RÉDACTION N° 111

COTE : **NBR 020**

TITRE : **APPENDICES (ÉTAT 5) - SÉRIES FORMELLES**

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : **19**

NOMBRE DE FEUILLES : **19**

APPENDICE (Etat 5)

Séries formelles.

1. Définition des séries formelles.

Soit I un ensemble d'indices <u>fini</u> ; le monoïde (additif) produit $\mathbb{N}^I$ satisfait à la condition (D) du chap.II, § 7, n°10, c'est-à-dire que, pour tout élément (n_i) de $\mathbb{N}^I$, il n'y a qu'un nombre fini de couples $((p_i), (q_i))$ d'éléments de $\mathbb{N}^I$ tels que $(p_i)+(q_i)=(n_i)$; en effet, cette relation signifie que $p_i+q_i=n_i$ pour tout $i\in I$, et pour chaque $i\in I$, il n'y a que n_i couples d'entiers naturels (p_i,q_i) satisfaisant à cette condition, d'où la proposition, puisque I est fini.

Nous pouvons donc considérer l'<u>algèbre large</u> (chap.II, § 7, n°10) du monoïde $\mathbb{N}^I$, relative à un anneau commutatif A ayant un élément unité. Cette algèbre, qui est commutative, contient comme sous-algèbre (ayant même élément unité) l'algèbre des <u>polynomes</u> (à coefficients dans A) par rapport aux indéterminées X_i $(i\in I)$, qui est l'algèbre <u>stricte</u> du monoïde $\mathbb{N}^I$ relative à l'anneau A.

DÉFINITION 1.- <u>L'algèbre large du monoïde $\mathbb{N}^I$ relative à un anneau</u> A (commutatif et ayant un élément unité) <u>est appelée l'algèbre des séries formelles par rapport aux indéterminées</u> X_i $(i\in I)$, <u>à coefficients dans</u> A, <u>et se note</u> $A[[X_i]]_{i\in I}$. <u>Tout élément de cette algèbre est appelé série formelle par rapport aux indéterminées</u> X_i $(i\in I)$, <u>à coefficients dans</u> A.

Lorsque I est une partie finie de $\mathbb{N}$, on écrit $A[[X_{i_1},\dots,X_{i_p}]]$ au lieu de $A[[X_i]]_{i\in I}$, $(i_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ étant la suite des éléments de I rangés dans l'ordre croissant.

Comme il est d'usage pour les algèbres larges de monoïdes (chap.II, § 7, n°10), la série formelle $(\alpha_{(n_i)})_{(n_i)\in\mathbb{N}^I}$ se note $\sum_{(n_i)}\alpha_{(n_i)}\prod_i X_i^{n_i}$

(étant entendu qu'il ne s'agit pas d'une somme de polynomes au sens du chap.I) ; les éléments $\alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ sont appelés les <u>termes</u> de la série formelle, les $\alpha_{(n_i)}$ ses <u>coefficients</u> ; un polynome par rapport aux X_i $(i \in I)$ peut être caractérisé comme une série formelle n'ayant qu'un nombre <u>fini</u> de coefficients $\neq 0$.

Si I et I' sont deux ensembles finis de p éléments, φ une application biunivoque de I sur I' , l'application linéaire de $A[[X_i]]_{i \in I}$ dans $A[[X_j]]_{j \in I'}$ qui, à tout élément $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ de la première de ces algèbres, fait correspondre l'élément $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_{\varphi(i)}^{n_i}$ de la seconde, est un isomorphisme de la première algèbre sur la seconde. En particulier, les algèbres de séries formelles correspondant à tous les ensembles d'indices de p éléments, sont toutes isomorphes ; on les appelle <u>algèbres des séries formelles à p indéterminées</u>, à coefficients dans A .

D'après les définitions du chap.II, § 7, n°10, le produit de deux séries formelles de $A[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$

$$u = \sum \alpha_{n_1 n_2 \ldots n_p} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_p^{n_p}$$

$$v = \sum \beta_{n_1 n_2 \ldots n_p} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_p^{n_p}$$

est la série formelle

$$w = \sum \gamma_{n_1 n_2 \ldots n_p} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_p^{n_p}$$

où

$$\alpha_{n_1 n_2 \ldots n_p} = \sum \alpha_{h_1 h_2 \ldots h_p} \beta_{k_1 k_2 \ldots k_p}$$

la somme étant étendue aux couples $((h_i), (k_i))$ tels que $h_i + k_i = n_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

Soit J une partie non vide de I ; l'algèbre $A[[X_i]]_{i\in J}$ peut être identifiée à la sous-algèbre de $A[[X_i]]_{i\in I}$, formée des séries formelles $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$, où $\alpha_{(n_i)}=0$ pour tout élément $(n_i)\in \mathbb{N}^I$ tel que $n_i\neq 0$ pour un indice $i\in \complement J$ au moins. En outre, si B est cette sous-algèbre, et K le complémentaire de J par rapport à I (supposé non vide), on définit un <u>isomorphisme</u> de $A[[X_i]]_{i\in I}$, considéré comme algèbre par rapport à B, sur l'algèbre $B[[X_i]]_{i\in K}$ des séries formelles par rapport aux X_i d'indices $i\in K$, à coefficients dans B, de la façon suivante : à la série formelle $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_{i\in I} X_i^{n_i}$, on fait correspondre la série formelle $\sum \beta_{(m_k)} \prod_{k\in K} X_k^{m_k}$, où $\beta_{(m_k)} = \sum \gamma_{(p_j)} \prod_{j\in J} X_j^{p_j}$, avec $\gamma_{(p_j)} = \alpha_{(n_i)}$ pour la suite (n_i) telle que $n_i=p_i$ pour $i\in J$ et $n_i=m_i$ pour $i\in K$.

Enfin, soit φ une représentation de A dans un anneau B. On définit une représentation $\bar{\varphi}$ de l'anneau $A[[X_i]]_{i\in I}$ dans l'anneau $B[[X_i]]_{i\in I}$, qui prolonge φ, en faisant correspondre à toute série formelle $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$, la série formelle $\sum \varphi(\alpha_{(n_i)}) \prod_i X_i^{n_i}$; on dit que cette dernière est obtenue en appliquant φ aux coefficients de la série formelle $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$.

En particulier, si A' est un sous-anneau de A, ayant même élément unité, l'application identique de A' dans A se prolonge ainsi en l'application identique du sous-anneau $A'[[X_i]]_{i\in I}$ dans l'anneau $A[[X_i]]_{i\in I}$; par restriction à A' de l'anneau d'opérateurs de l'algèbre $A[[X_i]]_{i\in I}$, cette algèbre peut être considérée comme algèbre sur A' ; $A'[[X_i]]_{i\in I}$ est alors une <u>sous-algèbre</u> de $A[[X_i]]_{i\in I}$.

<u>2. Ordre d'une série formelle.</u>

Etant donnée une série formelle $u = \sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$, on appelle encore termes de <u>degré total</u> p dans u les termes $\alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ tels que

$\sum_{i\in I} n_i = p$. La somme des termes de degré total p dans u est un *polynome* homogène u_p de degré p , qu'on appelle encore la *partie homogène de degré* p de u (u_o étant aussi appelé le *terme constant* de u). Si u et v sont deux séries formelles, et w=uv , on a

$$w_p = \sum_{r=0}^{p} u_r v_{p-r}$$

pour tout entier $p \geqslant 0$.

Pour toute série formelle $u \neq 0$, on appelle *ordre total* (ou simplement *ordre*) de u le *plus petit* des entiers $p \geqslant 0$ tels que la partie homogène de degré p de u soit $\neq 0$. Si on désigne cet ordre par $\omega(u)$, et si u et v sont deux séries formelles $\neq 0$, on a

(1) $\qquad \omega(u+v) \geqslant \mathrm{Min}(\omega(u),\omega(v)) \quad$ si $u+v \neq 0$

(2) $\qquad \omega(uv) \geqslant \omega(u)+\omega(v) \quad$ si $uv \neq 0$.

En outre, si $\omega(u) \neq \omega(v)$, on a $u+v \neq 0$, et les deux membres de (1) sont égaux.

> La notion d'ordre s'applique en particulier aux *polynomes* par rapport aux X_i $(i \in I)$; on aura soin de ne pas la confondre avec celle de *degré* (§ 1, n°3). L'ordre de 0 *n'est pas défini*.

Si J est une partie non vide de I, distincte de I , nous avons vu qu'on peut considérer toute série formelle u de $A[[X_i]]_{i\in I}$ comme une série formelle par rapport aux X_i d'indice $i \in J$, à coefficients dans l'anneau $B=A[[X_i]]_{i\in K}$ (où $K = \complement J$) ; aux définitions ci-dessus correspondent donc de nouvelles définitions pour les séries formelles $u \in A[[X_i]]_{i\in I}$: un terme $c_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ est *de degré* p *par rapport aux* X_i *d'indice* $i \in J$ si on a $\sum_{i\in J} n_i = p$; la somme des termes de u de degré p par rapport aux X_i d'indice $i \in J$ est un polynome homogène de degré p par rapport à ces indéterminées, appelé *partie homogène de degré* p *par rapport aux* X_i *d'indice* $i \in J$, de la série u (ou encore, pour $p=0$, <u>terme constant par rapport aux</u> X_i <u>d'indice</u> $i \in J$); si $u \neq 0$, l'<u>ordre</u> $\omega_J(u)$ de u par rapport aux X_i d'indice $i \in J$ est le plus petit des entiers $p \geqslant 0$ tels que la partie homogène de degré p par rapport à ces indéterminées soit $\neq 0$; on a encore les inégalités (1) et (2) quand on y remplace ω par ω_J.

<u>3. Séries formelles sur un anneau d'intégrité</u>.

THEOREME 1.- <u>Si</u> A <u>est un anneau d'intégrité</u> (ayant un élément unité), <u>tout anneau de séries formelles</u> $A[[X_i]]_{i \in I}$ <u>sur</u> A <u>est un anneau d'intégrité.</u>

En effet, si u et v sont deux séries formelles $\neq 0$, la partie homogène f (resp. g) de degré $\omega(u)$ (resp. $\omega(v)$) de u (resp. v) est un polynome $\neq 0$; la partie homogène de degré $\omega(u)+\omega(v)$ de uv est le polynome fg, qui n'est pas nul (§ 1, th. 1), donc $uv \neq 0$.

COROLLAIRE.-<u>Si</u> A <u>est un anneau d'intégrité</u>, u <u>et</u> v <u>deux séries formelles</u> $\neq 0$ <u>de l'anneau</u> $A[[X_i]]_{i \in I}$, <u>on a</u>

(3) $$\omega(uv) = \omega(u) + \omega(v) .$$

On en déduit aussitôt que, pour toute partie non vide J de I

(4) $$\omega_J(uv) = \omega_J(u) + \omega_J(v) .$$

<u>4. Sommes infinies de séries formelles</u>.

Soient A un anneau commutatif ayant un élément unité, L un ensemble <u>dénombrable</u> d'indices, et $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de séries formelles de $A[[X_i]]_{i \in I}$, dont l'ensemble d'indices est L. Supposons que l'ordre $\omega(u_\lambda)$ <u>tende vers</u> $+\infty$ <u>suivant le filtre des complémentaires des parties finies de</u> L, c'est-à-dire (<u>Top. gén.</u>, chap. IV, § 4) que pour tout entier m, il existe une partie finie J de L telle que, pour tout $\lambda \notin J$, on ait $u_\lambda = 0$ ou $\omega(u_\lambda) \geqslant m$. Dans ces conditions, pour tout $(n_i) \in \mathbb{N}^I$, il n'y a qu'un nombre <u>fini</u> d'indices λ tels que le coefficient de $\prod_i X_i^{n_i}$ dans u_λ soit $\neq 0$, puisque cela ne peut avoir lieu que pour $\omega(u_\lambda) \leqslant \sum_i n_i$. On peut donc définir une série formelle s par la condition que pour tout (n_i) le coefficient de $X_i^{n_i}$ dans s est la <u>somme</u> de tous les coefficients de $\prod_i X_i^{n_i}$ dans les u_λ (cette somme n'ayant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$). On dit que la famille (u_λ) est <u>sommable</u> et que la série formelle s est la <u>somme</u> de cette famille, et on écrit $s = \sum_{\lambda \in L} u_\lambda$; lorsque L est une partie de $\mathbb{N}$, on écrit aussi $s = u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots + u_{k_n} + \ldots$, (k_n) étant la suite des éléments de L rangés dans l'ordre croissant. Il résulte de la définition que, si $s \neq 0$ on a

$$\omega\left(\sum_{\lambda \in L} u_\lambda\right) \geqslant \operatorname*{Min}_{\lambda \in L} \omega(u_\lambda) . \tag{5}$$

Cette définition justifie l'écriture $\sum_{(n_i)} \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ pour une série formelle : celle-ci est en effet, d'après ce qui précède, la somme de la famille dénombrable des polynomes $\alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ (l'ensemble d'indices L étant ici $\mathbb{N}^I$). De même, si u_n $(n \in \mathbb{N})$ est la partie homogène de degré n d'une série formelle u , la famille (u_n) est sommable, et on a $u = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$.

PROPOSITION 1.- <u>Soient L un ensemble dénombrable d'indices, et $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille sommable de séries formelles de</u> $A[[X_i]]_{i \in I}$. <u>Pour toute partition</u> $(L_\mu)_{\mu \in M}$ <u>de</u> L , <u>chacune des sous-familles</u> $(u_\lambda)_{\lambda \in L_\mu}$ <u>est sommable</u> ; <u>si</u> s_μ <u>est la somme de cette famille, la famille</u> $(s_\mu)_{\mu \in M}$ <u>de séries formelles est sommable et a même somme que la famille</u> $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$.

La première partie de la proposition est une conséquence immédiate de la définition d'une famille sommable. En outre, pour tout $(n_i) \in \mathbb{N}^I$, soit H la partie finie de L formée des λ tels que le coefficient de $\prod_i X_i^{n_i}$ dans u_λ soit $\neq 0$, et soit J la partie finie de M formée des indices μ tels que L_μ contienne au moins un élément de H ;

il est clair que le coefficient de $\prod_i X_i^{n_i}$ dans s_μ est nul pour $\mu \notin J$ et que le coefficient de $\prod_i X_i^{n_i}$ dans $\sum_{\lambda \in L} u_\lambda$ est le même que dans $\sum_{\mu \in J} s_\mu$, d'où la proposition.

PROPOSITION 2.- <u>Si</u> $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ <u>et</u> $(v_\mu)_{\mu \in M}$ <u>sont deux familles sommables de séries formelles de</u> $A[[X_i]]_{i \in I}$, <u>la famille</u> $(u_\lambda v_\mu)_{(\lambda,\mu) \in L \times M}$ <u>est sommable et on a</u>

(6)
$$\sum_{(\lambda,\mu) \in L \times M} u_\lambda v_\mu = \left(\sum_{\lambda \in L} u_\lambda\right)\left(\sum_{\mu \in M} v_\mu\right).$$

En effet, si, pour tout entier m, il existe une partie finie H de L et une partie finie J de M telles que, pour tout $\lambda \notin H$ et tout $\mu \notin M$, on ait $\omega(u_\lambda) \geqslant m$ et $\omega(v_\mu) \geqslant m$, on aura aussi $\omega(u_\lambda v_\mu) \geqslant m$ pour tout $(\lambda, \mu) \notin H \times J$, d'après l'inégalité (2). D'après la prop. 1, on a alors

$$\sum_{(\lambda,\mu) \in L \times M} u_\lambda v_\mu = \sum_{\lambda \in L}\left(\sum_{\mu \in M} u_\lambda v_\mu\right) = \sum_{\lambda \in L} u_\lambda\left(\sum_{\mu \in M} v_\mu\right) = \left(\sum_{\lambda \in L} u_\lambda\right)\left(\sum_{\mu \in M} v_\mu\right).$$

<u>5. Substitution de séries formelles dans une série formelle.</u>

Les définitions du § 2, n°1 permettent en particulier de définir $f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ lorsque f est un <u>polynome</u> de $A[X_1, \ldots, X_p]$, et les u_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ des séries formelles appartenant à un anneau $A[[Y_1, Y_2, \ldots, Y_q]]$; $f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est encore une série formelle appartenant au même anneau. Nous allons voir qu'on peut étendre cette définition, moyennant certaines restrictions sur les séries formelles u_i, au cas où f est une <u>série formelle</u> appartenant à l'anneau $A[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$.

Soit donc $f = \sum a_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ une série formelle par rapport aux p indéterminées X_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, et supposons que les p séries u_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ aient toutes un <u>ordre strictement positif</u> (ou, comme on dit encore, <u>n'aient pas de terme constant</u>). D'après la formule (2), l'ordre de la

$u_1^{n_1}u_2^{n_2}\dots u_p^{n_p}$ est $\geqslant n_1+n_2+\dots+n_p$; donc la famille $(a_{n_1n_2\dots n_p}u_1^{n_1}\dots u_p^{n_p})_{(n_i)\in \mathbb{N}^I}$ est *sommable*. Par définition, sa *somme* se note $f(u_1,u_2,\dots,u_p)$, et on dit que cette série formelle est obtenue *en substituant, dans la série* f , *la série* u_i *à l'indéterminée* X_i *pour* $1\leqslant i\leqslant p$.

On notera que cette définition permet en particulier d'écrire $f=f(X_1,X_2,\dots,X_p)$.

PROPOSITION 3.- *Soient* u_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ p *séries formelles sans terme constant, appartenant à* $A[[Y_1,Y_2,\dots,Y_q]]$; *l'application* $f\to f(u_1,u_2,\dots,u_p)$ *de l'algèbre* $A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$ *dans l'algèbre* $A[[Y_1,Y_2,\dots,Y_q]]$ *est une représentation.*

Tout revient à prouver que, si f et g sont deux séries formelles par rapport aux X_i , et si $h=fg$, on a

$$h(u_1,u_2,\dots,u_p)=f(u_1,u_2,\dots,u_p)g(u_1,u_2,\dots,u_p)$$

ce qui est une conséquence des prop.1 et 2 , et de la définition du produit de deux séries formelles.

6. Séries formelles inversibles.

PROPOSITION 4.- *Pour qu'une série formelle* u *de l'anneau* $A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$ *soit inversible dans cet anneau, il faut et il suffit que son terme constant soit inversible dans* A .

La condition est nécessaire, car si v est une série formelle de $A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$ telle que $uv=1$, α_0 et β_0 les termes constants de u et de v , on a $\alpha_0\beta_0=1$. Inversement, soit u une série formelle dont le terme constant α_0 soit inversible ; on peut écrire $u=\alpha_0-v=\alpha_0(1-\alpha_0^{-1}v)$, où v est une série sans terme constant ; d'après la prop.3 , la prop.4 est une conséquence de la suivante, dont la vérification est immédiate :

PROPOSITION 5.- <u>Dans l'anneau</u> $A[[T]]$ <u>des séries formelles à une indéterminée, le polynome</u> $1-T$ <u>est inversible, et on a</u>

$$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \quad (7)$$

Avec les notations de la prop.4 , l'inverse de u est donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_0^{-(n+1)} v^n$.

En particulier, il résulte de la prop.4 que si un <u>polynome</u> u de $A[X_1,X_2,\ldots,X_p]$ a un terme constant inversible dans A , il admet un inverse dans l'anneau de séries formelles $A[[X_1,X_2,\ldots,X_p]]$.

Soit K un corps commutatif, et considérons dans le corps $K(X_1,X_2,\ldots,X_p)$ des fractions rationnelles à p indéterminées sur K l'ensemble des fractions rationnelles u/v , où u est un polynome quelconque, v un polynome dont le terme constant est $\neq 0$; il est immédiat que cet ensemble est un <u>sous-anneau</u> (mais non un sous-corps) de $K(X_1,X_2,\ldots,X_p)$, et que l'application $\frac{u}{v} \to uv^{-1}$ est un <u>isomorphisme</u> de cet anneau dans l'anneau de séries formelles $K[[X_1,X_2,\ldots,X_p]]$; on dit que la série formelle uv^{-1} est le <u>développement</u> de la fraction rationnelle u/v , et on l'identifie le plus souvent à cette dernière.

<u>7. Corps des fractions de l'anneau des séries formelles à une indéterminée sur un corps</u>.

Si K est un corps commutatif, on désigne par $K((X_1,X_2,\ldots,X_p))$ le <u>corps des fractions</u> de l'anneau d'intégrité $K[[X_1,X_2,\ldots,X_p]]$. Nous allons voir que les éléments du corps des fractions $K((X))$ de l'anneau de s séries formelles à <u>une</u> indéterminée sur K , peuvent se mettre sous une forme particulièrement simple.

Toute série formelle u d'ordre h dans $K[[X]]$ peut s'écrire d'une seule manière $u=X^h v$, où v est une série formelle d'ordre 0, donc (prop.4) <u>inversible</u> dans l'anneau $K[[X]]$. Désignons par X^{-1} l'inverse, dans le corps $K((X))$, de l'élément $X\neq 0$ de ce corps, et posons comme à l'ordinaire $X^{-h}=(X^{-1})^h=(X^h)^{-1}$ pour tout entier $h \geqslant 0$; nous allons voir que tout élément $\neq 0$ du corps de fractions $K((X))$ peut s'écrire <u>d'une seule manière</u> sous la forme $X^k w$ où w est une série formelle d'ordre 0, et k un entier rationnel (positif ou négatif). En effet, le quotient $(X^m u)/(X^n v)$ de deux séries formelles de $K[[X]]$ ($m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, u et v séries d'ordre 0) s'écrit $X^{m-n}uv^{-1}$; d'autre part, si $X^r w_1 = X^s w_2$, où w_1 et w_2 sont d'ordre 0 , on a nécessairement $r=s$, car si on avait par exemple $r > s$, on en déduirait $X^{r-s} = w_2 w_1^{-1}$, et le second membre est d'ordre 0 , ce qui est absurde. Pour tout élément u de $K((X))$, mis sous la forme $u = X^k w = X^k(\alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots)$, avec $\alpha_0 \neq 0$, on écrit encore $u = \alpha_0 X^k + \alpha_1 X^{k+1} + \ldots + \alpha_n X^{k+n} + \ldots$; on dit que les éléments de $K((X))$ sont des <u>séries formelles généralisées</u> par rapport à X , à coefficients dans K , ou simplement des <u>séries formelles</u> si aucune confusion n'en résulte (les éléments de $K[[X]]$ sont alors appelés <u>séries formelles à exposants positifs</u>) ; l'entier rationnel k (qui n'est autre que l'ordre de u lorsqu'il est $\geqslant 0$) est encore appelé l'<u>ordre</u> de u et noté $\omega(u)$ lorsqu'il est < 0 ; on vérifie immédiatement que les relations (1) et (3) sont encore valables pour les séries formelles généralisées. En particulier, si $u \neq 0$, on a $\omega(u^{-1}) = -\omega(u)$.

L'anneau $K[X]$ des polynomes par rapport à X étant un sous-anneau de $K[[X]]$, <u>toute</u> fraction rationnelle u/v (u et v polynomes, $v \neq 0$) peut être identifiée à la série formelle (généralisée) uv^{-1} de $K((X))$, qu'on appelle son <u>développement</u> ; le corps $K(X)$ des fractions rationnelles à une indéterminée est ainsi identifié à un <u>sous-corps</u> de $K((X))$.

2 Ces résultats <u>ne s'étendent pas</u> aux corps de fractions des séries formelles à plus d'une indéterminée : si u est une série formelle de $K[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$ $(p > 1)$, il n'existe pas toujours une série formelle $v \in K[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$ et un entier $m \geqslant 0$ tels que l'on ait

$$(X_1 X_2 \ldots X_p)^{-m} uv = 1$$

(cf. exerc. 7).

8. Dérivations dans l'algèbre des séries formelles.

PROPOSITION 6.- Soient A un anneau commutatif ayant un élément unité, B un sous-anneau de A ayant même élément unité que A . Toute dérivation D de l'anneau de polynomes $A[X_1, X_2, \ldots, X_p]$ (considéré comme algèbre sur B), à valeurs dans l'anneau de séries formelles $A[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$ se prolonge d'une manière et d'une seule en une dérivation $\overline{D}$ de $A[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$ (considéré comme algèbre sur B).

En effet, pour tout $(n_i) \in N^I$, on peut écrire

$$D\left(\prod_i X_i^{n_i}\right) = \sum_{i=1}^{p} n_i X_1^{n_1} \ldots X_{i-1}^{n_{i-1}} X_i^{n_i-1} X_{i+1}^{n_{i+1}} \ldots X_p^{n_p} . DX_i$$

d'où aussitôt le lemme suivant :

Lemme.- Pour tout polynome $u \in A[X_1, X_2, \ldots, X_p]$, on a $\omega(Du) \geqslant \omega(u)-1$ si $Du \neq 0$.

Soit alors $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série formelle quelconque de l'anneau $A[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$, u_n désignant la partie homogène de degré n de u ; d'après le lemme, on a $\omega(Du_n) \geqslant n-1$ si $Du_n \neq 0$; la famille $(Du_n)_{n \in N}$ est donc sommable ; montrons que si on pose $\overline{D}u = \sum_{n=0}^{\infty} Du_n$, $\overline{D}$ est une dérivation de $A[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$ qui prolonge D . Il suffit de prouver que $\overline{D}(uv) = \overline{D}u.v + u.\overline{D}v$ pour deux séries formelles quelconques u et v , ce qui résulte aussitôt de la prop.2 et de l'expression de la partie homogène de degré n de uv en fonction des parties homogènes de degré $\leqslant n$ de u et de v .

Reste à voir que $\overline{D}$ est la seule dérivation de $A[[X_1, \ldots, X_p]]$ qui prolonge D , ou encore que, si une dérivation D_0 de l'algèbre $A[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$ est nulle pour tout polynome, elle est identiquement nulle. Or, soit u une série formelle quelconque, w_r le polynome somme des parties homogènes de u de degré $\leqslant r$; la série formelle $u - w_r$ peut s'écrire $\sum v_{n_1 n_2 \ldots n_p} X_1^{n_1} \ldots X_p^{n_p}$, où (n_i) parcourt la partie finie de N^I formée des éléments tels que $\sum_{i=1}^{p} n_i = r$, et où les $v_{n_1 n_2 \ldots n_p}$ sont des

des séries formelles ; d'après le lemme, $D_0(u-w_r)$ est nulle ou a un ordre $\geqslant r-1$. D'autre part, on a, d'après l'hypothèse, $D_0(u)=D_0(u-w_r)$; si on avait $D_0u\neq 0$, l'ordre de D_0u serait $\geqslant r-1$ pour <u>tout</u> entier r , ce qui est absurde.

En particulier, chacune des <u>dérivations partielles</u> D_i (où $1\leqslant i\leqslant p$) de $A[X_1,X_2,\dots,X_p]$ se prolonge en une dérivation de l'anneau $E=A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$, que nous noterons encore D_i ou $\frac{\partial}{\partial X_i}$. On a donc

$$D_i(\sum a_{n_1n_2\dots n_p}X_1^{n_1}\dots X_p^{n_p})=\sum n_i a_{n_1n_2\dots n_p}X_1^{n_1}\dots X_i^{n_i-1}\dots X_p^{n_p} .$$

D'après la prop.6 ci-dessus, et la prop.8 du §4, on a $D_iD_j=D_jD_i$ quels que soient i et j .

PROPOSITION 7.- <u>Les</u> p <u>dérivations partielles</u> D_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ <u>forment une base du</u> E-<u>module</u> $\mathcal{D}(E)$ <u>des dérivations de l'anneau</u> E , <u>considéré comme algèbre sur</u> A .

En effet, si D est une dérivation quelconque de l'algèbre E , et si $D(X_i)=u_i$ $(u_i\in E)$, $D-\sum_{i=1}^{p}u_iD_i$ est une dérivation de E , qui est nulle pour les éléments de A (par hypothèse) et pour tous les X_i , donc aussi (§ 4,prop.7) pour tout polynome, et enfin (prop.6) pour tout élément de E .

On déduit de là que les p différentielles dX_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ forment une <u>base</u> (duale de la base (D_i)) du module $\mathcal{D}^*(E)$ des <u>formes différentielles</u> sur E (§ 4,n°5) ; la différentielle totale d'une série formelle quelconque u est donc donnée par la formule

$$\text{(8)}\qquad du=\sum_{i=1}^{p}D_iu.dX_i=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial u}{\partial X_i}\,dX_i .$$

La série formelle $u(X_1+Y_1,X_2+Y_2,\dots,X_p+Y_p)$, qui est un élément bien défini de l'anneau $A[[X_1,X_2,\dots,X_p,Y_1,Y_2,\dots,Y_p]]$ (n°5), peut aussi être considéré comme élément de l'anneau de séries formelles

$E_p\left[\left[Y_1,Y_2,\ldots,Y_p\right]\right]$ (n°1) ; on vérifie aisément que le polynome $\sum_{i=1}^{p} D_i u.Y_i$ n'est autre que la <u>partie homogène du premier degré</u> par rapport aux Y_i de $u(X_1+Y_1,\ldots,X_p+Y_p)$, ou, ce qui revient au même, de la série $\Delta u=u(X_1+Y_1,\ldots,X_p+Y_p)-u(X_1,\ldots,X_p)$.

En raison de ce résultat, et de la formule (8), le polynome $\sum_{i=1}^{p} D_i u.Y_i$ par rapport aux Y_i se note souvent $du(X_1,\ldots,X_p;Y_1,\ldots,Y_p)$.

PROPOSITION 8.- <u>Soient</u> f <u>une série formelle de l'anneau</u> $A\left[\left[X_1,X_2,\ldots,X_p\right]\right]$, u_i $(1\leq i\leq p)$ p <u>séries formelles sans terme constant de l'anneau</u> $A\left[\left[Z_1,Z_2,\ldots,Z_q\right]\right]$; <u>si on pose</u> $h=f(u_1,u_2,\ldots,u_p)$, <u>on a</u>

$$dh = \sum_{i=1}^{p} D_i f(u_1,u_2,\ldots,u_p).du_i \;. \tag{9}$$

En effet, si on pose $\Delta u_i=u_i(Z_1+T_1,\ldots,Z_q+T_q)-u_i(Z_1,\ldots,Z_q)$, la partie homogène du premier degré de la série formelle (par rapport aux T_j) $\Delta h=f(u_1+\Delta u_1,\ldots,u_p+\Delta u_p)-f(u_1,u_2,\ldots,u_p)$, est identique à celle de la série $df(u_1,\ldots,u_p\,;\,\Delta u_1,\ldots,\Delta u_p)$, puisque les Δu_i n'ont pas de terme constant ; d'où aussitôt la proposition.

PROPOSITION 9.- <u>Soit</u> u <u>une série formelle de l'anneau</u> $A\left[\left[X_1,\ldots,X_p\right]\right]$; <u>si on pose</u>

$$u(X_1+Y_1,\ldots,X_p+Y_p)=\sum g_{n_1n_2\ldots n_p}(X_1,\ldots,X_p)Y_1^{n_1}Y_2^{n_2}\ldots Y_p^{n_p}$$

<u>on a</u>

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\partial}{\partial X_2}\right)^{n_2}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial X_p}\right)^{n_p}u(X_1,X_2,\ldots,X_p)=n_1!\,n_2!\ldots n_p!\,g_{n_1\ldots n_p}(X_1,\ldots,X_p) \tag{10}$$

("formule de Taylor").

En effet, il résulte aussitôt des définitions que le terme constant de la série formelle par rapport aux Y_i

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\partial}{\partial Y_2}\right)^{n_2}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial Y_p}\right)^{n_p}u(X_1+Y_1,\ldots,X_p+Y_p) \tag{11}$$

est $n_1!\,n_2!\ldots n_p!\,g_{n_1n_2\ldots n_p}(X_1,X_2,\ldots,X_p)$. Or, d'après la prop.8 , la série (11) s'obtient en substituant X_i+Y_i à X_i (pour $1\leq i\leq n$) dans la série formelle $\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\partial}{\partial X_2}\right)^{n_2}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial X_p}\right)^{n_p}u(X_1,X_2,\ldots,X_p)$; d'où la proposition.

9. Résolution des équations dans un anneau de séries formelles.

PROPOSITION 10.- *Soient* $f_i(Y_1,Y_2,\dots,Y_q,X_1,X_2,\dots,X_p)$ $(1\leqslant i\leqslant q)$ q *séries formelles sans termes constant de l'anneau* $A[[Y_1,Y_2,\dots,Y_q,X_1,\dots,X_p]]$. *Si le terme constant par rapport aux* Y_i *de la série formelle* $\Delta=\det(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j})$ *est inversible dans l'anneau* $A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$, *il existe un système et un seul de* q *séries formelles sans terme constant* $u_i(X_1,\dots,X_p)$ *dans cet anneau, tel que*

(12) $$f_i(u_1,u_2,\dots,u_q,X_1,X_2,\dots,X_p)=0$$

pour $1\leqslant i\leqslant q$.

En effet, posons
$$f_i=f_{i0}+\sum_{j=1}^{q} f_{ij}Y_j+\sum_{(n_j)} f_{i;n_1\dots n_q}Y_1^{n_1}\dots Y_q^{n_q}$$
où, dans la seconde somme, tous les termes ont un degré $(1\leqslant i\leqslant q)$ $\geqslant 2$ par rapport aux Y_j, et où f_{i0}, les f_{ij} et les $f_{i;n_1\dots n_q}$ sont des éléments de $E=A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$, f_{i0} n'ayant pas de terme constant. Par hypothèse, la matrice $\underline{F}=(f_{ij})$ est inversible (chap.III, § 6, th.2), soit $\underline{G}=(g_{ij})$ son inverse ; si on pose $g_i=\sum_{j=1}^{q} g_{ij}f_j$, on aura
$$g_i=-h_{i0}+Y_i-\sum_{(n_j)} h_{i;n_1\dots n_q}Y_1^{n_1}\dots Y_q^{n_q}\qquad(1\leqslant i\leqslant q)$$
où h_{i0} et les $h_{i;n_1\dots n_q}$ sont des éléments de E, h_{i0} n'ayant pas de terme constant. Comme $f_i=\sum_{j=1}^{q} f_{ij}g_j$, on peut se borner à démontrer la proposition pour les séries g_i. Supposons le problème résolu ; on a alors

(13) $$u_i=h_{i0}+\sum_{(n_j)} h_{i;n_1\dots n_q}u_1^{n_1}\dots u_q^{n_q}\qquad(1\leqslant i\leqslant q)$$

Soit u_{im} la partie homogène de degré m de u_i, et $v_{im}=\sum_{k=1}^{m} u_{ik}$ la somme des termes de degré total $\leqslant m$ dans u_i ; dans la série $h_{i.n_1\dots n_q}u_1^{n_1}\dots u_q^{n_q}$, où $\sum_{j=1}^{q} n_j\geqslant 2$, la partie homogène de degré m est la même que dans $h_{i;n_1\dots n_q}v_{1,m-1}^{n_1}\dots v_{q,m-1}^{n_q}$; puisque les u_i sont des séries sans terme constant ; il résulte donc de (13) que $u_{i1}=v_{i1}$ est égal à la partie homogène du premier degré de h_{i0} et que, pour tout $m>1$, u_{im} est déterminé par récurrence comme égal à la partie homogène de degré m de la série

$$h_{10}+\sum_{(n_j)} h_{i;n_1\ldots n_q} v_{1,m-1}^{n_1}\ldots v_{q,m-1}^{n_q} .$$

Ceci démontre à la fois l'unicité et l'existence des u_i , car il est clair que si les u_{im} sont déterminés par récurrence comme il vient d'être dit, les $u_i = \sum_{m=1}^{\infty} u_{im}$ satisfont au système d'équations (13).

10. Interprétations topologiques.

La plupart des résultats de cet Appendice s'expriment de façon plus suggestive dans le langage de la Topologie. Considérons un anneau de séries formelles $E=A[[X_1,X_2,\ldots,X_p]]$, et, pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $\mathfrak{a}_n$ l'ensemble des séries $u\in E$ nulles ou d'ordre $\omega(u) \geqslant n$; les relations (1) et (2) montrent que $\mathfrak{a}_n$ est un idéal dans E ; comme $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_m$ pour $m \leqslant n$, ces idéaux forment une base de filtre, dont l'intersection se réduit à 0 ; ils forment par suite un système fondamental de voisinages de 0 dans une topologie sur E qui est compatible avec la structure de groupe additif de E (Top.gén.,chap.III, §1,n°2) et aussi, comme on le vérifie aussitôt, avec la structure d'anneau de E (les axiomes (AV_I) et (AV_{II}) de Top.gén.,chap.III, §5,n°1 étant trivialement vérifiés). Comme 0 admet un système fondamental dénombrable de voisinages, l'anneau topologique E ainsi défini est métrisable (Top.gén.,chap.IX, §3,prop.1). Il est en outre complet, car si (u_n) est une suite de Cauchy dans E , pour tout entier q il existe un entier $n_o(q)$ tel que, pour $m \geqslant n_o$ et $n \geqslant n_o$, $u_m - u_n$ soit nul ou ait un ordre $> q$; en d'autres termes, les termes de degré $\leqslant q$ sont les mêmes dans toutes les séries formelles u_n telles que $n \geqslant n_o(q)$; si u est la série formelle dont la partie homogène de degré q est la partie homogène de degré q de toutes les séries u_n telles que $n \geqslant n_o(q)$ (pour tout $q \geqslant 0$) , il est clair que u est la limite de la suite (u_n) .

L'anneau de polynomes $A[X_1, X_2, .., X_p]$ est <u>partout dense</u> dans E, qui peut donc être considéré comme son <u>complété</u>. La notion de famille sommable définie dans E au n°4 est, dans l'anneau topologique E, identique à la notion de famille sommable définie dans un groupe abélien topologique quelconque (<u>Top.gén.</u>, chap.III, 4) et la prop.1 est un cas particulier de l'<u>associativité</u> de la somme (<u>loc.cit.</u>, th.2). Le lemme de la prop.6 montre que toute dérivation de $A[X_1, X_2, ..., X_p]$ à valeurs dans E est <u>uniformément continue</u>, et on retrouve ainsi la prop.6 par voie topologique (cf. <u>Top.géné.</u>, chap.II, §3, th.1).

<u>Exercices</u>.- 1) Soit I un ensemble d'indices quelconque ; montrer que le monoïde additif $N^{(I)}$ (§1, n°1) satisfait à la condition (D) du chap.II, §7, n°10 ; l'<u>algèbre large</u> de ce monoïde par rapport à un anneau commutatif A ayant un élément unité, se note $A[[X_\iota]]_{\iota \in I}$ et s'appelle encore l'algèbre des <u>séries formelles</u> à coefficients dans A, par rapport aux indéterminées X_ι. L'ordre d'une série formelle $\neq 0$ étant encore défini comme le plus petit des degrés totaux de ses termes $\neq 0$, montrer que si A est un anneau d'intégrité, $A[[X_\iota]]_{\iota \in I}$ est un anneau d'intégrité, et que la relation (3) est vérifiée.

2) Soit K un corps commutatif, $f=u/v$ une fraction rationnelle de $K(X_1, X_2, ..., X_p)$ telle que $v(0,0,..,0)\neq 0$. Montrer que $(0,0,..,0)$ est substituable dans toute dérivée $D_1^{n_1}..D_p^{n_p}f$ et que, si $\sum \alpha_{n_1..n_p} X_1^{n_1}...X_p^{n_p}$ est le développement de f en série formelle, on a

$$D_1^{n_1}D_2^{n_2}..D_p^{n_p} f(0,0,...,0) = n_1!n_2!..n_p!\alpha_{n_1 n_2 .. n_p}$$

("formule de Taylor"). En déduire le développement en série formelle de la fraction rationnelle $1/(1-X)^p$.

3) Pour qu'une série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ sur un corps K soit le développement d'une fraction rationnelle de K(X), il faut et il suffit qu'il existe une suite finie $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, d'éléments de K non tous nuls, et un entier n_0 tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$\lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_{n+2} + \ldots + \lambda_p a_{n+p} = 0 .$$

4) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des entiers >0 ; on désigne par a_n le nombre des suites finies $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ d'entiers $\geqslant 0$ satisfaisant à l'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_p x_p = n .$$

Montrer que la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ (sur le corps $\mathbb{Q}$) est le développement de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-X^{a_1})(1-X^{a_2})\ldots(1-X^{a_p})}$$

5) Soit F un ensemble fini d'entiers >0, et soit β_n le nombre des suites finies (x_i) de n termes au plus, dont tous les termes appartiennent à F, et qui sont telles que $\sum_i x_i = n$. Montrer que la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n X^n$ sur $\mathbb{Q}$ est le développement de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{1-X^{a_1} - X^{a_2} - \ldots - X^{a_p}}$$

où $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ désigne la suite des éléments de F, rangés dans l'ordre croissant.

6) Si K est un corps commutatif, montrer que dans l'anneau de séries formelles $K[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$ il n'y a qu'un seul idéal maximal, identique à l'ensemble des éléments non inversibles. Montrer que dans l'anneau de polynomes $K[X_1, X_2, \ldots, X_p]$ il existe au contraire plusieurs idéaux maximaux distincts.

7) Soit K un corps commutatif ; montrer qu'il n'existe pas de série formelle $u(X,Y) \in K[[X,Y]]$ telle que, pour un entier $m > 0$, on ait $(XY)^{-m}(X+Y)u(X,Y)=1$.

8) Soit K un corps commutatif, k un entier non multiple de la caractéristique de K . Montrer que, pour toute série formelle u de $K[[X]]$ dont le terme constant est 1 , il existe une série formelle $v \in K[[X]]$ telle que $v^k=u$ (poser $v=1+w$) .

9) Soit E un espace vectoriel ayant une base infinie sur un corps K de caractéristique 2 ; soit A l'algèbre extérieure $\bigwedge E$ de cet espace, qui est un anneau commutatif ayant un élément unité.

Donner un exemple de série formelle $u \in A[[X]]$ telle que $u^2=0$, mais telle qu'il n'existe aucun élément $\gamma \neq 0$ de A tel que $\gamma u=0$ (cf. §1, exerc.11) .
