mathfrak{S}_i$ *un ensemble de parties bornées dans* F_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\mathfrak{S}$ *l'ensemble des parties de E de la forme* $\prod_{i=1}^{n} A_i$, *où* $A_i \in \mathfrak{S}_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$. *L'application canonique qui, à toute forme linéaire continue* u *sur* E , *fait correspondre l'élément* $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de* $\prod_{i=1}^{n} F'_i$, *où* u_i *est la restriction de* u *à* F_i , *est un isomorphisme du dual* E' *de* E , *muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}$, *sur l'espace produit* $\prod_{i=1}^{n} F'_i$, *où le dual* F'_i *est muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Il est évident que si u est continue dans E , u_i est continue dans F_i pour $1 \leq i \leq n$, et réciproquement, si (u_i) est un élément de $\prod_{i=1}^{n} F'_i$, $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \circ pr_i$ est une forme linéaire continue dans E , dont u_i est la restriction à F_i . L'application $u \rightarrow (u_i)$ est donc un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de E' sur celle de $\prod_{i=1}^{n} F'_i$; en raison de la définition des topologies sur ces deux espaces, il est immédiat que cet isomorphisme est bicontinu, la relation $|u_i(pr_i(x))| \leq \alpha$ pour $1 \leq i \leq n$ entraînant $|u(x)| \leq n\alpha$ dans $\prod_{i=1}^{n} A_i$, et inversement la relation $|u(x)| \leq \alpha$ dans $\prod_{i=1}^{n} A_i$ entraînant $|u_i(x_i)| \leq \alpha$ dans A_i $(1 \leq i \leq n)$.

En particulier, l'application $u \rightarrow (u_i)$ est un isomorphisme du <u>dual faible</u> E'_f sur le <u>produit des duals faibles</u> $\prod_{i=1}^{n} (F_i)'_f$.

<u>6. Sous-espaces de dimension finie d'un dual</u>.

Soit E un espace vectoriel topologique, E' son dual ; dans ce n° , nous supposerons E' muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties de E appartenant à un ensemble $\mathfrak{S}$ tel que tout point de E appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$ (les ensembles de $\mathfrak{S}$ étant en outre supposés <u>bornés</u> lorsque K est non discret) ; E' est donc un espace <u>séparé</u>.

PROPOSITION 7.- <u>Tout sous-espace vectoriel de dimension 1 dans</u> E' <u>est isomorphe à</u> K (considéré comme espace vectoriel topologique à droite par rapport à lui-même).

En effet, soit $a' \neq 0$ un point quelconque de E' ; il existe $a \in E$ tel que $\langle a,a' \rangle \neq 0$; posons $|\langle a,a' \rangle| = \beta$; la relation $|\langle a,a'\lambda \rangle| \leq \alpha$ est équivalente à $|\lambda|\, \beta \leq \alpha$, ce qui prouve que l'application $a'\lambda \rightarrow \lambda$ de $a'.K$ sur K est continue, d'où la proposition.

PROPOSITION 8.- <u>Tout sous-espace vectoriel V de dimension finie dans</u> E' <u>est fermé et isomorphe à</u> K_d^n ; <u>il admet un supplémentaire topologique dans</u> E' , <u>et on a</u> $(V^o)^o = V$.

En effet, soit n la dimension de V ; dans E, le sous-espace V^o est fermé et de codimension n (Alg., chap.II, § 4, th.1) ; soit W un supplémentaire de V^o dans E (non nécessairement fermé), de dimension n. Toute forme linéaire x' sur E peut s'écrire d'une seule manière comme somme d'une forme linéaire $y' \in V$ et d'une forme linéaire z' orthogonale à W ; si x' est continue, il en est de même de $z'=x'-y'$, donc E' est somme directe de V et de W^o ; en outre, il existe une base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de W et une base $(a'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de V telles que $\langle a_i, a'_j \rangle = \delta_{ij}$ (indice de Kronecker) (Alg., chap.II, § 4, prop.5 et n°4), et on peut écrire $y' = \sum_{i=1}^{n} a'_i \langle a_i, x' \rangle$; enfin, on a $(V^o)^o = V$ (Alg., chap.II, § 4, th.1). Cette dernière relation montre que V est fermé ; l'application $x' \to \langle a_i, x' \rangle$ étant continue, E' est somme directe topologique de V et de W^o, et V est somme directe topologique des n droites $a'_i.K$; ces derniers sous-espaces étant isomorphes à K_d (prop.7), la proposition est complètement démontrée.

7. Propriétés du dual faible.

Les prop.7 et 8 s'appliquent en particulier à la topologie faible sur E' ; mais on a dans ce cas des propriétés plus précises.

THÉORÈME 1.- Pour tout sous-espace vectoriel V du dual faible E'_f, on a $(V^o)^o = \overline{V}$.

Il revient au même de dire que $\overline{V}$ est l'intersection des hyperplans d'équation $\langle a, x' \rangle = 0$ contenant V (c'est-à-dire tels que $a \in V^o$) ; ces hyperplans sont évidemment fermés, donc aussi leur intersection ; pour montrer que cette intersection est identique à $\overline{V}$, il suffit de prouver que, pour tout $x' \notin \overline{V}$, il existe $a \in V^o$ tel que $\langle a, x' \rangle \neq 0$. Or, par hypothèse, il existe un voisinage U de x' ne rencontrant pas V, c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini de points $a_i \in E$ et un nombre $\alpha > 0$ tels que pour tout $y' \in E'$ satisfaisant aux inégalités

$|\langle a_i, x'-y'\rangle| \leq \alpha$ $(1 \leq i \leq n)$, on ait $y' \notin V$. Soit W le sous-espace vectoriel fermé de E'_f défini par les n équations $\langle a_i, z'\rangle = 0$ $(1 \leq i \leq n)$; par définition U contient la variété linéaire $x'+W$, donc cette dernière ne rencontre pas V. Ce dernier résultat peut encore s'exprimer sous la forme $x' \notin V+W$; par suite (<u>Alg</u>., chap. II, § 3, prop. 9) il existe un hyperplan H dans E' contenant $V+W$ et tel que $x' \notin H$; mais comme H contient W, il a une équation de la forme $\langle a, z'\rangle = 0$, où a est combinaison linéaire des a_i (<u>Alg</u>., chap. II, § 4, n° 6), ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- <u>Dans</u> E'_f, <u>tout hyperplan fermé</u> H <u>a pour équation</u> $\langle a, x'\rangle = 0$, <u>où</u> $a \in E$.

En effet, H^0 ne peut être réduit à 0, sans quoi on aurait $H = (H^0)^0 = E'$; il existe donc $a \neq 0$ dans E tel que $\langle a, x'\rangle = 0$ dans H ; comme l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\langle a, x'\rangle = 0$ est un hyperplan, il est identique à H.

On peut donc encore exprimer le th. 1 en disant que pour tout sous-espace vectoriel V dans E'_f, $\overline{V}$ est <u>l'intersection des hyperplans fermés contenant</u> V.

COROLLAIRE 2.- <u>Toute forme linéaire continue dans</u> E'_f <u>est de la forme</u> $x' \rightarrow \langle a, x'\rangle$, <u>où</u> $a \in E$.

En effet, si u est une forme linéaire continue non nulle dans E'_f, $\overset{-1}{u}(0)$ est un hyperplan fermé, donc (cor. 1) il existe $a \in E$ tel que $u(x') = \langle a, x'\rangle$ pour tout $x' \in E'$.

Ce corollaire montre donc que E est algèbriquement isomorphe au <u>dual</u> du dual faible E'_f.

COROLLAIRE 3.- <u>Pour tout sous-espace vectoriel fermé</u> V <u>de</u> E'_f, V <u>est isomorphe au dual faible de l'espace quotient</u> E/V^0.

Cela résulte aussitôt de la prop. 5 et du th. 1.

COROLLAIRE 4.- Soit E un espace vectoriel topologique tel que $E'^{o}=\{0\}$. Pour qu'un ensemble A soit total dans le dual faible E'_f, il faut et il suffit que pour tout $x\in E$, tel que $x\neq 0$, il existe $x'\in A$ tel que $\langle x,x'\rangle\neq 0$.

En effet, si V est le sous-espace vectoriel engendré par A, la condition $\overline{V}=E'_f$ est équivalente à $(V^o)^o=E'_f$ d'après le th.1 ; E' devant être orthogonal à V^o, on a d'après l'hypothèse $V^o=\{0\}$ et réciproquement, ce qui démontre le corollaire.

COROLLAIRE 5.- Pour qu'une famille (x'_ι) soit topologiquement libre dans E'_f, il faut et il suffit que, pour tout indice $\varkappa$, il existe $a_\varkappa\in E$ tel que $\langle a_\varkappa, x'_\varkappa\rangle\neq 0$ et $\langle a_\varkappa, x'_\iota\rangle=0$ pour tout $\iota\neq\varkappa$.

En effet, cette condition exprime qu'il existe un hyperplan fermé dans E'_f contenant les x'_ι d'indice $\neq\varkappa$ et ne contenant pas $x'_\varkappa$; ce qui équivaut, d'après le th.1, à dire que $x'_\varkappa$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel fermé engendré par les x'_ι d'indice $\neq\varkappa$.

PROPOSITION 9.- Soit V un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie dans E'_f. Pour tout sous-espace W supplémentaire de V, E'_f est somme directe topologique de V et W.

On peut se borner au cas où le sous-espace E'^{o} de E est réduit à 0 (prop.5). Alors $V^o\cap W^o$ est réduit à 0, puisque si x est orthogonal à la fois à V et à W, il est orthogonal à $V+W=E'$. Soit n la codimension de V (égale à la dimension de W) ; montrons que V^o est de dimension n. En effet, l'application qui à tout $x\in E$ fait correspondre la forme linéaire $x'\to\langle x,x'\rangle$ sur E' est biunivoque par hypothèse, donc E peut être identifié à un sous-espace du dual algèbrique E'^* de E' ; comme $(V^o)^o=V$ (th.1), la codimension de V dans E' est égale à la dimension de V^o dans E (Alg., chap.II, § 4, th.1) ; V^o est donc supplémentaire de W^o dans E, et le raisonnement de la prop.8 montre alors que E'_f est somme directe topologique de W et de $(V^o)^o=V$.

On notera que cette proposition est vraie <u>sans aucune hypothèse</u> sur le corps valué K ; lorsque K est complet et non discret, elle devient une conséquence de la prop.4 du § 2 .

COROLLAIRE.- <u>Si</u> V <u>est fermé et de codimension finie dans</u> E'_f , <u>tout hyperplan contenant</u> V <u>est fermé dans</u> E'_f .

En effet, V^o est le sous-espace orthogonal à V dans le dual algèbrique E'^* de E' , donc toute forme linéaire s'annulant dans V est de la forme $x' \rightarrow \langle a,x' \rangle$ où $a \in V^o \subset E$, et par définition continue.

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> K <u>un corps valué localement compact et non discret</u>, E <u>un espace vectoriel topologique sur</u> K ; <u>pour tout voisinage</u> U <u>de</u> 0 <u>dans</u> E , <u>l'ensemble</u> U^o <u>est compact dans</u> E'_f .

En effet, pour tout $x' \in U^o$, et tout $x \in U$, on a par définition $|\langle x,x' \rangle| \leqslant 1$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda \in K$ tel que $\lambda \neq 0$ et $|\lambda| \leqslant \varepsilon$, donc pour tout $x \in \lambda U$ et tout $x' \in U^o$, on a $|\langle x,x' \rangle| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre (prop.2) que U^o est <u>équicontinu</u> ; étant fermé dans E'_f , il est aussi fermé dans l'espace produit K^E (dont E'_f est un sous-espace (prop.3)).

D'autre part, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $\lambda x \in U$ (§ 1,prop.3), donc $|\langle \lambda x,x' \rangle| \leqslant 1$ pour tout $x' \in U^o$, ou encore $|\langle x,x' \rangle| \leqslant |\lambda^{-1}|$ pour tout $x' \in U^o$; cela signifie que les projections de U^o sur les espaces facteurs de K^E sont bornées, donc relativement compactes par hypothèse ; par suite U^o est relativement compact dans K^E , donc compact puisqu'il est fermé.

Le théorème n'est plus exact lorsque K est discret ; si on prend sur E la topologie discrète, on a $E'=E^*$, et pour $U=\{0\}$, $U^o=E^*$, qui n'est pas compact en général pour la topologie faible (ex.4) .

PROPOSITION 10.- *Soient* E *et* F *deux espacex vectoriels topologiques sur un corps valué* K , E'_f *et* F'_f *leurs duals faibles*. *Pour qu'une application linéaire* u *de* E'_f *dans* F'_f *soit continue, il faut et il suffit que pour tout* $y \in F$, *l'application* $x' \to \langle y, u(x') \rangle$ *soit une forme linéaire continue dans* E'_f .

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est remplie, considérons un voisinage quelconque de 0 dans F'_f , défini par les relations $|\langle y_i, y' \rangle| \leq \alpha$ $(1 \leq i \leq n)$, les $y_i \in F$; son image réciproque par u est l'ensemble défini par les relations $|\langle y_i, u(x') \rangle| \leq \alpha$, donc un voisinage de 0 dans E'_f d'après l'hypothèse.

COROLLAIRE.- *Pour que* u *soit continue, il faut et il suffit que pour tout hyperplan fermé* H *de* F'_f , $\overset{-1}{u}(H)$ *soit fermé dans* E'_f .

En effet, supposons cette condition remplie, et soit y un point quelconque de F , non orthogonal à F', H l'hyperplan fermé d'équation $\langle y, y' \rangle = 0$; $\overset{-1}{u}(H)$ est défini par l'équation $\langle y, u(x') \rangle = 0$; si $\overset{-1}{u}(H) = E'_f$, la forme linéaire $x' \to \langle y, u(x') \rangle$ est nulle ; sinon , $\overset{-1}{u}(H)$ est un hyperplan fermé et d'après le cor.1 du th.1, la forme linéaire $x' \to \langle y, u(x') \rangle$ est continue, d'où le corollaire.

8. Transposée d'une application linéaire continue.

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur un corps valué non discret K , et soit u une application linéaire *continue* de E dans F . Pour toute forme linéaire continue $y' \in F'$, l'application $y' \circ u$ est une forme linéaire continue sur E . Par abus de langage, l'application linéaire $y' \to y' \circ u$ de F' dans E' est appelée la *transposée* de l'application linéaire u , et notée ${}^t u$; elle est définie par l'identité en $x \in E$ et $y' \in F'$

$$\langle u(x), y' \rangle = \langle x, {}^t u(y') \rangle . \tag{1}$$

Si u et v sont deux applications linéaires continues de E dans F , on a ${}^t(u+v)={}^tu+{}^tv$, ${}^t(\lambda u)=\lambda\,.\,{}^tu$ pour tout λ appartenant au centre de K . Si G est un troisième espace vectoriel topologique sur K , u une application linéaire continue de E dans F , v une application linéaire continue de F dans G , on a ${}^t(v\circ u)={}^tu\circ{}^tv$.

PROPOSITION 11.- <u>Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties bornées dans</u> E , $\mathfrak{T}$ <u>un ensemble de parties bornées dans</u> F , <u>tels que pour toute application linéaire continue</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>et tout ensemble</u> $A\in\mathfrak{S}$, u(A) <u>appartienne à</u> $\mathfrak{T}$. <u>Dans ces conditions, si on munit</u> E' (resp. F') <u>de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de</u> $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$), <u>pour toute application linéaire continue</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F , ${}^tu$ <u>est une application linéaire continue de</u> F' <u>dans</u> E' .

En effet, il résulte de (1) que la relation $|\langle x, {}^tu(y')\rangle|\leqslant a$ pour tout $x\in A\in\mathfrak{S}$, est équivalente à $|\langle u(x),y'\rangle|\leqslant a$ pour tout $x\in A$, ou encore à $|\langle y,y'\rangle|\leqslant a$ pour tout $y\in u(A)$, d'où la proposition.

En particulier, on voit que u est une application continue du <u>dual faible</u> F'_f dans le <u>dual faible</u> E'_f .

PROPOSITION 12.- <u>Soit</u> u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F ; <u>si</u> u(E) <u>est partout dense dans</u> F , ${}^tu$ <u>est une application linéaire biunivoque de</u> F' <u>dans</u> E' .

En effet, d'après (1), la relation ${}^tu(y')=0$ entraîne $\langle u(x),y'\rangle=0$ pour <u>tout</u> $x\in E$, c'est-à-dire $\langle y,y'\rangle=0$ pour <u>tout</u> $y\in u(E)$; comme par hypothèse u(E) est partout dense dans F et que y' est continue, on a aussi $\langle y,y'\rangle=0$ pour tout $y\in F$, c'est-à-dire $y'=0$ par définition.

PROPOSITION 13.- <u>Soit</u> u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>sur</u> F . <u>Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties bornées de</u> E , $\mathfrak{T}$ <u>un ensemble de parties bornées de</u> F , <u>tel que pour tout</u> $A\in\mathfrak{S}$, u(A) <u>appartienne à</u> $\mathfrak{T}$.

Pour que ${}^t u$ *soit un isomorphisme de* F' *dans* E' *lorsqu'on munit* E' (resp. F') *de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$), *il faut et il suffit que pour tout* $B \in \mathfrak{T}$, *il existe un ensemble* $A \in \mathfrak{S}$ *tel que* $B \subset u(A)$.

En effet, ${}^t u$ est une application biunivoque de F' dans E' (prop.12), et d'après (1), la relation $|\langle x, {}^t u(y')\rangle| \leqslant \alpha$ pour tout $x \in A$ est équivalente à $|\langle y, y'\rangle| \leqslant \alpha$ pour tout $y \in u(A)$, d'où aussitôt la proposition.

PROPOSITION 14.- *Si les espaces* E, F *sont tels que* $E'^0 = \{0\}$, $F'^0 = \{0\}$, *pour qu'une application linéaire continue* u *de* E *dans* F *soit biunivoque, il faut et il suffit que* ${}^t u(F')$ *soit partout dense dans le dual faible* E'_f.

En effet, la relation (1) montre que la relation $\langle x, {}^t u(y')\rangle = 0$ pour tout $y' \in F'$ est équivalente à $\langle u(x), y'\rangle = 0$ pour tout $y' \in F'$, c'est-à-dire, d'après l'hypothèse sur F, à $u(x)=0$; autrement dit, si on pose $V = {}^t u(F')$, on a $V^0 = \overset{-1}{u}(0)$, d'où (th.1) $\overline{V} = (\overset{-1}{u}(0))^0$ dans E'_f ; si u est biunivoque, on a donc $\overline{V} = E'_f$, et réciproquement si $\overline{V} = E'_f$, $V^0 = (\overline{V})^0 = \{0\}$ d'après l'hypothèse sur E, donc u est biunivoque.

On notera que si F est l'espace quotient de E par un sous-espace vectoriel fermé V, φ l'application canonique de E sur F, et si on identifie F' au sous-espace V^0 de E', la transposée ${}^t\varphi$ n'est autre que l'application canonique de V^0 dans E' ; c'est un isomorphisme si on munit E' de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, $F' = V^0$ de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\varphi(\mathfrak{S})$ (prop.5).
