RÉDACTION N° 106

COTE : **NBR 016**

TITRE : **LIVRE VI - E.V.T. CHAPITRE IV (ÉTAT 3)**
ESPACES LOCALEMENT CONVEXES MÉTRISABLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : **60**

NOMBRE DE FEUILLES : **60**

LIVRE VI

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE IV (Etat 3)

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES MÉTRISABLES

Sommaire

CHAPITRE IV (Etat 3)

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES METRISABLES.

§ 1. Espaces de Fréchet et espaces de Banach.

1. Espaces localement convexes métrisables.

Sauf mention expresse du contraire, tous les résultats de ce chapitre sont également valables pour les espaces localement convexes considérés, que ces espaces soient réels ou complexes ; il doit seulement être sous-entendu que lorsque E est un espace localement convexe complexe, les semi-normes que l'on considère sur E sont toujours supposées telles que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ (chap. III, § 4, n°1) ; bien entendu, lorsqu'on parle d'une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, il est toujours implicitement supposé que le corps des scalaires est le même pour ces deux espaces.

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique est métrisable si, considéré comme groupe additif topologique, il est métrisable (Top. gén., chap. IX, § 3, n°1).

PROPOSITION 1.- Pour qu'un espace localement convexe E soit métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé, et que sa topologie soit définie par une famille dénombrable de semi-normes.

En effet, pour que le groupe additif E soit métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé et que l'origine ait un système fondamental dénombrable de voisinages (Top. gén., chap. IX, § 3, n°1, prop. 1). Cette dernière condition est évidemment remplie si la topologie de E est définie par une famille dénombrable de semi-normes. Inversement, si l'origine admet un système fondamental dénombrable de voisinages, on peut toujours supposer que ces derniers sont convexes et cerclés (resp. symétriques si E est un espace réel) ; les jauges de ces voisinages forment donc une famille dénombrable de semi-normes qui définit la topologie de E.

Si (p_n) est une suite de semi-normes définissant la topologie de E, les fonctions $q_n = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} p_k$ sont aussi des semi-normes et définissent encore la topologie de E ; on peut donc toujours supposer que cette dernière est définie par une suite <u>croissante</u> (p_n) de semi-normes. Les espaces <u>normés</u> sont bien entendu des espaces localement convexes métrisables ; il existe des espaces localement convexes métrisables dont la topologie ne peut être définie par une seule norme (exerc.1).

Tout sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe métrisable E est évidemment métrisable ; il en est de même de tout <u>espace quotient</u> E/V de E par un sous-espace vectoriel <u>fermé</u> V ; si la topologie de E est définie par les semi-normes p_n, celle de E/V est définie par les semi-normes $\dot{p}_n(z) = \inf_{x \in \varphi^{-1}(z)} p_n(x)$, où φ désigne l'homomorphisme canonique de E sur E/V (chap.III, §1,n°4). Tout produit d'une famille <u>dénombrable</u> (E_n) d'espaces localement convexes métrisables est un espace localement convexe métrisable ; si la topologie de E_n est définie par les semi-normes p_{nm} $(m \in \mathbb{N})$, celle de $E = \prod_n E_n$ est définie par les semi-normes $q_{nm}((x_n)) = p_{nm}(x_n)$.

Le <u>complété</u> $\hat{E}$ d'un espace localement convexe métrisable E est un espace localement convexe métrisable, dont la topologie est définie par les semi-normes qui prolongent par continuité à $\hat{E}$ les semi-normes définissant la topologie de E (chap.III, §1,n°3). Un espace localement convexe, métrisable et <u>complet</u> est encore appelé <u>espace de Fréchet</u> ; on appelle <u>espace de Banach</u> un espace <u>normé complet</u>.

L'espace produit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace de Fréchet ; on peut montrer que sa topologie ne peut être définie par aucune norme (exerc.1).

PROPOSITION 2.- Soit E un espace localement convexe métrisable, défini par une suite croissante (p_n) de semi-normes, et tel que, pour toute famille (x_ι) de points de E, la condition $\sum_\iota p_n(x_\iota) < +\infty$ pour tout indice n entraîne que la famille (x_ι) est sommable. Dans ces conditions, E est complet.

En effet, soit (y_n) une suite de Cauchy quelconque dans E ; on peut en extraire une suite (y_{n_k}) telle que $p_k(y_{n_{k+1}}-y_{n_k}) \leqslant 2^{-k}$ pour tout entier k ; comme $p_h \leqslant p_k$ pour $h \leqslant k$, il en résulte que la suite des $x_k = y_{n_{k+1}}-y_{n_k}$ est sommable en vertu de l'hypothèse ; comme $\sum_{k=1}^{p} x_k = y_{n_{p+1}}-y_{n_1}$, cela signifie que la suite (y_n) a une valeur d'adhérence, et comme c'est une suite de Cauchy, elle est convergente, ce qui démontre la proposition (Top.gén.,chap.IX, § 2, prop.9).

2. Fonctions linéaires définies dans un espace de Fréchet.

PROPOSITION 3.- Soient E un espace localement convexe métrisable, F un espace localement convexe quelconque. Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit que pour tout ensemble A borné dans E, u(A) soit borné dans F.

La condition est évidemment nécessaire (chap.I, § 1,prop.8) ; montrons qu'elle est suffisante. Soit (p_n) une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de E ; désignons par V_n l'ensemble des points de E tels que $p_n(x) \leqslant 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que u ne soit pas continue : il existerait alors une semi-norme q continue dans F telle que $q(u(x))$ ne soit borné dans aucun des ensembles V_n (chap.III, § 1,prop.3) ; autrement dit, il existerait pour tout n, un point $x_n \in V_n$ tel que $q(u(x_n)) \geqslant n$. Or, comme $p_n \leqslant p_m$ pour $n \leqslant m$, on a $p_n(x) \leqslant 1$ dans tout ensemble V_m d'indice $m \geqslant n$, autrement dit, $V_m \subset V_n$ pour $m \geqslant n$; pour chaque semi-norme p_k, on a donc

$\sup\limits_n p_k(x_n) = \sup\left(\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant k} p_k(x_i);\ \sup\limits_{n>k} p_k(x_n)\right) \leqslant \sup\left(\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant k} p_k(x_i), 1\right) < +\infty$;
l'ensemble B des x_n est par suite *borné* dans E ; mais comme $q(u(x_n)) \geqslant n$, $u(B)$ n'est pas borné dans F, contrairement à l'hypothèse.

PROPOSITION 4.- *Soient E un espace de Fréchet, F un espace localement convexe quelconque, u une application linéaire de E dans F. Si, pour toute semi-norme q sur F, continue dans F, $q(u(x))$ est semi-continue inférieurement dans E, u est continue dans E.*

En effet, comme E est un espace métrique *complet*, il résulte du th. de Baire (Top.gén., chap. IX, § 5, th. 2) qu'il existe un point $x_0 \in E$ et un voisinage V de 0 dans E, tels que $q(u(x))$ soit bornée supérieurement dans x_0+V ; si $q(u(x)) \leqslant k$ dans x_0+V, on a donc, pour $y \in V$, $q(u(x_0)+u(y)) \leqslant k$, d'où, puisque q est convexe, $q(u(y)) \leqslant q(u(x_0)+u(y)) + q(u(x_0)) \leqslant k + q(u(x_0))$ pour tout $y \in V$, ce qui démontre que $q(u(y))$ est bornée dans V, et par suite (chap. III, § 1, prop. 3) que u est continue dans E.

Si E est un espace de Fréchet, tout *espace quotient* E/V de E par un sous-espace fermé est un espace de Fréchet (*Top.gén.*, chap. IX, § 3, prop. 4). Mais on a en outre l'importante réciproque suivante :

THÉORÈME 1 (Banach).- *Si E et F sont deux espaces de Fréchet, toute application linéaire continue u de E sur F est un homomorphisme de E sur F.*

Soit d une distance invariante par translation (*Top.gén.*, chap. IX § 3, prop. 2) définissant la topologie de F ; si V est un voisinage cerclé convexe quelconque de l'origine dans E, nous allons montrer que $u(V)$ *contient* une boule de centre 0 dans F.

L'espace E est réunion de la suite des ensembles nV (n entier $\geqslant 1$); par hypothèse, $u(E)=F$ est réunion de la suite des ensembles $u(nV)=nu(V)$.

Comme F est complet, donc (Top.gén., chap.IX, § 5,th.1) un espace de Baire, il existe au moins un ensemble $n.u(V)$ dont l'adhérence contient un point intérieur ; l'ensemble $u(V)$ a donc la même propriété. Le théorème résultera donc de la proposition plus générale suivante :

PROPOSITION 5.- Soient E et F deux espaces de Fréchet, u une application linéaire continue de E dans F ; si, pour tout voisinage cerclé convexe V de 0 dans E, l'adhérence de $u(V)$ contient un point intérieur, $u(V)$ contient une boule de centre 0, et par suite u est un homomorphisme de E sur F.

En effet, l'adhérence de $u(\frac{1}{2}V) = \frac{1}{2}u(V)$ contient un point intérieur. Il existe donc dans F une boule ouverte S' telle que $u(\frac{1}{2}V)$ soit dense par rapport à S' ; si x_0 est un point de $\frac{1}{2}V$ tel que $y_0=u(x_0)\in S'$, il existe une boule ouverte S" de centre y_0 et de rayon α telle que $u(\frac{1}{2}V)$ soit dense par rapport à S" ; par suite, l'ensemble $u(\frac{1}{2}V)-u(x_0)$, qui est contenu dans $u(V)$ est dense par rapport à la boule S de centre 0 et de rayon α ; a fortiori $u(V)$ est dense par rapport à cette boule.

Cela étant, définissons par récurrence un système fondamental dénombrable (V_n) de voisinages cerclés convexes de 0 dans E tels que $V_0 = \frac{1}{2}V$ et $2\overline{V}_{n+1} \subset V_n$ pour tout $n \geqslant 0$; le raisonnement qui précède prouve que, pour tout n, il existe dans F une boule S_n de centre 0 et de rayon $\leqslant 2^{-n}$, telle que $u(V_n)$ soit dense par rapport à S_n. Soit y un point quelconque de S_0 ; nous allons montrer qu'il existe $z\in V$ tel que $y=u(z)$, ce qui démontrera le théorème.

Définissons par récurrence une suite (x_n) de points de E et une suite (y_n) de points de F, de la façon suivante : on prend $y_0=y$; comme $u(V_0)$ est dense par rapport à S_0, il existe $x_0\in V_0$ tel que $u(x_0)\in y_0+S_1$. De façon générale, supposons définis les x_i et y_i

pour $i \leqslant n$, de sorte que $x_i \in V_i$, $u(x_i) \in y_i + S_{i+1}$ pour $i \leqslant n$ et $y_{i+1} = y_i - u(x_i)$ pour $i \leqslant n-1$. On prendra $y_{n+1} = y_n - u(x_n)$; d'après l'hypothèse de récurrence, on a $y_{n+1} \in S_{n+1}$, et $u(V_{n+1})$ est dense par rapport à S_{n+1} , donc il existe $x_{n+1} \in V_{n+1}$ tel que $u(x_{n+1}) \in y_{n+1} + S_{n+2}$, et la récurrence peut se poursuivre indéfiniment. Soit $z_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$; on a $y = y_0 = f(z_n) + y_{n+1}$; or, d'après la condition imposée à la suite (V_n), on a, par récurrence sur p

$$V_{n+1} + V_{n+2} + \dots + V_{n+p} \subset V_n$$

quels que soient n et $p \geqslant 0$; on en déduit aussitôt que (z_n) est une <u>suite de Cauchy</u> dans E , donc converge vers un point z ; comme u est continue, $u(z_n)$ tend vers $u(z)$, et comme y_{n+1} tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on a $y = f(z)$. D'autre part, on a $z_n \in x_0 + 2V_1$ pour tout n , donc $z \in x_0 + 2V_1 \subset x_0 + V_0 \subset 2V_0 = V$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- <u>Soient</u> E <u>un espace vectoriel</u>, $\mathcal{C}_1$ <u>et</u> $\mathcal{C}_2$ <u>deux topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel de</u> E , <u>et pour chacune desquelles</u> E <u>est un espace de Fréchet</u>. <u>Si</u> $\mathcal{C}_1$ <u>et</u> $\mathcal{C}_2$ <u>sont comparables, elles sont identiques</u>.

En effet, si E_1 et E_2 sont les espaces de Fréchet obtenus en munissant E de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, l'application identique de l'un de ces espaces sur l'autre est continue, donc est un isomorphisme.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> u <u>une application linéaire continue d'un espace de Fréchet</u> E <u>dans un espace de Fréchet</u> F . <u>Pour que</u> u <u>soit un homomorphisme de</u> E <u>dans</u> F , <u>il faut et il suffit que</u> u(E) <u>soit fermé dans</u> F.

C'est en effet la condition nécessaire et suffisante pour que u(E) soit un sous-espace <u>complet</u> de F (<u>Top.gén.</u>, chap.II, § 3,prop.6) .

COROLLAIRE 3.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Fréchet</u>. <u>Pour qu'une application linéaire</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>soit continue</u>, <u>il faut et il suffit que son graphe dans le produit</u> $E\times F$ <u>soit un ensemble fermé</u>.

La nécessité de la condition est immédiate, car si on pose $z=(x,y)$, le graphe G de u dans $E\times F$ est défini par la relation $pr_2 z = u(pr_1 z)$, et les deux membres sont fonctions continues de z . Pour voir que la condition est <u>suffisante</u>, remarquons qu'elle entraîne que G , sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Fréchet $E\times F$, est un espace de Fréchet ; l'application pr_1, restreinte à G , est une application linéaire <u>continue</u> et <u>biunivoque</u> de G <u>sur</u> E ; elle est donc <u>bicontinue</u> d'après le th.1 ; comme son application réciproque n'est autre que $x \rightarrow (x,u(x))$, u est continue dans E .

COROLLAIRE 4.- <u>Soient</u> E <u>un espace de Fréchet</u>. <u>Si</u> V <u>et</u> W <u>sont deux sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires dans</u> E , E <u>est somme directe topologique</u> (chap.I, § 1,n°6) <u>de</u> V <u>et de</u> W .

En effet, l'application $(y,z) \rightarrow y+z$ de l'espace de Fréchet $V\times W$ <u>sur</u> l'espace de Fréchet E est une application linéaire continue et biunivoque ; c'est donc un <u>isomorphisme</u> en vertu du th.1 .

Si E et F sont deux espaces localement convexes métrisables , d et d' des distances invariantes par translation et définissant respectivement les structures uniformes de E et F (<u>Top.gén.</u>, chap.IX, § 3,prop.3) toute application linéaire f de E sur F qui est une <u>isométrie</u> de E sur F , est a fortiori un <u>isomorphisme</u> de l'espace vectoriel topologique E sur l'espace vectoriel topologique F ; la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'existence de normes équivalentes sur un espace normé.

§ 2. Dual fort d'un espace de Fréchet.

1. Espaces de fonctions linéaires continues dans un espace de Fréchet.

Soient E un espace de Fréchet, F un espace localement convexe. Sur l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F, nous considèrerons les topologies $\mathcal{C}_s$ de la convergence simple, $\mathcal{C}_c$ de la convergence uniforme dans les parties relativement compactes de E, et enfin $\mathcal{C}_b$ de la convergence uniforme dans les parties bornées de E. On sait que $\mathcal{C}_s$ est moins fine que $\mathcal{C}_c$, et $\mathcal{C}_c$ moins fine que $\mathcal{C}_b$; en outre, ces trois topologies sont séparées et compatibles avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ (chap. III, § 1, prop. 6).

PROPOSITION 1.- *Si l'espace F est complet, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est complet pour la topologie $\mathcal{C}_b$.*

En effet, soit Φ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie $\mathcal{C}_b$, et soit A une partie bornée quelconque de E ; pour toute semi-norme continue q sur F et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $M \in \Phi$ tel que $q(u(x)-v(x)) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in A$ et tout couple d'éléments u, v de M. Comme F est complet, le filtre Φ converge simplement vers une application linéaire u_0 de E dans F, et on a $q(u_0(x)-u(x)) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in A$ et tout $u \in M$. Or, comme u est continue, $u(A)$ est borné, donc $q(u(x)) \leqslant k$ pour tout $x \in A$ et par suite $q(u_0(x)) \leqslant k+\varepsilon$ pour tout $x \in A$; ceci démontre que $u_0(A)$ est borné dans F, et par suite (§ 1, prop. 3) que u_0 est continue dans E, autrement dit appartient à $\mathcal{L}(E,F)$; il est clair alors que u_0 est limite du filtre Φ pour la topologie $\mathcal{C}_b$.

Lorsque E et F sont deux espaces de Banach, la topologie $\mathcal{C}_b$ sur $\mathcal{L}(E,F)$ peut être définie par la norme $\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$ (chap. III, § 1, prop. 6) ; on a

NBR 016 11

$$(1)\qquad \| u(x) \| \leqslant \| u \| \cdot \| x \|$$

autrement dit, $(u,x) \to u(x)$ est une application bilinéaire continue de $\mathcal{L}(E,F) \times E$ dans F, lorsqu'on munit $\mathcal{L}(E,F)$ de la topologie $\mathcal{C}_b$.

Cette dernière proposition n'est plus exacte lorsque E et F sont des espaces de Fréchet quelconques (exerc. 3b).

THÉORÈME 1. — Soient E un espace de Fréchet, F un espace localement convexe, H une partie de $\mathcal{L}(E,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) H est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_b$;

b) H est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_s$;

c) H est équicontinue.

En outre, lorsque ces conditions sont vérifiées, les topologies induites sur H par $\mathcal{C}_s$ et $\mathcal{C}_c$ sont ~~xxxxxxxx~~ identiques, ainsi que la topologie de la convergence simple dans un ensemble total de E.

En effet, il est clair que a) entraîne b). D'autre part, c) entraîne a) : en effet, si H est équicontinue, pour toute semi-norme q continue dans F, il existe un voisinage V de 0 dans E et un nombre $a > 0$ tels que $q(u(x)) \leqslant a$ quels que soient $x \in V$ et $u \in H$. Si A est un ensemble borné quelconque dans E, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda A \subset V$, donc $q(u(x)) \leqslant \frac{1}{\lambda} a$ pour tout $x \in A$, ce qui démontre que H est borné pour la topologie $\mathcal{C}_b$.

Reste à prouver que b) entraîne c) ; d'après b), pour toute semi-norme q continue sur F, la fonction $f(x) = \sup_{u \in H} q(u(x))$ est finie dans E ; comme $q(u(x))$ est continue dans E, f est semi-continue inférieurement ; donc (Top. gén., chap. IX, § 5, th. 2) il existe un point $x_0 \in E$ et un voisinage V de 0 dans E tels que $f(x)$ soit bornée supérieurement dans $x_0 + V$; comme f est enveloppe supérieure de fonctions convexes, c'est une fonction convexe, donc pour $y \in V$, on a $f(y) \leqslant f(x_0) + f(x_0+y)$, ce qui montre que f est bornée supérieurement dans V, donc que H est équicontinue au point 0, et par suite (chap.I, § 3, prop.2) équicontinue dans E. La dernière partie du th. n'est autre que la prop. 4 du chap.I, § 3.

Remarque.- Cette démonstration montre que a) entraîne b) et que c) entraîne a) lorsque E et F sont des espaces localement convexes quelconques : mais alors en général b) n'entraîne pas c)(exerc.16)

D'après le th.1, la notion d'ensemble borné dans $\mathcal{L}(E,F)$ est la même pour les topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$ et $\mathcal{T}_b$, et on peut donc parler d'ensemble borné dans cet espace sans spécifier pour quelle topologie. Nous dirons qu'un filtre sur $\mathcal{L}(E,F)$ est borné s'il existe un ensemble borné appartenant à ce filtre.

COROLLAIRE.- Soit Φ un filtre borné sur $\mathcal{L}(E,F)$. Si Φ converge simplement dans E vers une fonction u_0, u_0 est une application linéaire continue de E dans F, et Φ converge uniformément vers u_0 dans toute partie compacte de E. En outre, si F est complet, pour que Φ converge simplement dans E, il suffit que Φ converge simplement aux points d'un ensemble total dans E.

PROPOSITION 2.- Soient E un espace de Fréchet, F un espace localement convexe, (u_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F. Si (u_n) converge simplement vers u_0 dans E, u_0 est une application linéaire continue de E dans F, la suite (u_n) est bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$ et converge uniformément vers u_0 dans toute partie compacte de E.

D'après le cor. du th.1, il suffit de montrer que la suite (u_n) est bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$; or, pour toute semi-norme continue q sur F et tout $x \in E$, la suite $(q(u_n(x)))$ converge vers $(q(u_0(x)))$ donc est bornée, ce qui prouve que (u_n) est bornée, en vertu du th. 1 .

2. Dual fort d'un espace de Fréchet.

Soient E un espace de Fréchet, E' son dual (chap.I, § 3) ; comme E' n'est autre que l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ si E est un espace complexe), on peut le munir de la topologie $\mathcal{C}_b$ de la convergence uniforme sur les parties bornées de E . Muni de cette topologie, nous dirons que E' est le dual fort de E ; rappelons que le dual faible de E (chap.I, § 3) est l'espace E' muni de la topologie $\mathcal{C}_s$ de la convergence simple : on distinguera sur E' les notions relatives à ces deux topologies par l'usage des qualificatifs "fort" et "faible", ou des adverbes "fortement" ou "faiblement". En général, la topologie faible sur E' est strictement moins fine que la topologie forte ; il peut exister dans E' des ensembles convexes fortement mais non faiblement fermés (cf.prop.6) .

Pour tout ensemble A borné dans E , soit $|x'|_A = \sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle|$ pour toute forme linéaire continue $x' \in E'$; la topologie forte sur E' est définie par les semi-normes $|x'|_A$, où A parcourt l'ensemble des parties bornées de E (ou seulement des parties bornées convexes et fermées).

Soit (p_n) une suite de semi-normes continues définissant la topologie de E . Pour toute partie bornée A de E , soit $\alpha_n = \sup_{x \in A} p_n(x)$; A est contenu dans la partie bornée de E définie par les inégalités $p_n(x) \leqslant \alpha_n$ $(n \in \mathbb{N})$. On peut donc, pour définir la topologie forte sur E', se borner à faire parcourir à A l'ensemble des ensembles bornés définis par ces systèmes d'inégalités.

On notera qu'en général, E', muni de la topologie forte, n'est pas métrisable (§ 3, exerc. 4) ; toutefois, lorsque E est un espace de Banach, la topologie forte sur son dual E' peut être définie par la norme.

 14

$$\|x'\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle x,x'\rangle| \tag{2}$$

(chap.III, § 1,prop.6) ; lorsqu'on parle du dual d'un espace de Banach comme d'un espace normé, il est toujours sous-entendu que c'est de la norme définie par la relation (2) qu'il est question.

L'ensemble des $x' \in E'$ tels que $|x'|_A \leqslant \lambda$ est identique à λA° : les ensembles polaires des ensembles bornés dans E forment donc un système fondamental de voisinages de 0 dans E' pour la topologie forte. Comme ces ensembles sont faiblement fermés, on voit que les semi-normes $|x'|_A$ sont semi-continues inférieurement pour la topologie faible sur E'.

Le dual fort E' d'un espace de Fréchet E est un espace complet (prop.1) ; si E est un espace de Banach, son dual fort E' est donc aussi un espace de Banach ; l'application $(x,x') \to \langle x,x'\rangle$ de $E \times E'$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$ si E est un espace complexe) est continue dans l'espace de Banach $E \times E'$.

THÉORÈME 2.- Soient E un espace de Fréchet, H une partie de son dual E'. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) H est fortement borné ;

b) H est faiblement borné ;

c) H est faiblement relativement compact.

En outre, lorsque ces conditions sont vérifiées, la topologie faible sur H est identique à la topologie $\mathcal{C}_c$ de la convergence compacte, et aussi à la topologie de la convergence simple dans un ensemble total de E.

Il est clair que c) entraîne b) (chap.I, § 1,prop.9), et a) et b) sont équivalentes d'après le th.1. D'autre part, si H est faiblement borné, il est équicontinu (th.1), donc (chap.I, § 3,prop.3) l'adhérence $\bar{H}$ de H dans l'espace produit $\mathbb{R}^E$ (resp. $\mathbb{C}^E$), (dont E', muni de la topologie faible, est un sous-espace) est contenue dans E' ; en outre, les projections de H sur les espaces facteurs de $\mathbb{R}^E$ (resp. $\mathbb{C}^E$) sont bornées par hypothèse, donc relativement compactes, ce qui montre, en vertu du th. de Tychonoff que $\overline{H}$ est faiblement compact.

Remarque.- On notera qu'en général, un ensemble borné dans E' n'est pas fortement relativement compact (chap.III, § 3).

COROLLAIRE 1.- Dans E', tout ensemble borné et faiblement fermé est faiblement complet.

En effet, il est faiblement compact d'après le th. 2.

COROLLAIRE 2.- Dans E', toute suite de Cauchy pour la topologie faible est bornée et faiblement convergente.

En effet, si (x'_n) est une suite de Cauchy, $(\langle x, x'_n \rangle)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), donc converge, et par suite (x'_n) est bornée ; elle converge en vertu du cor.1 .

On remarquera que si x' est la limite d'une telle suite, on a, pour tout ensemble borné A dans E

(3) $$|x'|_A \leqslant \liminf_{n \to \infty} |x'_n|_A$$

puisque les semi-normes $|x'|_A$ sont semi-continues inférieurement pour la topologie faible.

COROLLAIRE 3.- Toute suite bornée (x'_n) dans E' a au moins une valeur d'adhérence pour la topologie faible. Pour qu'elle soit faiblement convergente, il suffit que, pour tout élément x d'une partie totale de E , la suite $(\langle x, x'_n \rangle)$ soit convergente.

COROLLAIRE 4.- Dans E', l'enveloppe convexe d'un ensemble faiblement relativement compact est un ensemble faiblement relativement compact.

En effet, cette enveloppe convexe est bornée (Chap.III, § 2,prop.1).

Si E est un espace localement convexe métrisable __non complet__ $\hat{E}$ son complété, qui est donc un espace de Fréchet, F un espace localement convexe complet, on sait (chap.I, § 3, n°1) que les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(\hat{E},F)$ peuvent être identifiés, toute application linéaire continue de E dans F se prolongeant d'une seule manière dans $\hat{E}$. Mais, si $\mathcal{C}_b$ est la topologie (sur $\mathcal{L}(E,F)$) de la convergence uniforme dans les parties bornées __de__ E, $\mathcal{C}'_b$ la topologie (sur $\mathcal{L}(\hat{E},F)$) de la convergence uniforme dans les parties bornées __de__ $\hat{E}$, il n'est pas évident a priori que les topologies $\mathcal{C}_b$ et $\mathcal{C}'_b$ soient identiques : il faut pour cela que tout ensemble borné __dans__ $\hat{E}$ soit contenu dans l'adhérence d'un ensemble borné __dans__ E, ce qui est vérifié trivialement si E est __normé__, mais n'est peut être pas vrai pour tous les espaces localement convexes métrisables.

Lorsque E est normé, on peut donc en particulier __identifier__ les __duals forts__ de E et de son complété $\hat{E}$, en tant qu'espaces de Banach (la norme d'une application linéaire continue de E dans F étant égale à celle de son prolongement à $\hat{E}$). Mais les topologies __faibles__ sur ce dual E' sont alors __distinctes__, suivant qu'on regarde E' comme dual de E ou comme dual de $\hat{E}$ (chap.I, §3, cor.2 du th.1) ; et lorsqu'on considère E' comme dual de l'espace normé __non complet__ E, le th.2 et ses corollaires ne sont plus entièrement valables (cf. exerc. 16).

Z

PROPOSITION 3.- __Pour qu'un ensemble__ $B \subset E'$ __soit borné, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage__ U __de__ 0 __dans__ E __tel que__ $B \subset U^0$.

En effet, il faut et il suffit que B soit __équicontinu__ au point 0 (th.1), donc qu'il existe un voisinage U de 0 dans E tel que, pour tout $x \in U$ et tout $x' \in B$, on ait $|\langle x,x'\rangle| \leq 1$, ce qui signifie que $B \subset U^0$ par définition.

3. <u>Bidual d'un espace de Fréchet</u>. <u>Espaces réflexifs</u>.

Soit E un espace de Fréchet, E' son dual. Nous appellerons <u>bidual</u> de E l'espace E" <u>dual de</u> E', lorsque E' est muni de la topologie <u>forte</u>. Pour tout $x \in E$, la forme linéaire $x' \to \langle x,x' \rangle$ sur E' est <u>continue</u> pour la topologie faible sur E' , et a fortiori pour la topologie forte sur E' : c'est donc un élément de E" que nous noterons x ; on a identiquement $\langle x,x' \rangle = \langle x',\tilde{x} \rangle$ l'application $x \to \tilde{x}$ est une application linéaire de E dans son bidual E", que nous nommerons application <u>canonique</u>.

Nous appellerons encore <u>topologie forte</u> sur E" la topologie de la <u>convergence uniforme dans les ensembles bornés de</u> E' . Pour tout voisinage U de 0 dans E , convexe, fermé et symétrique (resp. cerclé si E est complexe), nous désignerons par U^{oo} l'ensemble polaire <u>dans</u> E" de l'ensemble U^{o} (ensemble polaire de U dans E').

PROPOSITION 4.- <u>Lorsque</u> U <u>parcourt un système fondamental de voisinages de</u> 0 <u>dans</u> E , <u>convexes, fermés et symétriques</u> (resp. <u>cerclés</u>) <u>les ensembles</u> U^{oo} <u>forment un système fondamental de voisinages de</u> 0 <u>dans</u> E" .

En effet, un système fondamental de voisinages de 0 dans E" est formé des ensembles polaires des ensembles <u>bornés</u> B dans E'. Mais d'après la prop.3, on a déjà un système fondamental de voisinages de 0 dans E" en prenant seulement les ensembles B de la forme U^{o} , d'où la proposition.

COROLLAIRE 1.- <u>L'espace</u> E" <u>muni de la topologie forte, est métrisable</u>.

COROLLAIRE 2.- <u>L'application canonique</u> $x \to \tilde{x}$ <u>est un isomorphisme de</u> E <u>dans</u> E" , <u>lorsque</u> E" <u>est muni de la topologie forte</u>.

En effet, la relation $\langle x,x' \rangle = 0$ pourtout $x' \in E'$ entraîne $x=0$ (chap.III, §3,prop.1) ; par suite $\tilde{x}=0$ entraîne $x=0$, l'application linéaire $x \to \tilde{x}$ est biunivoque ; comme $\langle x,x' \rangle = \langle x,\tilde{x} \rangle$, l'image par $x \to \tilde{x}$ d'un voisinage U de 0 dans E , convexe et symétrique (resp. cerclé) est la trace de U^{oo} sur l'image de E par $x \to \tilde{x}$;

la prop.4 entraîne donc que $x \to \tilde{x}$ est un isomorphisme.

On supposera désormais E identifié à son image par l'application canonique de E dans E" ; E est donc un sous-espace fortement fermé de E".

Ces résultats peuvent être complétés lorsque E est un espace de Banach ; tout d'abord, comme le dual fort E' est alors aussi un espace de Banach, le bidual E", muni de la topologie forte, est un espace de Banach. En outre, pour tout $x \in E$, on a $\|\tilde{x}\| = \|x\|$: en effet (chap.III, § 2, cor.2 de la prop.5) il existe une forme linéaire continue $x' \in E'$ telle que $\|x'\| = 1$ et $\langle x,x'\rangle = \|x\|$, d'où $\|x\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle x,x'\rangle| = \|\tilde{x}\|$. L'application canonique de E dans E" est donc dans ce cas une isomètrie de E sur un sous-espace fermé de l'espace de Banach E".

L'espace E", dual de E', peut être muni également de la topologie faible $\sigma(E'',E')$ (chap.I, § 3 et chap.III, § 3) ; lorsqu'on considère E comme identifié à un sous-espace de E", la topologie induite sur E par $\sigma(E'',E')$ n'est autre évidemment que la topologie faible $\sigma(E,E')$ définie au chap.III, § 3, n°1. L'espace E est partout dense dans E" pour la topologie faible (alors qu'il est fortement fermé dans E") ; de façon précise, il résulte de la prop.4 que les adhérences faibles dans E" des voisinages de 0 dans E (pour la topologie forte) forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E" (pour la topologie forte).

PROPOSITION 5.- Dans un espace localement convexe E, tout ensemble faiblement borné est borné.

Démontrons-le d'abord lorsque E est un espace de Banach : alors E" est le dual fort d'un espace de Banach, donc (th.2) tout ensemble faiblement borné dans E" est fortement borné, d'où la proposition.

Supposons maintenant que E soit quelconque, et soit A un ensemble faiblement borné dans E , p une semi-norme continue dans E : il faut prouver que $\sup_{x \in A} p(x) < +\infty$. Considérons sur E la topologie $\mathcal{C}_p$ (moins fine que la topologie donnée $\mathcal{C}$ sur E) définie par la seule semi-norme p , et soit F_p l'espace normé associé à l'espace E muni de $\mathcal{C}_p$ (chap.III, §1,n°4). Toute forme linéaire sur E continue pour $\mathcal{C}_p$ est aussi continue pour $\mathcal{C}$; donc, si φ est l'application canonique de E sur F_p , $\varphi(A)$ est faiblement borné dans F_p , et a fortiori dans le complété $\hat{F}_p$ de l'espace normé F_p ; mais alors $\varphi(A)$ est fortement borné dans F_p d'après la première partie de la proposition, ce qui signifie que $\sup_{x \in A} p(x) < +\infty$.

Il n'est pas certain que dans le bidual E" d'un espace de Fréchet quelconque E , un ensemble borné pour la topologie faible $\sigma(E'',E')$ soit fortement borné, car $\sigma(E'',E')$ est distincte en général de la topologie $\sigma(E'',E''')$, où E"' désigne le dual de E" lorsque E" est muni de la topologie forte.

DÉFINITION 1.- On dit qu'un espace de Fréchet E est réflexif si l'image de E par l'application canonique $x \to \tilde{x}$ est identique au bidual E" .

Tout espace séparé de dimension finie est réflexif.

PROPOSITION 6.- Pour que tout ensemble convexe fortement fermé dans E' soit faiblement fermé, il faut et il suffit que E soit réflexif.

La condition est suffisante, puisque si elle est remplie la topologie $\sigma(E',E'')$ est identique à $\sigma(E',E)$ (cf.chap.III, § 3,prop.2). Inversement, si E n'est pas ~~xxxx~~ réflexif, il existe sur E' une forme linéaire fortement continue f qui n'appartient pas à E : l'hyperplan fortement fermé d'équation $f(x)=0$ n'est pas alors faiblement fermé (pour la topologie $\sigma(E',E)$) (chap.I, § 3, cor.1 du th.1).

THÉORÈME 3.- <u>Pour qu'un espace de Fréchet</u> E <u>soit réflexif, il faut et il suffit que tout ensemble borné dans</u> E <u>soit faiblement relativement compact</u>.

Comme l'enveloppe convexe d'un ensemble borné est un ensemble borné (chap.III, § 2, prop.1), on peut se limiter à ne considérer que des ensembles bornés convexes et symétriques (resp. cerclés).

Si E est réflexif, et si B est un ensemble borné, convexe, symétrique (resp. cerclé) et fermé dans E , on a $B^{oo}=B$ (chap.III, § 3, prop. 2 et 4) ; comme B^o est un voisinage de 0 dans E', $(B^o)^o$ est compact pour la topologie $\sigma(E,E')$ (chap.I, § 3, th.2).

Inversement, si tout ensemble $B \subset E$ borné, convexe, symétrique (resp. cerclé) et fermé dans E est faiblement compact, il est fermé <u>dans</u> E" , donc $B=B^{oo}$ (chap.III, § 3, prop.4) ; or, les ensembles B^o formant un système fondamental de voisinages de 0 dans E', les ensembles B^{oo} <u>engendrent</u> E" (chap.I, § 3), d'où E"=E .

Il existe des espaces de Banach non réflexifs (exerc. 7).

COROLLAIRE.- <u>Si</u> E <u>est réflexif, toute suite de Cauchy dans</u> E <u>pour la topologie faible est bornée et faiblement convergente</u>.

En effet, une telle suite (x_n) est faiblement bornée, donc bornée (prop.5) ; d'après le th.3, elle admet donc une valeur d'adhérence faible x , et comme c'est une suite de Cauchy, elle converge faiblement vers x .

On notera en outre que dans ce cas, on a , pour toute semi-norme p continue sur E , $p(x) \leqslant \liminf_{n \to \infty} p(x_n)$ puisque p est semi-continue inférieurement pour la topologie faible.

4. Dual fort d'un sous-espace. Dual fort d'un espace quotient.

PROPOSITION 7.- *Soit E un espace de Banach, V un sous-espace vectoriel fermé de E. L'application canonique du dual fort de V sur l'espace quotient E'/V^0 du dual fort de E par le sous-espace V^0 orthogonal à V, est une isométrie. L'application canonique du dual fort de E/V sur le sous-espace V^0 de E' est une isométrie.*

Il est sous-entendu dans cet énoncé que les duals forts de E/V sont munis de la norme définie par la formule (2), E/V et E'/V^0 de la norme définie dans *Top.gén.*, chap.IX, § 3, n°4.

L'application canonique de V' sur E'/V^0 fait correspondre à une forme linéaire continue u sur V la classe modulo V^0 des formes linéaires continues sur E prolongeant u ; pour toute forme v de cette classe, on a par définition $\|v\| \geqslant \|u\|$; d'autre part (chap.III, § 2, cor. du th.2) il existe une forme linéaire $\bar{u}$ continue dans E, prolongeant u et telle que $\|\bar{u}\| = \|u\|$; on a donc $\|u\| = \inf \|v\|$, la borne inférieure étant prise dans la classe modulo V^0 qui correspond canoniquement à u, d'où la première partie de la proposition.

L'application canonique du dual de E/V sur V^0 fait correspondre à toute forme linéaire continue u sur E/V la forme linéaire continue $x' \in V^0$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait, en désignant par $\dot{x}$ la classe de x modulo V, $u(\dot{x}) = \langle x, x' \rangle$. On a donc tout d'abord $|u(\dot{x})| \leqslant \|x\| . \|x'\|$ quel que soit $x \in \dot{x}$, donc $|u(\dot{x})| \leqslant \|x'\| . \inf_{x \in \dot{x}} \|x\| = \|\dot{x}\| . \|x'\|$, ce qui prouve que $\|u\| \leqslant \|x'\|$. D'autre part, $\|u\|$ est la borne supérieure de $\langle x, x' \rangle$ lorsque x parcourt l'ensemble des points tels que $\|\dot{x}\| \leqslant 1$, c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $\inf_{y \in V} \|x+y\| \leqslant 1$; comme cet ensemble contient la boule $\|x\| \leqslant 1$, on a $\|u\| \geqslant \|x'\|$, d'où $\|u\| = \|x'\|$, ce qui achève la démonstration.

Il n'est pas certain que, pour un espace de Fréchet quelconque E, la prop.7 (où le mot "isomètrie" est remplacé par "isomorphisme") soit encore vraie. Toutefois, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.- Soit E un espace de Fréchet réflexif, V un sous-espace fermé de E. L'espace de Fréchet V est réflexif, et l'application canonique du dual fort de V sur l'espace quotient E'/V^0 du dual fort de E par le sous-espace V^0 orthogonal à V est un isomorphisme.

L'espace E'/V^0, muni du quotient par V^0 de la topologie forte de E', est séparé, donc les adhérences des voisinages convexes de 0 dans cet espace forment un système fondamental de voisinages de 0 ; il s'ensuit qu'on a un système fondamental de voisinages de 0 dans E'/V^0 en prenant les images canoniques des adhérences fortes dans E' des ensembles convexes B^0+V^0, où B parcourt l'ensemble des ensembles bornés convexes et fermés dans E. Or (prop.6) l'adhérence forte de B^0+V^0 est identique à son adhérence faible, puisque E est réflexif ; donc (chap.III, § 3, prop.4 et prop.) elle est identique à $(B\cap V)^0$; mais lorsque B parcourt l'ensemble des ensembles convexes bornés et fermés dans E, $B\cap V$ parcourt l'ensemble des ensembles convexes bornés et fermés dans V, ce qui prouve que l'application canonique du dual fort V' de V sur E'/V^0 est un isomorphisme. D'ailleurs, la topologie faible $\sigma(V,V')$ est identique à la topologie induite sur V par la topologie faible $\sigma(E,E')$ (chap.III, § 3, n°2), donc tout ensemble borné dans V est faiblement relativement compact (th.3) ce qui prouve que V est réflexif.

Il n'est pas certain que l'espace quotient E/V soit réflexif, ni que l'application canonique de son dual fort sur le sous-espace V^0 du dual fort E' soit un isomorphisme. De façon précise, la topologie sur V^0 <u>transportée</u> de la topologie forte du dual de E/V , par l'application canonique, est telle qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans V^0 soit formé des ensembles $(C+V)^0$, où C est un ensemble dont l'image canonique dans E/V soit bornée : il est clair que si C est borné <u>dans</u> E , son image canonique dans E/V est bornée, mais rien ne permet d'affirmer a priori que pour tout ensemble borné K <u>dans</u> E/V , il existe un ensemble borné dans E dont l'image canonique dans E/V contienne K . Par suite, la topologie obtenue en transportant à V^0 la topologie forte du dual de E/V est <u>plus fine</u> que la topologie induite sur V^0 par la topologie forte de E' ; il n'est donc pas certain que les formes linéaires continues sur V^0 soient les mêmes pour ces deux topologies.

On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 8.- <u>Soit E un espace de Fréchet réflexif,</u> V <u>un sous-espace vectoriel fermé de</u> E . <u>Si on munit le sous-espace vectoriel</u> V^0 <u>de</u> E' <u>de la topologie induite par la topologie forte de</u> E' , <u>l'application canonique du dual fort de</u> V^0 <u>sur l'espace quotient</u> E/V <u>de l'espace de Fréchet</u> E (muni de la topologie quotient par V de la topologie forte de E) <u>est un isomorphisme</u>.

En effet, tout ensemble borné dans V^0 (pour la topologie induite par la topologie forte de E') est contenu dans un ensemble de la forme $U^0 \cap V^0$, où U est un voisinage convexe fermé et symétrique (resp. cerclé) de 0 dans E ; comme E est identique au dual E'' de E', l'ensemble polaire de $U^0 \cap V^0$ dans E'' est identique à l'adhérence forte de $U+V$, ce qui démontre aussitôt la proposition.

Pour les <u>espaces de Banach</u>, on a la propriété plus précise suivante :

PROPOSITION 9.- <u>Si E est un espace de Banach réflexif,</u> V <u>un sous-espace vectoriel fermé de</u> E , <u>l'espace de Banach quotient</u> E/V <u>est réflexif</u>.

En effet, la topologie induite sur V^o par la topologie forte de E' est alors identique à la topologie transportée de la topologie forte du dual de E/V (prop.7).

5. Continuité forte et continuité faible.

PROPOSITION 10.- Soient E un espace de Fréchet, F un espace localement convexe, u une application linéaire de E dans F ; pour que u soit fortement continue, il faut et il suffit que u soit faiblement continue.

Nous savons déjà que la condition est nécessaire (chap.III, § 3, cor.4 de la prop.2). Inversement, si u est faiblement continue, elle transforme tout ensemble faiblement borné dans E en un ensemble faiblement borné dans F, et par suite (prop.5) tout ensemble borné dans E en un ensemble borné dans F, ce qui montre (§ 1, prop.3) que u est fortement continue.

6. Transposée d'une application linéaire continue.

PROPOSITION 11.- Soient E et F deux espaces de Fréchet, u une application linéaire continue de E dans F ; la transposée ${}^t u$ est une application linéaire fortement continue de F' dans E'.

En effet, l'image par u de tout ensemble borné dans E est un ensemble borné dans F, d'où la proposition (chap.I, § 3, prop. 11).

Lorsque E et F sont des espaces de Banach, on peut préciser ce résultat de la manière suivante : on a

$$\|{}^t u\| = \|u\| \tag{4}$$

En effet, on a, par définition

$$\|{}^t u\| = \sup_{\|y'\| \leqslant 1} \|{}^t u(y')\| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ \|y'\| \leqslant 1}} |\langle x, {}^t u(y')\rangle| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ \|y'\| \leqslant 1}} |\langle u(x), y'\rangle| =$$

$$= \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| = \|u\| .$$

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> v <u>une application linéaire de</u> F' <u>dans</u> E' ; <u>si</u> v <u>est faiblement continue dans</u> F' , <u>elle est fortement continue</u>.

En effet, v est alors la transposée de l'application faiblement continue $u = {}^t v$ de E dans F ; comme u est fortement continue (prop.10), $v = {}^t u$ est fortement continue.

Si v est fortement continue, et si E est <u>réflexif</u>, v est aussi faiblement continue (chap.III, § 3,cor.4 de la prop.2) ; mais dire que E n'est pas réflexif signifie précisément qu'il existe des formes linéaires fortement continues dans F' qui ne sont pas faiblement continues (prop.6).

PROPOSITION 12.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach</u>, u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F . <u>Pour que</u> $u(E)=F$, <u>il faut et il suffit que</u> ${}^t u$ <u>soit un isomorphisme fort de</u> F' <u>dans</u> E' .

En effet, pour que ${}^t u$ soit un isomorphisme fort de F' dans E', il faut et il suffit que pour toute boule fermée B de centre 0 dans F , il existe une boule fermée A de centre 0 dans E telle que $B \subset (u(A))^{\circ\circ} = (\overline{u(A)})$ (chap.I, § 3,prop.13, et chap.III, § 3,prop.4). D'après la prop.5 du 1, cela équivaut à dire que u est un homomorphisme de E sur F .

PROPOSITION 13.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Fréchet</u> réflexifs. <u>Si</u> v <u>est une application linéaire continue de</u> F' <u>sur</u> E' , v <u>est un homomorphisme (fort et faible) de</u> F' <u>sur</u> E', <u>et sa transposée</u> $u = {}^t v$ <u>est un isomorphisme fort de</u> E <u>dans</u> F .

On sait que u est une application linéaire continue (prop.10) et biunivoque (chap.I, §3,prop.14) de E dans F ; il suffit de prouver que $u(E)$ est <u>fermé</u> dans F ; en effet, il en résultera que u est un isomorphisme de E dans F (§ 1,th.1), et comme F est réflexif, que $v = {}^t u$

est un homomorphisme fort de F' sur E' (th.4). Or, soit b un point de F adhérent à $u(E)$, et $(u(x_n))$ une suite de points de $u(E)$ tendant vers b ; pour tout $y' \in F'$, la suite $\langle u(x_n), y' \rangle$ est bornée, donc la suite $\langle x_n, {}^t u(y') \rangle$ est bornée ; mais comme $x' = {}^t u(y')$ peut être pris égal à un point quelconque de E' en vertu de l'hypothèse, cela signifie que la suite (x_n) est <u>bornée</u> dans E . Comme E est réflexif, l'ensemble des x_n est relativement faiblement compact (th.3), donc la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence faible $a \in E$; montrons que $u(a)=b$, ce qui établira la proposition. Or, $u(a)$ est valeur d'adhérence faible de la suite $(u(x_n))$ dans F , puisque u est faiblement continue ; comme la suite $(u(x_n))$ converge fortement vers b , elle converge faiblement vers b , d'où (<u>Top.gén.</u>, chap.I, § 6), $b=u(a)$.

PROPOSITION 14.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Fréchet</u>, H <u>une partie bornée</u> ($n^o 1$) <u>de l'espace</u> $\mathcal{L}(E,F)$ <u>des applications linéaires continues de</u> E <u>dans</u> F ; <u>alors l'ensemble</u> ${}^tH$ <u>des transposées des applications</u> $u \in H$ <u>est fortement équicontinu dans</u> F' .

Il faut prouver qu'étant donné un voisinage U de 0 dans E', (pour la topologie forte), il existe un voisinage V de 0 dans F' (pour la topologie forte) tel que les relations $y' \in V$, $u \in H$ entraînent ${}^t u(y') \in U$. On peut toujours supposer (par définition) que $U=B^o$, où B est un ensemble <u>borné</u> dans E ; la relation ${}^t u(y') \in B^o$ signifie alors que $|\langle x, {}^t u(y') \rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$, c'est-à-dire $|\langle u(x), y' \rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$. Or, l'ensemble H étant borné par hypothèse dans $\mathcal{L}(E,F)$, l'ensemble $C = \bigcup_{u \in H} u(B)$ est borné dans F : en effet, pour tout voisinage W de 0 dans F , l'ensemble T des u tels que $u(B) \subset W$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{L}(E,F)$ (pour la topologie $\mathcal{T}_b$) , donc il existe $\lambda > 0$ tel que $H \subset \lambda T$, c'est-à-dire $u(B) \subset \lambda W$

quel que soit $u \in H$. Il suffit alors de prendre $V = C^{o}$ pour avoir $|\langle u(x), y' \rangle| \leqslant 1$ quels que soient $x \in B$, $u \in H$ et $y' \in C^{o}$.

PROPOSITION 15.- *Soient* E *et* F *deux espaces de Fréchet*, M *une partie de* $\mathcal{L}(F', E')$ *formée d'applications linéaires faiblement continues de* F' *dans* E' . *Si* M *est bornée pour la topologie de la convergence simple dans* F' , M *est équicontinue* (et par suite bornée pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de F').

En effet, soit H l'ensemble des transposées des applications $v \in M$; comme $M = {}^{t}H$, il suffit, d'après la prop.14, de prouver que H est *bornée* dans $\mathcal{L}(E, F)$, ou encore que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $H(x)$ des $u(x)$, où $u \in H$, est borné dans F . Pour cela, il suffit (prop.5) de montrer que pour tout $y' \in F'$, l'ensemble des $\langle u(x), y' \rangle$ est borné dans $\mathbb{R}$ lorsque u parcourt H ; comme $\langle u(x), y' \rangle = \langle x, {}^{t}u(y') \rangle$, cela résulte de l'hypothèse que M est bornée dans $\mathcal{L}(F', E')$ pour la topologie de la convergence simple, puisque ${}^{t}u$ parcourt M lorsque u parcourt H .

Exercices.- 1) a) Soient E un espace de Fréchet, E' son dual. Montrer que sur E' la topologie faible n'est identique à la topologie $\mathcal{T}_c$ de la convergence compacte que si E est de dimension finie, et la topologie $\mathcal{T}_c$ n'est identique à la topologie forte que si tout ensemble borné dans E est relativement compact (cf. exerc.).

b) Montrer que pour la topologie $\mathcal{T}_c$ et pour la topologie $\tau(E', E)$, l'espace E' est complet (remarquer que toute limite d'un filtre de Cauchy est continue sur toute partie compacte de E).

c) Soit $\mathcal{T}$ la topologie la plus fine sur E' qui, sur tout ensemble borné dans E' , induise la même topologie que la topologie faible. Soit W un ensemble ouvert pour $\mathcal{T}$, contenant 0 . Soit (p_n) une suite croissante de semi-normes continues définissant la topologie de E ;

pour tout n , on désigne par U_n l'ensemble des $x \in E$ tels que $p_n(x) \leqslant 1/n$. Montrer que, pour tout n , il existe un ensemble fini $B_n \subset U_n$ tel que, si on pose $A_n = \bigcup_{p=0}^{n-1} B_p$, l'ensemble $U_n^o \cap A_n^o$ soit contenu dans W (raisonner par récurrence sur n ; les ensembles B_p étant définis de façon à satisfaire à la condition précédente pour $p < n$, soit $K_n = U_{n+1}^o \cap \complement W$;. Montrer que K_n est faiblement compact. Si, pour toute partie finie B_n de U_n , l'intersection $A_n^o \cap B_n^o \cap K_n$ n'était pas vide, montrer qu'il existerait un point x_0' appartenant à $A_n^o \cap U_n^o \cap K_n$, et en déduire une contradiction). Conclure de là que la topologie $\mathcal{T}$ est identique à la topologie $\mathcal{T}_c$ sur E' .

d) Montrer que le dual de E' , muni de la topologie $\mathcal{T}_c$, est identique à E (utiliser l'exerc. 3b) du chap.III, § 3).

e) Déduire de c) et de d) que, pour qu'un sous-espace vectoriel de E' soit faiblement fermé, il faut et il suffit que son intersection avec tout ensemble borné dans E' soit relativement faiblement compacte.

2) Si E est un espace de dimension finie n , F un espace localement convexe quelconque, les topologies $\mathcal{T}_b$ et $\mathcal{T}_s$ sur $\mathcal{L}(E,F)$ sont identiques, et $\mathcal{L}(E,F)$ muni de cette topologie est isomorphe à l'espace produit F^n .

3) a) Si E est un espace de Fréchet non normable, montrer que son dual fort n'est pas métrisable (remarquer qu'il ne peut exister dans E de famille dénombrable (B_n) d'ensembles convexes, symétriques, bornés et fermés telle que pour tout ensemble borné B dans E , il existe $\lambda > 0$ et un entier n pour lesquels $B \subset \lambda B_n$, en utilisant le th. de Baire, et l'exerc. 3 du chap.III, § 1).

b) Montrer que, dans les mêmes hypothèses, l'application canonique $(x,x') \to \langle x,x' \rangle$ de $E \times E'$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) n'est pas continue (utiliser l'exerc. 3 du chap.III, § 1).

4) Si dans un espace de Fréchet E, il existe un ensemble dénombrable partout dense (pour la topologie forte), montrer que, dans E', il existe un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie <u>faible</u> (soit (p_n) une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de E, et soit U_n l'ensemble des $x \in E$ tels que $p_n(x) \leqslant 1/n$; montrer d'abord que, si (a_n) est une suite quelconque de points de E, il existe dans U_n^o une suite (b'_n) telle que, pour tout $x' \in U_n^o$ tout $\varepsilon > 0$ et tout entier m, il existe un indice k tel que $|\langle a_i, x'-b'_k \rangle| \leqslant \varepsilon$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$; en déduire qu'il existe dans U_n^o un ensemble dénombrable dense par rapport à U_n^o pour la topologie faible ; conclure en remarquant que E' est la réunion des U_n^o).

5) a) Soient M et N deux sous-espaces vectoriels fermés dans un espace de Fréchet E, dont la topologie est définie par une suite (p_n) de semi-normes. On suppose que $M \cap N = \{0\}$; pour que $M+N$ soit fermé, il faut et il suffit que, pour tout n, il existe un entier m et un nombre $a_n > 0$ tels que les relations $x \in M$, $p_m(x)=1$ et $y \in N$ entraînent $p_n(x-y) \geqslant a_n$ (utiliser le cor. 4 du th. 1 du § 1).

b) Montrer que, si E est de dimension infinie, il existe dans E deux sous-espaces vectoriels fermés M et N tels que $M \cap N = \{0\}$ et que $M+N$ ne soit pas fermé (se ramener au cas où il existe dans E un ensemble dénombrable partout dense ; montrer à l'aide de l'exerc. 4 qu'il existe dans E' un ensemble dénombrable (a'_n) total pour la topologie faible et libre. Soit V_k le sous-espace orthogonal à l'ensemble des a'_i d'indice $i \leqslant 2k$, P_k un supplémentaire de V_{k+1} par rapport à V_k ; choisir dans P_k une base de deux éléments x_k, y_k de sorte que si M est l'adhérence du sous-espace engendré par les x_k, N l'adhérence du sous-espace engendré par les y_k, M et N répondent à la question ; on utilisera a)).

6) Soit E un espace de Banach. Montrer que, s'il existe un ensemble dénombrable partout dense dans le dual fort E' de E, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans E (pour la topologie forte) (si (a'_n) est une suite de points de la sphère $\|x'\| = 1$, dense dans cette sphère, et (a_n) une suite de points de E telle que $\|a_n\| = 1$ et $|\langle a_n, a'_n\rangle| \geqslant \frac{1}{2}$, montrer que l'ensemble des a_n est total dans E).

7) Soit C_0 le sous-espace fermé de l'espace $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{R})$ formé des suites $x = (x_n)$ de nombres réels telles que $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ (chap. III, § 1, exerc. 5).

a) Soit e_n la suite (x_m) telle que $x_m = 0$ pour $m \neq n$ et $x_n = 1$. Montrer que l'ensemble des e_n est total dans C_0. En déduire que le dual fort de C_0 est isométrique à l'espace $L^1(\mathcal{N})$ formé des suites $x = (x_n)$ de nombres réels telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty$, muni de la norme $\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$.

b) Montrer que l'ensemble des e_n est total dans $L^1(\mathcal{N})$. En déduire que le dual fort de $L^1(\mathcal{N})$ est isomorphe à $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{R})$. Montrer que, dans $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{R})$, il n'existe pas d'ensemble dénombrable partout dense (former une partie de $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{R})$ de puissance du continu, dont deux éléments quelconques aient une distance $\geqslant 1$). En conclure que C_0 n'est pas réflexif.

c) Dans $L^1(\mathcal{N})$, caractériser les points de la sphère $\|x\| = 1$ par lesquels passe plus d'un hyperplan d'appui fortement fermé de la boule $\|x\| \leqslant 1$. Problème analogue dans l'espace C_0.

d) Dans $L^1(\mathcal{N})$, considéré comme dual de C_0, montrer qu'il existe des points de la sphère $\|x\| = 1$ par lesquels ne passe aucun hyperplan d'appui faiblement fermé ; caractériser ces points.

e) Montrer que l'espace C_0 n'est isomètrique au dual d'aucun espace de Banach (utiliser le th. de Krein-Milman et l'exerc. 13 du chap. III, § 2).

f) Montrer que, dans C_0, la suite des $z_n = \sum_{p=0}^{n} e_p$ est une suite de Cauchy faible mais n'est pas faiblement convergente.

8) Soit E un espace de Fréchet, $\mathfrak{F}$ un filtre sur E , x_0 un point faiblement adhérent à $\mathfrak{F}$; montrer que, pour toute semi-norme p continue dans E , on a $p(x_0) \leqslant \limsup_{\mathfrak{F}} p(x)$.

9) a) Soit E un espace de Fréchet. Montrer que si une suite (x_n) de points de E est telle que toute suite extraite de (x_n) admette une valeur d'adhérence faible dans E, il existe une suite extraite de (x_n) et faiblement convergente (montrer d'abord qu'on peut se restreindre au cas où il existe dans E un ensemble dénombrable partout dense ; soit alors (a'_n) une suite faiblement partout dense dans E' (exerc. 4) ; extraire de (x_n) une suite (y_n) telle que $\langle y_n, a'_p \rangle$ tende vers une limite pour tout indice p , et montrer que la suite (y_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence pour la topologie faible).

b) Soit E un espace de Banach ; afin que, pour la topologie induite par la topologie faible sur la boule S : $\| x \| \leqslant 1$ dans E , tout point de S admette un système fondamental dénombrable de voisinages, il faut et il suffit qu'il existe dans E' un ensemble dénombrable fortement partout dense (pour montrer que la condition est nécessaire, remarquer que si, dans S , 0 admet un système fondamental dénombrable de voisinages pour la topologie faible, il en est de même dans l'adhérence faible S" de S dans le bidual E" , c'est-à-dire dans la boule unité $\| x \| \leqslant 1$ dans E" : il existe alors un ensemble dénombrable $A \subset E'$ tel que tout voisinage de 0 dans S" contienne l'intersection d'un nombre fini d'ensemble de la forme $|\langle x, a' \rangle| \leqslant 1$, avec $a' \in A$;

considèrer le sous-espace fortement fermé V de E' engendré par A , et le sous-espace orthogonal V^o dans E").

10) Soient E un espace de Fréchet, A une partie de E telle que toute suite de points de A admette une valeur d'adhérence faible dans E . Montrer que l'adhérence faible de A dans E" est identique à son adhérence faible dans E. (Soient p une semi-norme continue dans E , U le voisinage de 0 dans E défini par $p(x) \leqslant 1$; si x" dans E" est faiblement adhérent à A , il suffit, d'après l'exerc. 1d), de prouver que x" est continue dans U^o, lorsque U^o est muni de la topologie induite par la topologie faible de E' . En raisonnant par l'absurde, montrer que, dans le cas contraire, il existerait un nombre $a > 0$; une suite (x_n) de points de A et une suite (x'_n) de points de U^o tels que $|\langle x'', x'_n \rangle| \geqslant a$ pour tout n , $|\langle x_m, x'_n \rangle| \leqslant \frac{a}{4}$ pour $m \leqslant n$, et $|\langle x''-x_n, x'_m \rangle| \leqslant \frac{a}{4}$ pour $m \leqslant n-1$. En utilisant l'exerc.9 a), montrer qu'on peut supposer la suite (x_n) faiblement convergente vers un point x E ; en utilisant l'exerc.17 du chap.III, § 3, montrer qu'il existe un indice p tel que $|\langle x, x'_p \rangle| \leqslant \frac{a}{2}$, et en déduire une contradiction.

En déduire que pour qu'une partie A de E soit relativement faiblement compacte dans E , il suffit que toute suite de points de A admette une valeur d'adhérence faible dans E (remarquer, à l'aide de l'exerc. 9 a), que A est bornée dans E) .

11) Soit E un espace de Banach de dimension infinie, (a_n) une famille libre dénombrable de points de E $(n \geqslant 1)$, F_n le sous-espace de E de dimension n engendré par les a_i d'indice $i \leqslant n$. Soit S_n la sphère $\|x\| = n$ dans E ; dans $S_n \cap F_n$, soit B_n un ensemble fini tel que tout point de $S_n \cap F_n$ soit à une distance $\leqslant 1/n$ de B_n.

Montrer que 0 est faiblement adhérent à l'ensemble $B = \bigcup_n B_n$.

12) Soit (E_n) une famille dénombrable d'espaces de Fréchet, $E = \prod_n E_n$ l'espace de Fréchet produit des E_n . Montrer que la topologie faible sur E est identique à la topologie produit des topologies faibles sur chacun des facteurs E_n (chap.I) ; en déduire que, pour que E soit réflexif, il faut et il suffit que chacun des espaces E_n soit réflexif.

13) Soit A un ensemble convexe fermé dans un espace de Banach réflexif E ; montrer qu'il existe un point de A dont la norme soit égale à la distance de 0 à A (cf. Top.gén.,chap.IV, § 6,th.3).

14) On dit que la norme $\|x\|$ dans l'espace normé E est uniformément convexe si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $\|x\| = 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $\frac{1}{2}\|x+y\| \geqslant 1-\delta$ entraînent $\|x-y\| \leqslant \varepsilon$. Un espace normé est dit uniformément convexe si sa norme est uniformément convexe.

a) Montrer que dans un espace uniformément convexe E , la boule unité $\|x\| \leqslant 1$ est strictement convexe.

b) Soient E un espace de Banach uniformément convexe, A un ensemble convexe fermé dans E . Montrer qu'il existe dans A un point et un seul dont la distance à 0 soit égale à la distance de 0 à A (si $d > 0$ est la distance de 0 à A , et si, pour tout $\alpha > 0$, A_α est l'ensemble des points $x \in A$ tels que $d \leqslant \|x\| \leqslant d+\alpha$, montrer que les A_α forment une base de filtre de Cauchy sur A) .

c) Montrer que tout espace de Banach uniformément convexe E est réflexif (soit x'' un point de E'' tel que $\|x''\| = 1$, S'' la boule unité $\|y''\| \leqslant 1$ dans E'' ; pour tout $\delta > 0$ et tout $x' \in E'$ tel que $\|x'\| = 1$ et $1 \geqslant \langle x'', x'\rangle \geqslant 1 - \frac{\delta}{2}$, soit $A_{\delta,x'}$ l'ensemble des

$x \in S'' \cap E$ tels que $|\langle x''-x, x'\rangle| \leqslant \frac{\delta}{2}$; montrer que les ensembles $A_{\delta, x'}$ engendrent un filtre de Cauchy pour la topologie forte sur E)

d) Soit E un espace uniformément convexe, $\mathfrak{F}$ un filtre sur E, faiblement convergent vers x_0. Montrer que si $\liminf_{\mathfrak{F}} \|x\| = \|x_0\|$ (resp. $\lim_{\mathfrak{F}} \|x\| = \|x_0\|$), x_0 est fortement adhérent à $\mathfrak{F}$ (resp. limite forte de $\mathfrak{F}$).

e) Montrer que si E est un espace normé uniformément convexe, V un sous-espace vectoriel fermé de E, V et E/V sont des espaces normés uniformément convexes.

15) On appelle <u>espace de Montel</u> un espace de Fréchet E dans lequel tout ensemble borné est relativement <u>fortement</u> compact.

a) Si un espace de Montel est normable, il est de dimension finie.

b) Montrer que si E est un espace de Montel, tout ensemble borné dans son dual E' est fortement relativement compact dans E' (utiliser le th. d'Ascoli).

c) Montrer que tout espace de Montel est réflexif.

d) Tout sous-espace fermé d'un espace de Montel est un espace de Montel ; tout produit d'une infinité dénombrable d'espaces de Montel est un espace de Montel.

16) Soit E un espace normé <u>non complet</u>, $\hat{E}$ son complété, E' le dual fort de E, qui est isomorphe au dual fort de $\hat{E}$.

Donner un exemple où il existe dans E' un ensemble faiblement borné pour la topologie $\sigma(E', E)$, mais non fortement borné, ni par suite équicontinu (prendre pour E le sous-espace normé de C_0 (exerc.7) formé des suites (x_n) n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls).

17) Soient E et F deux espaces localement convexes métrisables. Montrer que si une application linéaire u de E dans F est un homomorphisme faible, c'est aussi un homomorphisme fort (se ramener au cas où u est un isomorphisme faible de E dans F ; remarquer qu'on a alors ${}^t u(F') = E'$, et utiliser la prop.3 du §1).

18) Soient E et F deux espaces de Banach. Montrer que, pour qu'une application linéaire continue u de E dans F soit un homomorphisme, il faut et il suffit que sa transposée ${}^t u$ soit un homomorphisme (fort ou faible) de F' dans E' (se ramener au cas où $u(E)=F$ et utiliser la prop.12) .

19) Soient E et F deux espaces normés, u une application linéaire continue de E dans F .

a) Si u est un homomorphisme de E dans F , ${}^t u$ est un homomorphisme fort de F' dans E' .

b) Inversement, si E est complet et si ${}^t u$ est un homomorphisme fort de F' dans E' , u est un homomorphisme de E dans F et ${}^t u$ un homomorphisme faible de F' dans E' (considérer u comme une application de E dans $\hat{F}$, et appliquer l'exerc. 18).

c) Donner un exemple où E est non complet, ${}^t u$ un isomorphisme fort de F' dans E' , mais où u n'est pas un isomorphisme de E dans F (utiliser l'exerc. 2 du chap.III, §1).

d) Donner un exemple où E est non complet, u un isomorphisme de E dans F , ${}^t u$ un isomorphisme fort de F' dans E' , mais non un isomorphisme faible (considérer un cas où u(E) n'est pas fermé dans F).

e) Si F est complet et si ${}^t u$ est un homomorphisme faible de F' dans E' , montrer que ${}^t u$ est un homomorphisme fort de F' dans E' (remarquer que u(E) est fermé dans F , et prolonger u à $\hat{E}$).

f) Donner un exemple où E est complet, F n'est pas complet, ${}^t u$ est un isomorphisme faible de F' dans E' , mais non un isomorphisme fort (utiliser l'exerc.2 du chap.III, §2) .

20) Montrer que si un espace de Banach E est tel que l'espace de Banach E' soit réflexif , E est réflexif (considérer E comme sous-espace de E").

21) a) Soit E un espace de Fréchet, V un sous-espace faiblement partout dense dans le dual E' , $\overline{V}$ l'adhérence de V dans E' pour la topologie forte. Montrer que sur toute partie bornée A de E , les topologies induites par $\sigma(E, V)$ et $\sigma(E,\overline{V})$ coïncident.

b) Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E' , faiblement partout denses et fortement fermés, et tels que sur toute partie bornée A de E , les topologies induites par $\sigma(E,V_1)$ et $\sigma(E,V_2)$ coïncident, on a $V_1=V_2$.

22) Soient E un espace de Fréchet, V un sous-espace vectoriel de E'. On dit que V est <u>minimal</u> s'il est un élément minimal dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E' faiblement partout denses et fortement fermés. Montrer que pour que V soit minimal, il faut et il suffit que E" soit somme directe de E et du sous-espace V^0 de E" orthogonal à V .

23) Soient E un espace de Banach, V un sous-espace vectoriel fortement fermé du dual E' de E .

a) Montrer que si V est minimal (exerc.22) il existe une constante $k > 0$ telle que $\|x+z\| \geq k\|x\|$ pour tout $x \in E$ et tout $z \in V^0$ (cf. §1, th.1).

b) Si S est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans E' , montrer que l'adhérence faible de $V \cap S$ dans E' contient alors une boule de centre 0 et de rayon k (soit $x' \in E'$ n'appartenant pas à l'adhérence faible de $V \cap S$, et soit $\|x'\| = r$; montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in E$ tel que $\sup\limits_{x' \in V \cap S} |\langle x,x' \rangle| \leqslant$ $\leqslant (r+\varepsilon)\|x\|$ et $z \in V^{\circ}$ tel que $\|x+z\| = \sup\limits_{x' \in V \cap S} |\langle x,x' \rangle|$).

c) Montrer que, pour que V soit minimal, il faut et il suffit que, pour la topologie $\sigma(E,V)$, tout ensemble fortement borné dans E soit relativement compact (pour voir que la condition est nécessaire, remarquer que d'après a) et l'exerc. 22, la projection de E" sur E parallèlement à V° est un isomorphisme, et que E''/V° est le dual de V ; pouvoir que la condition est suffisante, utiliser l'exerc.21).

d) Montrer que pour qu'un espace de Banach E soit isomorphe (fortement) au dual d'un espace de Banach F , il faut et il suffit qu'il existe dans E' un sous-espace minimal (utiliser c)).

24) Soit E un espace de Fréchet, $\mathfrak{F}$ un filtre faiblement convergent dans le dual E' , ayant une base dénombrable (B_n) . Montrer qu'il existe un des ensembles B_n qui est borné dans E' (appliquer le th. de Baire aux ensembles polaires B_n°).

§ 3. Limites inductives d'espaces de Fréchet.

1. Définition d'une limite inductive d'espaces de Fréchet.

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), $(E_n)_{n \geqslant 1}$ une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E , dont chacun est muni d'une topologie $\mathcal{C}_n$ pour laquelle il est un espace de Fréchet, et qui satisfait aux conditions suivantes :

(LI_I) E est réunion de la suite (E_n) .

(LI_{II}) La topologie induite par $\mathcal{C}_{n+1}$ sur E_n est identique à $\mathcal{C}_n$.

Il en résulte aussitôt (E_n étant complet pour $\mathcal{T}_n$) que E_n est un sous-espace fermé de E_{n+1}.

Nous allons voir que, parmi toutes les topologies $\mathcal{T}$ d'espace localement convexe sur E qui induisent sur chaque E_n une topologie moins fine que $\mathcal{T}_n$, il en existe une $\mathcal{T}_\omega$ plus fine que toutes les autres. En effet, une topologie $\mathcal{T}$ doit être telle que, pour tout voisinage convexe V de 0 dans $\mathcal{T}$, l'intersection $V \cap E_n$ soit un voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{T}_n$. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble de tous les ensembles convexes symétriques (resp. cerclés) V ayant cette propriété : il est clair que le sous-espace vectoriel de E engendré par un ensemble $V \in \mathfrak{S}$ contient tous les sous-espaces E_n, donc est identique à E. Par suite (chap.III, §1, prop.1) l'ensemble $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie $\mathcal{T}_\omega$ d'espace localement convexe sur E, qui est évidemment la plus fine de toutes les topologies $\mathcal{T}$. On dit que l'espace vectoriel E, muni de la topologie $\mathcal{T}_\omega$ est la limite inductive de la suite d'espaces de Fréchet (E_n).

Exemple.- Soit G un espace topologique localement compact non compact et dénombrable à l'infini, c'est-à-dire réunion dénombrable d'ensembles compacts G_n. On peut supposer que les G_n sont tels que G_n soit contenu dans l'intérieur de G_{n+1} ; en effet, tout ensemble compact dans G admet un voisinage ouvert relativement compact ; en définissant l'ensemble ouvert relativement compact H_{n+1} par récurrence, comme voisinage de $\overline{H}_n \cup G_n$ on voit que les $\overline{H}_n$ répondent à la question. Tout ensemble compact $K \subset G$ est alors contenu dans un des G_n : en effet, les intérieurs des G_n forment un recouvrement ouvert de G, donc de K.

Cela étant, on dit qu'une fonction numérique u définie et continue dans G, est une fonction <u>à support compact</u> s'il existe un ensemble compact $K \subset G$ tel que $u(x)=0$ pour $x \notin K$. L'ensemble des fonctions continues numériques à support compact continues dans G est un espace vectoriel $\mathcal{M}(G)$. Pour toute fonction $u \in \mathcal{M}(G)$, il existe un indice n tel que $u(x)=0$ pour $x \notin G_n$; désignons par E_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(G)$ formée des fonctions nulles dans $\complement G_n$, et munissons E_n de la topologie $\mathcal{T}_n$ de la <u>convergence uniforme</u> dans G_n ; les topologies ainsi définies satisfont à l'axiome (LI_{II}) de façon évidente, car si une fonction $u \in E_n$ est telle que $|u(x)| \leqslant a$ dans G_n, on a aussi $|u(x)| \leqslant a$ dans G tout entier. Cette même remarque prouve qu'un filtre de Cauchy dans E_n converge uniformément non seulement dans G_n, mais dans G tout entier, et a évidemment pour limite une fonction de G_n ; autrement dit, E_n est <u>complet</u>, et comme c'est un sous-espace de l'espace de Banach $\mathcal{C}(G_n, \mathbb{R})$ des fonctions numériques continues dans G_n, c'est un espace de Banach. On peut donc définir sur $\mathcal{M}(G)$ une topologie qui fait de cet espace la <u>limite inductive</u> des espaces de Banach E_n.

Soit (F_n) une deuxième suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E, dont chacun est muni d'une topologie $\mathcal{T}'_n$, pour laquelle il est un espace de Fréchet, et de sorte que les axiomes (LI_I) et (LI_{II}) soient vérifiés ; en outre on suppose que, pour tout indice n, il existe un indice p tel que $F_n \subset E_p$ et que $\mathcal{T}'_n$ soit la topologie induite sur F_n par $\mathcal{T}_p$, et un indice q tel que $E_n \subset F_q$ et que la topologie $\mathcal{T}_n$ soit induite sur E_n par $\mathcal{T}'_q$. L'espace E, muni de la topologie $_\omega$, est alors aussi limite inductive de la suite (F_n) : en effet, pour tout voisinage V de O dans la topologie $\mathcal{T}_\omega$, l'intersection $V \cap F_n$, égale à $(V \cap E_p) \cap F_n$, est un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}'_n$, donc V est un voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{C}'_\omega$, limite inductive des $\mathcal{C}'_n$, ce qui prouve que $\mathcal{C}_\omega$ est moins fine que $\mathcal{C}'_\omega$, et on prouve de même que $\mathcal{C}'_\omega$ est moins fine que $\mathcal{C}_\omega$. En particulier, si (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers, E est limite inductive de la suite (E_{n_k}) extraite de la suite (E_n).

PROPOSITION 1.- <u>L'espace</u> E <u>est séparé et pour tout</u> n , <u>la topologie induite par</u> $\mathcal{C}_\omega$ <u>sur</u> E_n <u>est identique à</u> $\mathcal{C}_n$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme</u>.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe séparé</u> F <u>un sous-espace vectoriel fermé de</u> E , V <u>un ensemble ouvert convexe dans</u> F , x <u>un point de</u> E <u>n'appartenant pas à</u> V . <u>Il existe un ensemble ouvert convexe</u> U <u>dans</u> E , <u>tel que</u> $U \cap F = V$ <u>et que</u> $x \notin U$.

On peut supposer pour simplifier que $0 \in V$. L'ensemble $F \cap \complement V$ est fermé dans F , donc dans E ; il existe donc un voisinage ouvert convexe W de 0 dans E tel que $W \cap F \subset V$; montrons que si W est assez petit, <u>l'enveloppe convexe</u> U de V et de W répond à la question. En effet, U est l'ensemble des points $\lambda x+(1-\lambda)y$, où $x\in V$, $y \in W$ et $0 \leq \lambda \leq 1$; si $y \notin F$, le seul point du segment joignant x à y qui soit dans F est le point x ; au contraire, si $y \in F$, on a $y \in F \cap W \subset V$, donc tous les points de ce segment sont dans V , ce qui prouve bien que $U \cap F=V$. Pour tout $x \in V$, soit S_x l'enveloppe convexe de x et de W . L'ensemble S_x est réunion du point x et de tous les homothétiques de W par rapport à x dans un rapport μ tel que $0 < \mu \leq 1$; le complémentaire de x dans S_x est donc <u>ouvert</u> dans E . Or, U est réunion des S_x lorsque x parcourt V ; tout point de U n'appartenant pas à V est donc intérieur à U . D'autre part, si $x \in V$, il existe $\lambda > 1$ tel que $y = \lambda x \in V$; par suite x appartient à S_y

et est distinct de y , ce qui montre encore que x est intérieur à U , et par suite que U est ouvert dans E . Enfin, si $x \in F \cap \complement V$, on a évidemment $x \notin U$; d'autre part, si $x \notin F$, il existe W assez petit pour que $x \notin W+F$, puisque l'espace quotient E/F est séparé ; a fortiori, on a $x \notin U$, ce qui achève la démonstration.

Ce lemme étant démontré, il suffit de prouver que pour tout voisinage ouvert convexe V_n de 0 dans E_n , il existe un voisinage ouvert convexe V de 0 dans E tel que $V \cap E_n = V_n$. Or, d'après le lemme, on peut définir par récurrence sur p , un voisinage ouvert convexe V_{n+p} de 0 dans E_{n+p} de sorte que $V_{n+p+1} \cap E_{n+p} = V_{n+p}$ pour tout $p \geqslant 0$; il est clair que la réunion V des V_{n+p} (pour $p \geqslant 0$) est un ensemble convexe symétrique (resp. cerclé) dont la trace sur E_{n+p} est V_{n+p} , et qui est un voisinage de 0 dans E pour la topologie .

PROPOSITION 2.- <u>Pour qu'un ensemble</u> $A \subset E$ <u>soit borné, il faut et il suffit qu'il existe un entier</u> n <u>tel que</u> $A \subset E_n$ <u>et que</u> A <u>soit borné dans</u> E_n .

La condition est évidemment suffisante ; pour voir qu'elle est nécessaire, il suffit de prouver que si un ensemble N n'est contenu dans aucun des E_n , il ne peut être borné. Or, il existe alors une suite croissante d'entiers n_k et une suite de points x_{n_k} de N telle que $x_{n_k} \notin E_{n_k}$ et $x_{n_k} \in E_{n_{k+1}}$; on peut évidemment se borner au cas où $n_k=k$. En vertu du lemme, on peut définir une suite (V_k) telle que V_k soit un voisinage convexe de 0 dans E_k , que l'on ait $V_{k+1} \cap E_k = V_k$, et que $x_k/k \notin V_{k+1}$. La réunion V des V_k est alors un voisinage de 0 dans E , tel que $x_k/k \notin V$ pour tout entier k ; il en résulte que $N \not\subset k.V$, quel que soit k , ce qui prouve que N n'est pas borné.

COROLLAIRE .- <u>Toute suite de Cauchy dans</u> E <u>est convergente</u>.

En effet, si (x_n) est une suite de Cauchy dans E, pour tout voisinage symétrique V de 0 dans E, il existe un entier m tel que $x_m - x_n \in V$ pour tout $n \geqslant m$; comme l'ensemble des x_p d'indice $p \leqslant m$ est fini, donc borné, il existe un $\lambda > 0$ tel que cet ensemble soit contenu dans λV, donc l'ensemble des x_n est contenu dans $(\lambda + 1)V$, ce qui prouve qu'il est *borné*. Il existe par suite un entier q tel que $x_n \in E_q$ pour tout n ; la suite (x_n) étant alors une suite de Cauchy dans l'espace complet E_q, est convergente.

On peut montrer que E est *complet* (exerc. 2).

2. Fonctions linéaires continues définies dans une limite inductive d'espaces de Fréchet.

PROPOSITION 3.- *Soit E une limite inductive d'espaces de Fréchet E_n ; pour qu'une application linéaire u de E dans un espace localement convexe F soit continue, il faut et il suffit que sa restriction à chacun des E_n soit continue.*

La condition est évidemment nécessaire. Inversement si elle est vérifiée, et si U est un voisinage convexe de 0 dans F, $\overset{-1}{u}(U) \cap E_n$ est un voisinage convexe de 0 dans E_n pour tout n, donc $\overset{-1}{u}(U)$ est un voisinage de 0 dans E, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 1.- *Pour que u soit continue, il faut et il suffit que pour tout ensemble A borné dans E, $u(A)$ soit borné dans F.*

En effet, cela implique que la restriction de u à E_n est continue dans E_n (§ 1, prop. 3).

COROLLAIRE 2.- *Pour que u soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme q sur F, continue dans F, $q(u(x))$ soit semi-continue inférieurement dans E.*

En effet, si u_n est la restriction de u à E_n, $q(u_n(x))$ est semi-continue inférieurement dans E_n, donc (§ 1, prop.4) u_n est continue dans E_n.

COROLLAIRE 3.- Pour qu'un sous-espace vectoriel V dans E soit fermé, il faut et il suffit que $V \cap E_n$ soit fermé pour tout n.

Il suffit de le démontrer lorsque V est un hyperplan, tout sous-espace vectoriel fermé étant intersection d'hyperplans fermés. Or, lorsque V est un hyperplan d'équation $u(x)=0$, l'hypothèse entraîne que la restriction de u à chaque E_n est continue (chap.I, § 2, th.1) ; u est donc continue, et par suite V fermé.

3. Espaces de fonctions linéaires continues dans une limite inductive d'espaces de Fréchet.

Soient E une limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet E_n, F un espace localement convexe. Sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F, nous considèrerons encore la topologie $\mathcal{T}_s$ de la convergence simple et la topologie $\mathcal{T}_b$ de la convergence uniforme dans les parties bornées de E ; ces topologies sont séparées et compatibles avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

PROPOSITION 4.- Si l'espace F est complet, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est complet pour la topologie $\mathcal{T}_b$.

En effet, le raisonnement de la prop.1 du § 2 montre qu'un filtre de Cauchy Φ sur $\mathcal{L}(E,F)$ (pour la topologie $\mathcal{T}_b$) converge uniformément dans tout ensemble borné $A \subset E$ vers une application linéaire u de E dans F, telle que $u(A)$ soit borné pour tout ensemble borné $A \subset E$, et qui est par suite continue, en vertu du cor.1 de la prop.3.

THÉORÈME 1.- Soient E une limite inductive d'espaces de Fréchet, F un espace localement convexe, H une partie de $\mathcal{L}(E,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) H est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_b$;

b) H est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_s$;

c) H est équicontinue.

En effet, on voit comme dans le th.1 du § 2, que a) entraîne b) et c) entraîne a). Pour voir que b) entraîne c), considèrons une semi-norme continue q sur F , et la fonction $f(x) = \sup_{u \in H} q(u(x))$, qui est finie convexe et semi-continue inférieurement dans E ; soit V l'ensemble des points de E où $f(x) \leqslant 1$. D'après le th.1 du § 2, l'intersection $V \cap E_n$ est un voisinage convexe de 0 dans E_n ;donc V est un voisinage de 0 dans E , ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Soit (u_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F . Si (u_n) converge simplement vers u_o dans E , u_o est une application linéaire continue de E dans F , la suite (u_n) est bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$ et converge uniformément vers u_o dans toute partie compacte de E .

4. Dual fort d'une limite inductive d'espaces de Fréchet.

Soit E une limite inductive d'espaces de Fréchet E_n ; le dual E' de E , muni de la topologie $\mathcal{C}_b$ de la convergence uniforme dans les parties bornées de E , sera encore appelé le dual fort de E . Sa topologie est définie par les semi-normes $|x'|_A = \sup_{x \in A} \left|\langle x,x' \rangle\right|$, où A parcourt l'ensemble des parties bornées de E ; on peut encore dire qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans E' est formée par les ensembles polaires des parties bornées de E . Le dual fort de E est complet en vertu de la prop.4 .

THÉORÈME 2.- <u>Soient</u> E <u>une limite inductive d'espaces de Fréchet</u>, H <u>une partie de son dual</u> E' . <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

a) H <u>est fortement borné</u> ;

b) H <u>est faiblement borné</u> ;

c) H <u>est faiblement relativement compact</u> ;

d) <u>il existe un voisinage</u> U <u>de</u> 0 <u>dans</u> E <u>tel que</u> $H \subset U^{\circ}$.

Les démonstrations sont identiques à celles du th.2 et de la prop.3 du § 2, compte-tenu du th.1 ci-dessus.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les corollaires correspondant à ceux du th.2 du § 2 .

On appelle encore <u>bidual</u> de E le dual E" du dual fort de E , et topologie <u>forte</u> sur E" la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles <u>bornés</u> de E' ; avec les notations du § 2, on montre encore de la même manière que, lorsque U parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans E , convexes, fermés et symétriques (resp. cerclés), les ensembles $U^{\circ\circ}$ forment un système fondamental de 0 dans E" pour la topologie forte ; il s'ensuit que l'application canonique $x \to \tilde{x}$ de E dans E" est un <u>isomorphisme</u> (pour les topologies fortes), ce qui permet d'identifier E à un sous-espace de E" , faiblement partout dense dans E" . On dit encore que E est <u>réflexif</u> si E (ainsi identifié à un sous-espace de son bidual E") <u>est identique à</u> E" .

THÉORÈME 3.- <u>Soit</u> E <u>une limite inductive d'espaces de Fréchet</u> E_n . <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

a) E <u>est réflexif</u>.

b) <u>Chacun des espaces</u> E_n <u>est réflexif</u>.

c) <u>Tout ensemble borné dans</u> E <u>est faiblement relativement compact</u>.

En effet, l'équivalence de a) et c) se démontre exactement comme dans le th.3 du §2 . Comme toute ensemble borné dans E est contenu dans un E_n (prop.2), b) et c) sont équivalents d'après le th.3 du §2 .

THÉORÈME 4.- Soient E une limite inductive d'espaces de Fréchet, V un sous-espace fermé de E . Si E est réflexif, V est réflexif, et l'application canonique du dual fort de V sur l'espace quotient E'/V^o du dual fort de E par le sous-espace V^o orthogonal à V , est un isomorphisme.

La démonstration est identique à celle du th.4 du §2 .

On prouve de la même manière que, si E est réflexif et si on munit V^o de la topologie induite par celle de E' , l'application canonique du dual fort de V^o sur l'espace quotient E/V de E (muni de la topologie quotient par V de la topologie forte de E) est un isomorphisme.

PROPOSITION 5.- Soient E une limite inductive d'espaces de Fréchet F un espace localement convexe, u une application linéaire de E dans F ; pour que u soit fortement continue, il faut et il suffit que u soit faiblement continue.

PROPOSITION 6.- Soient E et F deux limites inductives d'espaces de Fréchet, u une application linéaire continue de E dans F ; la transposée ^tu est une application linéaire fortement continue de F' dans E' .

Les démonstrations sont identiques à celles des prop.10 et 11 du §2.

COROLLAIRE.- Soit v une application linéaire de F' dans E' ; si v est faiblement continue dans F' , elle est fortement continue.

On notera donc que lorsque E et F sont réflexifs, les notions d'application linéaire fortement continue et d'application linéaire faiblement continue de F' dans E' , sont identiques.

PROPOSITION 7.- Soient E et F deux limites inductives d'espaces de Fréchet réflexifs. Si v est une application linéaire biunivoque et continue de F' sur E', v est un isomorphisme (fort et faible) de F' sur E' , et sa transposée $u = {}^tv$ est un isomorphisme fort de E sur F .

L'hypothèse entraîne que u est une application linéaire biunivoque et continue de E dans F et que u(E) est partout dense dans F ; tout revient à prouver que u(E) est <u>fermé</u> dans F ; il en résultera en effet que u(E)=F ; en outre, si B est borné dans F , $\overset{-1}{u}(B)$ est borné dans E , en raison de la relation $\langle u(x),y'\rangle = \langle x, {}^t u(y')\rangle$, et du fait que ${}^t u(y')$ est un élément arbitraire de E' en vertu de l'hypothèse ; l'application réciproque de u est par suite continue, d'où la proposition (cor.1 de la prop.2). Pour voir que u(E) est fermé, il suffit, d'après le cor.3 de la prop.2, de montrer que $u(E)\cap F_n$ est fermé, si (F_n) est une suite d'espaces de Fréchet dont F est limite inductive. Le raisonnement est le même que dans la prop.13 du § 2 ; si (x_n) est une suite de points de E telle que $u(x_n)\in F_m$ pour tout n , et que la suite $(u(x_n))$ tende vers un point $b\in F_n$, on voit que (x_n) est bornée dans E , donc admet une valeur d'adhérence faible a ; $(u(x_n))$ ayant u(a) comme valeur d'adhérence faible et convergeant vers b , on a nécessairement b=u(a), ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 8.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux limites inductives d'espaces de Fréchet</u>, M <u>une partie de</u> $\mathcal{L}(F',E')$, <u>formée d'applications linéaires faiblement continues de</u> F' <u>dans</u> E' . <u>Si</u> M <u>est bornée pour la topologie de la convergence simple dans</u> F' , M <u>est équicontinue</u>.

La démonstration est la même que celle des prop.14 et 15 du § 2 .

<u>Exercices</u>.- 1) Soit E une limite inductive d'espaces de Fréchet E_n , et soit u une forme linéaire sur E', telle que, pour toute partie bornée B de E' , la restriction de u à B soit faiblement continue.

a) Montrer qu'il existe un indice n tel que u(x')=0 dans E_n^o (dans le cas contraire, on peut se ramener au cas où il existerait une suite (x'_n) de points de E', telle que $x'_n\in E_n^o\cap \complement(E_{n-1}^o)$

et que $u(x'_n)=1$ pour tout n ; remarquer que la suite (x'_n) converge faiblement vers 0).

b) Soit φ l'application canonique du dual E'_n de E_n sur l'espace quotient E'/E^0_n (qui est un isomorphisme faible, mais peut-être pas un isomorphisme fort). Montrer que tout ensemble borné dans E'_n est de la forme $\overset{-1}{\varphi}(V^0+E^0_n)$, où V est un voisinage de 0 dans E (remarquer que V^0 est faiblement compact dans E', et en déduire que $V^0+E^0_n = (V \cap E_n)^0$).

c) Soit $v=u\circ\varphi$, et $H=\overset{-1}{v}(0)$; montrer que l'intersection de H et tout ensemble borné dans E'_n est faiblement fermée (si $L=\overset{-1}{u}(0)$, remarquer que $L\cap(V^0+E^0_n)=(L\cap V^0_n)+E^0_n$, et que $L\cap V^0_n$ est faiblement compact). En déduire que v est faiblement continue dans E'_n (§ 2, exerc. 1), et par suite que u est de la forme $x' \rightarrow \langle x, x'\rangle$, avec $x \in E$.

2) Soit E une limite inductive d'espaces de Fréchet E_n, et $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur E pour la topologie forte. Dans le dual algèbrique $E'^* \supset E$ de E', $\mathfrak{F}$ a (pour la topologie de la convergence simple) une limite u, forme linéaire sur E'. Montrer que $u \in E$, et par suite que E est <u>complet</u> (utiliser l'exerc. 1). En déduire que E <u>n'est pas métrisable</u>.

3) Soient E, F deux limites inductives d'espaces de Fréchet E_n, F_n respectivement, et soit u une application linéaire continue de E <u>sur</u> F. On pose $G_{mn} = E_m \cap \overset{-1}{u}(F_n)$.

a) Montrer que pour tout m, il existe n tel que $G_{mn} = E_m$ (remarquer que E_m est réunion des sous-espaces fermés G_{mn}).

b) Montrer que, pour tout n, il existe m tel que $u(G_{mn}) = F_n$ (utiliser l'exerc. 6 du § 1).

c) Déduire de a) et b) que u est un homomorphisme de E sur F (utiliser le th.1 du § 1, et la définition des voisinages de 0 dans E et dans F).

4) Soit (E_n) une famille dénombrable d'espaces de Fréchet, F la somme directe (non topologique) de ces espaces vectoriels, $F_n \subset F$ le sous-espace somme des E_p d'indice $p \leqslant n$. Si on considère sur F_n la topologie $\mathcal{C}_n$ produit de celles des E_p d'indice $p \leqslant n$, ces topologies satisfont à (LI_{II}), et on peut donc définir sur F une topologie pour laquelle F est limite inductive des F_n. Montrer que le dual F' de F est alors isomorphe à l'espace produit des duals E'_n des E_n.

5) a) Soit E une limite inductive d'espaces de Fréchet E_n, et soit (x_n) une suite de points de E telle que $x_n \in E_n \cap \complement E_{n-1}$. Montrer que la suite (x_n) n'a aucune valeur d'adhérence faible dans E (il suffit de prouver que 0 ne peut être valeur d'adhérence faible de la suite ; à l'aide du th. de Hahn-Banach et de la prop.2, définir une forme linéaire x' continue dans E et telle que $|\langle x_n, x'\rangle| \geqslant 1$ pour tout n à partir d'un certain rang).

b) En utilisant a), généraliser à E les exerc. 9 a) et 10 du § 2.

¶6) Montrer que si E est limite inductive d'une suite d'espaces de Montel (§ 2, exerc. 15), tout ensemble borné dans E est fortement relativement compact, ainsi que tout ensemble borné dans le dual de E.

§ 4. Applications complètement continues.

1. Définition et propriétés des applications complètement continues.

DÉFINITION 1.- Soient E et F deux espaces de Banach ; on dit qu'une application linéaire u de E dans F est complètement continue si pour toute partie bornée B de E , u(B) est relativement (fortement) compact dans F .

Il ~~Exempk~~ résulte de cette définition que toute application linéaire complètement continue est continue ; la réciproque est inexacte.

Exemples.- 1) Toute application linéaire continue u de rang fini de E dans F est complètement continue, car u(E) est de dimension finie, donc tout ensemble borné dans u(E) est relativment compact dans u(E) , et a fortiori dans F , puisque u(E) est fermé dans F.

2) Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, E l'espace de Banach $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions numériques continues dans I , muni de la norme $\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|$. Soit $K(s,t)$ une fonction continue dans $I \times I$; l'application linéaire U qui, à toute fonction $x \in E$ fait correspondre la fonction continue $s \to \int_a^b K(s,t)x(t)dt$, est complètement continue. En effet, si on pose $y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt$, on a $y(s_1)-y(s_2) = \int_a^b (K(s_1,t)-K(s_2,t)) x(t)dt$, donc, si $\|x\| \leqslant M$, on a

$$|y(s_1)-y(s_2)| \leqslant M \int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)| dt$$

. Or, comme K est uniformément continue dans $I \times I$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la relation $|s_1-s_2| \leqslant \delta$ entraîne $|K(s_1,t)-K(s_2,t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in I$, et par suite

$$|y(s_1)-y(s_2)| \leqslant M(b-a)\varepsilon$$

Il en résulte que l'image par U de la boule B : $\|x\| \leqslant M$ est équicontinue dans I ; d'autre part, si N est la borne supérieure de $|K(s,t)|$ dans $I \times I$, on a $|y(s)| \leq MN(b-a)$ pour tout $s \in I$ et tout $x \in B$; en vertu du th. d'Ascoli (Top.gén., chap.X, § 4, th.1) l'ensemble $U(B)$ est relativement compact dans E, ce qui démontre la proposition.

3) Si E est de dimension infinie, l'application identique $x \to x$ de E sur lui-même n'est pas complètement continue, car la boule $\|x\| \leq 1$ n'est pas relativement compacte dans E (chap.I, § 2, th.3)

PROPOSITION 1.- Soit u une application complètement continue de E dans F. Si $\mathfrak{F}$ est un filtre borné dans E, faiblement convergent vers un point a, $u(\mathfrak{F})$ est une base de filtre fortement convergente vers $u(a)$.

En effet, soit M un ensemble borné appartenant à $\mathfrak{F}$; $N=u(M)$ est relativement fortement compact dans F, d'où résulte aussitôt que la base de filtre $u(\mathfrak{F})$ a au moins un point fortement adhérent dans F ; comme tout point fortement adhérent à $u(\mathfrak{F})$ est aussi faiblement adhérent à cette base de filtre, et que par hypothèse $u(\mathfrak{F})$ converge faiblement vers $u(a)$ (puisque u est faiblement continue), $u(a)$ est le seul point adhérent à la base de filtre $u(\mathfrak{F})$; comme le filtre engendré par $u(\mathfrak{F})$ a une base formée d'ensembles contenus dans l'ensemble compact $\bar{N}$, il converge fortement vers $u(a)$ (Top.gén., chap.I, § 10, prop.1).

PROPOSITION 2.- Si u est une application complètement continue de E dans F, sa transposée ${}^t u$ est une application complètement continue de F' dans E'.

Soit S la boule unité $\|y'\| \leq 1$ dans l'espace F' ; il faut prouver que $u(S)$ est fortement relativement compacte dans E', c'est-à-dire (puisque E' est complet) que $u(S)$ est fortement précompact ; en d'autres termes, il faut prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des points y'_i

en nombre fini dans S , tels que pour tout $y' \in S$, il y ait au moins un indice i pour lequel $\| {}^t u(y') - {}^t u(y'_i) \| \leqslant \varepsilon$.

Comme u est complètement continue, il existe un nombre fini de points x_k dans la boule B : $\|x\| \leqslant 1$ tels que, pour tout $x \in B$, il existe au moins un indice k pour lequel $\|u(x)-u(x_k)\| \leqslant \varepsilon$; il en résulte qu'on a $|\langle u(x)-u(x_k), y' \rangle| \leqslant \varepsilon$ pour tout $y' \in S$; d'autre part, S est <u>faiblement compacte</u> dans F' (chap.I, § 3, th2), donc il existe des points y'_i en nombre fini tels que, pour tout $y' \in S$, il y ait un indice i au moins pour lequel

$$|\langle u(x_k), y'-y'_i \rangle| \leqslant \varepsilon$$

pour <u>tout</u> indice k ; avec ce choix des y'_i , pour tout $y' \in S$, il existe un indice i au moins tel que, pour <u>tout</u> $x \in B$, on ait

$$|\langle u(x), y'-y'_i \rangle| \leqslant |\langle u(x_k), y'-y'_i \rangle| + |\langle u(x)-u(x_k), y'-y'_i \rangle| \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui entraîne, par définition de ${}^t u$, que $\| {}^t u(y'-y'_i) \| \leqslant \varepsilon$, et démontre donc la proposition.

PROPOSITION 3.- <u>L'ensemble</u> $\mathcal{K}(E,F)$ <u>des applications complètement continues de</u> E <u>dans</u> F <u>est fermé dans l'espace</u> $\mathcal{L}(E,F)$ (muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E).

En effet, soit u un point adhérent à $\mathcal{K}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(E,F)$; montrons que pour toute partie bornée B de E , $u(B)$ est relativement fortement compact dans F . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse $v \in \mathcal{K}(E,F)$ tel que $\|u(x)-v(x)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in B$; comme v est complètement continue, il existe un nombre fini de points x_i de B tels que pour tout $x \in B$, il y ait au moins un indice i tel que $\|v(x)-v(x_i)\| \leqslant \varepsilon$; on aura donc pour le même indice i , $\|u(x)-u(x_i)\| \leqslant 3\varepsilon$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE.- L'adhérence, dans $\mathcal{L}(E,F)$ de l'ensemble des applications linéaires de rang fini de E dans F , est formée d'applications complètement continues.

Notons encore que si f est une application continue quelconque de F dans un espace de Banach G , et u une application complètement continue de E dans F , $f \circ u$ est une application complètement continue de E dans G ; de même, si g est une application continue de E dans F , v une application complètement continue de F dans G , $v \circ g$ est complètement continue. Enfin, si u et v sont deux applications complètement continues de E dans F , $w=u+v$ et λu (λ scalaire) sont complètement continues, car si, pour un ensemble borné B , u(B) et v(B) sont relativement compacts, il en est de même de u(B)+v(B) , et a fortiori de $w(B) \subset u(B)+v(B)$.

2. La théorie de Riesz-Fredholm.

Soit E un espace de Banach, u une application complètement continue de E dans lui-même ; nous allons étudier l'application continue $x \rightarrow x-u(x)$, que nous désignerons par v dans ce n°.

THÉORÈME 1.- L'application $x \longrightarrow v(x)=x-u(x)$ est un homomorphisme de E dans E , tel que le sous-espace $H_1 = \overset{-1}{v}(0)$ soit de dimension finie.

Pour montrer que v est un homomorphisme de E dans E , il suffit de prouver, d'après la définition de la norme dans E/H_1 (chap.III, 1) qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ dont la distance à H_1 est égale à 1 , on ait $\|v(x)\| \geqslant a$. Or, dans le cas contraire, il existerait une suite (x_n) de points de E, telle que $\|x_n\| \leqslant 2$ pour tout n , que la distance de x_n à H_1 soit égale à 1, et qu'on ait $\|v(x_n)\| = \|x_n-u(x_n)\| \leqslant 1/n$. La suite (x_n) étant bornée, la suite $(u(x_n))$ a , par hypothèse, une valeur d'adhérence y , qui est donc aussi valeur d'adhérence de la suite (x_n) ; la distance de y à H_1 serait donc égale à 1 , et on aurait $v(y)=0$, ce qui est absurde.

En tout point de H_1, on a $x=u(x)$, donc l'intersection de H_1 et de la boule $\|x\|\leq 1$ est <u>compacte</u> ; comme cette intersection est un voisinage de 0 dans H_1 , H_1 est de dimension finie (chap.I, § 2,th.3).

COROLLAIRE 1.- <u>Le sous-espace</u> $v(E)$ <u>est fermé dans</u> E .

En effet, il est isomorphe à E/H_1 , qui est complet.

COROLLAIRE 2.- <u>La transposée</u> ${}^t v$ <u>de</u> v <u>est un homomorphisme de</u> E' <u>dans</u> E' .

En effet, on a ${}^t v(x')=x'-{}^t u(x')$, et ${}^t u$ est complètement continue dans E' (prop.2).

THÉORÈME 2.- <u>Le sous-espace vectoriel</u> H_∞ <u>de</u> E <u>formé des points</u> x <u>tels que</u> $v^n(x)=0$ <u>pour un</u> n <u>au moins est de dimension finie</u>.

Soit H_n le noyau de v^n (n-ème itérée de v), c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $v^n(x)=0$. Comme $v^n(x)=x-(\binom{n}{1}u(x)-\binom{n}{2}u^2(x)+\ldots+(-1)^{p-1}\binom{n}{p}u^p(x)+\ldots+(-1)^{n-1}u^n(x))$, et que les itérées de u sont toutes complètement continues, il résulte du th.1 que H_n est de dimension finie pour tout entier n ; par ailleurs on a $H_n\subset H_{n+1}$ et H_∞ est la réunion des H_n . Tout revient à montrer qu'il existe un entier m tel que pour $n\geqslant m$, on ait $H_n=H_m$.

Supposons le contraire : il existerait donc une suite (n_k) d'entiers, strictement croissante, et telle que $H_{n_k}\neq H_{n_k-1}$; il existe donc $y_k\in H_{n_k}$ tel que $\|y_k\|=1$, et que la distance de y_k au sous-espace H_{n_k-1} soit $\geqslant\frac{1}{2}$. Or, pour $k>h$, on peut écrire

$$u(y_k)-u(y_h)=y_k-(y_h+v(y_k)-v(y_h))$$

et par définition, y_h et $v(y_h)$ appartiennent à H_{n_k-1} , ainsi que $v(y_k)$, puisque $v^{n_k-1}(v(y_k))=0$ par hypothèse. On a donc

$\| u(y_k)-u(y_h) \| \geqslant \frac{1}{2}$ pour deux indices h,k distincts ; cela entraîne que la suite $(u(y_k))$ ne peut avoir de valeur d'adhérence, ce qui est absurde, puisque la suite (y_k) est bornée et u complètement continue.

THÉORÈME 3.- Soit n le plus petit entier tel que $H_\infty = H_n$. Alors E est somme directe topologique de H_n et du sous-espace fermé $v^n(E)$; la restriction de v à $v^n(E)$ est un automorphisme de ce sous-espace, et la restriction de v à H_n est un endomorphisme de H_n .

Montrons en premier lieu que si $v(E)=E$, on a $\overset{-1}{v}(0)=\{0\}$. En effet, s'il existait $x_1 \neq 0$ tel que $v(x_1)=0$, il existerait, par récurrence, une suite (x_n) telle que $v(x_n)=x_{n-1}$, et par suite $v^n(x_n)=0$, $v^{n-1}(x_n)=x_1 \neq 0$; autrement dit, tous les sous-espaces H_n seraient distincts, contrairement au th.2 .

Réciproquement, montrons que, si $\overset{-1}{v}(0)=\{0\}$, on a $v(E)=E$. En effet, il résulte alors du th.1 que v est un isomorphisme (fort) de E dans lui-même, donc (§2,prop.   ) ${}^t v$ est un homomorphisme de E' sur lui-même ; comme u est complètement continue, le raisonnement précédent, appliqué à E' et à ${}^t v$, prouve que ${}^t\overset{-1}{v}(0)=\{0\}$. Comme $v(E)$, qui est fermé dans E (cor.1 du th.1) est le sous-espace de E orthogonal à ${}^t\overset{-1}{v}(0)$ (chap.III, §3) , on a $v(E)=E$.

Abordons maintenant le cas général ; par définition des H_n , on a $v(H_n) \subset H_{n-1} \subset H_n$; soient u_0 et v_0 les applications de E/H_n dans lui-même, déduites de u et v par passage aux quotients ; si φ est l'application canonique de E sur E/H_n , on a donc $u_0 \circ \varphi = \varphi \circ u$, et $v_0(z)=z-u_0(z)$ pour tout $z \in E/H_n$. Comme tout ensemble borné dans E/H_n est de la forme $\varphi(B)$, où B est borné dans E , $u_0(\varphi(B))=\varphi(u(B))$ est relativement compact dans E/H_n , donc u_0 est complètement continue dans cet espace. D'autre part, la relation $v_0(\varphi(x))=0$ signifie que

NBR 016 56

$v(x)\in H_n$, donc $v^{n+1}(x)=0$, ce qui par hypothèse entraîne $v^n(x)=0$, c'est-à-dire $x\in H_n$, ou encore $\varphi(x)=0$. On conclut donc de la première partie du raisonnement que v_0 est un automorphisme de E/H_n. Il en est donc de même de v_0^n, qui se déduit de v^n par passage aux quotients; donc on a $\varphi(v^n(E))=E/H_n$; mais d'autre part $H_n \cap v^n(E)$ est réduit à 0, car si on a $x=v^n(y)$ et $v^n(x)=0$ on en déduit $v^{2n}(y)=0$, donc $y\in H_n$ et $x=v^n(y)=0$ en raison de l'hypothèse. On voit donc que H_n et $v^n(E)$ sont supplémentaires, et on sait par ailleurs que $v^n(E)$ est fermé (cor.1 du th.1), donc E est somme directe topologique de H_n et de $v^n(E)$ (chap.I, §2, prop.4). Comme $v(v^n(E))=v^n(v(E))\subset v^n(E)$, v est un endomorphisme de $v^n(E)$; mais comme v_0 est un automorphisme de $E/H_n=\varphi(v^n(E))$, v applique $v^n(E)$ sur lui-même, et par suite est un automorphisme de ce sous-espace, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- La dimension de $\overset{-1}{v}(0)$ est égale à la codimension de $v(E)$ dans E, et à la dimension de $\overset{t-1}{v}(0)$.

En effet, $v(E)$ est somme directe de $v(v^n(E))=v^n(E)$ et de $v(H_n)$; donc $E/v(E)$ est un espace de dimension finie, isomorphe à $H_n/v(H_n)$. Comme v est un endomorphisme de l'espace H_n de dimension finie, $H_n/v(H_n)$ a une dimension égale à celle de $\overset{-1}{v}(0)$ (Alg.,chap.II, §3, prop.10). Comme $\overset{t-1}{v}(0)$ est orthogonal à $v(E)$ (chap.III, §3), il est isomorphe au dual de $E/v(E)$, donc sa dimension est égale à la codimension de $v(E)$.

3. Valeurs propres d'une application complètement continue.

Nous supposerons désormais que E soit un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. La notion de valeur propre a été définie en Algèbre (Alg.,chap.VI) pour les endomorphismes d'espace vectoriels de dimension finie. Cette définition se généralise comme suit:

DÉFINITION 2.- Etant donnée une application linéaire continue u de l'espace de Banach E (sur $\mathbb{C}$) dans lui-même, on dit qu'un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u si l'application $x \to u(x) - \lambda x$ de E dans lui-même n'est pas un automorphisme de E . L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le spectre de u .

Pour abréger, nous dirons que si $\lambda \in \mathbb{C}$ n'est pas une valeur propre de u , λ est une valeur régulière pour u . Si λ est une valeur propre de u et si $x \in E$ est $\neq 0$ et tel que $u(x) = \lambda x$, on dit que x est un vecteur propre de u correspondant à la valeur propre λ .

Il convient de noter que si λ est valeur propre de u , il n'existe pas nécessairement de vecteur propre correspondant à cette valeur (contrairement à ce qui se passe lorsque E est de dimension finie) car $u(x) - \lambda x$ peut être une application biunivoque continue de E sur un sous-espace $u(E) \neq E$.

PROPOSITION 4.- Le spectre S d'une application linéaire continue u de E dans lui-même est un ensemble compact dans $\mathbb{C}$.

Montrons en premier lieu que S est borné : de façon précise, nous montrerons que S est contenu dans le cercle $|\lambda| \leqslant \|u\|$; il suffira de prouver que pour $|\lambda| > \|u\|$, $u(x) - \lambda x$ est un automorphisme de E , ou encore, un élément inversible de $\mathcal{L}(E)$. Or, remarquons que lorsque la série

$$-\frac{1}{\lambda} - \frac{u}{\lambda^2} - \frac{u^2}{\lambda^3} \cdots\cdots \frac{u^n}{\lambda^{n+1}} \cdots$$

est convergente dans $\mathcal{L}(E)$, elle a pour somme l'inverse de $u - \lambda$; comme cette série est absolument convergente pour $|\lambda| > \|u\|$, notre assertion est démontrée. D'autre part, dans l'algèbre normée complète $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble des éléments inversibles est ouvert (Top.gén., chap. § 3, prop.14) ; si $u - \lambda$ est un automorphisme de E , il en est donc de même de $u-(\lambda+\mu)$ dès que μ est assez petit ce qui prouve que, dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des valeurs régulières pour u est ouvert, donc que S est <u>fermé</u>.

PROPOSITION 5.- <u>Le spectre d'une application continue</u> u <u>de</u> E <u>dans lui-même est identique au spectre de sa transposée</u> ${}^t u$.

En effet, ${}^t u(x')-\lambda x'$ est transposée de $u(x)-\lambda x$, et pour qu'un endomorphisme continu de E soit un automorphisme, il faut et il suffit que sa transposée soit un automorphisme de E' (§ 3,prop.   ).

Considérons maintenant le spectre d'une application <u>complètement continue</u> u de E dans lui-même, et supposons que E soit de dimension <u>infinie</u> (dans le cas contraire, le spectre a déjà été étudié en Algèbre) Remarquons en premier lieu que 0 est toujours une valeur propre de u , car u ne peut être un automorphisme de E , puisqu'il transforme la boule $\|x\| \leqslant 1$ en un ensemble fortement relativement compact, qui ne peut donc être un voisinage de 0 dans E (chap.I, §2,th.3). Mais il est à noter que dans ce cas, il n'existe pas nécessairement de vecteur propre correspondant à la valeur propre 0 .

Il se peut que 0 soit la <u>seule</u> valeur propre de l'application complètement continue u (exerc.   ). Dans le cas contraire, soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de u ; l'étude faite au n°2 entraîne alors les résultats suivants : si on pose $v_\lambda = \frac{1}{\lambda}(u-\lambda)$, E est somme directe topologique de deux sous-espaces fermés H_λ et K_λ , H_λ étant de dimension <u>finie</u> n_λ ; les restrictions de v_λ à H_λ et K_λ sont des endomorphismes de ces sous-espaces (autrement dit, H_λ et K_λ sont <u>invariants</u> par u) v_λ est un <u>automorphisme</u> de K_λ , et au contraire, est <u>nilpotent</u> dans H_λ : de façon précise, on a $v_\lambda^{n_\lambda} = 0$ dans H_λ , et si p_λ est le plus petit nombre $\leqslant n_\lambda$ tel que $v_\lambda^{p_\lambda} = 0$ dans H_λ , on a $K_\lambda = v_\lambda^{p_\lambda}(E)$.

Il existe au moins un <u>vecteur propre</u> de u correspondant à la valeur propre λ, et l'ensemble de ces vecteurs propres est un sous-espace vectoriel de H_λ.

Soit maintenant μ une valeur propre $\neq \lambda$ et non nulle, de l'application u ; montrons que <u>le sous-espace</u> H_μ <u>est contenu dans</u> K_λ. En effet, soit $x \in E$ tel que $v_\mu^h(x)=0$ pour un entier $h > 0$; on peut écrire $x=y+z$, avec $y \in H_\lambda$ et $z \in K_\lambda$, d'où $v_\mu^h(y)+v_\mu^h(z) = 0$; comme H_λ et K_λ sont invariants par u, donc par v_μ, on a $v_\mu^h(y)=0$ et $v_\mu^h(z)=0$; mais v_μ est un automorphisme de H_λ (<u>Alg</u>., chap. VI), donc $y=0$, $x=z$, ce qu'il fallait démontrer.

Comme ${}^t u$ est complètement continue, à chaque valeur propre λ de u (qui est aussi valeur propre de ${}^t u$ d'après la prop. 5) correspond une décomposition de E' en somme directe topologique de deux sous-espaces fermés H'_λ et K'_λ, qui sont respectivement <u>orthogonaux</u> à K_λ et H_λ, et isomorphes aux duals de H_λ et K_λ. La relation $H_\mu \subset K_\lambda$ pour $\mu \neq \lambda$ prouve donc que :

PROPOSITION 6.- <u>Pour deux valeurs propres distinctes</u> λ, μ <u>non nulles</u>, H_λ <u>et</u> H'_μ <u>sont orthogonaux</u>.

Ce qui précède montre que tout sous-espace H_μ pour une valeur propre $\mu \neq \lambda$ peut être considéré comme relatif à la <u>restriction</u> à K_λ de l'application complètement continue u. On en déduit aussitôt que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont n valeurs propres distinctes de u, non nulles, la somme des sous-espaces H_{λ_i} est <u>directe</u>.

Supposons maintenant qu'il existe une <u>infinité</u> de valeurs propres de u, et soit (λ_n) une suite infinie de ces valeurs ; posons $G_n = \sum_{i=1}^{n} H_{\lambda_i}$ (somme directe) ; les H_{λ_i}, et à plus forte raison les G_n ; sont des sous-espaces invariants par u ; par passage aux quotients, u donne donc un <u>automorphisme</u> u_n de l'espace quotient G_{n+1}/G_n. Nous allons voir que lorsque n croît indéfiniment, <u>la norme</u> $\| u_n \|$ <u>tend vers</u> 0 . Dans le cas contraire, il existerait un nombre $\alpha > 0$ et une suite croissante (n_k) d'entiers tels que $\| u_{n_k} \| \geq \alpha$. On en déduit qu'il existerait une suite (x_{n_k}) d'éléments de E telle que $x_{n_k} \in G_{n_k}$ $\|x_{n_k}\| \leq 2$, que la distance de x_{n_k} à G_{n_k-1} soit égale à 1 , et la distance de $u(x_{n_k})$ à G_{n_k-1} au moins égale à $\frac{\alpha}{2}$. A fortiori, on aurait $\| u(x_{n_k})-u(x_{n_h}) \| \geq \frac{\alpha}{2}$ pour $h < k$; or, la suite (x_{n_k}) est bornée, et par hypothèse, la suite $(u(x_{n_k}))$ relativement compacte, ce qui est contradictoire avec l'inégalité précédente.

De ce résultat, on déduit que :

THÉORÈME 4.- <u>Soit</u> u <u>une application complètement continue de</u> E <u>dans lui-même</u> ; <u>si le spectre</u> S <u>de</u> u <u>est infini</u>, <u>il est dénombrable</u>, <u>et</u> 0 <u>est le seul point non isolé de</u> S .

En effet, avec les notations précédentes, λ_n est une valeur propre de u_n et il existe au moins un vecteur propre correspondant donc on a $\| u_n \| \geq |\lambda_n|$; pour tout $\varepsilon > 0$ il ne peut donc exister qu'un nombre <u>fini</u> de valeurs propres distinctes de valeur absolue $> \varepsilon$, d'où le théorème .
