RÉDACTION N° 105

COTE : NBR 015

TITRE : E.V.T. CHAPITRE III (ÉTAT 3)
ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 35

NOMBRE DE FEUILLES : 35

NBR 015 105 2

Archives

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE III (Etat 3)

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Sommaire

§ 1. Espaces localement convexes réels : 1. Définition d'un espace localement convexe. 2. Définition d'un espace localement convexe par les semi-normes. 3. Complétion d'un espace localement convexe. 4. Sous-espaces vectoriels, espaces quotients et espaces produits d'espaces localement convexes. 5. Applications multilinéaires continues d'un espace localement convexe dans un espace localement convexe.

§ 2. Ensembles convexes et variétés linéaires dans un espace localement convexe : 1. Enveloppe convexe d'une partie d'un espace localement convexe. 2. Ensembles convexes et variétés linéaires. 3. Prolongement des formes linéaires continues. 4. Points extrémaux des ensembles convexes compacts. 5. Application : dérivées des fonctions à valeurs dans un espace localement convexe.

§ 3. Dual faible d'un espace localement convexe : 1. Topologie faible sur un espace localement convexe séparé. 2. Dual d'un espace quotient et dual d'un sous-espace d'un espace localement convexe. 3. Ensembles semi-polaires.

§ 4. Espaces localement convexes complexes : 1. Espaces vectoriels topologiques complexes 2. Variétés linéaires et formes linéaires dans un espace localement convexe complexe.

CHAPITRE III (Etat 3)

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

1. Espaces localement convexes réels.

1. Définition d'un espace localement convexe.

DÉFINITION 1.- On dit qu'un espace vectoriel topologique E sur le corps $\mathbb{R}$ est localement convexe s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans E formé d'ensembles convexes.

D'après la prop.3 du chap.I, § 1, si E est un espace localement convexe, V un voisinage de 0 dans E, l'intersection de toute droite homogène et de V contient un segment ouvert auquel appartient 0 ; autrement dit, V engendre E et 0 est point interne (chap.II, § 1, n°5) de V. D'autre part, $V \cap (-V)$ est un voisinage convexe et symétrique de 0, donc les voisinages convexes et symétriques de 0 forment un système fondamental de voisinages de ce point.

PROPOSITION 1.- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Toute base de filtre $\mathfrak{G}$ sur E invariante par homothétie, formée d'ensembles convexes, symétriques, engendrant E et tels que 0 soit point interne de chacun de ces ensembles, est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie d'espace localement convexe sur E.

En effet, il suffit, en raison des hypothèses, de montrer que les conditions (L''_{I}) et (L''_{IV}) de la prop.3 du chap.I, § 1 sont remplies. Or, comme tout ensemble $V \in \mathfrak{G}$ est symétrique et convexe, la relation $x \in V$ entraîne $\lambda x \in V$ pour tout λ tel que $|\lambda| \leq 1$. D'autre part, V étant convexe, on a par définition $V+V = 2V$, donc la condition (L''_{IV}) est satisfaite en prenant $W = \frac{1}{2} V$.

Exemples.- 1) L'ensemble $\mathfrak{G}_0$ de tous les ensembles convexes symétriques, engendrant E et tels que 0 soit point interne de chacun de ces ensembles, définit sur E une topologie d'esp.

localement convexe : c'est évidemment <u>la plus fine</u> de toutes les topologies d'espace localement convexe sur E . Dans cette topologie <u>tout hyperplan est fermé</u> : en effet, si H est un hyperplan ne contenant pas 0 , U le demi-espace ouvert défini par H et contenant 0 , $V=U\cap(-U)$ est un ensemble de $\mathfrak{G}_0$ ne rencontrant pas H , d'où la proposition (chap.I, § 2, prop.3). Toute forme linéaire sur E est donc <u>continue</u> pour la topologie considérée (chap.I, § 2, th.1).

2) Tout espace <u>normé</u> sur $\mathbb{R}$ est localement convexe (chap.II, § 1, n°1). En particulier, tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, muni de l'<u>unique</u> topologie séparée compatible avec sa structure d'espace vectoriel (chap.I, § 2, th.2) est localement convexe.

2. Définition d'un espace localement convexe par des semi-normes.

Soit E un espace localement convexe. Pour tout voisinage convexe V de 0, 0 est point intérieur de V , donc (chap.II, § 1, cor.1 de la prop.9) l'intérieur $\mathring{V}$ de V est un ensemble convexe dont tous les points sont internes ; l'ensemble des voisinages convexes et symétriques de 0 , dont tous les points sont internes, est donc un système fondamental de voisinages ouverts de 0 . La <u>jauge</u> p d'un tel ensemble W par rapport à 0 est une <u>semi-norme</u> ; W est l'ensemble des $x\in E$ tels que $p(x)<1$; son adhérence $\overline{W}$ dans E est l'ensemble des $x\in E$ tels que $p(x)\leqslant 1$ (chap.II, § 1, prop.9) .

Inversement, soit Γ un ensemble <u>quelconque</u> de <u>semi-normes</u> sur E . Soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des ensembles convexes <u>indicateurs</u> (chap.II, § 2, n°2) des semi-normes λp , où λ parcourt l'ensemble des nombres >0 et p l'ensemble Γ ; $\mathfrak{G}$ vérifie évidemment les conditions de la prop.1, donc définit sur E une topologie $\mathcal{C}$ d'espace localement convexe : on dit encore que $\mathcal{C}$ est <u>définie par l'ensemble de semi-normes</u> Γ .

Un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{E}$ est formé des ensembles définis par les relations $p(x) < \lambda$, où $p \in \Gamma$ et $\lambda > 0$; comme $p(x-z) \leq p(x-y)+p(y-z)$ il en résulte aussitôt que les fonctions $p(x-y)$ forment un ensemble d'écarts (Top.gén., chap.IX, § 1) définissant la structure uniforme correspondant à $\mathcal{E}$; en particulier, toutes les semi-normes $p \in \Gamma$ sont uniformément continues dans E .

On notera qu'on peut toujours supposer que deux fonctions distinctes de Γ ne diffèrent pas par un facteur constant.

En particulier, la définition des espaces normés sur $\mathbb{R}$ (Top.gén. chap.IX, § 3, n°3) montre que ces espaces ne sont autres que les espaces localement convexes définis par un ensemble de semi-normes réduit à une seule norme.

Dans un espace localement convexe E défini par un ensemble de semi-normes Γ , la définition d'un ensemble borné (chap.I, § 1, n°7, déf.3) équivaut à la suivante : pour que A soit borné, il faut et il suffit que $\sup_{x \in A} p(x) < +\infty$ pour toute semi-norme $p \in \Gamma$.

Enfin, pour que E soit séparé, il faut et il suffit que pour tout $x \neq 0$, il existe une semi-norme $p \in \Gamma$ telle que $p(x) \neq 0$.

3. Complétion d'un espace localement convexe.

Soit E un espace localement convexe séparé E , Γ un ensemble de semi-normes définissant la topologie de E ; les fonctions de Γ , qui sont uniformément continues dans E , se prolongeant par continuité au complété $\hat{E}$ de E (Top.gén., chap.II, § 3, th.1) ; soit $\overline{\Gamma}$ l'ensemble de ces fonctions prolongées. D'après le principe de prolongement des inégalités (Top.gén., chap.IV, § 5), les fonctions de $\overline{\Gamma}$ sont des semi-normes dans $\hat{E}$; en outre, si pour toute semi-norme $p \in \Gamma$, $\bar{p}$ est le prolongement de p à $\hat{E}$, les fonctions $\bar{p}(x-y)$ forment un système d'écarts définissant la structure uniforme de $\hat{E}$ (Top.gén., chap.IX, § 1);

$\hat{E}$ est donc localement convexe et les fonctions de Γ forment un ensemble de semi-normes définissant la topologie de $\hat{E}$.

PROPOSITION 2.- Soit E un espace localement convexe complet, défini par un ensemble de semi-normes Γ . Si (x_ι) est une famille de points de E telle que, pour toute semi-norme $p \in \Gamma$, la somme $\sum_\iota p(x_\iota)$ soit finie, la famille (x_ι) est sommable dans E .

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse une partie finie H_0 de l'ensemble d'indices I telle que, pour toute partie finie H de I ne rencontrant pas H_0 , on ait $\sum_{\iota \in H} p(x_\iota) \leqslant \varepsilon$; on en déduit $p(\sum_{\iota \in H} x_\iota) \leqslant \sum_{\iota \in H} p(x_\iota) \leqslant \varepsilon$, d'où la proposition, en vertu du critère de Cauchy (Top.gén., chap.III, § 4).

4. Sous-espaces vectoriels, espaces quotients et espaces produits d'espaces localement convexes.

Il est clair que tout sous-espace vectoriel V d'un espace localement convexe E est un espace localement convexe : si Γ est un ensemble de semi-normes définissant la topologie de E , les restrictions des fonctions de Γ à V définissent la topologie de V .

De même si φ est l'application canonique de E sur l'espace quotient E/V , pour tout voisinage symétrique et convexe U de 0 dans E , $\varphi(U)$ est un ensemble convexe et symétrique dans E/V (chap.II, § 1, ~~xpx~~ prop.2) engendrant E/V et tel que 0 soit point interne de $\varphi(U)$ (chap.II, § 1, n°5) ; donc E/V est localement convexe. En outre, si p est la jauge de U , pour tout $z \in E/V$, l'ensemble des $\lambda > 0$ tels que $\lambda z \in \varphi(U)$ est identique à l'ensemble des $\lambda > 0$ tels qu'il existe $x \in E$ pour lequel $\lambda x \in U$ et $\varphi(x)=z$; il en résulte que la jauge de $\varphi(U)$ est donnée par la formule $\dot{p}(z) = \inf_{x \in \overset{-1}{\varphi}(z)} p(x)$; la topologie de E/V est donc définie par l'ensemble des semi-normes $\dot{p}$, où p parcourt Γ .

En particulier, si E est un espace localement convexe non séparé, l'adhérence N de 0 dans E est un sous-espace vectoriel non réduit à 0. L'espace localement convexe séparé E/N est appelé l'espace séparé associé à E (cf. Top.gén., chap.III, § 2, n° 4).

Plus particulièrement, considérons un espace localement convexe E défini par la donnée d'une seule semi-norme p ; si p n'est pas une norme, E n'est pas séparé, et l'ahdérence N de 0 dans E est le sous-espace vectoriel défini par $p(x)=0$; l'espace séparé associé E/N est alors un espace normé par la norme $\dot{p}$ correspondant à p.

Enfin, soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espaces localement convexes. Soit H une partie finie quelconque de I, et pour chaque $\iota \in H$, soit U_ι un voisinage convexe de 0 dans E_ι. L'ensemble $U = \prod_{\iota \in I} W_\iota$ où $W_\iota = U_\iota$ pour $\iota \in H$, $W_\iota = E_\iota$ pour $\iota \notin H$, est convexe et symétrique dans $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ (chap.II, § 1, prop.3), engendre E, et admet 0 comme point interne ; donc E est un espace localement convexe. En outre, pour que λ soit tel que $\lambda(x_\iota) \in U$, il faut et il suffit que $\lambda x_\iota \in U_\iota$ pour tout $\iota \in H$; donc la jauge de U est donnée par la formule $p((x_\iota)) = \sup_{\iota \in H} p_\iota(x_\iota)$, où p_ι est la jauge de U_ι pour tout $\iota \in H$.

5. Applications multilinéaires continues d'un espace localement convexe dans un espace localement convexe.

PROPOSITION 3.- *Soient* E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *et* F, $n+1$ *espaces localement convexes. Pour qu'une application multilinéaire* u *de* $\prod_{i=1}^{n} E_i$ *dans* F *soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme* q *de* F, *il existe une semi-norme* p_i *de* E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *et un nombre* $a > 0$ *tels que l'on ait identiquement*

$$(1) \qquad q(u(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqslant a.p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_n(x_n)$$

La condition est nécessaire, en effet, par hypothèse, pour toute semi-norme q de F et tout $\alpha > 0$, il existe n nombres $\alpha_i > 0$ et pour chaque i une semi-norme p_i de E_i tels que les relations $p_i(x_i) \leqslant \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ entraînent $q(u(x_1,\dots,x_n)) \leqslant \alpha$; en particulier, les relations $p_i(x_i)=\alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ entraînent $q(u(x_1,\dots,x_n)) \leqslant \alpha$. Mais alors, pour tout point $(x_1,\dots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ tel que $x_i \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, considérons le point $\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p_1(x_1)}, \frac{\alpha_2 x_2}{p_2(x_2)}, \dots, \frac{\alpha_n x_n}{p_n(x_n)}\right)$; on a $p_i\left(\frac{\alpha_i x_i}{p_i(x_i)}\right) = \alpha_i$,

et comme u est multilinéaire, on a la relation (1) avec $a = \frac{\alpha}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$. La relation (1) est évidente si $x_i=0$ pour un indice i au moins.

Réciproquement, supposons que la condition de l'énoncé soit vérifiée, et montrons que u est continue en tout point $(c_1,c_2,\dots,c_n)$. On peut écrire

$$u(x_1,\dots,x_n)-u(c_1,\dots,c_n) = \sum_{i=1}^{n} u(c_1,\dots,c_{i-1},x_i-c_i,x_{i+1},\dots,x_n)$$

Les conditions $p_i(x_i-c_i) \leqslant r$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ entraînent $p(x_i) \leqslant p(c_i)+r$ d'où, en vertu de (1)

$$q(u(c_1,\dots,c_{i-1},x_i-c_i,x_{i+1},\dots,x_n)) \leqslant ar \prod_{i=1}^{n} (p_i(c_i)+r)$$

et finalement

$$q(u(x_1,\dots,x_n)-u(c_1,\dots,c_n)) \leqslant nar \prod_{i=1}^{n} (p_i(c_i)+r)$$

Comme le second membre de cette relation tend vers 0 avec r, la proposition est démontrée.

COROLLAIRE 1.- <u>Pour que u soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme q de F, la fonction $q(u(x_1,\dots,x_n))$ soit continue à l'origine de $\prod_{i=1}^{n} E_i$.</u>

En effet, la condition est évidemment nécessaire, et la première partie de la démonstration de la prop. 3 montre inversement que cette condition entraîne la relation (1), donc la continuité de u.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe. Pour qu'une forme linéaire</u> x' <u>sur</u> E <u>soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de</u> 0 <u>dans</u> E , <u>dans lequel</u> x' <u>soit bornée</u>.

PROPOSITION 4.- <u>Soient</u> $\mathcal{C}$ <u>et</u> $\mathcal{C}'$ <u>deux topologies d'espace localement convexe compatibles avec la structure d'espace vectoriel de</u> E , <u>et définies respectivement par deux ensembles</u> Γ , Γ' <u>de semi-normes. Pour que</u> $\mathcal{C}$ <u>soit moins fine que</u> $\mathcal{C}'$, <u>il faut et il suffit que, pour toute semi-norme</u> $p \in \Gamma$, <u>il existe une semi-norme</u> $q \in \Gamma'$ <u>et un nombre</u> $a > 0$ <u>tels que l'on ait identiquement</u>

$$(2) \qquad p(x) \leqslant a.q(x) \quad .$$

En effet, cela exprime que l'application identique de E , muni de la topologie $\mathcal{C}'$, sur E , muni de la topologie $\mathcal{C}$, est continue.

COROLLAIRE.- <u>Pour que</u> $\mathcal{C}$ <u>soit moins fine que</u> $\mathcal{C}'$, <u>il faut et il suffit que toute semi-norme</u> $p \in \Gamma$ <u>soit continue pour la topologie</u> $\mathcal{C}'$.

En effet, la condition (2) exprime que p est continue à l'origine, et p est alors continue en tout point x_o , puisqu'on a

$$|p(x)-p(x_o)| \leqslant p(x-x_o) \leqslant a.q(x-x_o) \quad .$$

On déduit de ce corollaire que la topologie $\mathcal{C}$ d'un espace localement convexe E est définie par l'ensemble Γ_ω de <u>toutes les semi-normes sur</u> E <u>continues pour</u> $\mathcal{C}$. En effet, si $\mathcal{C}$ est définie par un ensemble Γ de semi-normes, on a $\Gamma \subset \Gamma_\omega$, ce qui montre que la topologie définie par Γ_ω est plus fine que $\mathcal{C}$; elle est d'autre part moins fine que $\mathcal{C}$ d'après le cor. de la prop. 4 .

PROPOSITION 5.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe</u>, p <u>une semi-norme continue dans</u> E , q <u>une fonction convexe positivement homogène dans</u> E <u>et telle que</u> $a.q(x) \leqslant p(x) \leqslant bq(x)$ $(0 < a \leqslant b)$. <u>Soit</u> B_1 (resp. B_2) <u>l'ensemble des</u> $x \in E$ <u>tels que</u> $p(x) \leqslant 1$ (resp. $q(x) \leqslant 1$) ,

S_1 (resp. S_2) __l'ensemble des__ $x \in E$ __tels que__ $p(x)=1$ (resp. $q(x)=1$) . __Il existe un homéomorphisme de__ E __sur lui-même transformant__ B_1 __en__ B_2 __et__ S_1 __en__ S_2 .

Pour tout $x \in E$, soit $y=\varphi(x)=x$ si $p(x)=0$, $y=\varphi(x)=x\,\dfrac{q(x)}{p(x)}$ si $p(x)\neq 0$ Par hypothèse, si $p(x)\neq 0$, on a $q(x)\neq 0$, et $p(y)=q(x)$, $q(y) = (q(x))^2/p(x)$, d'où $x = y\,\dfrac{p(y)}{q(y)}$, ce qui montre que φ est une application biunivoque de E sur lui-même. D'après la forme de l'application réciproque de φ , il suffira de démontrer que φ est continue. Or il est immédiat que φ est continue en tout point x_0 où $p(x_0)\neq 0$; bornons-nous donc au cas où $p(x_0)=0$; on a $\varphi(x)-\varphi(x_0) = x-x_0$ si $p(x)=0$; si au contraire $p(x)\neq 0$, on peut écrire

$$\varphi(x)-\varphi(x_0) = x\,\frac{q(x)}{p(x)} - x_0 = x_0\left(\frac{q(x)}{p(x)}-1\right)+(x-x_0)\,\frac{q(x)}{p(x)}$$

d'où, $p(\varphi(x)-\varphi(x_0)) = p(x-x_0)$ dans le premier cas, et comme $p(x_0)=0$,

$$p(\varphi(x)-\varphi(x_0)) \leqslant \frac{q(x)}{p(x)}\,p(x-x_0) \leqslant \frac{1}{a}\,p(x-x_0)$$

dans le second, ce qui établit la continuité de φ . Il est clair que φ applique S_2 sur S_1 et B_2 sur B_1 , d'où la proposition.

COROLLAIRE.- __Dans un espace normé sur__ $\mathcal{R}$, __soit__ A __un corps convexe borné, dont__ O __est point intérieur__. __Il existe un homéomorphisme de__ E __sur lui-même, transformant__ A __en la boule fermée__ B ; $\|x\| \leqslant 1$ __et la sphère__ $\|x\| = 1$.

En effet, l'hypothèse entraîne que A contient une boule de centre O et de rayon a , et est contenu dans une boule de centre O et de rayon b , d'où, pour la jauge p de A , $a.p(x) \leqslant \|x\| \leqslant b.p(x)$ et le corollaire résulte aussitôt de la prop. 5 .

PROPOSITION 6.- Soient E et F deux espaces localement convexes, et soit $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F . Pour tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E , l'espace $\mathcal{L}(E,F)$, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, est un espace localement convexe.

Il suffit en effet (chap.I, § 3,prop.1) de montrer que pour toute partie $A \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage symétrique convexe V de 0 dans F , l'ensemble $T(V,A)$ des applications linéaires continues u de E dans F telles que $u(A) \subset V$ est convexe ; or si $u(x) \in V$ et $v(x) \in V$ pour tout $x \in A$, on a aussi $\lambda u(x)+(1-\lambda)v(x) \in V$ pour tout $x \in A$ et $0 < \lambda < 1$, d'où la proposition. En outre, si p_V est la jauge de V , la relation $\lambda u \in T(V,A)$ étant équivalente à $\lambda u(x) \in V$ pour tout $x \in A$, on voit que la jauge $q_{V;A}$ de $T(V,A)$ est définie par la formule

(3) $$q_{V,A}(u) = \sup_{x \in A} p_V(u(x))$$

En particulier, si E et F sont deux espaces normés, on retrouve ainsi la définition de la norme $\|u\|$ d'une application linéaire continue de E dans F (Top.gén.,chap.X, § 2,n°2). Plus particulièrement, si f est une forme linéaire continue dans E , on a

(4) $$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} |f(x)|/\|x\| .$$

Cette norme a l'interprétation suivante :

PROPOSITION 7.- Soit E un espace normé, f une forme linéaire continue dans E et non identiquement nulle. Pour tout a réel, la distance d de 0 à l'hyperplan fermé H d'équation $f(x)=a$, est égale à $|a| / \|f\|$.

En effet, pour tout $x \neq 0$, il existe λ tel que $\lambda x \in H$, d'où

$$\|f\| = \sup_{x \in H} |f(x)|/\|x\| = |a| . \sup_{x \in H} 1/\|x\| = |a|/\inf_{x \in H} \|x\| = |a|/d .$$

§ 2. Ensembles convexes et variétés linéaires dans un espace localement convexe.

1. Enveloppe convexe d'une partie d'un espace localement convexe.

PROPOSITION 1.- *Dans un espace localement convexe, l'enveloppe convexe d'un ensemble borné (resp. précompact) est un ensemble borné (resp. précompact).*

En effet, supposons d'abord que A soit une partie bornée de E. Pour tout voisinage convexe V de 0 dans E, il existe $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda V$; comme λV est convexe, l'enveloppe convexe B de A est contenue dans λV, ce qui montre que B est bornée.

En second lieu, supposons que A soit précompact ; pour tout voisinage convexe V de 0 dans E, il existe un nombre fini de points $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que A soit contenu dans la réunion des voisinages $a_i + \frac{1}{2} V$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. L'enveloppe convexe B de A est donc contenue dans l'enveloppe convexe de la réunion de ces n voisinages ; en d'autres termes, si C est l'enveloppe convexe des n points a_i, B est contenu dans l'ensemble $C + \frac{1}{2} V$. Mais si G est le sous-espace vectoriel engendré par les a_i, G est de dimension finie, et C, enveloppe convexe d'une partie bornée de G, est bornée, donc précompacte puisque G est isomorphe à un $\mathbb{R}^p$; il existe donc un nombre fini de points $b_k \in C$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ tels que C soit contenu dans la réunion des voisinages $b_k + \frac{1}{2} V$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$; a fortiori, B est contenu dans la réunion des voisinages $b_k + V$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$, ce qui achève la démonstration.

On notera que l'enveloppe convexe B d'un ensemble A compact dans E n'est pas nécessairement fermée, et que si E n'est pas complet, l'adhérence de B dans E n'est pas nécessairement compacte (exerc. 1 et chap.V, §   , exerc.   ).

2. Ensembles convexes et variétés linéaires.

THEOREME 1.- Soient E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, A un ensemble convexe non vide ouvert dans E , V une variété linéaire fermée ne rencontrant pas A . Il existe un hyperplan fermé H contenant V et ne contenant V et ne rencontrant pas A .

En effet, d'après le th. de Minkowski (chap.II, § 3, th.1), il existe un hyperplan H contenant V et ne rencontrant pas A , puisque tous les points de A sont internes (chap.II, § 1, prop.9) ; comme le complémentaire de H contient un ensemble ouvert, H est fermé (chap.I, § 2, prop.3).

COROLLAIRE.- Soit A un corps convexe dans E ; tout hyperplan d'appui (chap.II, § 3, 2) de A est fermé, et tout point frontière de A appartient à un hyperplan d'appui au moins.

Il suffit d'appliquer le th.1 à l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A et à un point frontière quelconque de A .

2 Lorsque A est fermé (et même compact) et convexe possède des points internes, mais n'a pas de point intérieur, il peut exister des points non internes de A où tout hyperplan d'appui de A contenant ce point est non fermé (c'est-à-dire partout dense) dans E (chap.IV, § 2, exerc.), ainsi que le secteur conique ayant pour sommet ce point et engendré par A .

PROPOSITION 2.- Dans un espace vectoriel topologique E sur , soit A un ensemble convexe non vide ouvert dans E , B un ensemble convexe quelconque ne rencontrant pas A . Il existe un hyperplan fermé séparant A et B .

En effet, comme A engendre E et a des points internes, il existe un hyperplan H qui sépare A et B (chap.II, § 3, cor.3 du th.1) ; comme le complémentaire de H contient des points intérieurs, H est fermé (chap.I, § 2, prop.3) .

PROPOSITION 3.- Soient E un espace localement convexe, A un ensemble convexe fermé dans E , x_0 un point de E n'appartenant pas à A . Il existe un hyperplan fermé H séparant strictement x_0 et A .

En effet, il existe un voisinage ouvert convexe B de x_0 ne rencontrant pas A ; la prop.2 montre qu'il existe un hyperplan fermé H' séparant A et B ; si $f(x)=a$ est une équation de H' , où f est une forme linéaire continue, on a par exemple $f(x) > a$ dans A et $f(x_0)=b < a$. L'hyperplan H d'équation $f(x) = \frac{1}{2}(a+b)$ répond à la question.

COROLLAIRE 1.- Dans un espace localement convexe, tout ensemble convexe fermé est A intersection de demi-espaces fermés.

En effet, pour tout $x_0 \notin A$, il existe un demi-espace fermé contenant A et ne contenant pas x_0 , d'après la prop.3 .

COROLLAIRE 2.- Dans un espace localement convexe, toute variété linéaire fermée V est l'intersection des hyperplans fermés qui la contiennent.

En effet, pour tout $x_0 \notin V$, il existe un hyperplan fermé H séparant strictement x_0 et V (prop.3) ; V est donc parallèle à H , et par suite l'hyperplan fermé H' contenant V et parallèle à H ne contient pas x_0 , ce qui établit le corollaire.

PROPOSITION 4.- Soient E un espace localement convexe séparé, V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Il existe un sous-espace fermé W , supplémentaire topologique de V .

Il suffit de prouver qu'il existe un sous-espace fermé supplémentaire de V (chap.I, § 2,prop.4). La proposition résulte du cor.2 de la prop.3 si V est de dimension 1 . Si V est de dimension $n > 1$, raisonnons par récurrence sur n . Soit $a \neq 0$ un point de V , H un hyperplan fermé supplémentaire de la droite passant par a ; $H \cap V$ est de dimension $n-1$, donc, dans l'espace localement convexe H , il existe un supplémentaire fermé W de $H \cap V$, et il est clair que W est fermé dans E et supplémentaire de V dans E .

Comme nous l'avons déjà remarqué (chap.I, § 2, n°), un sous-espace fermé V de dimension infinie d'un espace localement convexe séparé E n'admet pas nécessairement de supplémentaire topologique (cf. chap.I, § 3, exerc.).

3. Prolongement des formes linéaires continues.

THÉORÈME 2 (Hahn-Banach).- Soient E un espace localement convexe G un sous-espace vectoriel de E , f une forme linéaire continue définie dans G ; il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ définie dans E , et prolongeant f .

En effet, si la topologie de E est définie par un ensemble Γ de demi-normes, il existe une semi-norme $p \in \Gamma$ et un nombre $a > 0$ tels que $|f(x)| \leqslant a.p(x)$ en tout point de G (§ 1, prop.3). D'après le premier th. de Hahn-Banach (chap.II, § 3, th.2), il existe une forme linéaire $\bar{f}$ définie dans E , prolongeant f , et telle que $|\bar{f}(x)| \leqslant a.p(x)$ dans E , ce qui montre que $\bar{f}$ est continue.

COROLLAIRE.- Soit E un espace normé, G un sous-espace vectoriel de E , f une forme linéaire continue définie dans G ; il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ définie dans E , prolongeant f , et telle que $\|f\| = \|\bar{f}\|$.

Il suffit, dans la démonstration précédente, de prendre $p(x) = \|x\|$ (norme de x) et $a = \|f\|$, ce qui donne $\|\bar{f}\| \leqslant \|f\|$; d'autre part comme $\|\bar{f}\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\bar{f}(x)|$, on a évidemment $\|\bar{f}\| \geqslant \|f\|$, d'où le corollaire.

PROPOSITION 5 - Soient E un espace localement convexe, G un sous-espace vectoriel fermé dans E , x_0 un point de E , p une des semi-normes définissant la topologie de E ; il existe une forme linéaire continue f , définie dans E , telle que $|f(x)| \leqslant p(x)$ dans E et que $f(x_0) = \inf_{y \in G} p(y - x_0)$.

Si $x_0 \in G$, la proposition est trivialement vraie en prenant $f=0$. Supposons donc $x_0 \notin G$, et soit V le sous-espace vectoriel engendré par x_0 et G ; V est fermé dans E (chap.I, § 2, cor.2 du th.2). V est somme directe topologique de G et de la droite D passant par x_0 (chap.I, § 2, prop.4) ; pour tout $x \in V$, on peut donc écrire d'une seule manière $x=t(x)x_0+y(x)$, où $t(x) \in \mathbb{R}$ et $y(x) \in G$, et t est une forme linéaire continue dans V, telle que $t(x)=0$ dans G et $t(x_0)=1$; d'autre part, on peut écrire pour $t(x) \neq 0$

$$p(x) = |t(x)|\, p(x_0 + \frac{y(x)}{t(x)}) \geqslant |t(x)| \inf_{y \in G} p(y-x_0)$$

Donc, si on pose $g(x) = t(x).\inf_{y \in G} p(y-x_0)$, g est une forme linéaire continue dans V telle que $|g(x)| \leqslant p(x)$; il existe alors une forme linéaire continue f prolongeant g dans E, et telle que $|f(x)| \leqslant p(x)$ dans E ; cette forme répond à la question.

COROLLAIRE 1.- *Soient* E *un espace localement convexe,* $x_0 \neq 0$ *un point de* E, p *une des semi-normes définissant la topologie de* E ; *il existe une forme linéaire continue* f *définie dans* E, *telle que* $f(x_0)=p(x_0)$ *et* $|f(x)| \leqslant p(x)$ *dans* E.

Il suffit de prendre $G = \{0\}$ dans la prop.5. On remarquera aussi que la proposition (lorsque $p(x_0) \neq 0$) exprime simplement que par le point x_0 de la frontière du corps convexe défini par $p(x) \leqslant p(x_0)$, il passe un hyperplan d'appui.

COROLLAIRE 2.- *Soient* E *un espace normé,* G *un sous-espace vectoriel fermé dans* E, x_0 *un point de* E, d *sa distance à* G. *Il existe une forme linéaire* f *continue dans* E, *telle que* $\|f\| = 1$, $f(x)=0$ *dans* G *et* $f(x_0) = d$.

Appliquons la prop.5 avec $p(x) = \|x\|$; d'après la définition de d, on a $d = \inf_{y \in G} \|y-x_0\|$; d'autre part, comme $g(x)=0$ dans G et $g(x_0)=d$, on a $\|g\|=1$ (§1, formule (4)) ; le corollaire de la prop.4 montre donc qu'on peut prendre $\|f\| = \|g\| = 1$.

PROPOSITION 6.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe</u>, C <u>un secteur conique convexe fermé de sommet</u> 0 , <u>ayant un point intérieur</u>. <u>Soit</u> V <u>un sous-espace vectoriel fermé dans</u> E , <u>et</u> f <u>une forme linéaire continue dans</u> V , >0 <u>dans</u> $V \cap C$ <u>et</u> > 0 <u>en un point de</u> $V \cap C$ <u>au moins</u> . <u>Il existe une forme linéaire</u> $\bar{f}$ <u>continue dans</u> E , <u>prolongeant</u> f <u>et</u> $\geqslant 0$ <u>dans</u> C .

En effet, soit G l'hyperplan fermé dans V , défini par l'équation $f(x)=0$; G ne contient aucun point intérieur à C , puisque dans tout voisinage d'un point de G , il existe des points x où $f(x) < 0$; d'après le th.1, il existe donc un hyperplan fermé H contenant G et ne rencontrant par l'intérieur de C ; si $\bar{f}(x)=0$ est une équation de H , on peut toujours, en multipliant au besoin $\bar{f}$ par une constante, supposer que la forme linéaire continue $\bar{f}$ prolonge f . Comme C est tout entier d'un même côté de H , et qu'il existe un point de C au moins où $\bar{f}(x) > 0$, on a $\bar{f}(x) \geqslant 0$ dans C .

4. <u>Points extrémaux des ensembles convexes compacts</u>.

PROPOSITION 7.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe</u>, A <u>un ensemble compact dans</u> E . <u>Pour tout hyperplan fermé</u> H <u>dans</u> E , <u>il existe un hyperplan d'appui de</u> A <u>parallèle à</u> H .

En effet, soit g une forme linéaire continue dans E , telle que $g(x)=a$ soit une équation de H . Comme g est continue dans A , et que A est compact, il existe un point $z \in A$ où g atteint sa borne supérieure dans A (Top.gén., chap.IV, § 6, th.1) ; soit $g(z)=b$; pour tout $x \in A$, on a $g(x) \leqslant b$, donc l'hyperplan H' parallèle à H et d'équation $g(y)=b$ est un hyperplan d'appui de A .

PROPOSITION 8.- <u>Soient E un espace localement convexe, A un ensemble convexe et compact dans E . Tout hyperplan d'appui de A contient au moins un point extrémal de A</u>..

Soit H un hyperplan d'appui de A , et soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des variétés d'appui de A , fermées dans E et contenues dans H ; ordonnons $\mathfrak{F}$ par la relation $\supset$. Pour cette relation, l'ensemble $\mathfrak{F}$ est <u>inductif</u> ; en effet, soit $\mathfrak{G}$ une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{F}$; pour toute famille finie $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathfrak{G}$; il existe un indice k tel que $V_k \subset V_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$, donc l'intersection des n ensembles $V_i \cap A$ est égale à $V_k \cap A$, et par définition non vide (chap.II, § 3, n° 2). Comme A est compact et les ensembles $V \cap A$ (où $V \in \mathfrak{G}$) fermés dans A , on voit que si $W = \bigcap_{V\in\mathfrak{G}} V$, $W \cap A$, intersection des ensembles $V \cap A$ pour $V \in \mathfrak{G}$, <u>n'est pas vide</u> ; il résulte alors aussitôt de la définition des variétés d'appui que W est une variété d'appui de A , et elle est évidemment fermée, donc appartient à $\mathfrak{F}$, ce qui prouve que $\mathfrak{G}$ admet une borne supérieure dans $\mathfrak{F}$ pour la relation $\supset$. D'après le th. de Zorn (<u>Ens</u>.R, § 6,n°10), il existe donc dans $\mathfrak{F}$ un élément <u>maximal</u> (pour la relation $\supset$), soit W_0 ; nous allons montrer que W_0 est réduit à un point x_0 , et par suite que x_0 est point extrémal de A . Supposons le contraire ; dans la variété linéaire W_0 de dimension >0 , $W_0 \cap A$ est un ensemble convexe compact, donc il existe dans W_0 un hyperplan d'appui fermé H de $W_0 \cap A$ (prop.7) ; pour tout point $x \in W_0 \cap A$, la facette de x par rapport à A étant contenue dans W_0 , est identique à la facette de x par rapport à $W_0 \cap A$, donc si $x \in H$, sa facette par rapport à A est contenue dans H , autrement dit H est variété d'appui fermée de A ; comme $H \subset W_0$ et $H \neq W_0$, cela contredit la définition de W_0 , et démontre la proposition.

THÉORÈME 3 (Krein-Milman).- <u>Dans un espace localement convexe E , tout ensemble convexe compact A est le plus petit ensemble convexe fermé contenant l'ensemble des points extrémaux de A (autrement dit, A est l'adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux</u>).

En effet, soit B l'adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points extrémaux de A ; on a évidemment $B \subset A$. Supposons qu'il existe un point $x_0 \in A$ n'appartenant pas à B ; il existerait alors (prop.3) un hyperplan fermé H séparant x_0 de B et tel que $x_0 \notin H$; soit $g(x)=a$ une équation de H ; on a $g(x_0) > a$, donc $\sup_{x \in A} g(x) > a$, et le raisonnement de la prop.7 montre qu'il existe un hyperplan d'appui de A ne rencontrant pas B , ce qui est contraire à la prop.8 , et démontre donc le théorème.

Z On notera que, même dans un espace E de dimension finie, l'ensemble des points extrémaux d'un ensemble convexe compact <u>n'est pas nécessairement fermé</u> (exerc.).

Z D'autre part, un ensemble convexe <u>fermé et borné</u> dans un espace localement convexe séparé E n'admet pas nécessairement de points extrémaux s'il n'est pas compact (exerc. 13).

5. Application : dérivées des fonctions à valeurs dans un espace localement convexe.

Au Livre IV , chap.I, § 2, nous avons démontré le théorème des accroissements finis pour des fonctions définies dans un intervalle de $\mathbb{R}$ et prenant leurs valeurs dans un espace <u>normé</u> sur $\mathbb{R}$; le théorème s'étend comme suit aux fonctions prenant leurs valeurs dans un espace <u>localement convexe</u> quelconque :

PROPOSITION 9.- Soit f une fonction définie et continue dans un intervalle compact $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$, prenant ses valeurs dans un espace localement convexe E. On suppose que f admet une dérivée à droite en tous les points du complémentaire par rapport à $[a,b[$ d'une partie dénombrable A de cet intervalle, et qu'en chacun de ces points $f'_d(x)$ appartient à une partie convexe fermée D de E. Dans ces conditions, $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))$ appartient à D.

En effet, soit u une forme linéaire continue quelconque dans E, telle que D soit contenu dans le demi-espace fermé $u(x) \geqslant \alpha$. La fonction numérique continue $u(f(x))=g(x)$ est dérivable à droite dans I en tout point n'appartenant pas à A et on a en chacun de ces points

$g'_d(x) = u(f'_d(x))$ donc $g'_d(x) \geqslant \alpha$ par hypothèse ; d'où, en vertu du th. des accroissements finis pour les fonctions numériques, $g(b)-g(a) \geqslant \alpha(b-a)$; en d'autres termes, le point $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))$ est dans le demi-espace fermé $u(x) \geqslant \alpha$. Comme D est l'intersection de ces demi-espaces (cor.1 de la prop.3), la proposition est démontrée.

COROLLAIRE 1.- Si D a des points intérieurs, et si $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a)= c$ est un point frontière de D, pour tout hyperplan d'appui H de D au point c, $f'_d(x)$ appartient à $H \cap D$ en tout point où cette dérivée est définie.

En effet, si $u(x)=0$ est l'équation de H et si $u(x) \geqslant 0$ dans D, on ne peut avoir, avec les notations précédentes, $g(b)-g(a)=0$ que si $g'_d(x)=0$ en tout point de $[a,b[$ n'appartenant pas à A, ce qui signifie que $f'_d(x) \in H$ en ces points.

COROLLAIRE 2.- Soit Γ un ensemble de semi-normes définissant la topologie de E et soit $p \in \Gamma$. Si, en tous les points de $[a,b[$ où f admet une dérivée à droite, on a $p(f'_d(x)) \leqslant \alpha$, on a

<u>on a</u> $p\left(\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))\right) \leqslant \alpha$.

Il suffit d'appliquer la prop.9 à l'ensemble D des points où $p(x) \leqslant \alpha$.

§ 3. Dual faible d'un espace localement convexe.

1. <u>Topologie faible sur un espace localement convexe séparé</u>.

Soit E un espace localement convexe séparé E' son <u>dual</u>, que nous supposerons toujours dans ce paragraphe, muni de la <u>topologie faible</u> (chap.I, § 3,n°3).

PROPOSITION 1.- <u>Pour tout</u> $x \neq 0$ <u>dans</u> E , <u>il existe une forme linéaire continue</u> $x' \in E'$ <u>telle que</u> $\langle x,x'\rangle \neq 0$.

En effet, il existe une semi-norme p sur E (appartenant à un ensemble de semi-normes qui définit la topologie de E) telle que $p(x) \neq 0$. La proposition résulte alors du cor.1 de la prop.5 du § 2 .

Il revient au même de dire que dans E le sous-espace E'^0 <u>orthogonal</u> à E' (chap.I, § 3,n°3) est <u>réduit à</u> 0 .

On déduit de la prop.1 qu'on peut identifier E au <u>dual du dual faible</u> E' <u>de</u> E . En effet (chap.I, § 3,cor.2 du th.1) toute forme linéaire continue sur le dual faible E' est de la forme $x' \longrightarrow \langle x,x'\rangle$; d'autre part, d'après la prop.1, la relation $\langle x,x'\rangle = \langle y,x'\rangle$ pour tout $x' \in E'$ entraîne $x=y$. En d'autres termes, si $\tilde{x}$ désigne la forme linéaire continue $x' \rightarrow \langle x,x'\rangle$ sur le dual faible E' , l'application linéaire $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E <u>sur</u> le dual E" de E' est <u>biunivoque</u>, ce qui permet d'identifier E et E" par cette application ; nous supposerons désormais qu'on a fait cette identification.

On notera que E' ne peut être de dimension finie que si E lui-même est de dimension finie.

Cela étant, on peut définir sur E la <u>topologie faible</u> du dual de l'espace vectoriel topologique E', autrement dit, la topologie de la convergence <u>simple</u> dans E' (les éléments de E étant considérés comme des formes linéaires continues sur E'). C'est une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ; on obtient un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie, en considérant, pour toute partie <u>finie</u> F de E', l'ensemble polaire F^{o} (appelé encore <u>prisme</u> défini par F) des $x \in E$ tels que $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x' \in F$. Cela montre aussitôt que la topologie faible est <u>moins fine</u> que la topologie donnée $\mathcal{E}$ sur E, car tout prisme contient un voisinage de 0 pour $\mathcal{E}$ (§ 1, cor. de la prop.4).

La topologie faible sur E et la topologie faible sur E' sont deux topologies d'espace <u>localement convexe</u>, définies par les semi-normes $|x|_F = \sup_{x'\in F} |\langle x,x'\rangle|$, $|x'|_G = \sup_{x\in G} |\langle x,x'\rangle|$, où F (resp. G) parcourt l'ensemble des parties finies de E' (resp. E). Nous noterons ces topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(E',E)$ quand ce sera nécessaire ; on dit que $\sigma(E,E')$ est la topologie faible <u>associée</u> à $\mathcal{E}$.

Ces topologies peuvent être définies comme les topologies d'espace vectoriel les moins fines pour lesquelles les applications $x \to \langle x,x'\rangle$ (resp. $x' \to \langle x,x'\rangle$) sont continues dans E (resp. E').

Toute forme linéaire sur E, continue pour la topologie $\sigma(E,E')$ est de la forme $x \to \langle x,x'\rangle$ (chap.I, § 3, cor.2 du th.1) ; autrement dit, E' est le dual de E ce dernier espace étant muni de la topologie $\sigma(E,E')$: on peut encore dire que la topologie faible associée à $\sigma(E,E')$ est identique à $\sigma(E,E')$; de même, la topologie faible associée à $\sigma(E',E)$ est identique à $\sigma(E',E)$.

En général, la topologie $\sigma(E,E')$ est <u>strictement moins fine</u> que $\mathscr{C}$ (cf. ci-dessous) ; toutefois, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- <u>Tout ensemble convexe</u> A <u>fermé dans</u> E (pour la topologie $\mathscr{C}$) <u>est fermé pour la topologie faible</u> $\sigma(E,E')$ (ou, comme on dit encore, est <u>faiblement fermé</u>).

En effet, soit x un point n'appartenant pas à A ; il existe un hyperplan fermé H séparant x et A et ne contenant pas x (§ 2,prop.3) ; soit $\langle y,x'\rangle = a$ une équation de H (avec $x'\in E'$), et supposons par exemple que $\langle y,x'\rangle \geqslant a$ pour tout $y\in A$; alors, on a $\langle x,x'\rangle = b < a$; par suite, le voisinage de x pour la topologie $\sigma(E,E')$ formé des points y tels que $|\langle y-x,x'\rangle| \leqslant a-b$ ne rencontre pas A , ce qui démontre la proposition.

Il est facile de donner des exemples d'ensembles fermés dans E (pour $\mathscr{C}$), mais <u>non faiblement fermés</u>. Par exemple, si E est <u>normé</u>, toute <u>sphère</u> $S : \|x\| = a$ est fermée dans E , mais si E est de dimension infinie, elle n'est pas faiblement fermée : en effet, quelles que soient les formes linéaires x'_i en nombre fini, le sous-espace vectoriel V de E , d'équations $\langle x,x'_i\rangle = 0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ n'est pas réduit à 0 , donc a des points communs avec S , ce qui prouve que 0 est <u>faiblement adhérent</u> à S (on montrerait aisément qu'il en est de même de tout point x_0 tel que $\|x_0\| \leqslant a$) . Cet exemple montre en même temps que, dans ce cas, la topologie faible sur E est <u>strictement moins fine</u> que la topologie définie par la norme.

COROLLAIRE 1.- <u>Toute variété linéaire fermée dans</u> E <u>est aussi faiblement fermée</u>.

COROLLAIRE 2.- <u>Pour qu'une partie</u> A <u>d'un espace localement convexe soit un ensemble total</u> (chap.I, § 2,n°1) <u>dans</u> E , <u>il faut et il suffit que pour tout</u> $x'\neq 0$ <u>dans</u> E' , <u>il existe</u> $x\in A$ <u>tel que</u> $\langle x,x'\rangle \neq 0$.

24

En effet, cette condition exprime que A est total dans E pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ (chap.I, § 3, cor.4 du th.1).

COROLLAIRE 3.- Pour qu'une famille (x_ι) de points d'un espace localement convexe E soit topologiquement libre dans E, il faut et il suffit que, pour tout indice κ, il existe $a'_\kappa \in E'$ tel que $\langle x_\kappa, a'_\kappa \rangle \neq 0$, et $\langle x_\iota, a'_\kappa \rangle = 0$ pour tout $\iota \neq \kappa$.

En effet, cette condition exprime que (x_ι) est topologiquement libre pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ (chap.I, § 3, cor.5 du th.1).

COROLLAIRE 4.- Soient E et F deux espaces localement convexes. Toute application linéaire continue u de E dans F est continue pour les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$ (on dit qu'elle est faiblement continue).

En effet, pour tout hyperplan faiblement fermé H dans F, $\overset{-1}{u}(H)$ est fermé dans E, donc faiblement fermé d'après la prop.2, ce qui montre que u est faiblement continue (chap.I, § 3, cor. de la prop.10). La réciproque de ce corollaire n'est pas vraie en général (cf. exerc. 3c)).

COROLLAIRE 5.- Soit E un espace localement convexe ; toute semi-norme p continue sur E est semi-continue inférieurement pour la topologie faible.

En effet, pour tout $a > 0$, l'ensemble des points x tels que $p(x) \leqslant a$, est convexe et fermé, donc faiblement fermé.

COROLLAIRE 6.- Soient E et F deux espaces localement convexes, u une application linéaire continue de E dans F ; pour que u(E) soit partout dense dans E, il faut et il suffit que ${}^t u$ soit une application biunivoque de F' dans E'.

On a vu que la condition est nécessaire (chap.I, § 3, prop.12) ; inversement, si elle est vérifiée, u(E) est faiblement dense dans F (chap.I, § 3, prop.14), donc partout dense dans F.

2. Dual d'un espace quotient et dual d'un sous-espace d'un espace localement convexe.

Rappelons que si V est un sous-espace fermé d'un espace localement convexe E , le dual faible de E/V peut être identifié par une application canonique au sous-espace V^o du dual faible E' de E (chap.I, § 3, prop.5). En outre, comme E' est le dual de E pour la topologie $\sigma(E,E')$ sur E , V^o est aussi le dual de E/V quand on munit E/V de la topologie quotient de $\sigma(E,E')$ par V . Si V est de codimension n , V^o est de dimension n et réciproquement.

On sait (chap.I, § 3, n°3) que le dual d'un sous-espace vectoriel V de E peut être identifié (en tant qu'espace vectoriel <u>non topologique</u>) au dual de l'adhérence $\bar{V}$ de V dans E . Nous nous bornerons donc à déterminer le dual d'un sous-espace <u>fermé</u> V d'un espace localement convexe E.

PROPOSITION 3.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe,</u> V <u>un sous-espace vectoriel fermé de</u> E . <u>Le dual</u> V' <u>de</u> V , <u>muni de la topologie faible</u> $\sigma(V',V)$, <u>est isomorphe à l'espace quotient</u> E'/V^o (muni de la topologie quotient par V^o de la topologie faible $\sigma(E',E)$).

Remarquons d'abord que le dual de V est le même, que l'on munisse V de la topologie induite par $\mathcal{C}$, ou de la topologie induite par $\sigma(E,E')$: en effet, toute forme linéaire continue dans V pour une de ces topologies peut être prolongée en une forme linéaire continue dans E (pour la topologie correspondante sur E) ; et les formes linéaires continues dans E sont <u>les mêmes</u> pour $\mathcal{C}$ et pour $\sigma(E,E')$. Cela étant, V , étant faiblement fermé (cor. de la prop.2) est identique à V^{oo} (chap.I, § 3, th.1 appliqué à E considéré comme dual faible de E') ; V (muni de la topologie induite par $\sigma(E,E')$) est donc isomorphe au dual faible de E'/V^o (chap.I, § 3, cor.3 du th.1) ; comme E'/V^o est localement convexe, il peut être identifié au dual de V , d'où la proposition. De façon plus précise, l'application canonique de V' sur E'/V^o qui, à toute forme linéaire continue u sur V fait correspondre la classe modulo V^o de ses prolongements en une forme linéaire continue sur E , est un isomorphisme de V' (muni de la topologie faible $\sigma(V',V)$) sur E'/V^o (muni de la topologie quotient de $\sigma(E',E)$ par V^o) .

COROLLAIRE 1.- Soit V un sous-espace vectoriel fermé d'un espace localement convexe E . La topologie induite sur V par la topologie faible $\sigma(E,E')$ est identique à la topologie faible $\sigma(V,V')$.

En effet, V , muni de la topologie induite par $\sigma(E,E')$, est isomorphe au dual faible de E'/V^o (chap.I, § 3,prop.5), donc au dual faible de V' .

COROLLAIRE 2.- Soient E un espace localement convexe, V un sous-espace vectoriel fermé de E . La topologie quotient de $\sigma(E,E')$ par V est identique à la topologie faible $\sigma(E/V,V^o)$.

Il suffit d'appliquer la prop.3 à E' et V^o, E (muni de $\sigma(E,E')$) étant considéré comme le dual faible de E' : comme V est fermé, donc (cor.1 de la prop.2) faiblement fermé, on a $V=V^{oo}$ (chap.I, § 3,th.1).

3. Ensembles semi-polaires.

Soit M (resp. N) une partie quelconque contenant l'origine d'un espace localement convexe E (resp. de son dual E'). On appelle ensemble semi-polaire de M (resp. N) et on note $M^{\cup}$ (resp. $N^{\cup}$) l'ensemble des $x'\in E'$ (resp. des $x\in E$) tels que $\langle x,x'\rangle \leqslant 1$ pour tout $x\in M$ (resp. $\langle x,x'\rangle \leqslant 1$ pour tout $x'\in N$) ; on a $0\in M^{\cup}$ (resp. $0\in N^{\cup}$). L'ensemble $M^{\cup}$ (resp. $N^{\cup}$) étant intersection de demiespaces fermés, est un ensemble convexe fermé dans le dual faible E' (resp. dans E , pour la topologie donnée sur E et la topologie faible $\sigma(E,E')$, d'après la propos. 2) ; il contient évidemment l'origine. L'ensemble <u>polaire</u> M^o de M (resp. N^o de N) est identique à l'ensemble semi-polaire de $M \cup (-M)$ (resp. $N \cup (-N)$). En particulier, si $-M = M$ (resp. $-N=N$), on a $M^{\cup}=M^o$ (resp. $N^{\cup}=N^o$).

Si M est une partie de E contenant 0, et M_1 son <u>enveloppe convexe</u> (chap. II, § 1, n°3), on a $M_1^{\cup} = M^{\cup}$, car si (x_i) est une famille finie de points de M, et (λ_i) une famille de nombres réels $\geqslant 0$ tels que $\sum_i \lambda_i = 1$, la relation $\langle x_i, x' \rangle \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ entraîne $\langle \sum_i \lambda_i x_i, x' \rangle \leqslant 1$. On a un résultat analogue pour les parties de E', et on peut donc se borner à ne considérer que les ensembles semi-polaires d'ensembles <u>convexes</u>.

Si M est un <u>secteur conique convexe</u> de sommet 0, il en est de même de $M^{\cup}$; on effet, si $x' \in E'$ est tel que $\langle x, x' \rangle \leqslant 1$ pour tout $x \in M$, on a aussi $\lambda \langle x, x' \rangle \leqslant 1$ pour tout $x \in M$ et tout $\lambda > 0$, ce qui n'est possible que si $\langle x, x' \rangle \leqslant 0$; l'ensemble $M^{\cup}$ est donc l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\langle x, x' \rangle \leqslant 0$ pour tout $x \in M$, ce qui entraîne évidemment que $M^{\cup}$ est un secteur conique. On a un résultat analogue pour les secteurs coniques convexes dans E'.

PROPOSITION 4.- <u>Si M (resp. N) est un ensemble convexe dans E, contenant 0, l'ensemble $M^{\cup\cup}$ (resp. $N^{\cup\cup}$) est l'adhérence de M dans E (resp. l'adhérence de N dans le dual faible E'), et on a</u> $M^{\cup\cup\cup} = M^{\cup}$ (resp. $N^{\cup\cup\cup} = N^{\cup}$).

En effet, $M^{\cup\cup}$ qui contient M, est convexe et fermé pour la topologie $\sigma(E,E')$ donc fermé pour la topologie $\mathcal{C}$, et par suite contient $\overline{M}$. D'autre part, si $x \notin \overline{M}$, il existe un hyperplan fermé H séparant strictement x et $\overline{M}$ (§ 2, prop. 3) : comme H ne contient pas 0, il existe un $x' \in E'$ tel que $\langle y, x' \rangle = 1$ soit une équation de H, et comme on a

$\langle y,x'\rangle < 1$ pour $y=0$ on a aussi $\langle y,x'\rangle \leqslant 1$ pour tout $y \in M$, donc $x' \in M^{\cup}$; mais comme $\langle x,x'\rangle > 1$, on a $x \notin M^{\cup\cup}$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Soient E et F deux espaces localement convexes, u une application linéaire continue de E dans F. Pour que $u(E)=F$, il faut et il suffit que ${}^tu$ soit un isomorphisme du dual faible F' dans le dual faible E'.

En effet, pour que ${}^tu$ soit un tel isomorphisme, il faut et il suffit (chap.I, §3, prop.13) que pour toute partie finie B de F, il existe une partie finie A de E telle que $B \subset (u(A))^{\circ\circ}$; or l'enveloppe convexe d'un ensemble fini étant compacte, $(u(A))^{\circ\circ}$ n'est autre que l'enveloppe convexe de $u(A) \cup (-u(A))$, donc l'image par u de l'enveloppe convexe de $A \cup (-A)$; la condition équivaut donc à $B \subset u(E)$, c'est-à-dire à $u(E)=F$.

La prop.4 montre que pour l'étude de l'ensemble $M^{\cup}$, on peut se borner au cas où M est un ensemble convexe fermé dans E (contenant 0).

PROPOSITION 5.- Soit M un ensemble convexe fermé dans E, contenant 0.

a) Pour que 0 soit point interne de M et que M engendre E il faut et il suffit que $M^{\cup}$ soit borné dans le dual faible E'.

b) Si 0 est point intérieur de M, $M^{\cup}$ est compact dans E'.

c) Pour que 0 soit point intérieur de M pour la topologie faible $\sigma(E,E')$, il faut et il suffit que $M^{\cup}$ soit borné et de dimension finie dans E'.

a) Si M engendre E et admet 0 comme point interne, pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe $\alpha > 0$ tel que la relation $|\lambda| \leqslant \alpha$ entraîne $\lambda x \in M$; pour tout $x' \in M^{\cup}$, on a donc $\langle \lambda x,x'\rangle \leqslant 1$ pour $-\alpha \leqslant \lambda \leqslant \alpha$, c'est-à-dire $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1/\alpha$, ce qui démontre que $M^{\cup}$ est borné.

Réciproquement, si $M^{\cup}$ est borné, pour tout $x \neq 0$ dans M, on a $|\langle x,x'\rangle| \leqslant a_x$ pour tout $x' \in M^{\cup}$, donc $\langle \lambda x,x'\rangle \leqslant 1$ pour $|\lambda| \leqslant a_x$ ce qui montre que $\lambda x \in M^{\cup\cup} = M$ pour $|\lambda| \leqslant a_x$, c'est-à-dire que M engendre E et que 0 est point interne de M.

b) Si 0 est point intérieur de M, M contient un voisinage convexe symétrique V de 0, donc $M^{\cup} \subset V^{\cup} = V^{o}$, et on sait que V^{o} est compact dans E' (chap.I, §3,th.2).

c) Si M contient un voisinage W de 0 pour la topologie $\sigma(E,E')$, on peut supposer que $W=F^{o}$, où F est une partie finie de E', d'où $M^{\cup} \subset (F^{o})^{\cup} = F^{oo}$, et comme F^{oo} est l'adhérence de l'enveloppe convexe de $F \cup (-F)$, F^{oo} est borné et de dimension finie dans E'. Inversement, si $M^{\cup}$ est borné et de dimension finie dans E', $M^{\cup}$ est contenu dans l'enveloppe convexe d'un ensemble symétrique fini F, donc $M^{\cup\cup} = M \supset F^{\cup} = F^{o}$, et F^{o} est voisinage de 0 pour la topologie faible.

Supposons maintenant que M soit un ensemble <u>borné</u> dans E ; pour toute forme linéaire continue $x' \in E'$, posons

$$(1) \qquad h(x') = \sup_{x \in M} \langle x,x'\rangle$$

L'hypothèse sur M entraîne que $h(x')$ est <u>fini</u> (§ 1,cor.2 de la prop.3). On dit que la fonction h ainsi définie dans E' est la <u>fonction d'appui</u> de l'ensemble M. On a évidemment $h(0)=0$; pour tout $x' \neq 0$, $h(x')$ est la plus petite valeur de a telle que M soit du même côté que 0 par rapport à l'hyperplan d'équation $\langle x,x'\rangle = a$. Lorsque E est un espace <u>normé</u>, $h(x')/\|x'\|$ est la <u>distance</u> de 0 à cet hyperplan. Si M est <u>compact</u>, cet hyperplan est un <u>hyperplan d'appui</u> de M (d'où le nom de "fonction d'appui") puisqu'il existe un point $x \in M$ au moins où la fonction continue $\langle x,x'\rangle$ atteint sa borne supérieure.

<u>Exemples</u>. - 1) Dans un espace normé E, soit M la boule unité $\|x\| \leqslant 1$; sa fonction d'appui est $h(x') = \|x'\|$, puisque par définition $\|x'\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle x,x'\rangle|$ et que M est symétrique.

2) Si M est le segment fermé joignant les points a et $-a$ de E, on a $h(x') = |\langle a,x'\rangle|$.

3) Cherchons la fonction d'appui du cube fermé K : $|\xi_i| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Si $x=(\xi_i)$, $x'=(\xi'_i)$, on a $\langle x,x'\rangle = \sum_i \xi_i \xi'_i$, d'où dans K, $\langle x,x'\rangle \leqslant \sum |\xi'_i|$, le second membre étant atteint lorsqu'on prend $\xi_i=1$ pour $\xi'_i \geqslant 0$, $\xi_i=-1$ pour $\xi'_i < 0$. On a donc $h(x') = \sum_i |\xi'_i|$.

Supposons maintenant que M <u>contienne</u> 0. Il est immédiat que h est une fonction <u>positive, positivement homogène</u> et <u>convexe</u> ; en outre la définition de M montre que la relation $x' \in M^{\cup}$ est équivalente à $h(x') \leqslant 1$; autrement dit, h est la <u>jauge</u> de l'ensemble des points internes de $M^{\cup}$. Si M est un ensemble convexe borné et fermé engendrant E et dont 0 est point interne, la <u>fonction d'appui de</u> $M^{\cup}$ est donc la <u>jauge</u> p de l'ensemble des points internes de M, d'après la prop.4. Dans ce cas, pour tout $x \neq 0$ dans E, $x/p(x)$ est dans M (car $p(x) \neq 0$ puisque M est borné), donc on a

$$\langle x,x'\rangle \leqslant p(x)h(x') \tag{2}$$

§ 4. Espaces localement convexes complexes.

1. Espaces vectoriels topologiques complexes.

Soit E un espace vectoriel topologique sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (chap.I, § 1) ; en restreignant le corps des scalaires à $\mathbb{R}$, on obtient sur E une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; en outre, pour la topologie $\mathcal{E}$ de E, l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbb{R} \times E$ dans E est continue, puisqu'elle est continue par hypothèse dans $\mathbb{C} \times E$; donc $\mathcal{E}$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E sur $\mathbb{R}$. Désignons par E_0 l'espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ ainsi défini. Dans E_0, l'application $x \to ix$ (qui n'est plus une homothétie) est un automorphisme (topologique) u de E_0, tel que $u^2(x)=-x$. Inversement, soit F_0 un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, et soit u un automorphisme (topologique) de F_0 tel que $u^2(x)=-x$; on peut définir sur F_0 une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ on posant, pour tout $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, et tout $x \in F_0$, $\lambda x = \alpha x + \beta u(x)$, car on vérifie aussitôt que $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ en raison de l'hypothèse $u^2(x)=-x$ (cf. Alg., chap.VIII; §) ; en outre, l'application $(\alpha, \beta, x) \to \alpha x + \beta u(x)$ de $\mathbb{R}^2 \times F_0$ dans F_0 étant continue, la topologie de F_0 est compatible avec la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ainsi définie ; enfin, si F est l'espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$ ainsi défini, F_0 est l'espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ obtenu par restriction à $\mathbb{R}$ du corps des scalaires. Nous dirons que les espaces vectoriels topologiques F et F_0 (sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ respectivement) sont associés.

On notera qu'il n'existe pas toujours dans un espace vectoriel topologique F_0 sur $\mathbb{R}$ un automorphisme u tel que $u^2(x)=-x$: c'est ce qui a lieu par exemple lorsque F_0 est de dimension finie impaire sur $\mathbb{R}$.

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique *complexe* E est *localement convexe* si l'espace vectoriel topologique *réel* associé E_0 est localement convexe. Si V est un voisinage de 0 dans E, iV est aussi un voisinage de 0 dans E. Réciproquement, soit $\mathcal{C}$ une topologie d'espace localement convexe *sur* E_0, et supposons que pour tout voisinage V de 0 pour la topologie $\mathcal{C}$, iV soit un voisinage de 0. Il en résulte que l'application $x \to ix$ est un automorphisme de E_0, donc que la topologie $\mathcal{C}$ est une topologie d'espace localement convexe *sur* E.

PROPOSITION 1.- *Si E est un espace complexe localement convexe, il existe un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages de 0 dans E, invariant par toute homothétie réelle $x \to \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) et formé d'ensembles convexes V tels que $e^{i\theta}V = V$ pour tout θ réel, engendrant E et tels que 0 soit point interne de V. Inversement toute base de filtre $\mathfrak{S}$ sur E ayant ces propriétés est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie d'espace localement convexe sur E.*

La seconde partie de la proposition résulte aussitôt des remarques précédentes et de la prop. 1 du § 1. D'autre part, pour démontrer la première partie, il suffit de prouver que pour tout voisinage convexe V de 0, $W = \bigcap_{0 \leq \theta \leq 2\pi} e^{i\theta}V$ est encore un voisinage de 0. Or si V' est un voisinage convexe symétrique de 0 contenu dans V, et si $x \in V'$, on a $e^{i\theta}x = \cos\theta . x + i \sin\theta . x$, et $\cos\theta . x \in V'$, $\sin\theta . x \in V'$, d'où $e^{i\theta}x \in V' + iV'$; si on prend V' tel que $V' \subset (\frac{1}{2}V) \cap (\frac{1}{2}iV)$ (ce qui est possible par hypothèse), on a $iV' \subset \frac{1}{2}V$, d'où $V' + iV' \subset \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V$, donc $e^{i\theta}x \in V$ et $x \in e^{-i\theta}V$ pour tout θ, ce qui démontre la proposition.

Nous dirons que les ensembles convexes V tels que $e^{i\theta}V=V$ pour tout θ réel sont cerclés ; la prop.1 signifie donc que dans un espace localement convexe, il existe un système fondamental de voisinages convexes et cerclés de l'origine. La jauge d'un tel voisinage V est une semi-norme p telle que $p(e^{i\theta}x) = p(x)$ identiquement : il revient au même de dire que $p(\lambda x)=|\lambda| p(x)$ pour tout scalaire λ complexe. Lorsque nous parlerons désormais de semi-normes sur un espace vectoriel complexe, il sera toujours sous-entendu qu'elles satisfont à la condition précédente. Avec cette convention, et en remplaçant partout les mots "voisinage convexe symétrique" par "voisinage convexe cerclé", le lecteur vérifiera sans peine que toutes les propositions démontrées au § 1 pour les espaces localement convexes réels s'étendent sans modification aux espaces localement convexes complexes.

2. Variétés linéaires et formes linéaires dans un espace localement convexe complexe.

Soit E un espace localement convexe complexe, E_o l'espace localement convexe réel associé. Toute variété linéaire V dans E est aussi une variété linéaire dans E_o ; la réciproque est inexacte, car pour qu'un sous-espace vectoriel W de E_o soit aussi un sous-espace vectoriel de E, il faut et il suffit que $iW=W$. Pour éviter toute confusion, on dira qu'une variété linéaire dans E (resp. E_o) est une variété linéaire complexe (resp. réelle). Une variété linéaire complexe de dimension finie n (resp. de codimension finie n) est une variété linéaire réelle de dimension 2n (resp. de codimension 2 n).

Soit f une forme linéaire sur E (donc à valeurs complexes) ; il est clair que $g = \mathcal{R}f$ et $h = \mathcal{I} f$ sont des formes linéaires sur E_o ; en outre la relation $f(ix)=if(x)$ entraîne l'identité $h(x)=-g(ix)$.

Inversement, si g est une forme linéaire (réelle) sur E_0, $f(x)=g(x)-ig(ix)$ est une forme linéaire (complexe) sur E, telle que $\mathcal{R} f=g$ (cf. Alg., chap. VIII) ; il est clair que, pour que f soit continue, il faut et il suffit que g le soit.

Soit H un hyperplan complexe dans E, d'équation $f(x)=\alpha+i\beta$, où f est une forme linéaire complexe sur E ; si $g=\mathcal{R} f$, H est l'intersection des deux hyperplans réels H_1, H_2, d'équations $g(x)=\alpha$ et $g(ix)=-\beta$; si H est fermé, il en est de même de H_1 et H_2 (chap. I, § 2, th. 1). Inversement, soit H_0 un hyperplan réel homogène, d'équation $g(x)=0$, (g forme linéaire réelle sur E_0) ; l'intersection H de H_0 et de iH_0 est un hyperplan complexe homogène, car si f est la forme linéaire complexe sur E telle que $\mathcal{R} f=g$, H est l'hyperplan d'équation $f(x)=0$; si H_0 est fermé, il en est de même de H.

PROPOSITION 2.- Dans un espace localement convexe complexe E, toute variété linéaire complexe fermée V est l'intersection des hyperplans complexes fermés qui la contiennent.

Il suffit (par translation) de considérer le cas où V est un sous-espace vectoriel de E. Alors V est l'intersection des hyperplans réels fermés qui le contiennent (§ 2, cor. 2 de la prop. 3) ; or, si H_0 est un hyperplan réel fermé contenant V, on a aussi $V=iV\subset iH_0$, donc V est contenu dans l'hyperplan complexe fermé $H=H_0\cap iH_0$; d'où résulte que l'intersection des hyperplans complexes fermés contenant V est contenue dans V, et par suite identique à V.

PROPOSITION 3.- Soient E un espace localement convexe complexe, G un sous-espace vectoriel complexe de E, f une forme linéaire continue (complexe) définie dans G ; il existe une forme linéaire continue (complexe) f_1 définie dans E et prolongeant f.

En effet, $g = \mathcal{R} f$ est une forme linéaire continue réelle définie dans G, donc (§ 2, th. 2) il existe une forme linéaire continue réelle g_1 définie dans E et prolongeant g ; si f_1 est la forme linéaire continue complexe telle que $g_1 = \mathcal{R} f_1$, f_1 répond à la question.

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> E <u>un espace normé complexe,</u> G <u>un sous-espace vectoriel complexe de</u> E, f <u>une forme linéaire continue définie dans</u> G ; <u>il existe une forme linéaire continue</u> f_1 <u>définie dans</u> E, <u>prolongeant</u> f <u>et telle que</u> $\|f\| = \|f_1\|$.

En effet, soit $g = \mathcal{R} f$; on a $\|g\| \leqslant \|f\|$. Il existe une forme linéaire réelle continue g_1 prolongeant g à E et telle que $\|g_1\| = \|g\|$; soit $f_1(x) = g_1(x) - ig_1(ix)$ la forme linéaire complexe sur E dont g_1 est la partie réelle. Pour tout θ réel, on a
$\mathcal{R}(e^{i\theta} f_1(x)) = \mathcal{R}(f_1(e^{i\theta}x)) = g_1(e^{i\theta}x)$, donc, en raison de la relation $\|e^{i\theta}x\| = \|x\|$, $|\mathcal{R}(e^{i\theta}f_1(x))| \leqslant \|g\| \cdot \|x\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$, et en particulier $|f_1(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$ pour tout x, c'est-à-dire $\|f_1\| \leqslant \|f\|$; comme par ailleurs on a $\|f_1\| \geqslant \|f\|$ d'après la définition de la norme d'une forme linéaire, on a $\|f_1\| = \|f\|$.

Soit E un espace localement convexe complexe séparé, E_0 l'espace localement convexe réel associé. Si $z' = x' + iy'$ est une forme linéaire continue sur E, la relation $|\langle x, z'\rangle| \leqslant a$ entraîne $|\langle x, x'\rangle| \leqslant a$ et $|\langle x, y'\rangle| \leqslant a$, et inversement ces deux relations entraînent $|\langle x, z'\rangle| \leqslant 2a$; on en déduit que la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E (définie comme dans le § 3) est <u>identique</u> à la topologie faible $\sigma(E_0, E'_0)$.
