INTEGRATION (ETAT 4)
CHAPITRE III
ESPACES VECTORIELS NORMES COMPLETS DEFINIS PAR UNE INTEGRALE DE RADON

Rédaction n° 104

Nombre de pages : 120

Nombre de feuilles : 120

Intégration Chap 3 - Etat 4
Espaces vectoriels normés définis par une intégrale de Radon
104

A 104

INTEGRATION (Etat 4)

Chapitre III - Espaces vectoriels normés complets définis par une intégrale de Radon

----

§ 5 - Fonctions mesurables sur tout compact.

1 : Le théorème de Lusin - 2 : Définition des fonctions mesurables sur tout compact - 3 : Propriétés élémentaires - 4 : Mesurabilité et sommabilité - 5 : Fonctions sommables sur tout compact - 6 : Suites de fonctions mesurables sur tout compact - 7 : Ensembles mesurables sur tout compact - 8 : Les espaces $\mathcal{L}^{\infty}_{F}$ et L^{∞}_{F} - 9 : Relation entre ensembles et fonctions mesurables - 10 : Intégrale étendue à un sous-ensemble - 11 : Fonctions faiblement mesurables sur tout compact - 12 : Définition d'une fonction mesurable par ses restrictions aux compacts de E .

§ 6 - Théorèmes de convexité.

1 : Le théorème de convexité - 2 : Cas limite du théorème de convexité - 3 : L'inégalité de Hölder - 4 : Cas limite de l'inégalité de Hölder - 5 : Le Théorème de Thorin - 6 : Les inégalités de M. Riesz - 7 : Démonstration de quelques inégalités - 8 : Convexité uniforme des espaces L^{p}_{F} ($1 < p \leq +\infty$, F : espace de Hilbert) - 9 : Dualité des espaces L^{p}_{F} .

§ 7 - Théorème de Lebesgue-Fubini.

1 : Enoncé du théorème - 2 : Cas des fonctions positives semi-continues inférieurement - 3 : Cas général - 4 : Conséquences du théorème de Lebesgue-Fubini - 5 : Extension à un produit fini d'intégrales.

Commentaires

On a rassemblé dans ce chapitre tout ce qui, suivant le plan de juin 1948 , devait constituer les chap. III, IV, V ; seul, Lebesgue-Nikodym et ce qui s'y rattache n'est pas exposé ici et fera l'objet du chap.IV. Les raisons de cette séparation paraitront, on l'espère, assez claires.

On ne s'est pas contenté de démolir le plan. On a aussi expulsé, après plusieurs mois de cogitations, la méthode prévue. Le résultat est un exposé direct et simultané de tous les L^{p} de fonctions à valeurs dans tous les

les Banach, "simultané", voulant dire : sans jamais parler des fonctions numériques avant les fonctions vectorielles (à ceci près que l'on n'a pu tout de même s'empêcher de parler des suites croissantes de fonctions numériques - exception en somme raisonnable et prévisible). Naturellement, on appelle ici "sommables" les fonctions qu'on qualifie habituellement de "fortement sommables" ; on a négligé de parler des autres pour diverses raisons (fatigue, manque d'intérêt pour la question incapacité d'en dire des choses à la fois sensées et intéressantes etc.)

On a réuni en un § les théorèmes de convexité, comme on l'avait promis aux lecteurs du Chap. II . On y trouvera la convexité uniforme et la dualité des L^p_F ($1 < p < +\infty$) pour le cas des fonctions à valeurs dans un Hilbert F ; apparemment, les résultats doivent être encore vrais si F est un Banach uniformément convexe quelconque. Ceci prouve la nécessité de démembrer ce § ; on ne s'est pas décidé à le faire, une telle manipulation impliquant malheureusement un remembrement subséquent auquel le rédacteur, une fois de plus, ne se sent pas le courage de se livrer, et dont il ne voit d'ailleurs pas l'intérêt pratique (le cas des Hilbert est au contraire fort probablement utile si l'on veut, par exemple, faire la transformation de Fourier dans L^p_C pour un groupe localement compact non abélien). D'une manière générale, six mois d'Intégration ont mis le rédacteur dans un état de dépression favorable à tous les renoncements.

<u>Dans tout ce chapitre</u> (§ 7 exclu), <u>on ne considère jamais plus d'une intégrale de Radon positive à la fois. On la note</u> μ ; <u>E désigne l'espace localement compact sur lequel elle est définie</u> ; F <u>désignera toujours un espace de Banach dans lequel les fonctions considérées prennent leurs valeurs, et, sauf indication du contraire, toutes les notions topologiques relatives à F se rapporteront à la topologie forte de F</u>.

----

§ 1 - Intégrale supérieure d'une fonction positive.

1 - Résultat préliminaire

Soit μ une intégrale de Radon positive sur un espace localement compact E : c'est une forme linéaire sur $\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_C(E)$, positive sur $\mathcal{L}_+$ et donc, comme on l'a vu (Chap. II, § 2, Th. 1) continue dans chaque sous-espace $\mathcal{L}_C(E\,;K)$ où K est une partie compacte arbitraire de E. Nous allons déduire de là un résultat fondamental pour la suite :

Proposition 1 - Soit $(f_\iota)_{\iota\in I}$ un ensemble filtrant croissant de fonctions de $\mathcal{L}_+$, et supposons que la fonction

$$f = \sup_{\iota\in I} f_\iota$$

soit dans $\mathcal{L}_+$; alors on a

$$\int f\, d\mu = \sup_{\iota\in I} \int f_\iota\, d\mu .$$

Soit en effet, dans l'ensemble des f_ι, $\mathfrak{F}$ le filtre des sections ; comme f est continu, il résulte du théorème de Dini (Livre III, Chap. X, § , Th.) que l'on a

$$f = \lim_{\mathfrak{F}} f_\iota$$

au sens de la topologie de la convergence compacte. Comme par ailleurs l'inégalité

$$0 \leqslant f_\iota \leqslant f$$

montre que les f_ι restent nulles en dehors d'un compact fixe, il s'ensuit que

$$\mu(f) = \lim_{\mathfrak{F}} \mu(f_\iota) \;;$$

comme μ est croissante, cela veut dire aussi que

$$\mu(f) = \sup_{\iota\in I} \mu(f_\iota) ,$$

ce qui démontre la proposition.

2 - Intégrale d'une fonction positive et semi-continue inférieurement.

Définition 1 - On désigne par $\mathcal{J}_+(E)$ l'ensemble des fonctions $\varphi(x)$ définies sur E, à valeurs dans $\overline{R}_+$, et semi-continues inférieurement sur E.

L'ensemble $\mathcal{J}_+(E) = \mathcal{J}_+$ possède les propriétés que voici :

a) on a $\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{J}_+$; la borne supérieure d'une famille quelconque de fonctions de $\mathcal{L}_+$ est dans $\mathcal{J}_+$; réciproquement, pour toute $\varphi \in \mathcal{J}_+$, on a

$$\varphi = \sup_{\substack{f \leqslant \varphi \\ f \in \mathcal{L}_+}} f \quad ;$$

b) la somme et le produit d'un nombre fini de fonctions de $\mathcal{J}_+$ sont dans $\mathcal{J}_+$;

c) la borne supérieure d'une famille quelconque, la borne inférieure d'une famille finie de fonctions de $\mathcal{J}_+$ sont dans $\mathcal{J}_+$.

Etant donné, une intégrale $\mu \geqslant 0$ sur E, la Prop.1 suggère la définition suivante :

<u>Définition 2</u> - <u>On appelle intégrale supérieure d'une fonction</u> $\varphi \in \mathcal{J}_+$ <u>par rapport à</u> μ <u>le nombre</u>

$$\mu^*(\varphi) = \sup_{\substack{f \leqslant \varphi \\ f \in \mathcal{L}_+}} \mu(f)$$

$\mu^*(\varphi)$ est un nombre bien déterminé, vérifiant

$$0 \leqslant \mu^*(\varphi) \leqslant +\infty \quad ,$$

et il est clair qu'on a ainsi <u>prolongé</u>, de $\mathcal{L}_+$ à $\mathcal{J}_+$, la fonction μ.

Une première propriété de μ^*, évidente d'après la Déf.2, est celle-ci :

<u>Proposition 2</u> - μ^* <u>est, sur</u> $\mathcal{J}_+$, <u>une fonction croissante pour la relation d'ordre</u> $\varphi \leqslant \psi$.

On a d'autre part le résultat suivant, qui généralise la Prop.1 :

<u>Théorème 1</u> - <u>Soit</u> $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ <u>un ensemble filtrant croissant de fonctions de</u> $\mathcal{J}_+$; <u>soit</u>

$$\varphi = \sup_{\iota \in I} \varphi_\iota$$

<u>sa borne supérieure ; on a</u>

$$\mu^*(\varphi) = \sup_{\iota \in I} \mu^*(\varphi_\iota) \quad .$$

En effet, pour chaque $\iota \in I$, désignons par Φ_ι l'ensemble des $f \in \mathcal{L}_+$ telles que $f \leqslant \varphi_\iota$;
et soit Φ l'ensemble des $f \in \mathcal{L}_+$ telles que $f \leqslant \varphi$.

Comme on a $\varphi_\iota \leqslant \varphi$ et donc $\Phi_\iota \subset \Phi$, on a

$$\mu^*(\varphi_\iota) \leqslant \mu^*(\varphi) \qquad \text{pour tout} \quad \iota \in I,$$

d'où

$$\mu^*(\varphi) \geqslant \sup_{\iota \in I} \mu^*(\varphi_\iota) \ :$$

tout revient donc à prouver l'inégalité contraire, ce qui se ramène à démontrer que l'on a

$$\mu(f) \leqslant \sup_{\iota \in I} \mu^*(\varphi_\iota) \qquad \text{pour toute} \quad f \in \Phi$$

ou encore, d'après la Déf. 2, à prouver que

$$(1) \qquad \mu(f) \leqslant \sup_{\substack{g \in \Phi_\iota \\ \iota \in I}} \mu(g) .$$

Or soit

$$\Psi = \bigcup_{\iota \in I} \Phi_\iota \ ;$$

Ψ est un ensemble filtrant croissant dans $\mathcal{L}_+$ d'après l'hypothèse faite sur les φ_ι ; on a de plus

$$\varphi = \sup_{g \in \Psi} g \geqslant f .$$

Soit Ψ_f l'ensemble des fonctions $\inf(f,g)$ où $g \in \Psi$;
Ψ_f est aussi un ensemble filtrant croissant, et on a

$$\sup_{g \in \Psi_f} g = f \ ;$$

d'après la Prop. 1, il vient donc

$$\mu(f) = \sup_{g \in \Psi_f} \mu(g) \ ;$$

mais toute fonction de Ψ_f est majorée par une fonction de Ψ ;
comme μ est croissante, on a donc

$$\mu(f) \leqslant \sup_{g \in \Psi} \mu(g)$$

c'est-à-dire (1) : le Théorème 1 est donc démontré.

<u>Théorème 2</u> - <u>Si</u> φ <u>et</u> ψ <u>sont dans</u> $\mathcal{I}_+$, <u>on a</u>

$$\mu^*(\varphi + \psi) = \mu^*(\varphi) + \mu^*(\psi) .$$

8

Désignons en effet par Φ et Ψ les sous-ensembles (filtrants croissants) de $\mathcal{L}_+$ définis respectivement par les conditions

$$f \leqslant \varphi \quad , \quad f \leqslant \psi .$$

Les fonctions $f+g$ ($f \in \Phi$ $g \in \Psi$) forment dans $\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{I}_+$ un filtrant croissant dont la borne supérieure est $\varphi + \psi$; d'après le Théorème 1 , on a donc

$$\mu^*(\varphi + \psi) = \sup_{\substack{f \in \Phi \\ g \in \Psi}} \mu(f+g)$$

$$= \sup_{\substack{f \in \Phi \\ g \in \Psi}} \left[\mu(f) + \mu(g)\right] = \sup_{f \in \Phi} \mu(f) + \sup_{g \in \Psi} \mu(g) = \mu^*(\varphi) + \mu^*(\psi) ,$$

ce qui démontre le Théorème 2 .

Naturellement, on a

$$\mu^*(\alpha\varphi) = \alpha\, \mu^*(\varphi) \quad \text{pour} \quad \alpha \in R_+ , \quad \varphi \in \mathcal{I}_+$$

<u>Proposition 3</u> - <u>Soit</u> $(\varphi_n)_{n \in Z_+}$ <u>une suite de fonctions de</u> $\mathcal{I}_+$; <u>on a</u>

$$\mu^*\Big(\sum_{n \in Z_+} \varphi_n\Big) = \sum_{n \in Z_+} \mu^*(\varphi_n) .$$

En effet, posons

$$\varphi = \sum_{i \in Z_+} \varphi_n \quad , \quad \psi_n = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n \quad ;$$

d'après le Th.2 on a

$$\mu^*(\psi_n) = \mu^*(\varphi_1) + \ldots + \mu^*(\varphi_n) \quad \text{pour} \quad n \in Z_+ ,$$

d'où d'après le Th.1 :

$$\mu^*(\varphi) = \sup_{n \in Z_+} \mu^*(\psi_n) = \sum_{n \in Z_+} \mu^*(\varphi_n). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

3 - <u>Mesure d'un ensemble ouvert</u>.

Etant donné un sous-ensemble <u>ouvert</u> $G \subset E$, sa fonction caractéristique

$$\chi_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in G \\ 0 & \text{si } x \in \complement G \end{cases}$$

est dans $\mathcal{I}_+$, et réciproquement. Donc on peut poser la définition suivante :

Définition 3 - On appelle mesure extérieure d'un ensemble ouvert $G \subset E$ le nombre

$$\mu^*(G) = \mu^*(\chi_G) .$$

On a

$$0 \leqslant \mu^*(G) \leqslant +\infty .$$

Proposition 4. Si G est un ouvert relativement compact, on a

$$\mu^*(G) < +\infty .$$

En effet, il existe alors une $f \in \mathcal{L}_+$ telle que $\chi_G \leqslant f$; on en déduit (Prop.2)

$$\mu^*(G) = \mu^*(\chi_G) \leqslant \mu(f) < +\infty ,$$

d'où la propriété annoncée.

Proposition 5 - Si G_1 et G_2 sont deux ouverts, tels que $G_1 \subset G_2$, on a $\mu^*(G_1) \leqslant \mu^*(G_2)$.

En effet, $G_1 \subset G_2$ équivaut à $\chi_{G_1} \leqslant \chi_{G_2}$.

Proposition 6 - Soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille filtrante croissante de sous-ensembles ouverts de E ; soit

$$G = \bigcup_{\iota \in I} G_\iota$$

sa réunion ; on a

$$\mu^*(G) = \sup_{\iota \in I} \mu^*(G_\iota) .$$

C'est une conséquence immédiate du Th.1 et du fait que les fonctions χ_{G_ι} forment, dans $\mathcal{I}_+$, un ensemble filtrant croissant dont la borne supérieure est χ_G.

Proposition 7 - Soit $(G_n)_{n \in Z}$ une famille dénombrable d'ouverts ; soit

$$G = \bigcup_{n \in Z} G_n$$

sa réunion ; on a

$$\mu^*(G) \leqslant \sum_{n \in Z} \mu^*(G_n) ;$$

en outre, si les G_n sont deux à deux disjoints, on a

$$\mu^*(G) = \sum_{n \in Z} \mu^*(G_n) .$$

La première partie de la Proposition résulte du fait que l'on a

$$\chi_G = \sup_{n \in Z} \chi_{G_n} \leqslant \sum_{n \in Z} \chi_{G_n}$$

et de la Prop.3 ; la seconde résulte de même de la Prop.3 et du fait que, si les G_n sont disjoints, on a

$$\chi_G = \sum_{n \in Z} \chi_{G_n} .$$

Bien entendu, la Prop.7 s'applique aussi à une famille <u>finie</u> d'ensembles ouverts.

Un exemple particulièrement intéressant de mesure extérieure est celui où $E = R$, μ étant la mesure de Lebesgue (Chap.II, §2,N°2, Exemple a). Il est alors facile de calculer par exemple la mesure extérieure d'un intervalle ouvert $]a,b[= G$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$.D'après le théorème de la moyenne, toute $f \in \mathcal{L}(R)$ vérifiant $0 \leqslant f \leqslant \chi_G$ vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \leqslant b-a ;$$

donc

$$\mu^*(]a,b[) \leqslant b-a .$$

Si G est un intervalle <u>infini</u>, on pourra trouver une f du type précédent qui prend la valeur <u>un</u> sur un intervalle de longueur arbitrairement grande ; donc, dans ce cas, on a

$$\mu^*(G) = +\infty .$$

Si G est fini, c'est-à-dire si $-\infty < a < b < +\infty$, et si ε est un nombre >0 arbitraire, il existera une $f \in \mathcal{L}_+$ vérifiant $f \leqslant \chi_G$ et

$$f(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in]a+\varepsilon , b-\varepsilon[,$$

d'où

$$\mu(f) \geqslant b-a-2\varepsilon ;$$

en conséquence, on a $\mu^*(G) = b-a$, et on voit que : <u>si G est un intervalle ouvert de R , sa mesure extérieure relativement à l'intégrale de Lebesgue est égale à sa longueur</u>. Ceci permet de calculer $\mu^*(G)$ pour un ouvert G quelconque en effet, G est la réunion d'une famille

$(G_\iota)_{\iota \in I}$ finie ou dénombrable d'intervalles ouverts G_ι deux à deux disjoints ; on a donc

$$\mu^*(G) = \sum_{\iota \in I} \mu^*(G_\iota) ,$$

ou encore : <u>la mesure extérieure d'un ouvert est la somme des longueurs des intervalles qui le composent</u>.

On notera que $\mu^*(G) = 0$ exige que G soit vide ; on retrouve ainsi le fait (chap.II, § 2, N°) que la mesure de Lebesgue sur R a pour support R tout entier.

4 - <u>Intégrale supérieure d'une fonction positive</u>.

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans $\overline{R}_+$; il existe alors (ne serait-ce que la constante $+\infty$) des fonctions $\varphi \in \mathcal{J}_+$ telles que $\varphi \geqslant f$.

<u>Définition 4</u> - <u>Etant donnée une fonction</u> f <u>définie sur</u> E <u>et à valeurs dans</u> $\overline{R}_+$, <u>on appelle intégrale supérieure de</u> f <u>relativement à</u> μ <u>le nombre</u>

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{\varphi \geqslant f \\ \varphi \in \mathcal{J}_+}} \mu^*(\varphi)$$

Ici encore, on a

$$0 \leqslant \mu^*(f) \leqslant +\infty \quad .$$

Si $f \in \mathcal{J}_+$, les Déf. 2 et 4 donnent pour $\mu^*(f)$ la même valeur, en sorte que nous avons un nouveau <u>prolongement</u> de la fonction μ^*.

<u>Proposition 8</u> - <u>Etant données deux fonctions</u> f <u>et</u> g <u>telles que</u>

$$0 \leqslant f \leqslant g \quad ,$$

<u>on a</u>

$$0 \leqslant \mu^*(f) \leqslant \mu^*(g) \; .$$

La démonstration de cette Proposition est trop évidente pour devoir être explicitée. Il en est de même de la suivante :

<u>Proposition 9</u> - <u>Etant donnés une fonction</u> $f \geqslant 0$ <u>et un nombre</u> $a \in R_+$, <u>on a</u>

$$\mu^*(a.f) = a.\, \mu^*(f) \;.$$

Nous allons maintenant montrer que la fonction μ^*, sans possèder des propriétés aussi simples que celles de sa restriction à $\mathcal{J}_+$, a cependant un comportement remarquable :

<u>Proposition 10</u> - <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont des fonctions positives sur</u> E , <u>on a</u>

$$\mu^*(f + g) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g) \;.$$

En effet, soient Φ et Ψ les sous-ensembles de $\mathcal{J}_+$ formés des fonctions qui majorent f et g respectivement ; pour $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ on aura
$$f + g \leqslant \varphi + \psi$$
d'où (Prop. 8 et Th.2)

$$\mu^*(f + g) \leqslant \mu^*(\varphi + \psi) = \mu^*(\varphi) + \mu^*(\psi) \;;$$

il vient par suite, comme annoncé :

$$\mu^*(f + g) \leqslant \inf_{\varphi \in \Phi} \mu^*(\varphi) + \inf_{\psi \in \Psi} \mu^*(\psi) = \mu^*(f) + \mu^*(g) \;.$$

Bien entendu, il s'ensuit que si $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions positives en nombre fini, on a

$$\mu^*\Big(\sum_{p=1}^{n} f_p\Big) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \mu^*(f_p) \;.$$

5 - <u>Les fonctions</u> $N_p(f)$.

Nous désignerons souvent par la suite par

$$\int^* f(x)\, d\mu(x) \quad , \qquad \int^* f\, d\mu$$

l'intégrale supérieure d'une fonction f à valeurs dans $\overline{R}_+$. Nous allons maintenant introduire la définition suivante :

<u>Définition 5</u> - <u>Soit</u> f <u>une fonction définie sur</u> E <u>et à valeurs dans un espace vectoriel normé</u> F (<u>resp.</u> dans $\overline{R}_+$). <u>Etant donné un nombre</u> p <u>vérifiant</u> $1 \leqslant p < +\infty$, <u>on pose</u>

$$N_p(f) = \left\{ \int^* \| f(x) \|^p \,.\, d\mu(x) \right\}^{1/p} .$$

Il est clair qu'on a

$$0 \leqslant N_p(f) \leqslant +\infty \;.$$

Nous désignons d'une manière générale par $\mathcal{F}_F(E) = \mathcal{F}_F$ l'espace des fonctions définies sur E et à valeurs dans F , par $\mathcal{F}_F^p$ l'ensemble des $f \in \mathcal{F}_F$ qui vérifient

$$N_p(f) < +\infty \quad .$$

Nous allons généraliser tout d'abord l'inégalité de Minkowski (chap.II, § 2, Th.5) :

Proposition 11 - Soient f, g deux fonctions à valeurs dans $\overline{R}_+$; on a

$$N_p(f+g) \leqslant N_p(f) + N_p(g) \quad .$$

En effet, cette inégalité est vraie dans $\mathcal{L}_+$; il s'ensuite qu'elle est aussi exacte dans $\mathcal{J}_+$ et de même finalement quelles que soient f et $g \geqslant 0$.

Proposition 12 - Soit F un espace vectoriel normé ; pour deux fonctions f, g à valeurs dans F , on a

$$N_p(f+g) \leqslant N_p(f) + N_p(g) \quad .$$

En effet

$$N_p(f+g) = \left\{ \int^* \| f+g \|^p \, d\mu \right\}^{1/p} \leqslant \left\{ \int^* (\| f \| + \| g \|)^p \right\}^{1/p} ,$$

en sorte que l'on obtient le résultat en appliquant la Prop.11 aux fonctions numériques positives $\| f \|$ et $\| g \|$.

Comme on a évidemment

$$N_p(\alpha . f) = |\alpha| . N_p(f)$$

pour tout scalaire α , on voit que :

Proposition 13 - $\mathcal{F}_F^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_F$, sur lequel l'expression $N_p(f)$ est une semi-norme.

6 - Le théorème de convexité dénombrable.

Théorème 3 - Soit $(f_n)_{n \in Z_+}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\overline{R}_+$; pour $1 \leqslant p < +\infty$, on a

14

$$N_p\left(\sum_{n\in Z_+} f_n\right) \leqslant \sum_{n\in Z_+} N_p(f_n) .$$

Nous allons d'abord prouver ce théorème dans le cas où les f_n sont dans $\mathcal{J}_+$; il en est alors de même de la fonction

$$f = \sum_{n\in Z_+} f_n ,$$

ainsi que des fonctions f^p ; $(f_1+\ldots+f_n)^p$. Comme les $(f_1+\ldots+f_n)^p$ tendent en croissant vers f^p , on a donc (Th.1)

$$\int^* f^p d\mu = \lim \int^* (f_1+\ldots+f_n)^p d\mu ,$$

c'est-à-dire

$$N_p(f) = \lim N_p(f_1+\ldots+f_n) .$$

D'après la Prop.11, il vient donc

$$N_p(f) \leqslant \lim_{n\infty} N_p(f_1)+\ldots+N_p(f_n) = \sum_{n\in Z_+} N_p(f_n) ,$$

ce qui prouve le Th.3 dans ce cas.

Prenons maintenant le cas général, et soit un nombre $\varepsilon > 0$. Comme toute fonction de $\mathcal{J}_+$ qui majore f_n^p est de la forme φ^p , où $\varphi \in \mathcal{J}_+$ majore f_n , et réciproquement, on peut trouver des $\varphi_n \in \mathcal{J}_+$ vérifiant

$$\varphi_n \geqslant f_n , \qquad N_p(f_n) \leqslant N_p(\varphi_n) \leqslant N_p(f_n) + \frac{\varepsilon}{n^2} .$$

Soit $\varphi = \sum \varphi_n$. On a $\varphi \geqslant f$ et donc

$$N_p(f) \leqslant N_p(\varphi) ;$$

d'après ce qu'on a vu, il vient donc

$$N_p(f) \leqslant \sum N_p(\varphi_n) \leqslant \sum N_p(f_n) + \sum \frac{\varepsilon}{n^2} ;$$

comme

$$\sum \frac{1}{n^2} \sim \frac{\pi^2}{6} ,$$

le Th. 3 est démontré.

S

<u>Remarque</u> - Le Th.3 <u>ne s'étend pas</u> aux familles de fonctions dont la puissance est supérieure au dénombrable.

<u>Remarque 1</u> - On exprime souvent le résultat précédent en disant que μ^* possède la propriété de <u>convexité dénombrable</u>.

S

Remarque 2 - Le résultat précédent ne s'étend pas aux familles de fonctions dont la puissance est supérieure au dénombrable.

7 - Mesure extérieure d'un ensemble.

Définition 6 - On appelle mesure extérieure d'un sous-ensemble $A \subset E$ le nombre

$$\mu^*(A) = \mu^*(\chi_A) = N_1(\chi_A)$$

où χ_A est la fonction caractéristique de A.

On a

$$0 \leq \mu^*(A) \leq +\infty .$$

La Prop.7 implique :

Proposition 14 - Si $A \subset B$, on a $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Tout ensemble relativement compact étant, contenu dans un ouvert relativement compact, il résulte alors, des Prop. 4 et 14, la propriété suivante :

Proposition 15 - Tout ensemble relativement compact est de mesure extérieure finie.

Soit maintenant une famille dénombrable $(A_n)_{n \in Z}$, d'ensembles, et

$$A = \bigcup_{n \in Z} A_n$$

sa réunion ; on a

$$\chi_A = \sup_{n \in Z} \chi_{A_n} \leq \sum_{n \in Z} \chi_{A_n} ;$$

on déduit de là, au moyen du Th.3, le résultat que voici :

Proposition 16 - Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une famille finie ou dénombrable de parties de E ; on a

$$\mu^*(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota) \leq \sum_{\iota \in Z} \mu^*(A_\iota) .$$

On a enfin la propriété suivante :

Proposition 17 - $\mu^*(A)$ est la borne inférieure des mesures extérieures des ouverts contenant A.

Tout revient évidemment à montrer que $\mu^*(A)$ <u>majore</u> cette borne inférieure. Or, par définition de $\mu^*(A)$ on peut, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, trouver une fonction $f \in \mathcal{J}_+$ telle que

$$f \geqslant \chi_A \quad , \qquad \mu^*(A) \leqslant \mu^*(f) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon \quad .$$

Soit G l'ensemble des $x \in E$ tels que

$$f(x) > 1-\varepsilon \quad ;$$

comme $f \in \mathcal{J}_+$, G est <u>ouvert</u>, et contient A puisque $f \geqslant \chi_A$.
On a d'autre part

$$f \geqslant (1-\varepsilon)\,\chi_G$$

et donc, en supposant $0 < \varepsilon < 1$;

$$\chi_G \leqslant \frac{f}{1-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mu^*(G) \leqslant \frac{\mu(f)}{1-\varepsilon} \quad ;$$

finalement, on a

$$(G) \qquad \frac{(A) + \varepsilon}{1-\varepsilon} \quad ;$$

on peut donc trouver un ouvert $G \supset A$ dont la mesure extérieure soit arbitrairement voisine de $\mu^*(A)$ - ce qui prouve la Proposition.

----

§ 2 - Fonctions et ensembles négligeables.

Dans ce § on désigne par F un espace vectoriel normé complet sur R ou C .

1 - Fonctions négligeables.

Définition 1 - On dit qu'une fonction f , à valeurs dans F (resp. dans $\overline{R}_+$) est négligeable si l'on a

$$\int^* \| f(x) \| \, . \, d\mu(x) = N_1(f) = 0 \, .$$

Proposition 1 - Pour qu'une fonction $f \in \mathcal{F}_F$ soit négligeable, il faut et il suffit que la fonction numérique $\| f \|$ soit négligeable.

Cela résulte immédiatement de la Déf. 1.

Proposition 2 - Les fonctions négligeables à valeurs dans F forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{N}_F$ de $\mathcal{F}_F$.

Cela résulte des relations

$$N_1(a.f) = |a| . N_1(f) \quad ; \quad N_1(f+g) \leqslant N_1(f) + N_1(g) \, .$$

Proposition 3 - Pour qu'une fonction numérique f soit négligeable, il faut et il suffit que f^+ et f^- soient négligeables.

La condition est suffisante d'après la Prop.2 . Elle est nécessaire d'après les relations

$$0 \leqslant N_1(f^+) \leqslant N_1(f) \, , \qquad 0 \leqslant N_1(f^-) \leqslant N_1(f) \, .$$

Proposition 4 - La somme d'une série convergente de fonctions négligeables, à valeurs dans F ou $\overline{R}_+$, est une fonction négligeable.

L'inégalité

$$\left\| \sum f_n(x) \right\| \leqslant \sum \| f_n(x) \|$$

permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs dans $\overline{R}_+$ (on notera que, dans ce cas, toute série est convergente). La Prop.4 résulte alors du Th.3 du § 2 :

$$N_1\left(\sum f_n \right) \leqslant \sum N_1(f_n) \, .$$

Proposition 5 - La limite d'une suite convergente de fonctions négligeables est négligeable

L'équation

$$\left\| \lim_{n\,\infty} f_n(x) \right\| = \lim_{n\,\infty} \| f_n(x) \|$$

permet ici encore, de se ramener au cas de fonctions f_n à valeurs dans R_+ . La Prop.5 résulte alors de la Prop.4 et de la relation

$$0 \leqslant \lim f_n(x) \leqslant \sum f_n(x) .$$

2 - Ensembles négligeables.

Définition 2 - On dit qu'un sous-ensemble A de E est μ -négligeable si sa mesure extérieure relativement à μ est nulle.

Bien entendu, cela revient à dire que la fonction χ_A est négligeable

$\mu^*(A)$ étant une fonction positive et croissante de A , on voit que :

Proposition 7 - Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable.

D'autre part, la Prop.14 du §1 implique la suivante :

Proposition 8 - La réunion d'une famille finie ou dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Par exemple, soient $E = R$ et μ la mesure de Lebesgue sur R .

Si un sous-ensemble $A \subset E$ est réduit à un point x_0 , il est négligeable, car l'ouvert $]x_0-\varepsilon \,, x_0+\varepsilon[$ est de mesure extérieure 2ε pour $\varepsilon > 0$. D'après la Prop.8, toute partie dénombrable de R est donc négligeable relativement à la mesure de Lebesgue. Il ne faudrait du reste pas croire que la réciproque de cette proposition soit exacte (cf. Exerc.).

Théorème 1 - Pour qu'une fonction f , à valeurs dans F ou dans $\overline{R}_+$, soit négligeable, il faut et il suffit que l'ensemble des points où elle n'est pas nulle soit négligeable.

D'après la Prop.1, on peut se borner à examiner le cas où f est à valeurs dans $\overline{R}_+$. Pour $n \in Z_+$, soit alors A_n l'ensemble des $x \in E$ tels que

$$\frac{1}{n} \leqslant f(x) \quad ;$$

on a

$$f \geqslant \frac{1}{n} \chi_A \quad ;$$

d'où

$$\mu^*(A_n) \leqslant n.\ \mu^*(f) = 0 \quad :$$

A_n est donc négligeable ; il en est par conséquent de même de l'ensemble

$$A = \bigcup_{n \in Z_+} A_n \quad :$$

or celui-ci est précisément l'ensemble des $x \in E$ tels que

$$f(x) \neq 0 \ .$$

Réciproquement, en utilisant les mêmes notations, supposons A négligeable, et posons

$$f_n = \inf (f,n) \qquad \text{pour } n \in Z_+ \quad ;$$

on a $\qquad 0 \leqslant f_n \leqslant n \, . \, \chi_A$

donc f_n est négligeable ; comme on a

$$f = \sup_{n \in Z_+} f_n \qquad \text{et donc} \qquad 0 \leqslant f \leqslant \sum_{n \in Z_+} f_n$$

il s'ensuit (Prop.5) que f est négligeable.

<u>Corollaire du Théorème 1</u> - <u>Le produit d'une fonction négligeable par une fonction numérique arbitraire est négligeable</u>.

En particulier, l'ensemble $\mathcal{N}_R$ (resp. $\mathcal{N}_C$) des fonctions négligeables à valeurs dans R (resp. C) est un idéal de l'algèbre $\mathcal{F}_R$ (resp. $\mathcal{F}_C$) des fonctions à valeurs dans R (resp. C) .

<u>Corollaire 2 du Théorème 1</u> - <u>Soient</u> f, g <u>deux fonctions à valeurs dans</u> F ; <u>la relation</u>

(1) $\qquad N_p(f-g) = 0$

<u>équivaut à la relation suivante : il existe un ensemble négligeable en dehors duquel</u> f <u>et</u> g <u>coïncident</u>.

En effet, la relation (1) signifie qu'on a

$$\| f(x) - g(x) \|^p = 0$$

c'est-à-dire

$$f(x) = g(x)$$

en dehors d'une partie négligeable de E .

On déduit du corollaire 2 du Th.1 que l'on aurait pu définir les fonctions négligeables par une relation $N_p(f) = 0$, et non pas seulement par la relation $N_1(f) = 0$.

3 - Propriétés valables presque partout.

Définition 3 - Soient E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon positive sur E , R une relation contenant un argument $x \in E$. La relation « R μ-presque partout » est par définition équivalente à la suivante : « il existe un ensemble $N \subset E$, μ-négligeable, tel que $x \in N$ ou R » .

Nous allons donner quelques applications de cette notion.

Tout d'abord, le Th.1 s'énonce comme suit : pour qu'une fonction soit négligeable, il faut et il suffit qu'elle soit nulle presque partout . De même, le Coroll.2 du Th.1 montre que la relation

$$N_p(f-g) = 0$$

équivaut à la relation

$$f(x) = g(x) \quad \text{presque partout.}$$

On a maintenant le résultat suivant :

Proposition 9 - Soit f une fonction définie sur E , à valeurs dans $\overline{R}_+$, et d'intégrale supérieure finie ; alors on a

$$f(x) < + \infty \qquad \text{presque partout.}$$

En effet, soit N l'ensemble des $x \in E$ tels que

$$f(x) = + \infty \quad ;$$

pour tout $n \in Z_+$ on a $\qquad f \geqslant n.\varphi_N$

et donc

$$0 \leqslant \mu^*(N) \leqslant \frac{1}{n} \mu^*(f) \quad ;$$

$\mu^*(f)$ étant fini, et $n \in Z_+$ arbitraire, on a

$$\mu^*(N) = 0 \ ,$$

d'où la Proposition 9 .

<u>Théorème 2</u> . <u>Soit</u> $(f_n)_{n \in Z_+}$ <u>une suite de fonctions à valeurs dans</u> F , <u>telle que</u>

$$\sum_{n \in Z_+} N_p(f_n) < +\infty \quad ;$$

<u>alors la série</u>

$$\sum_{n \in Z_+} f_n(x)$$

<u>est presque partout absolument convergente</u> ; <u>si l'on pose</u>

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{aux points où } \sum f_n(x) \text{ converge} \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

<u>on a</u>

$$N_p(f) \leqslant \sum_{n \in Z_+} N_p(f_n) \ .$$

Considérons en effet la fonction

$$g(x) = \sum_{n \in Z_+} \| f_n(x) \|$$

à valeurs dans $\overline{R}_+$. On a (§ 1, Th.3)

$$N_p(g) \leqslant \sum N_p(\|f_n\|) = \sum N_p(f_n) < +\infty \quad ,$$

donc (Prop 9 appliquée à g^p)

$$g(x) < +\infty \quad \text{presque partout}$$

Comme F est complet, on en conclut que la série $\sum f_n$ converge absolument presque partout.

Enfin, pour la fonction f introduite, on a

$$\|f(x)\| \leqslant \sum \|f_n(x)\| = g(x)$$

pour tout x ; donc

$$N_p(f) \leqslant N_p(g) \leqslant \sum N_p(f_n) \quad ,$$

ce qui prouve le Th. 2 .

22

4 - Classes de fonctions.

Soient F un espace vectoriel normé complet et μ une intégrale de Radon positive sur E . On a vu alors que les fonctions -négligeables, à valeurs dans F , forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{N}_F$ de l'espace $\mathcal{F}_F$. (On notera que $\mathcal{N}_F$ dépend en général de μ). Nous noterons

$$F_F = \mathcal{F}_F / \mathcal{N}_F$$

l'espace quotient correspondant. Si $f \to \tilde{f}$ est l'application canonique de $\mathcal{F}_F$ sur F_F, on dira que $\tilde{f}$ est la classe de f . Pour que deux fonctions appartiennent à la même classe, il faut et il suffit qu'elles coïncident presque partout sur E .

Lorsque F = C ou R , on a vu que $\mathcal{N}_C$ (resp. $\mathcal{N}_R$) est un idéal de l'algèbre $\mathcal{F}_C$ (resp. $\mathcal{F}_R$). On peut donc considérer F_C (resp. F_R) comme une algèbre sur C (resp. R) .

Enfin, si F = R , $\mathcal{F}_R$ est un espace de Riesz, dont $\mathcal{N}_R$ est une bande ; par suite, on peut considérer F_R comme un espace de Riesz. Pour qu'une classe $\tilde{f} \in F_R$ soit positive, il faut et il suffit qu'elle contienne une fonction positive ; toute fonction f qu'elle contient est alors positive presque partout .

5 - Nouvelle caractérisation du support d'une intégrale.

La notion d'ensemble négligeable permet de donner une nouvelle définition du support d'une intégrale positive. Montrons d'abord ceci :

Proposition 12 - Pour qu'une fonction $f \in \mathcal{J}_+$ soit μ-négligeable, il faut et il suffit qu'elle soit nulle sur le support de μ .

Si $\mu^*(f) = 0$, on aura à fortiori $\mu(g) = 0$ pour $0 \leqslant g \leqslant f$, $g \in \mathcal{L}_+$; donc g est nulle sur le support de μ , et il en est par suite de même de f , enveloppe supérieure des g considérées.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{J}_+$ est nulle sur le support de μ, il en sera de même de toute $g \in \mathcal{L}_+$ vérifiant $g \leqslant f$; on aura donc (Chap. II, § 2, Th. 2) $\mu(g) = 0$ pour ces g, et par suite $\mu^*(f) = 0$.

<u>Corollaire 1 de la Prop. 12</u> - <u>Le support de μ est le complémentaire du plus grand ouvert μ-négligeable de E.</u>

Soient N ce support, et G un ouvert ; pour que G soit négligeable, il faut et il suffit que

$$\chi_G(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad x \in N,$$

c'est-à-dire que G ne rencontre pas N : d'où notre assertion.

<u>Corollaire 2 de la Prop. 12</u> - <u>Pour une fonction vectorielle continue f, la relation</u>

$$f(x) = 0 \qquad \mu\text{-presque partout}$$

<u>équivaut à la relation</u> $f(x) = 0$ <u>sur le support de</u> μ.

Il suffit pour le voir d'appliquer la Prop. 12 à la fonction $\|f\| \in \mathcal{J}_+$.

6 - <u>Fonctions semi-continues inférieurement et topologie vague.</u>

Etant donnée une fonction $f \geqslant 0$ et une intégrale $\mu \geqslant 0$, nous noterons parfois

$$\int^* f(x)\, d\mu(x)$$

l'intégrale supérieure de f par rapport à μ. Pour μ donnée, c'est une fonction de f dont on a déjà étudié le comportement. Pour f donnée, c'est une fonction de μ qui, lorsque f est quelconque, ne possède pas de propriété simple. Mais on a le résultat suivant :

<u>Proposition 13</u> - <u>Soit f une fonction positive et semi-continue inférieurement sur E. L'expression</u>

$$\int^* f\, d\mu ,$$

<u>considérée comme fonction définie sur l'ensemble $\mathcal{M}_+$ des intégrales de Radon μ positives, est semi-continue inférieurement pour la topologie vague de $\mathcal{M}_+$.</u>

En effet, $\int^* f\,d\mu = \varphi_f(\mu)$ est l'<u>enveloppe supérieure</u> des fonctions φ_g, où g parcourt le sous-ensemble de $\mathcal{L}_+$ défini par la condition $g \leqslant f$. Comme ces φ_g sont, par définition de la topologie vague, <u>continues</u> sur $\mathcal{M}_+$, la Prop.13 s'ensuit.

<u>Corollaire 1 de la Prop.13</u> - <u>Soit G un sous-ensemble ouvert de E. L'ensemble des intégrales $\mu \geqslant 0$ pour lesquelles G est négligeable est fermé pour la topologie vague.</u>

En effet, $\mu^*(G)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{M}_+$; comme les μ considérées sont définies par la relation $\mu^*(G) \leqslant 0$, leur ensemble est vaguement fermé.

En combinant ce résultat avec le Coroll.1 de la Prop.12, on voit que :

<u>Proposition 14</u> - <u>L'ensemble des intégrales de Radon positive dont le support est contenu dans un ensemble fermé donné, est fermé pour la topologie vague.</u>

----

§ 3. Les espaces L^p_F $(1 \leqslant p < +\infty)$

1 - Définition de L^p_F.

Soient E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon positive sur E, p un nombre réel vérifiant

$$1 \leqslant p < +\infty \quad ,$$

F un espace vectoriel normé complet sur R ou C.

On a vu (§ 1, Prop. 13) que les fonctions $f(x)$ à valeurs dans F, pour lesquelles l'expression

$$N_p(f) = \left\{ \int^* \| f(x) \|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p}$$

est finie, forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}^p_F$ de l'espace $\mathcal{F}_F$ des fonctions à valeurs dans F. En outre, $N_p(f)$ est une semi-norme sur $\mathcal{F}^p_F$.

Il est clair que $\mathcal{F}^p_F$ contient le sous-espace $\mathcal{N}_F$ des fonctions négligeables ; $\mathcal{N}_F$ étant défini par la relation

$$N_p(f) = 0 \; ,$$

on voit que, si l'on introduit l'espace quotient

$$F^p_F = \mathcal{F}^p_F / \mathcal{N}_F \subset F_F \; ,$$

la formule

$$\| \tilde{f} \|_p = N_p(f)$$

définit une norme sur F^p_F.

Proposition 1 - L'espace vectoriel normé F^p_F est complet.

Il suffit pour cela de prouver ceci : soit $(f_n)_{n \in Z_+}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}^p_F$, telle que

$$(1) \qquad \sum_{n \in Z_+} N_p(f_n) < +\infty \quad ;$$

alors il existe une fonction $f \in \mathcal{F}^p_F$ telle que

$$\lim_{n\infty} N_p(f - f_1 - \ldots - f_n) = 0 \; .$$

Or, l'hypothèse (1) permet d'appliquer le Th.2 du § 2 ; il existe un ensemble négligeable $N \subset E$ tel que la série $\sum f_n(x)$ soit absolument convergente dans $\complement N$; si l'on pose

$$f(x) = \sum_{n \in Z_+} f_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in \complement N$$

$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in N ,$$

on aura, comme on l'a vu,

$$(2) \qquad N_p(f) \leqslant \sum_{n \in Z_+} N_p(f_n) \quad , \quad \text{d'où} \quad f \in \mathcal{F}^p_F ;$$

remplaçons maintenant la série $\sum_{n \in Z_+} f_n$ par la série $\sum_{n > q} f_n$; f est remplacée par une fonction qui coïncide presque partout avec $f-(f_1+\ldots+f_q)$; (2) conduit alors à

$$N_p(f-f_1-\ldots-f_q) \leqslant \sum_{n>q} N_p(f_n) \quad ,$$

et le second membre étant arbitrairement petit dès que q est assez grand, la Prop.1 est prouvée.

<u>Définition 1</u> - <u>On désigne par $\mathcal{L}_F$ l'ensemble des fonctions continues définies sur E , à valeurs dans F , et à support compact.</u>

Si $f \in \mathcal{L}_F$, on a évidemment $\| f \| \in \mathcal{L}_R$, et donc

$$\mathcal{L}_F \subset \mathcal{L}^p_F .$$

En outre, pour $f \in \mathcal{L}_F$ on a

$$N_p(f) = \left\{ \int \| f(x) \|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p}$$

<u>Définition 2</u> - <u>On désigne par L_F le sous-espace de F^p_F formé des classes des fonctions de $\mathcal{L}_F$. On appelle L^p_F l'adhérence de L_F dans l'espace vectoriel normé complet F^p_F . On dit qu'une fonction est de puissance p^e sommable (resp. sommable) si sa classe est dans L^p_F (resp. dans L^1_F). On note $\mathcal{L}^p_F$ l'ensemble des fonctions de puissance p^e sommable.</u>

La Déf. 2 entraîne aussitôt les propriétés suivantes :

Proposition 2 - Pour qu'une fonction f à valeurs dans F soit de puissance p^e sommable ($1 \leq p < +\infty$), il faut et il suffit que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, on puisse trouver une fonction g à valeurs dans F, continue et à support compact, telle que l'on ait

$$N_p\,(f-g) < \varepsilon\ .$$

Proposition 3 - Toute fonction de $\mathcal{L}_F$ est de puissance p^e sommable quel que soit p ($1 \leq p < +\infty$).

Proposition 4 - Toute fonction qui coïncide presque partout avec une fonction de $\mathcal{L}_F^p$ est dans $\mathcal{L}_F^p$.

Proposition 5 - L'ensemble $\mathcal{L}_F^p$ des fonctions de puissance p^e sommable est un espace vectoriel.

2 - Séries et suites dans L_F^p.

L_F^p étant, par définition, un sous-espace fermé de l'espace vectoriel normé complet F_F^p, on a :

Théorème 1 - L'espace vectoriel L_F^p est complet relativement à la norme $\|\tilde{f}\|_p$.

On va préciser ce résultat dans deux directions :

Théorème 2 - Soit $(f_n)_{n \in Z_+}$ une suite de fonctions de puissance p^e sommable, telle que

$$\sum_{n \in Z_+} \|\tilde{f}_n\|_p < +\infty\ .$$

Alors la série $\sum \tilde{f}_n$ converge absolument au sens de L_F^p vers une classe $\tilde{f} \in L_F^p$; en outre, la série $\sum f_n(x)$ est presque partout absolument convergente dans F, et on a

$$f(x) = \sum f_n(x) \qquad \text{presque partout.}$$

Ce résultat n'est autre que le Th. 5 du § 2 .

<u>Théorème 3</u> - <u>Soit</u> $(f_n)_{n \in Z_+}$ <u>une suite de fonctions de puissance</u> p^e <u>sommable</u> ; <u>supposons que</u> $(\tilde{f}_n)$ <u>soit une suite de Cauchy dans</u> L^p_F ; <u>alors, on peut trouver une fonction</u> $f \in \mathcal{L}^p_F$, <u>et une suite partielle</u> $(f_{p_n})_{n \in Z_+}$, <u>telles que l'on ait</u>

$$(1) \qquad \lim_{n\,\infty} \| \tilde{f} - \tilde{f}_n \|_p = 0 ,$$

$$f(x) = \lim_{n\,\infty} f_{p_n}(x) \qquad \text{\underline{presque partout}}.$$

L'existence d'une fonction $f \in \mathcal{L}^p_F$ telle que l'on ait (1) n'est autre que le Th.1. Comme les $(\tilde{f}_n)$ forment une suite de Cauchy, on peut trouver une suite partielle (f_{p_n}) telle que

$$\sum_{n \in Z_+} N_p(f_{p_{n+1}} - f_{p_n}) < + \infty \quad ;$$

dans L^p_F, la série

$$\tilde{f}_{p_1} + (\tilde{f}_{p_2} - \tilde{f}_{p_1}) + \ldots$$

converge alors vers $\tilde{f}$, et on a donc (Th.2)

$$f(x) = f_{p_1}(x) + \left[f_{p_2}(x) - f_{p_1}(x)\right] + \ldots$$
$$= \lim_{n\,\infty} f_{p_n}(x)$$

presque partout.

<u>Corollaire 1 du Théorème 3</u> - <u>Pour qu'une fonction</u> f <u>soit dans</u> $\mathcal{L}^p_F$, <u>il faut et il suffit qu'il existe une suite</u> $(f_n)_{n \in Z_+}$ <u>de fonctions de</u> $\mathcal{L}_F$ <u>vérifiant les conditions suivantes</u> :

a) $\lim_{m,n\,\infty} N_p(f_m - f_n) = 0$;

b) $f(x) = \lim_{n\,\infty} f_n(x)$ <u>presque partout</u>.

La condition est <u>nécessaire</u> ; car, L_F étant par définition partout dense dans L^p_F , il existe une suite de fonctions $g_n \in \mathcal{L}_F$ telle que

$$\lim_{n\,\infty} N_p(f - g_n) = 0 \quad ;$$

d'après le Th.3, on peut en extraire une suite partielle f_n qui converge presque partout vers f .

Supposons réciproquement les conditions réalisées. Il existe alors une fonction $g \in \mathcal{L}^p_F$ telle que

$$\lim_{n\infty} N_p(g-f_n) = 0 ;$$

g est de plus égale presque partout à la limite d'une suite partielle f_{p_n} ; donc

$$f(x) = g(x) \quad \text{presque partoute,}$$

ce qui prouve (Prop.4) que $f \in \mathcal{L}^p_F$.

<u>Corollaire 2 du Théorème 3</u> - <u>Soit</u> $(f_n)_{n\in Z_+}$ <u>une suite de fonctions de</u> $\mathcal{L}^p_F$ <u>qui converge presque partout vers une fonction</u> f ; <u>si</u> $(\tilde{f}_n)_{n\in Z_+}$ <u>est une suite de Cauchy dans</u> L^p_F, <u>on a</u> $f\in\mathcal{L}^p_F$ <u>et</u>

$$\lim_{n\infty} N_p(f-f_n) = 0$$

Démonstration analogue à celle du corollaire 1 .

3 - <u>Relations entre fonctions vectorielles et fonctions numériques</u>.

<u>Proposition 6</u> - <u>Pour toute fonction</u> $f\in\mathcal{L}^p_F$, <u>la fonction numérique</u> $\|f\|$ <u>appartient à</u> $\mathcal{L}^p_R$.

Soit en effet $(f_n)_{n\in Z_+}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}_F$ telle que l'on ait (Coroll.1 du Th.3) .

$$\lim N_p(f-f_n) = 0$$

$$f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x) \quad \text{presque partout.}$$

On aura d'abord

(1) $$\|f(x)\| = \lim_{n\infty} \|f_n(x)\| \quad \text{presque partout ;}$$

d'autre part, la relation

$$\Big|\,\|f_n(x)\| - \|f_q(x)\|\,\Big|^p \leqslant \|f_n(x)-f_q(x)\|^p$$

montre que

$$N_p(\|f_n\| - \|f_m\|) \leqslant N_p(f_n-f_m) ;$$

les fonctions $\|f_n(x)\|$ forment donc une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p_R$; d'après (1) et le Coroll.1 du Th. 3 on a $\|f\|\in\mathcal{L}^p_R$.

<u>Proposition 7</u> - <u>Soient</u> F <u>et</u> G <u>deux espaces de Banach</u>, u <u>une application linéaire continue de</u> F <u>dans</u> G ; <u>pour toute</u> $f\in\mathcal{L}^p_L$, <u>on a</u> $u\circ f\in\mathcal{L}^p_G$.

Reprenons comme ci-dessus une suite f_n de fonctions de $\mathcal{L}_F$, et posons

$$g_n = u \circ f_n \quad , \qquad g = u \circ f \; .$$

On a $g_n \in \mathcal{L}_G$, et

$$g(x) = \lim g_n(x) \quad \text{presque partout.}$$

D'autre part, on a

$$\| g_n(x) - g_m(x) \| \leqslant \|u\| \cdot \| f_n(x) - f_m(x) \|$$

et donc

$$N_p(g_n - g_m) \leqslant \|u\| \cdot N_p(f_n - f_m) \; ;$$

les g_n forment donc une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p_G$, ce qui prouve que $g \in \mathcal{L}^p_G$.

<u>Corollaire de la Proposition</u> 7 - <u>Soient</u> F <u>un espace de Banach</u>, a' <u>un élément du dual fort de</u> F ; <u>pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{L}^p_F$, <u>la fonction numérique</u> $\langle f, a' \rangle$ <u>est dans</u> $\mathcal{L}^p_R$.

<u>Proposition</u> 8 - <u>Soient</u> a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>des points de</u> F , f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>des fonctions numériques de puissance</u> p^e <u>sommable</u> ; <u>alors la fonction</u>

$$f(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i f_i(x)$$

<u>est de puissance</u> p^e <u>sommable</u>.

$\mathcal{L}^p_F$ étant un espace vectoriel, on peut se borner au cas où $n=1$; il faut alors prouver que, si $f \in \mathcal{L}^p_R$, la fonction

$$g(x) = a . f(x)$$

est dans $\mathcal{L}^p_F$. Mais cela résulte de la Prop.7 appliquée au cas où u est l'application

$$\lambda \longrightarrow a . \lambda$$

de R dans F .

<u>Corollaire de la Prop</u>.8 - <u>Pour qu'une fonction</u>

$$f(x) = \{ f_1(x), \ldots, f_n(x) \}$$

<u>à valeurs dans</u> R^n <u>soit de puissance</u> p^e <u>sommable, il faut et il suffit que chacune de ses composantes numériques</u> f_i <u>le soit</u>.

La nécessité résulte du Coroll. de la Prop.7, et la suffisance de la Prop.8 .

4 - Intégrale d'une fonction continue à support compact.

Parmi les fonctions de $\mathcal{L}_F$ figurent les

(1) $$f(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i f_i(x)$$

où les a_i sont des points de F , et les f_i des fonctions numériques continues et à support compact.

Si μ est une intégrale de Radon positive sur E , il est naturel d'appeler intégrale de la fonction (1) l'élément

(2) $$\mu(f) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i . \mu(f_i)$$

de F . Si l'on considère le dual fort F' de F , et si l'on note $\langle a, a' \rangle$ la forme bilinéaire réalisant la dualité entre F et F' , la formule (2) montre que l'on a

$$\langle \mu(f), a' \rangle = \int \langle f(x), a' \rangle . d\mu(x) \quad \text{pour} \quad a' \in F' .$$

On va généraliser maintenant cette propriété.

Proposition 9 - Soit μ une intégrale de Radon sur E . Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_F$, il existe un élément unique $\mu(f) \in F$ tel que l'on ait

(3) $$\langle \mu(f), a' \rangle = \int \langle f(x), a' \rangle . d\mu(x)$$

pour tout $a' \in F'$.

Tout d'abord, pour tout $a' \in F'$ la fonction scalaire $\langle f(x), a' \rangle$ est continue et à support compact ; on peut donc considérer l'expression

$$\varphi(a') = \int \langle f(x), a' \rangle . d\mu(x) ,$$

qui est évidemment une forme linéaire sur F' .

Tout revient à prouver que φ est déterminée par un élément $\mu(f) \in F$; puisque F est complet, il suffit pour cela de montrer que, sur toute boule de F' , φ est faiblement continue (Esp. Vect. Top.).

Or soit $K \subset E$ un <u>compact</u> en dehors duquel f soit nulle ; toutes les fonctions $\langle f(x), a' \rangle$ sont nulles en dehors de K ; f étant fortement continue, f(K) est une partie <u>fortement compacte</u> de F ; d'après le lemme de Gelfand (E.V.T.), si un $a' \in F'$ converge faiblement vers $a'_0 \in F'$ en restant sur une boule fixe, la fonction $\langle f(x), a' \rangle$ convergera vers $\langle f(x), a'_0 \rangle$ <u>uniformément sur</u> K , en restant nulle en dehors de K ; on aura donc

$$\varphi(a'_0) = \lim \varphi(a') ,$$

ce qui prouve la Prop.1, puisque l'unicité de $\mu(f)$ est évidente.

<u>Définition 3</u> - <u>On appelle intégrale de la fonction</u> $f \in \mathcal{L}_F$ <u>par rapport à</u> μ <u>l'élément de</u> F

$$\mu(f) = \int f \, d\mu = \int f(x) \, d\mu(x)$$

<u>défini par l'équation</u> (3).

On va démontrer quelques propriétés de $\mu(f)$.

<u>Proposition 10</u> - $f \longrightarrow \mu(f)$ <u>est une application linéaire de</u> $\mathcal{L}_F$ <u>dans</u> F .

Cette propriété résulte de la propriété correspondante des fonctions scalaires.

<u>Proposition 11</u> - <u>Si l'intégrale de Radon</u> μ <u>est positive, on a</u>

$$\left\| \int f(x) \, d\mu(x) \right\| \leqslant \int \| f(x) \| \, . \, d\mu(x)$$

<u>pour toute</u> $f \in \mathcal{L}_F$.

Tout d'abord, f étant <u>fortement</u> continue, la fonction scalaire $\| f(x) \|$ est continue - et à support compact. D'autre part, pour $a' \in F'$, on a

$$\left| \langle (f), a' \rangle \right| \leqslant \int \left| \langle f(x), a' \rangle \right| \, . \, d\mu(x) \leqslant \int \| f(x) \| \, . \, \| a' \| \, . d\mu(x)$$
$$= \| a' \| \, . \int \| f(x) \| \, . \, d\mu(x) ,$$

et comme

$$\| \mu(f) \| = \sup_{\substack{a' \in F' \\ \|a'\| \leqslant 1}} | \langle \mu(f) , a' \rangle | ,$$

la Prop.11 s'ensuit.

5 - Intégrale d'une fonction sommable.

La Prop.11 montre qu'on a

$$\| \mu(f) \| \leqslant \| \tilde{f} \|_1 \qquad \text{pour } f \in \mathcal{L}_F .$$

Par suite, $\tilde{f} \to \mu(f)$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $L_F \subset L_F^1$ dans F. F étant complet, on peut prolonger cette application au complété L_F^1 de L_F. Si $f \in \mathcal{L}_F^1$, on ~~mm~~ notera encore

$$\mu(f) , \quad \int f \, d\mu , \quad \int f(x) \, d\mu(x)$$

la valeur pour l'élément $\tilde{f} \in L_F^1$ de l'application prolongée de μ, et l'élément $\mu(f) \in F$ sera appelé l'intégrale de la fonction sommable f par rapport à μ. La Prop.11 se généralise alors comme suit :

Théorème 4 - Si la fonction f est sommable, il en est de même de la fonction numérique $\|f(x)\|$, et on a

$$\left\| \int f \, d\mu \right\| \leqslant \int \|f\| \, d\mu = N_1(f) .$$

Que $\|f\|$ soit sommable n'est autre que la Prop.6 pour $p=1$. La relation

$$\left\| \int f \, d\mu \right\| \leqslant \int \|f\| \, d\mu = N_1(f)$$

étant vraie pour $f \in \mathcal{L}_F$ l'est aussi pour $f \in \mathcal{L}_F^1$ puisque :

1) L_F est partout dense dans L_F^1 ;

2) les applications : $\tilde{f} \to \int f \, d\mu$ de L_F^1 dans F ; $\tilde{f} \to N_1(f)$ de L_F^1 dans R ; $\tilde{f} \to \int \|f\| \, d\mu$ de L_F dans R, sont continues pour la topologie de L_F^1.

Corollaire 1 du Th.4 - Si f est une fonction numérique sommable et positive, on a

$$\int f \, d\mu \geqslant 0 .$$

Corollaire 2 du Th.4 - Sur l'espace $\mathcal{L}^1_R$ des fonctions sommables numériques, $\int f\,d\mu$ est une forme linéaire croissante.

Corollaire 3 du Th.4 - Pour que deux fonctions sommables f et g coïncident presque partout, il faut et il suffit qu'on ait

$$\int \| f(x) - g(x) \| \, d\mu(x) = 0 .$$

Théorème 5 - Soient F et G deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de F dans G . Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_F$, on a $u \circ f \in \mathcal{L}^1_G$ et

$$(1) \qquad \int u \circ f(x) \, d\mu(x) = u \left(\int f(x) \, d\mu(x) \right).$$

La relation $u \circ f \in \mathcal{L}^1_G$ résulte de la Prop.7 . Comme on a

$$N_1(u \circ f) = \int^* \| u \circ f(x) \| \, d\mu(x) \leq \| u \| . N_1(f)$$

il suffit de prouver (1) lorsque $f \in \mathcal{L}_F^*$. Or, soient F' et G' les duals forts de F et G ; on a (Prop.9)

$$\langle \mu(u \circ f), b' \rangle = \int \langle u \circ f(x), b' \rangle \, d\mu(x) = \int \langle f(x), {}^t u(b') \rangle \, d\mu(x)$$
$$= \langle \mu(f), {}^t u(b') \rangle = \langle u(\mu(f)), b' \rangle$$

pour $b' \in G'$, ce qui, d'après Hahn-Banach, prouve

$$\mu(u \circ f) = u(\mu(f)) . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 1 du Th.5 - Pour tout $a' \in F'$, on a

$$\left\langle \int f(x) \, d\mu(x) , a' \right\rangle = \int \langle f(x), a' \rangle \, d\mu(x) .$$

Corollaire 2 du Th.5 - Si

$$f(x) = \{ f_1(x), \dots, f_n(x) \}$$

est une fonction sommable à valeurs dans R^n , on a

$$\int f\,d\mu = \left\{ \int f_1 d\mu, \dots, \int f_n d\mu \right\} .$$

Corollaire 3 du Th.5 - Si une fonction sommable à valeurs dans F est de la forme

$$f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \, f_i(x) \qquad (a_i \in F)$$

où les f_i sont des fonctions numériques sommables, on a

$$\int f\,d\mu = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \int f_i \, d\mu .$$

6 - Où l'on montre que L^p_R est un espace de Riesz complètement réticulé.

Proposition 12 - Pour qu'une fonction numérique f soit dans $\mathcal{L}^p_R$, il faut et il suffit que f^+ et f^- soient dans $\mathcal{L}^p_R$.

La condition est suffisante puisque $\mathcal{L}^p_R$ est un espace vectoriel. Sa nécessité résulte de l'inégalité

$$\left|f^+ - g^+\right|^p \leqslant \left|f-g\right|^p$$

qui prouve que, si une $g \in \mathcal{L}_R$ vérifie

$$N_p(f-g) < \varepsilon ,$$

on aura à fortiori

$$N_p(f^+ - g^+) < \varepsilon .$$

Corollaire de la Prop.12 - L'enveloppe supérieure (resp. inférieure) d'une famille finie de fonctions de $\mathcal{L}^p_R$ est dans $\mathcal{L}^p_R$.

Proposition 13 - Soient f et g deux fonctions positives de $\mathcal{L}^p_R$. On a

$$N_p(f)^p + N_p(g)^p \leqslant N_p(f+g)^p .$$

Comme $\mathcal{L}_R$ est partout dense dans $\mathcal{L}^p_R$, et comme la convergence dans L^p_R entraîne la convergence de la norme, tout revient à prouver l'inégalité lorsque f et g sont dans $\mathcal{L}_R$. Mais on a alors, comme f et g sont $\geqslant 0$:

$$f^p + g^p \leqslant (f+g)^p$$

d'où en intégrant

$$\int f^p d\mu + \int g^p d\mu \leqslant \int (f+g)^p d\mu ,$$

ce qui donne l'inégalité cherchée.

Corollaire de la Prop.13 - Dans $\mathcal{L}^p_R$, la relation

$$0 \leqslant f \leqslant g$$

implique

$$N_p(f-g)^p \leqslant N_p(g)^p - N_p(f)^p .$$

Il suffit pour le voir d'appliquer la Prop. 13 à f et g-f .

Considérons maintenant l'espace L^p_R formé des classes de fonctions de $\mathcal{L}^p_R$; on peut y introduire une relation d'ordre (§ 2,no4) en posant

$$\tilde{f} \geqslant 0 \quad \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \text{ presque partout.}$$

Le corollaire de la Prop. 12 prouve que L^p_R est un espace de Riesz. Nous noterons L^p_+ l'ensemble des éléments positifs de L^p_R.

Proposition 14 - L^p_+ est un sous-ensemble fermé de L^p_R.

En effet, si une suite d'éléments $\tilde{f}_n \in L^p_+$ converge vers $\tilde{f} \in L^p_R$, on peut en extraire une suite $\tilde{f}_{n_p}$ qui converge presque partout vers $\tilde{f}$: donc la classe $\tilde{f}$ contient des fonctions presque partout positives, ce qui veut dire que $\tilde{f} \in L^p_+$.

Proposition 15 - Soit Φ un ensemble filtrant croissant dans L^p_+ (resp. L^1_R) ; pour que Φ possède une borne supérieure dans L^p_+ (resp. L^1_R) il faut et il suffit que

$$\sup_{\tilde{f} \in \Phi} \| \tilde{f} \|_p < +\infty \qquad (\text{resp } \sup_{\tilde{f} \in \Phi} \int f \, d\mu < +\infty) ;$$

sup Φ est alors la limite dans L^p_R du filtre des sections de Φ.

La condition est nécessaire puisque $N_p(f)$ (resp. $\int f \, d\mu$) est une fonction croissante de f sur L^p_+ (resp. L^1_R).

Réciproquement, si la condition est remplie, posons

$$\sup_{\tilde{f} \in \Phi} \| \tilde{f} \|_p = M \quad (\text{resp. } \sup_{\tilde{f} \in \Phi} \int f \, d\mu = M) ,$$

et soit un nombre $\varepsilon > 0$; il existe $\tilde{f}_0 \in \Phi$ tel que

$$M^p - \frac{\varepsilon}{2}^p \leqslant N_p(f_0)^p \leqslant M^p \quad (\text{resp. } M - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int f_0 \, d\mu \leqslant M) ;$$

pour toute $\tilde{f} \in \Phi$ ~~déxxxxx~~ vérifiant $\tilde{f} \geqslant \tilde{f}_0$, on aura à fortiori

$$M^p - \frac{\varepsilon}{2}^p \leqslant N_p(f)^p \leqslant M^p \quad (\text{resp. } M - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int f \, d\mu \leqslant M) ;$$

d'après le Corollaire de la Prop.13 on aura

$$N_p(f-f_0)^p \leqslant N_p(f)^p - N_p(f_0)^p \leqslant \varepsilon^p$$

(resp.

$$N_1(f-f_0) = \int f \, d\mu - \int f_0 d\mu \leqslant \varepsilon) ,$$

ce qui prouve que le filtre des sections de Φ est un <u>filtre de Cauchy</u> sur L^p_R. Soit $\tilde{g}$ sa limite. Pour tout $\tilde{f} \in \Phi$, $\tilde{g}$ est limite d'éléments $\geqslant \tilde{f}$, donc (Prop.14) $\tilde{g} \geqslant \tilde{f}$: par suite $\tilde{g}$ majore Φ. Par ailleurs, si un $\tilde{h} \in L^p_R$ majore Φ, il majore aussi $\tilde{g}$ pour la même raison, ce qui prouve que $\tilde{g}$ est la borne supérieure de Φ dans L^p_R, et achève la démonstration.

On peut ajouter à la Prop.15 que, $\tilde{g} = \sup \Phi$ étant limite dans L^p_R du filtre des sections de Φ, et $N_p(f)$ (resp. $\int f \, d\mu$) étant une fonction <u>continue</u> et <u>croissante</u> sur L^p_+ (resp. L_R), on a nécessairement

$$N_p(\sup \Phi) = \sup_{\tilde{f} \in \Phi} N_p(f)$$

(resp.

$$\int (\sup \Phi) \, d\mu = \sup_{\tilde{f} \in \Phi} \int f \, d\mu \quad).$$

<u>Corollaire 1 de la Prop.</u>15 - <u>L'espace de Riesz</u> L^p_R <u>est complètement réticulé</u>.

Il suffit pour le voir de montrer (Chap.I, § 2, Prop.) que toute partie majorée A de L^p_+ admet une borne supérieure dans L^p_R. Or, supposons qu'il existe une fonction $g \geqslant 0$ telle que l'on ait

$$\mu^*(g^p) < +\infty \quad , \qquad \tilde{f} \leqslant \tilde{g} \qquad \text{pour tout} \quad \tilde{f} \in A$$

(<u>on ne suppose donc pas même que</u> g <u>soit dans</u> $\mathcal{L}^p_R$ - <u>seulement que</u> $g \in \mathcal{F}^p_R$). Si l'on adjoint à A les bornes supérieures de ses parties finies, on obtiendra un ensemble $\Phi \subset L^p_+$ <u>filtrant croissant</u> qui, étant encore majoré par $\tilde{g}$, sera contenu dans une <u>boule</u> de L^p_R : d'après la Prop.15, Φ admet une borne supérieure, qui est aussi celle de A (Chap.I, § 1, Prop.).

7 - Suites croissantes dans $\mathcal{L}^p_R$.

Théorème 6 - Soit $(f_n)_{n \in Z_+}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{L}^p_+$ (resp. $\mathcal{L}^1_R$). Pour que l'enveloppe supérieure des f_n coïncide presque partout avec une fonction $f \in \mathcal{L}^p_+$ (resp. $f \in \mathcal{L}^1_R$), il faut et il suffit que l'on ait

(1) $\sup_{n \in Z_+} N_p(f_n) < +\infty$ (resp. $\sup_{n \in Z_+} \int f_n \, d\mu < +\infty$) ;

ou alors

(2) $\lim_{n\,\infty} N_p(f-f_n) = 0$

et en particulier

(3) $N_p(f) = \sup_{n \in Z_+} N_p(f_n)$ (resp. $\int f \, d\mu = \sup_{n \in Z_+} \int f_n \, d\mu$)

La condition (1) étant visiblement nécessaire, tout revient à prouver qu'elle est suffisante. Or, si elle est remplie, il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^p_+$ (resp. $f \in \mathcal{L}^1_R$) telle que, dans L^p_R, $\tilde{f}$ soit la borne supérieure de l'ensemble Φ des $\tilde{f}_n$ (Prop.15) ; $\tilde{f}$ étant la limite du filtre des sections de Φ, on peut (Th.3) trouver une suite partielle f_{n_p} telle que

$$f(x) = \lim_{p\,\infty} f_{n_p}(x) \quad \text{presque partout ;}$$

la suite f_n étant croissante, il s'ensuit que

$$f(x) = \sup_{n \in Z_+} f_n(x) \quad \text{presque partout.}$$

Les équations (2) et (3) sont alors évidentes.

Corollaire 1 du Théorème 6 - Soit $(f_n)_{n \in Z_+}$ une suite décroissante de fonctions de $\mathcal{L}^p_+$; l'enveloppe inférieure f des f_n est dans $\mathcal{L}^p_+$, et on a

$$N_p(f) = \inf_{n \in Z_+} N_p(f_n) .$$

Il suffit pour le voir d'appliquer le Th.6 à la suite croissante et bornée $f_1 - f_n$.

<u>Corollaire 2 du Théorème</u> 6 - <u>Soit</u> $(f_n)_{n \in Z}$ <u>une famille dénombrable de fonctions de</u> $\mathcal{L}^p_R$; <u>pour que l'enveloppe supérieure des</u> f_n <u>coïncide presque partout avec une fonction de</u> $\mathcal{L}^p_R$, <u>il faut et il suffit qu'il existe une fonction</u> g , <u>à valeurs dans</u> $\overline{R}_+$, <u>telle que l'on ait</u>

$$\mu^*(g^p) < +\infty \quad ; \quad f_n \leqslant g \quad \text{pour tout} \quad n \in Z .$$

La nécessité de la condition est évidente, comme on le voit en prenant

$$g = (\sup f_n)^+ .$$

Réciproquement, supposons-la vérifiée et posons

$$g_n = \sup_{|k| \leqslant n} (f_k) \qquad (n \in Z_+) \quad ;$$

les g_n sont dans $\mathcal{L}^p_R$ (Coroll. de la Prop. 12), forment une suite croissante, et vérifient

$$g_n \leqslant g \quad ;$$

il s'ensuit que

$$\sup_{n \in Z_+} N_p(g_n^+) \leqslant N_p(g) < +\infty \quad ;$$

en sorte que, d'après le Th.6, $\sup g_n^+$ coïncide presque partout avec une fonction de $\mathcal{L}^p_R$; d'après le coroll. 1 du Th.6, $\inf g_n^-$ est de même dans $\mathcal{L}^p_R$; donc

$$\sup_{n \in Z} f_n = \sup_{n \in Z_+} g_n = \sup_{n \in Z_+} (g_n^+) - \inf_{n \in Z_+} (g_n^-)$$

coïncide presque partout avec une fonction de $\mathcal{L}^p_R$; ce qui prouve le Coroll. 2 .

<u>Remarque 1</u> - Les hypothèses du Th.6 ou du Coroll.2 du Th.6 impliquent donc en particulier

(4) $\qquad \sup f_n(x) < +\infty \qquad$ presque partout ;

mais il ne faudrait pas croire que (4) suffise réciproquement à assurer la validité des conclusions correspondantes

<u>Remarque 2</u> - Le Th.6 <u>ne s'étend pas</u> aux familles de fonctions dont la puissance est supérieure au dénombrable.

8 - Le théorème de Lebesgue.

Théorème 7 (Lebesgue) - Soient F un espace vectoriel normé complet, et $(f_n)_{n \in Z_+}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p_F$. Supposons ;

a) que $f_n(x)$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$ à valeurs dans F ;

b) qu'il existe une fonction $g(x)$, à valeurs dans $\overline{R}_+$, telle que l'on ait

$$\mu^*(g^p) < +\infty \quad ; \quad \|f_n(x)\| \leqslant g(x) \quad \text{pour tout } n .$$

Alors la fonction f est dans $\mathcal{L}^p_F$ et on a

$$\lim_{n \to \infty} N_p(f - f_n) = 0 .$$

Posons

$$(1) \qquad g_n(x) = \sup_{k \geqslant n} \|f_k(x)\| .$$

Comme les fonctions numériques $\|f_k\|$ sont dans $\mathcal{L}^p_R$ (Prop.6), l'hypothèse b) et le Coroll.2 du Th.6 impliquent que les g_n coïncident presque partout avec des fonctions de $\mathcal{L}^p_+$. Mais les g_n forment une suite décroissante, dont l'enveloppe inférieure est presque partout $\|f(x)\|$; donc (Coroll.1 du Th.6) on a $\|f\| \in \mathcal{L}^p_+$ et

$$N_p(f) = N_p(\|f\|) = \inf_{n \in Z_+} N_p(g_n) ;$$

mais (1) implique

$$N_p(g_n) \geqslant N_p(f_k) \qquad \text{pour} \quad k \geqslant n ,$$

et par suite il vient

$$(2) \qquad N_p(f) \geqslant \limsup_{n \to \infty} N_p(f_n) .$$

Considérons maintenant les fonctions numériques $\|f-f_n\|$; pour n donné, la suite $\|f_k-f_n\|$ $(k \in Z_+)$ de fonctions de $\mathcal{L}^p_R$ converge presque partout vers $\|f-f_n\|$ tout en étant, d'après l'hypothèse b), majorée par $2g$; le raisonnement fait ci-dessus prouve donc que $\|f-f_n\|$ est dans $\mathcal{L}^p_R$.

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer (2) à la suite $\| f-f_n \|$ de fonctions de $\mathcal{L}^p_R$; cette suite est majorée par $2g$, et converge presque partout vers 0 . Donc on a

$$N_p(0) = 0 \geqslant \limsup_{n \to \infty} N_p(f-f_n) ,$$

ce qui entraîne, puisque $N_p(f-f_n) \geqslant 0$, la relation

$$\lim_{n \to \infty} N_p (f-f_n) = 0$$

le Théorème est démontré, puisque $\mathcal{L}^p_F$ est complet.

Remarque - Le Th.7 ne subsiste pas si l'on remplace l'hypothèse b) par l'hypothèse plus faible

$$\sup_{n \in Z_+} N_p(f_n) < +\infty .$$

Il n'est pas vrai non plus pour des familles non dénombrables de fonctions. On a toutefois le résultat suivant :

Proposition 6 - Soient E un espace localement compact, μ une intégrale positive sur E , F un espace vectoriel normé complet, Ω un espace topologique dont chaque point possède un système fondamental dénombrable de voisinages, $f(x,t)$ une application de $E \times \Omega$ dans F . Supposons réalisées les conditions suivantes :

a) pour chaque $t \in \Omega$, la fonction $f(x,t)$ est dans $\mathcal{L}^p_F$;

b) pour chaque $x \in E$, $f(x,t)$ est une fonction continue de t (pour la topologie forte de F) ;

c) pour chaque $t_0 \in \Omega$, il existe un voisinage U de t_0 dans Ω et une fonction numérique $g(x)$ vérifiant

$$\mu^*(g^p) < +\infty \quad ;$$

$$\| f(x,t) \| \leqslant g(x) \quad \text{pour} \quad x \in E , \quad t \in U .$$

Alors $f(x,t)$ est une fonction continue de t au sens de la topologie de L^p_F .

En particulier, si $p = 1$, la fonction

$$f(t) = \int f(x,t)\, d\mu(x) ,$$

<u>définie sur</u> Ω <u>et à valeurs dans</u> F , <u>est</u> (<u>fortement</u>) <u>continue</u>.

Dans le but d'économiser un papier précieux, on laissera au lecteur le soin de démontrer cette Proposition.

9 - <u>Relation entre les espaces</u> $\mathcal{L}^1_F$ <u>et</u> $\mathcal{L}^p_F$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer comment les $\mathcal{L}^p_F$ ($1 < p < +\infty$) se déduisent de $\mathcal{L}^1_F$.

<u>Théorème 8</u> - <u>Pour qu'une fonction</u> f <u>à valeurs dans</u> F <u>soit dans</u> $\mathcal{L}^p_F$ ($1 < p < +\infty$), <u>il faut et il suffit que la fonction</u>

$$\| f(x) \|^{p-1} . f(x)$$

<u>soit dans</u> $\mathcal{L}^1_F$, <u>et réciproquement</u>.

1 - <u>Nécessité de la condition</u>. Supposons $f \in \mathcal{L}^p_F$; comme $\mathcal{L}_F$ est partout dense dans $\mathcal{L}^p_F$, il existe une suite $(f_n)_{n \in Z_+}$ de fonctions de $\mathcal{L}_F$ telle que l'on ait

$$\sum_{n \in Z_+} N_p(f_n) < +\infty \quad ; \quad f(x) = \sum_{n \in Z_+} f_n(x) \text{ presque partout.}$$

Posons

$$g_n = \| f_1 + \ldots + f_n \|^{p-1} (f_1 + \ldots + f_n) \; ;$$

on a $g_n \in \mathcal{L}_F$, donc $g_n \in \mathcal{L}^1_F$; d'autre part on a

$$\| g_n \| = \| f_1 + \ldots + f_n \|^p \leqslant (\sum_{n \in Z_+} \| f_n \|)^p = g$$

où la fonction g , à valeurs dans $\overline{R}_+$, vérifie

$$N_1(g) = \left[N_p(\sum \| f_n \|) \right]^p \leqslant \left(\sum N_p(f_n) \right)^p < +\infty \; ;$$

comme

$$\lim_{n\,\infty} g_n(x) = \| f(x) \|^{p-1} f(x) \quad \text{presque partout,}$$

le théorème de Lebesgue implique

$$\| f \|^{p-1} . f \in \mathcal{L}^1_F .$$

2 - <u>Suffisance de la condition</u>

Posons $$g(x) = \| f(x) \|^{p-1} f(x) ,$$

et supposons $g \in \mathcal{L}^1_F$. On a

$$f(x) = \begin{cases} \| g(x) \|^{\frac{1}{p}-1} . g(x) & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0 . \end{cases}$$

Prenons alors une suite $g_n \in \mathcal{L}_F$ telle que

$$\sum_{n \in Z_+} N_1(g_n) < +\infty \quad , \quad g(x) = \sum_{n \in Z_+} g_n(x) \quad \text{presque partout,}$$

et posons

$$f_n = \| g_1 + \ldots + g_n \|^{\frac{1}{p}-1} . (g_1 + \ldots + g_n) .$$

On a $f_n \in \mathcal{L}_F$ et donc $f_n \in \mathcal{L}_F^p$; de plus,

$$\lim_{n\, \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{presque partout.}$$

D'autre part, on a

$$\| f_n \| = \| g_1 + \ldots + g_n \|^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k \in Z_+} \| g_k \| \right)^{\frac{1}{p}} = h ,$$

où la fonction h , à valeurs dans $\overline{R}_+$, vérifie

$$N_p(h) = \left[N_1 \left(\sum \| g_k \| \right) \right]^{1/p} \leqslant \left[\sum N_1(g_k) \right]^{1/p} < +\infty .$$

D'après le Théorème de Lebesgue, on a donc $f \in \mathcal{L}_F^p$, ce qui achève la démonstration.

Remarque - L'application $f \longrightarrow \| f \|^{p-1} . f$ transformant toute fonction négligeable, en une fonction négligeable, on peut la considèrer comme une application biunivoque de L_F^p sur L_F^1 . On verra par la suite que cette application est uniformément continue sur toute boule de L_F^p , et que l'application réciproque est uniformément continue sur L_F^1 .

Corollaire 1 du Th. 8 - Pour qu'une fonction numérique positive f soit dans $\mathcal{L}_R^p$ il faut et il suffit que f^p soit sommable.

En effet, on a ici

$$\| f(x) \|^{p-1} . f(x) = f(x)^p .$$

Corollaire 2 du Théorème 8 - Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_F^p$, la fonction numérique $\| f(x) \|^p$ est sommable, et on a

$$N_p(f) = \int \| f(x) \|^p . d\mu(x) .$$

En effet, on a (Prop.6) $\| f \| \in \mathcal{L}_R^p$, donc (Coroll.1 du Th.8) $\| f \|^p \in \mathcal{L}_R^1$; comme, pour une fonction sommable et positive g , on a

$$\int^* g\, d\mu = \int g\, d\mu ,$$

l'équation annoncée est évidente.

9 bis - Fonctions de carré sommable à valeurs dans un espace de Hilbert.

On va voir que, lorsque F est un espace de Hilbert, l'espace L_F^2 des fonctions de carré sommable à valeurs dans F est un espace de Hilbert lui-même :

Théorème 8 bis - Soit F un espace de Hilbert. Si f et g sont deux fonctions de carré sommable à valeurs dans F , la fonction scalaire $\langle f, g \rangle$ est sommable. En outre, l'espace de Banach L_F^2 est un espace de Hilbert, dans lequel le produit scalaire est donné par

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \int \langle f(x), g(x) \rangle \, d\mu(x) .$$

Tout d'abord, si $h \in \mathcal{L}_F^2$ la fonction $\| h \|^2 = \langle h, h \rangle$ est sommable (Coroll 2 du Th.8) ; si $f, g \in \mathcal{L}_F^2$, l'identité

$$4 \langle f, g \rangle = \| f+g \|^2 - \| f-g \|^2 + i \| f+ig \|^2 - i \| f-ig \|^2$$

prouve alors que $\langle f, g \rangle$ est sommable.

Dans ces conditions, il est clair que l'expression

$$\int \langle f(x), g(x) \rangle \quad d\mu(x)$$

est une forme hermitienne positive sur $\mathcal{L}_F^2$; comme elle s'annule exactement sur $\mathcal{N}_F$, elle permet de définir sur $\mathcal{L}_F^2 / \mathcal{N}_F = L_F^2$ une structure pré-hilbertienne ; la norme correspondante étant

$$\left(\int \langle f, f \rangle \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \| \tilde{f} \|_2 ,$$

il s'ensuit que le Th. 8 bis est démontré.

On peut élucider facilement la structure de L_F^2 de la façon suivante. Soit (e_α) une base orthonormale de F , et posons, pour $f \in \mathcal{L}_F^2$:

$$f(x) = \sum_\alpha e_\alpha . f_\alpha(x) ;$$

comme on a $\quad f_\alpha(x) = \langle f(x), e_\alpha \rangle$, les fonctions scalaires f_α sont dans $\mathcal{L}^2_C$ (Coroll. de la Prop.7) et on a

$$\|\tilde{f}\|_2^2 = \int \|f\|^2 \, d\mu = \int \sum_\alpha |f_\alpha(x)|^2 \, d\mu(x) .$$

Supposons maintenant F séparable : les e_α sont en nombre fini ou en infinité dénombrable. Comme on a

$$\|f(x)\|^2 = \sum_\alpha |f(x)|^2$$

et comme les fonctions $\|f\|^2$, $|f_\alpha|^2$ sont positives et sommables (Th.8), l'équation ci-dessus et le Th.2 prouvent que l'on peut aussi écrire

$$(1) \qquad \int \|f\|^2 \, d\mu = \sum_\alpha \int |f_\alpha|^2 \, d\mu .$$

Réciproquement, soit f_α une famille de fonctions de $\mathcal{L}^2_C$ vérifiant

$$\sum_\alpha \int |f_\alpha|^2 \, d\mu < +\infty .$$

On aura (Th.2)

$$\sum |f_\alpha(x)|^2 < +\infty \qquad \text{presque partout ;}$$

donc il existe une fonction f à valeurs dans F telle que l'on ait

$$f(x) = \sum_\alpha e_\alpha . f_\alpha(x) \qquad \text{presque partout ;}$$

cette fonction est dans $\mathcal{L}^2_F$, comme on le voit immédiatement en l'approchant par des sommes finies de fonctions $e_\alpha . f_\alpha(x)$, et on a

$$N_2(f) = \left(\sum_\alpha \int |f_\alpha|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} .$$

On a donc le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 16 bis - <u>Soient</u> F <u>un espace de Hilbert séparable et</u> (e_α) <u>une base orthonormale de</u> F . <u>Pour qu'une fonction</u>

$$f(x) = \sum_\alpha e_\alpha . f_\alpha(x)$$

<u>à valeurs dans</u> F <u>soit dans</u> $\mathcal{L}^2_F$, <u>il faut et il suffit que les fonctions</u> f_α <u>soient dans</u> $\mathcal{L}^2_C$ <u>et vérifient</u>

$$\sum_\alpha \int |f_\alpha|^2 \, d\mu < +\infty .$$

On peut déduire de là que l'espace de Hilbert L^2_F est isomorphe à $(L^2_C)^\omega$ où ω est la dimension de F .

<u>Remarque</u> - Le procédé de fabrication de L^2_F décrit ci-dessus appartient à la théorie des <u>sommes directes continues</u> d'espaces de Hilbert.

10 - <u>Intégrale inférieure d'une fonction positive</u>.

Nous allons donner, dans ce N° et le suivant, un critère de sommabilité applicable aux fonctions <u>numériques</u>.

<u>Définition</u> 4 - <u>Etant donné un espace localement compact</u> E , <u>on désigne par</u> $\mathcal{S}_+(E) = \mathcal{S}_+$ <u>l'ensemble des fonctions</u> $f(x)$ <u>définies sur</u> E , <u>à valeurs dans</u> R_+ , <u>semi-continues supérieurement et à support compact</u>.

On a évidemment $\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{S}_+$; d'autre, la borne inférieure d'une famille quelconque de fonctions de $\mathcal{S}_+$ (en particulier de $\mathcal{L}_+$) est dans $\mathcal{S}_+$ (Top.Gén., chap.IV, §6,Th.4) En fait :

<u>Proposition 17</u> - <u>Toute fonction</u> $f \in \mathcal{S}_+$ <u>est l'enveloppe inférieure des fonctions de</u> $\mathcal{L}_+$ <u>qui majorent</u> f .

Soit en effet K le support (compact) de f ; soient K_1 un voisinage compact de K , K_2 un voisinage compact de K_1 . L'espace compact K_2 étant uniformisable, il existe, pour tout $x_0 \in K$ et tout $\varepsilon > 0$, une fonction continue sur K_2 , soit φ , vérifiant

$$\varphi \geqslant f \quad \text{sur } K_2 , \qquad \varphi(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$$

(Top. Gén., chap.IX, § 1, Prop.5). On peut évidemment supposer $\varphi \geqslant 0$, et nulle en dehors de K_1 , comme on le voit en multipliant φ par une fonction continue égale à 1 sur K , à 0 en dehors de K_1 - fonction dont l'existence résulte de la normalité de K_2 (Top.Gén., Chap.IX, § 4, Déf. 1 et Prop.1) .

Si alors on prolonge φ à E en lui assignant la valeur 0 en dehors de K_2 , il est clair qu'on aura obtenu une fonction $\varphi \in \mathcal{L}_+(E)$, majorant f , et arbitrairement voisine de f en x_0 . C.Q.F.D.

<u>Proposition</u> 18 - <u>Pour qu'une fonction</u> $f \in \mathcal{I}_+$ <u>soit sommable, il faut et il suffit que</u> $\mu^*(f) < +\infty$. <u>Toute fonction</u> $g \in \mathcal{S}_+$ <u>est sommable, et on a</u>

$$\int g \cdot d\mu = \inf_{\substack{\varphi \geqslant g \\ \varphi \in \mathcal{L}_+}} \int \varphi \, d\mu .$$

Si $f \in \mathcal{I}_+$ est sommable, on a évidemment $\mu^*(f) < +\infty$. Si réciproquement cette condition est satisfaite, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une $\varphi \in \mathcal{L}_+$ vérifiant

$$\mu^*(f) - \varepsilon \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \mu^*(f) ;$$

en écrivant

$$f = \varphi + (f - \varphi)$$

et en appliquant le Th.2 du §1, on voit que

$$N_1(f-\varphi) = \mu^*(f-\varphi) = \mu^*(f) - \mu(\varphi) < \varepsilon ;$$

donc φ est sommable (Prop.2).

Soit $f \in \mathcal{S}_+$. Soit une $\varphi_0 \in \mathcal{L}_+$ vérifiant $\varphi_0 \geqslant f$. ALORS on a $\varphi_0 - f \in \mathcal{I}_+$, et évidemment $\mu^*(\varphi_0 - f) \leqslant \mu^*(\varphi_0) < +\infty$. Donc $\varphi_0 - f$ est sommable, ce qui montre que $f = \varphi_0 - (\varphi_0 - f)$ l'est aussi. Comme d'autre part $\varphi_0 - f \in \mathcal{I}_+$, $\mu(\varphi_0 - f) = \mu(\varphi_0) - \mu(f)$ est la borne supérieure des $\mu(\varphi)$ où $\varphi \in \mathcal{L}_+$ est $\leqslant \varphi_0 - f$, ce qui donne immédiatement la relation cherchée.

De même qu'on a défini l intégrale supérieure $\mu^*(f)$ d'une fonction $f \geqslant 0$ en considérant les fonctions de $\mathcal{I}_+$ qui majorent f, on peut introduire ceci :

<u>Définition</u> 5 - <u>On appelle intégrale inférieure d'une fonction numérique positive</u> f <u>le nombre</u>

$$\int_* f \, d\mu = \mu_*(f) = \sup_{\substack{\varphi \leqslant f \\ \varphi \in \mathcal{S}_+}} \mu(\varphi) .$$

Puisque les relations

$$0 \leqslant \varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad (\varphi \in \mathcal{S}_+ , \psi \in \mathcal{I}_+)$$

impliquent $\mu(\varphi) \leqslant \mu(\psi)$, on voit que, pour toute fonction $f \geqslant 0$ on a

$$0 \leqslant \mu_*(f) \leqslant \mu^*(f) \leqslant +\infty .$$

Si $f \in \mathcal{L}_+$, on a $\mu_*(f) = \mu^*(f) = \mu(f)$, relation qui s'étend immédiatement aux fonctions de $\mathcal{S}_+$ et de $\mathcal{I}_+$. Nous allons voir qu'en fait cette propriété caractérise les fonctions $f \geqslant 0$ et sommables.

11 - Critère de sommabilité des fonctions numériques positives.

Théorème 9 - Pour qu'une fonction numérique positive f soit sommable, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes que voici :

a) $$\mu_*(f) = \mu^*(f) < +\infty \quad ;$$

b) il existe une suite décroissante $(\varphi_n)_{n \in Z_+}$ de fonctions de $\mathcal{I}_+$ telle que

$$\mu^*(\varphi_n) < +\infty \quad ; \quad \inf_n \varphi_n(x) = f(x) \quad \text{presque partout} ;$$

c) il existe une suite croissante $(\psi_n)_{n \in Z_+}$ de fonctions de $\mathcal{S}_+$ telle que

$$\sup_n \mu(\psi_n) < +\infty \quad ; \quad \sup_n \psi_n(x) = f(x) \quad \text{presque partout.}$$

1 - Démonstration de b) : la ~~dkkfêx~~ suffisance de b) résulte du fait que les φ_n sont sommables (Prop. 18) et du Th. de Lebesgue par exemple. Réciproquement, si f est sommable il existe, par définition de $\mu^*(f)$, des $\varphi'_n \in \mathcal{I}_+$ vérifiant

$$\varphi'_n \geqslant f \quad , \qquad \mu^*(f) \leqslant \mu^*(\varphi'_n) \leqslant \mu^*(f) + \frac{1}{n} \quad ;$$

posant
$$\varphi_n = \inf_{k \leqslant n} \varphi'_k \quad ,$$

la suite φ_n est dans $\mathcal{I}_+$ et décroissante ; on a $\mu^*(\varphi_n) < +\infty$, $\varphi_n \geqslant f$; enfin on a, puisque f et φ_n sont sommables,

$$N_1(\varphi_n - f) = \int \varphi_n \, d\mu - \int f \, d\mu \leqslant \frac{1}{n} \quad ,$$

ce qui montre que $\inf \varphi_n$ coïncide presque partout avec f.

2 - Nécessité de a) et c) : Si $f \geqslant 0$ est sommable, il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{L}_+$ telle que l'on ait

$$\lim_{n \infty} N_1(f - f_n) = 0 \quad ; \quad f(x) = \lim_{n \infty} f_n(x) \quad \text{presque partout.}$$

Posant

$$\psi_n = \inf_{p \geqslant n} f_p \ ,$$

on obtient une suite croissante de fonctions de $\mathcal{S}_+$ qui converge presque partout vers f , ce qui prouve la nécessité de c). En outre, on a

$$\mu^*(f) = \mu(f) = \sup \mu(\psi_n) \leqslant \mu_*(f)$$

ce qui, puisque $\mu^*(f) \geqslant \mu_*(f)$, prouve que

$$\mu_*(f) = \mu^*(f) = \mu(f) < +\infty \quad :$$

d'où la nécessité de a).

3 - <u>Suffisance de</u> a) : Si a) est vérifié, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ des fonctions $\varphi \in \mathcal{I}_+$, $\psi \in \mathcal{S}_+$ vérifiant

$$\psi \leqslant f \leqslant \varphi \ , \qquad \mu(\varphi) - \mu(\psi) < \varepsilon \ ;$$

comme φ et ψ sont sommables, il s'ensuit que

$$N_1(\varphi - \psi) = \mu(\varphi) - \mu(\psi),$$

et comme $|f - \psi| \leqslant \varphi - \psi$, on en déduit $N_1(f - \psi) < \varepsilon$; donc f est adhérente à $\mathcal{L}^1_R$, ce qui entraîne $f \in \mathcal{L}^1_R$.

4 - <u>Suffisance de</u> c) : résulte directement du fait que les ψ_n sont sommables, et du Th.6 sur les suites croissantes de fonctions sommables.

Le Théorème 9 est donc complètement démontré.

Le Théorème 9 donne des indications sur la structure topologique des fonctions sommables positives. Un résultat analogue est le suivant :

<u>Théorème 10</u> - <u>Toute fonction numérique</u> f , <u>appartenant à un espace</u> $\mathcal{L}^p_R$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, <u>coïncide presque partout avec la différence de deux fonctions de</u> $\mathcal{I}_+$.

En effet, il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{L}_R$ telle que

$$f(x) = \sum_{n \in Z_+} f_n(x) \qquad \text{presque partout,}$$

$$\sum |f_n(x)| < +\infty \qquad \text{presque partout.}$$

Si l'on pose $g(x) = \sum f_n^+(x)$; $h(x) = \sum f_n^-(x)$;

g et h sont dans $\mathcal{S}_+$, presque partout finies, et on a

$$f(x) = g(x) - h(x) \qquad \text{presque partout.}$$

§ 4. Ensembles mesurables.

1 - Ensembles mesurables.

Définition 1 - On dit qu'un sous-ensemble A de E est mesurable si sa fonction caractéristique χ_A est sommable ; le nombre

$$\mu(A) = \int \chi_A(x)\, d\mu(x)$$

est alors appelé mesure de A .

Il est clair que l'on a alors

$$0 \leqslant \mu(A) = \mu^*(A) < +\infty \ .$$

Proposition 1 - Tout ensemble négligeable est mesurable et de mesure nulle, et réciproquement.

C'est une conséquence évidente de la définition des fonctions sommables.

Proposition 2 - La réunion et l'intersection d'une famille finie $(A_\iota)_{\iota \in I}$ d'ensembles mesurables sont mesurables ; on a

$$\mu\Big(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\Big) \leqslant \sum_{\iota \in I} \mu(A_\iota) \ ; \tag{1}$$

si en outre les A sont deux à deux disjoints, on a

$$\mu\Big(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\Big) = \sum_{\iota \in I} \mu(A_\iota) \ . \tag{2}$$

Posons

$$B = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \quad ; \qquad C = \bigcap_{\iota \in I} A_\iota \quad ;$$

χ_B et χ_C sont les enveloppes supérieure et inférieure de la famille finie $(\chi_{A_\iota})_{\iota \in I}$ de fonctions sommables ; donc (§ 3, coroll. de la Prop. 12) sont sommables : B et C sont par suite mesurables. (1) s'obtient en appliquant μ à l'inégalité

$$\chi_B \leqslant \sum_{\iota \in I} \chi_{A_\iota} \ ,$$

et (2) en observant que, si les A_ι sont disjoints, on a

$$\chi_B = \sum_{\iota \in I} \chi_{A_\iota} \ .$$

Proposition 3 - Si A et B sont mesurables, et si $A \subset B$, l'ensemble

$$C = B \cap \complement A$$

est mesurable, et l'on a

(3) $$\mu(C) = \mu(B) - \mu(A) .$$

En effet, on a

(4) $$\chi_C = \chi_B - \chi_A \quad ;$$

donc χ_C est sommable, et (3) s'obtient en intégrant (4).

Proposition 4 - L'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

Soit en effet $(A_n)_{n \in Z_+}$ une telle famille ; soit A son intersection ; on a

$$\chi_A = \inf_{n \in Z_+} \chi_{A_n} \quad :$$

la Prop.4 résulte alors immédiatement du § 3, Coroll. 2 du Th.6 .

Proposition 5 - Soit $(A_n)_{n \in Z_+}$ une suite croissante d'ensembles mesurables ; pour que sa réunion A soit mesurable, il faut et il suffit que

$$\sup_{n \in Z_+} \mu(A_n) < +\infty \quad ,$$

et on a alors

$$\mu(A) = \sup_{n \in Z_+} \mu(A_n) .$$

Comme les fonctions sommables χ_{A_n} forment une suite croissante, et comme

$$\chi_A = \sup \chi_{A_n} \quad ,$$

la Prop.5 résulte du § 3 , Th. 6 .

Proposition 6 - Soit $(A_n)_{n \in Z_+}$ une famille dénombrable d'ensembles mesurables, contenus dans un ensemble mesurable fixe ; l'ensemble

$$A = \bigcup_{n \in Z_+} A_n$$

est mesurable; on a

(5) $$\mu(A) \leqslant \sum_{n \in Z_+} \mu(A_n) ;$$

si les A_n sont deux à deux disjoints, on a

(6) $$\mu(A) = \sum_{n \in Z_+} \mu(A_n) .$$

Les A_n étant contenus dans un mesurable fixe, les fonctions $\chi_{A_n} \geqslant 0$ sont majorées par une fonction sommable fixe ; la mesurabilité de A se réduit alors au § 3, Coroll.2 du Th.6 ; (5) s'obtient en intégrant l'iné-

galité

$$\chi_A \leqslant \sum_{n \in Z_+} \chi_{A_n} ,$$

et (6) en appliquant le Th. 2 du §3 à l'équation

$$\chi_A = \sum_{n \in Z_+} \chi_{A_n} .$$

2 - Mesure des ouverts et des compacts.

Proposition 7 - Pour qu'un ensemble A , ouvert ou fermé, soit mesurable, il faut et il suffit que

$$\mu^*(A) < +\infty .$$

Si A est ouvert, cela résulte du §3, Prop.18. Si A est fermé et mesurable, on a

$$\mu^*(A) = \mu(A) < +\infty ;$$

réciproquement, si $\mu^*(A)$ est fini, il existe un ouvert $G \supset A$ tel que

$$\mu^*(G) < +\infty ;$$

l'ouvert G , ainsi que l'ouvert

$$G_1 = G \cap \complement A \subset G ,$$

sont donc mesurables d'après ce qu'on a vu ; il en est donc de même (Prop. 3) de A .

Corollaire de la Prop.7 - Tout ensemble compact est mesurable, de même que tout ensemble ouvert et relativement compact.

Proposition 8 - Soit $(F_\iota)_{\iota \in I}$ un ordonné filtrant décroissant d'ensembles fermés mesurables ; on a

$$\mu\Big(\bigcap_{\iota \in I} F_\iota\Big) = \inf_{\iota \in I} \mu(F_\iota) .$$

En considérant au besoin une section de l'ordonné filtrant donné, on peut supposer que les F_ι sont tous contenus dans un fermé mesurable fixe, et donc (§1, Prop. 17) dans un ouvert mesurable fixe G' . Posons

$$F = \bigcap_{\iota \in I} F_\iota , \quad G_\iota = G' \cap \complement F_\iota , \quad G = G' \cap \complement F .$$

Les G_ι sont ouverts, et forment un filtrant croissant dont la réunion est G ; on a donc (§1, Prop. 6)

$$\mu(G) = \sup_{\iota \in I} \mu(G_\iota) ;$$

il résulte de la Prop. 3 que $F = G' \cap \complement G$

est mesurable, et que

$$\mu(F) = \mu(G') - \mu(G) = \inf_{\iota \in I} \left[\mu(G') - \mu(G_\iota) \right] = \inf_{\iota \in I} \mu(F_\iota) .$$

C.Q.F.D.

3 - Critère de mesurabilité.

Théorème 1 - Pour qu'un ensemble A soit mesurable, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert G et un compact K tels que

$$K \subset A \subset G$$

et pour lesquels le nombre $\mu(G) - \mu(K)$ soit arbitrairement petit.

1) Nécessité de la condition - Si A est mesurable, il existe un ouvert G tel que $G \supset A$ et que

$$\mu(G) - \mu^*(A) = \mu(G) - \mu(A)$$

soit arbitrairement petit ; tout revient donc à prouver l'existence d'un compact $K \subset A$ pour lequel $\mu(A) - \mu(K)$ est $< \varepsilon$, où ε est un nombre > 0 arbitraire.

Or, χ_A étant sommable, il existe (§ 3, Th. 9) une fonction $f \in \mathcal{S}^+$ vérifiant

$$f \leqslant \chi_A \quad , \quad \int (\chi_A - f)\, d\mu < \varepsilon .$$

Soit K l'ensemble des $x \in E$ où l'on a

$$f(x) \geqslant \varepsilon .$$

Comme $f \in \mathcal{S}_+$, K est compact ; comme $f \leqslant \chi_A$, on a $K \subset A$; si l'on pose
$$B = A \cap \complement K ,$$
B est mesurable, et on a

$$f \leqslant \chi_K + \varepsilon \chi_B \quad ;$$

donc

$$\int f\, d\mu \leqslant \mu(K) + \varepsilon \mu(B) \leqslant \mu(K) + \varepsilon\, \mu(A) ;$$

finalement, il vient

$$\mu(A) \leqslant \int f\, d\mu + \varepsilon \leqslant \mu(K) + \varepsilon + \varepsilon\, \mu(A)$$

ce qui prouve que $\mu(A) - \mu(K)$ peut être rendu arbitrairement petit.

2) <u>Suffisance de la condition</u>

Si $K \subset A \subset G$ et si

$$\mu(G) - \mu(K) < \varepsilon ,$$

on voit d'abord que $\mu^*(\chi_A) < +\infty$;

de plus, comme

$$\chi_A - \chi_K \leq \chi_G - \chi_K ,$$

on a

$$\mu^*(|\chi_A - \chi_K|) \leq \varepsilon ;$$

χ_A est donc, dans $\mathcal{F}^1_R$, adhérente à $\mathcal{L}^1_R$: par suite $\chi_A \in \mathcal{L}^1_R$ et A est mesurable.

C.Q.F.D.

Le Théorème 1 permet d'élucider - en partie - la structure topologique des ensembles mesurables :

<u>Théorème 2</u> - <u>Tout ensemble mesurable est, à un ensemble négligeable près, la réunion d'une famille dénombrable de compacts, et l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts.</u>

En effet, si A est mesurable, il existe d'après le Th.1 une suite $(K_n)_{n \in Z_+}$ de compacts contenus dans A et vérifiant

$$\mu(A) - \mu(K_n) < \frac{1}{n} .$$

Il est clair que l'on peut alors écrire

$$A = N \cup \bigcup_{i \in Z_+} K_n$$

où N est négligeable. Un raisonnement analogue vaut pour les ouverts contenant A .

<u>Corollaire du Théorème 2</u> - <u>Tout ensemble de mesure extérieure finie peut être recouvert, à un ensemble négligeable près, par une famille dénombrable de compacts.</u>

Il suffit pour le voir d'appliquer le Th.2 à un ouvert mesurable contenant l'ensemble donné.

4 - Mesures intérieure et extérieure.

Etant donné un ensemble $A \subset E$, on a posé (§ 1, Déf. 6)

$$\mu^*(A) = \mu^*(\chi_A) .$$

Une notion analogue à celle de mesure extérieure est la suivante :

Définition 2 - On appelle mesure intérieure d'un ensemble $A \subset E$ le nombre

$$\mu_*(A) = \mu_*(\chi_A) = \sup_{\substack{f \leqslant \chi_A \\ f \in \mathcal{S}_+(E)}} \int f . d\mu .$$

Proposition 9 - La mesure intérieure de A est la borne supérieure des mesures des compacts contenus dans A .

Si un compact K est contenu dans A , la fonction $\chi_K \in \mathcal{S}_+(E)$ est majorée par χ_A : d'où

$$\mu(K) \leqslant \mu_*(A) .$$

Supposons maintenant

(1)
$$\mu_*(A) < +\infty \quad ;$$

et soit un nombre $\varepsilon > 0$. Il existe une $f \in \mathcal{S}_+(E)$ vérifiant

$$f \leqslant \chi_A \quad , \quad \mu(f) \geqslant \mu_*(A) - \varepsilon .$$

Soit K l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \geqslant \varepsilon$: c'est un compact contenu dans A , et on a

$$\chi_K \geqslant f - \varepsilon . \chi_A ,$$

d'où

$$(f - \chi_K)^+ \leqslant \varepsilon \chi_A \quad ;$$

il s'ensuit que

$$\mu(f - \chi_K) \leqslant \mu\left[(f - \chi_K)^+\right] \leqslant \mu_*(\varepsilon \chi_A) = \varepsilon . \mu_*(A)$$

et donc que

$$\mu(K) \geqslant \mu(f) - \varepsilon . \mu_*(A) \geqslant \mu_*(A) - \varepsilon\left[1 + \mu_*(A)\right] :$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, la Proposition 9 est démontrée dans l'hypothèse (1).

Si au contraire

$$\mu_*(A) = +\infty \quad ,$$

pour tout $n \in Z_+$ il existe une $f \in \mathcal{S}_+(E)$ vérifiant

$$f \leq \chi_A \quad , \qquad \mu(f) > n \quad .$$

Soit, pour $p \in Z_+$, K_p le compact $\overset{-1}{f}([\frac{1}{p}, [)$, et posons $f_p = \inf(f, \chi_{K_p})$; les f_p formant une suite croissante dont la limite est f, on a (§ 3, Th.6)

$$\mu(f) = \lim_{p\ \infty} \mu(f_p) ;$$

or, on a visiblement $f_p \leq \chi_{K_p}$, d'où

$$\mu(f_p) \leq \mu(K_p) :$$

par suite

$$\sup_{p \in Z_+} \mu(K_p) \geq \mu(f) > n ,$$

en sorte que l'on peut trouver dans A des compacts de mesure arbitrairement grande ce qui achève la démonstration.

A l'aide de la notion de mesure intérieure et des résultats acquis (§ 1, Prop. 17 § 4, Th. 1 et Prop. 9), on peut énoncer la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 10 - <u>Pour qu'un ensemble</u> A <u>soit mesurable, il faut et il suffit que l'on ait</u>

$$\mu_*(A) = \mu^*(A) < +\infty \quad .$$

On peut aussi considérer ce résultat comme une conséquence directe du § 3, Th. 9 .

Terminons en indiquant une relation remarquable entre les mesures intérieure et extérieure :

<u>Proposition</u> 11 - <u>Soit</u> A <u>un ensemble contenu dans un ensemble mesurable</u> M . <u>On a</u>

$$\mu_*(A) = \mu(M) - \mu^*(M \cap \complement A) .$$

Soit en effet un compact $K \subset A$, et soit

$$G = M \cap \complement K \quad .$$

G est mesurable, on a (Prop. 3)

(1) $$\mu(G) = \mu(M) - \mu(K)$$

et, comme $G \supset M \cap \complement A$, on a

(2) $$\mu(G) = \mu^*(G) \geqslant \mu^*(M \cap \complement A) ;$$

en combinant (1) et (2) il vient

$$\mu^*(M \cap \complement A) \leqslant \mu(M) - \mu(K)$$

ou

$$\mu(K) \leqslant \mu(M) - \mu^*(M \cap \complement A) :$$

en prenant la borne supérieure du premier membre, on en conclut que

(3) $$\mu_*(A) \leqslant \mu(M) - \mu^*(M \cap \complement A) .$$

Maintenant, soit V un ouvert contenant $M \cap \complement A$, et soit

$$F = M \cap \complement V ;$$

F est mesurable et contenu dans A ; on a donc

$$\mu(F) = \mu_*(F) \leqslant \mu_*(A) ,$$

et d'autre part, puisque $M \subset F \cup V$;

$$\mu(F) \geqslant \mu(M) - \mu(V),$$

d'où l'on déduit

$$\mu_*(A) \geqslant \mu(M) - \mu(V)$$

ou $$\mu(V) \geqslant \mu(M) - \mu_*(A) .$$

Prenant la borne inférieure du premier membre il vient

$$\mu^*(M \cap \complement A) \geqslant \mu(M) - \mu_*(A)$$

ou

(4) $$\mu_*(A) \geqslant \mu(M) - \mu^*(M \cap \complement A) :$$

la comparaison de (3) et (4) prouve la Proposition 11 .

5 - Fonctions sommables et fonctions étagées.

Etant donnés deux ensembles E et F , rappelons qu'une fonction f , définie sur E et à valeurs dans F , est dite étagée si f(E) est un sous-ensemble fini de F .

Lorsque E est un espace localement compact sur lequel est définie une intégrale de Radon positive μ , et F un espace de Banach, nous désignerons par $\Phi_F(E, \mu)$, ou simplement par Φ_F si aucune confusion n'est à craindre, l'ensemble des fonctions étagées définies sur E , à valeurs dans F , et qui sont de la forme

$$f(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i \, . \, \chi_{A_i}(x) \qquad (a_i \in F)$$

où les A_i sont des ensembles <u>mesurables</u> pour μ . Etant donné que, pour un ensemble $A \subset E$ mesurable, on a

$$\chi_A^p = \chi_A$$

quel que soit p $(1 \leqslant p < +\infty)$, on voit que $\chi_A \in \mathcal{L}^p_R$ et par suite : <u>les fonctions étagées à valeurs dans F appartiennent à tous les espaces</u> $\mathcal{L}^p_F$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. En fait, on a même le résultat suivant :

<u>Théorème 3</u> - <u>Pour tout espace de Banach F et tout p</u> $(1 \leqslant p < +\infty)$, <u>les classes de fonctions étagées à valeurs dans F sont partout denses dans</u> L^p_F .

Etant donné que $\mathcal{L}_F$ est partout dense dans $\mathcal{L}^p_F$, il suffit de prouver que, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{L}_F$, il existe une fonction $g \in \Phi_F$ telle que l'on ait

$$N_p(f-g) < \varepsilon \ .$$

Or, soit $K \subset E$ le support de f . f étant fortement continue sur le compact K , il existe un recouvrement $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de K au moyen d'un nombre fini d'ouverts G_i , tel que

$$x \in G_i \, . \quad y \in G_i \qquad \text{implique} \qquad \| f(x)-f(y) \| < \varepsilon \ .$$

Définissons des ensembles A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ en posant

$$A_1 = K \cap G_1 \ ; \qquad A_2 = K \cap G_2 \cap \complement A_1 \ ; \ \ldots . \ ;$$
$$A_n = K \cap G_n \cap \complement (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \ .$$

Les A_i recouvrent K , sont deux à deux disjoints et mesurables. Choisissons un point x_i dans chaque A_i , et posons

$$g(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i) . \chi_{A_i}(x) \quad ;$$

il est clair que $g \in \Phi_F$, et que

$$\| f(x)-g(x) \| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } x ,$$

ce qui donne, puisque f et g sont nulles en dehors de K :

$$\| f-g \|^p \leqslant \varepsilon^p \chi_K \quad ;$$

par suite

$$N_p(f-g) \leqslant \varepsilon \, [\mu(K)]^{\frac{1}{p}} \quad ,$$

et le Th.3 est démontré.

<u>Corollaire du Th.3</u> - <u>Si une fonction f à valeurs dans F est de puissance p^e sommable pour μ ($1 \leqslant p < +\infty$), presque toutes les valeurs de f sont situées dans un sous-espace vectoriel fermé séparable de F.</u>

En effet, Φ_F étant un sous-espace vectoriel partout dense de $\mathcal{L}^p_F$, f coïncide presque partout avec la somme d'une <u>série</u>, presque partout absolument convergente, de fonctions $f_n \in \Phi_F$. Comme chaque f_n prend ses valeurs dans un sous-espace de dimension <u>finie</u> de F, la propriété annoncée s'ensuit.

On verra au N° suivant un procédé "canonique" qui, dans le cas des fonctions sommables à valeurs dans R_+, permet de réaliser l'approximation par des fonctions étagées. On trouvera un procédé analogue, valable dans le cas général, au § 6, Th. 8 .

6 - <u>Sommes de Lebesgue</u>.

<u>Proposition 12</u> - <u>Soit f une fonction de puissance p^e sommable à valeurs dans un espace de Banach F. Pour tout nombre $a > 0$, l'ensemble des $x \in E$ où l'on a $\| f(x) \| \geqslant a$ est mesurable</u>.

Puisque $f \in \mathcal{L}^p_F$ implique (§ 3, Prop.6 et Th.8) $\| f \|^p \in \mathcal{L}^1_R$, tout revient à prouver la Prop.12 dans le cas où f est à valeurs dans R_+ et est sommable.

Mais alors, on peut trouver (§ 3, Th.9) une suite décroissante $(\varphi_n)_{n \in Z_+}$ de fonctions sommables de $\mathcal{J}_+$ telle que l'on ait

(1) $\qquad f(x) = \inf\limits_{n \in Z_+} \varphi_n(x)$ presque partout.

Soit
$$A = \{f \geqslant a\}, \qquad A_n = \{\varphi_n > a\} \quad ; \quad B_n = \{\varphi_n \geqslant a\} ;$$
comme $\varphi_n \in \mathcal{J}_+$, A_n est ouvert, et mesurable puisque la relation
$$\varphi_n > a . \chi_{A_n}$$
implique
$$\mu^*(A_n) \leqslant \frac{1}{a} \int \varphi_n \, d\mu < + \infty .$$
Il en est de même des ensembles $\left\{\varphi_n > a - \frac{1}{p}\right\}$ pour $p \in Z_+$, $a - \frac{1}{p} > 0$; donc B_n , intersection de ceux-ci, est mesurable (Prop.4). Mais de (1) résulte que A coïncide, à un ensemble négligeable près, avec l'intersection des B_n : donc A est lui-même mesurable (Prop.4). C.Q.F.D.

<u>Corollaire de la Proposition</u> 12 - <u>Soit</u> f <u>une fonction sommable numérique et positive</u> ; <u>quels que soient les nombres</u> a <u>et</u> b <u>tels que</u>
$$0 < a \leqslant b \leqslant + \infty \quad ,$$
<u>les ensembles</u>
$$\{f > a\} \; ; \; \{a < f < b\} \; ; \; \{a \leqslant f < b\} \; ; \{a < f \leqslant b\} ; \{a \leqslant f \leqslant b\}$$
<u>sont mesurables</u>.

Démontrons-le par exemple pour $\{a < f \leqslant b\}$. C'est la différence entre les ensembles $\{f > a\}$ et $\{f > b\}$; donc (Prop.3) tout revient à prouver que $\qquad A = \{f > a\}$
est mesurable. Mais A est l'intersection des
$$A_n = \left\{f \geqslant a + \frac{1}{n}\right\} \qquad (n \in Z_+)$$
lesquels, d'après la Prop.12 sont mesurables. C.Q.F.D.

Nous allons montrer maintenant à l'aide de la Prop.12 comment, connaissant la <u>mesure des ensembles</u>, on peut reconstituer l'<u>intégrale des fonctions numériques</u>.

Pour cela, soit f une fonction sommable et positive, définie sur E tout entier. Soit $(a_n)_{n \in Z_+}$ une suite de nombres réels vérifiant les conditions suivantes :

1) $0 < a_n < a_{n+1} < +\infty$ pour tout $n \in Z_+$;

2) $\lim\limits_{n \infty} a_n = +\infty$; 3) $\sup\limits_{n \in Z_+} (a_{n+1} - a_n) = \varepsilon < +\infty$.

Posons

$$A_n = \overset{-1}{f}([a_n, a_{n+1}[) ;$$

les ensembles A_n sont mesurables (Prop.12) et deux à deux disjoints.

En outre, on a

$$a_n \leqslant f(x) < a_{n+1} \quad \text{pour} \quad x \in A_n$$

et par suite

(1) $$\sum_{n \in Z_+} a_n \chi_{A_n} \leqslant f < \sum_{n \in Z_+} a_{n+1} \chi_{A_n} .$$

Comme f est sommable, on déduit de là , en utilisant le Th.6 du §3,

que le premier membre de (1) est une fonction <u>sommable</u>, et que

$$\int (\sum a_n \chi_{A_n}) d\mu = \sum a_n . \mu(A_n) \leqslant \int f d\mu .$$

D'autre part, comme

$$a_{n+1} \leqslant a_n + \varepsilon ,$$

on voit que

(2) $$\sum_{n \in Z_+} a_{n+1} . \chi_{A_n} \leqslant \sum_{n \in Z_+} a_n . \chi_{A_n} + \varepsilon \sum_{n \in Z_+} \chi_{A_n} ,$$

or, les A_n étant disjoints, on a

$$\sum_{n \in Z_+} \chi_{A_n} = \chi_A \quad \text{où} \quad A = \bigcup_{n \in Z_+} A_n ,$$

et puisqu'on a évidemment

$$A = \overset{-1}{f}([a_1, [) ,$$

A est mesurable (Prop.12) ; d'après (2), $\sum a_{n+1} \chi_{A_n}$ est donc aussi μ-sommable, et il vient d'après (1) et (2)

(3) $$\int f d\mu \leqslant \sum a_{n+1} . \mu(A_n) \leqslant \sum a_n \mu(A_n) + \varepsilon \mu(A) .$$

En définitive, on a

(4) $$\sum a_n \mu(A_n) \leqslant \int f d\mu \leqslant \sum a_n \mu(A_n) + \varepsilon . \mu(A) .$$

L'expression $\sum a_n \mu(A_n)$ est appelée une <u>somme de Lebesgue inférieure</u> de f . Comme $\varepsilon . \mu(A)$ peut, en choisissant la subdivision (a_n) de R assez fine être rendue arbitrairement petite, on déduit de (4) que $\int f d\mu$ <u>est la borne supérieure des sommes de Lebesgue inférieures relatives à f</u> .

De même, l'expression $\sum a_{n+1} \cdot \mu(A_n)$ est dite une <u>somme de Lebesgue supérieure</u> de f ; (3) prouve que $\int f \, d\mu$ <u>est la borne inférieure des sommes de Lebesgue supérieures de</u> f .

On remarquera que, les sommes de Lebesgue étant des séries convergentes, on peut les remplacer, avec une précision arbitraire, par des sommes <u>finies</u>. En particulier, en choisissant une subdivision (a_n) assez fine, on aura, pour p assez grand :

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant p} a_n \mu(A_n) \leqslant \int f \, d\mu \leqslant \sum_{1 \leqslant n \leqslant p} a_n \mu(A_n) + \varepsilon ,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int \Big| f - \sum_{1 \leqslant n \leqslant p} a_n \cdot \chi_{A_n} \Big| \, d\mu < \varepsilon ;$$

on retrouve ainsi, dans le cas de $\mathcal{L}^1_R$, le Th. 3.

D'autre part, on voit, comme on l'avait annoncé, que la mesure des ensembles détermine μ ; comme $\mu(A)$ est connu dès qu'on sait mesurer les <u>compacts</u> (et, ce, d'après le Th.1), on peut dire :

<u>Proposition</u> 13 - <u>Pour que deux intégrales</u> <u>et</u> <u>coïncident, il faut et il suffit que l'on ait</u>

$$\mu(K) = \nu(K) \quad \underline{\text{pour tout compact}} \quad K \subset E .$$

En particulier, soit une intégrale, et considérons un <u>automorphisme</u> σ de E ; pour une fonction f posons

$$f_\sigma(x) = f\left[\sigma^{-1}(x)\right] ,$$

et considérons l'intégrale μ_σ , image de μ par σ (Chap.II, §2,N°); on aura

$$\mu_\sigma(f) = \mu(f_{\sigma^{-1}}) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{L}_R ,$$

d'où l'on déduit, en utilisant les définitions du § 1 , que

$$\mu_\sigma^*(f) = \mu^*(f_{\sigma^{-1}}) \quad \text{pour toute} \quad f \geqslant 0 .$$

En particulier, on aura

$$\mu_\sigma(K) = \mu\left[\sigma(K)\right]$$

pour tout compact K . Par suite, d'après la Prop. 13 ;

<u>Proposition 14 - Pour qu'une intégrale</u> μ <u>soit invariante par un automorphisme</u> σ <u>de E, il faut et il suffit que l'on ait</u>

$$\mu(K) = \mu\left[\sigma(K)\right]$$

<u>pour tout compact</u> $K \subset E$.

6 - <u>Cas de l'intégrale de Lebesgue sur</u> R .

Si $E = R$ et si μ est l'intégrale de Lebesgue, on a vu (§ 1, N° 3) que pour tout intervalle ouvert $]a,b[$ on a

$$\mu^*(\,]a,b[\,) = b-a \quad .$$

On déduit de là et de la Prop.7 que, pour qu'un intervalle ouvert de R soit mesurable, il faut et il suffit qu'il soit de longueur finie.

Comme tout intervalle coïncide, à un ensemble fini - donc négligeable-près, avec un intervalle <u>ouvert</u>, on voit que : pour qu'un intervalle de R soit mesurable (relativement à la mesure de Lebesgue) il faut et il suffit qu'il soit de longueur finie ; sa mesure est alors égale à sa longueur.

Il résulte de là que toute fonction étagée, de la forme

$$f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \chi_{A_i}(x)$$

où les A_i sont des <u>intervalles finis</u> et les a_i des constantes complexes, est μ-sommable ; en outre on a

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \sum a_i \ \mu(A_i)$$

et par suite

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \quad ,$$

où le second membre désigne l'intégrale "élémentaire" de f , le premier l'intégrale de f au sens du §3, N° 5 . Ce résultat s'étend aux <u>fonctions réglées</u> (Livre Elém.,chap.). Soit en effet f une fonction réglée, définie et bornée sur R , et nulle en dehors d'un intervalle compact $K = [a,b]$. f est alors limite uniforme d'une suite (f_n) de fonctions étagées, nulles en dehors de $[a,b]$, et uniformément bornées.

Par définition, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) \;;$$

mais les hypothèses faites sur la suite f_n entraînent que celle-ci est majorée, en module, par une fonction de la forme $M.\chi_K$ où $0 \leqslant M < +\infty$, donc par une fonction μ-sommable. D'après le § 3,Th.8 on peut donc affirmer :

1) que f est μ-sommable

2) que $$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;.$$

Par des raisonnements analogues, on verrait que le résultat s'étend aux intégrales impropres ; et on obtiendrait la propriété suivante :

~~Propriété~~ Proposition 15 - Pour qu'une fonction numérique $f(x)$, définie et règlée sur R, soit absolument intégrable, il faut et il suffit qu'elle soit sommable relativement à la mesure de Lebesgue sur R ; on a alors

$$\int f(x)d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;.$$

Remarque - Il existe sur R des fonctions, sommables pour la mesure de Lebesgue, qui ne sont pas règlées (cf. Exerc.)

7 - Intégrales de Radon et fonctions monotones sur R.

Dans le cas où $E = R$, l'existence d'une structure d'ordre sur R permet de réaliser les intégrales de Radon par un procédé particulièrement simple. Tout d'abord, si μ est une intégrale positive sur R, tout ensemble compact - en particulier tout intervalle compact $[a,b]$ - est μ-sommable. Définissons alors une fonction $\varphi(t)$ en posant

$$\varphi(t) = \begin{cases} \mu([0,t]) & \text{si } t \geqslant 0 \;; \\ -\mu(\,]t,0[\,) & \text{si } t < 0 \;. \end{cases}$$

On aura $\varphi(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant 0$, $\varphi(t) \leqslant 0$ pour $t < 0$;

comme en outre $\mu(A)$ est une fonction croissante de A, on voit immédiatement que la fonction $\varphi(t)$ est <u>non-décroissante</u>. Elle est en outre <u>continue à droite</u> ; en effet, quand $t > t_o \geqslant 0$ tend vers t_o en décroissant, les <u>compacts</u> $[0,t]$ forment un filtrant <u>décroissant</u> dont l'intersection est $[0,t_o]$; on a donc (Prop.8)

$$\varphi(t_o) = \lim_{\substack{t \to t_o \\ t > t_o}} \varphi(t) :$$

d'où la continuité à droite pour $t_o \geqslant 0$. Si $t_o < 0$, et si $t > t_o$ tend vers t_o en décroissant, les <u>ouverts</u> $]t,0[$ forment un filtrant <u>croissant</u> dont la réunion est $]t_o,0[$: d'où la même propriété que pour $t_o \geqslant 0$.

La connaissance de la fonction φ permet de reconstituer complètement μ. Tout d'abord, pour un intervalle $]a,b[$ on trouve immédiatement que

$$(1) \qquad \mu(\,]a,b]\,) = \varphi(b) - \varphi(a) .$$

On en déduit que, pour un intervalle compact $[a,b]$ - intersection des intervalles $]a - \frac{1}{n}, b]$ - on a

$$\mu(\,[a, b]\,) = \varphi(b)-\varphi(a-0) .$$

Comme un compact arbitraire $K \subset R$ est réunion d'une famille dénombrable de tels intervalles, il s'ensuit que la donnée de φ permet de calculer $\mu(K)$, donc (Prop. 13) détermine entièrement μ.

Montrons maintenant que, réciproquement, toute fonction $\varphi(t)$ <u>non décroissante et continue à droite</u> détermine une intégrale de Radon μ pour laquelle on a (1). Pour cela, soit $n \longrightarrow x_n$ une application <u>strictement croissante</u> de Z dans R, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to -\infty} x_n = -\infty \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty \quad ,$$

associons-lui la partition π de R suivant les intervalles $]x_n, x_{n+1}]$, et considérons l'intégrale discrète λ_π obtenue en plaçant, en chaque point x_n, la masse positive $\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)$; on aura

$$(1) \qquad \lambda_\pi(f) = \sum_{n\in Z} \left[\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)\right].\, f(x_n)$$

pour $f\in \mathcal{L}_K$, le second membre de (1) ne comprenant du reste qu'un nombre fini de termes non nuls. Je dis que, quand π devient de plus en plus fine, λ_π converge vaguement. En effet, soit π_1 une position plus fine que π ; on l'obtient en insérant entre x_n et x_{n+1} des points

$$x_n = y_1^n < y_2^n < \dots < y_{p_n}^n = x_{n+1} \ ;$$

on aura

$$\lambda_{\pi_1}(f) = \sum_{n\in Z_+} \sum_{K=1}^{p_n-1} \left[\varphi(y_{K+1}^n)-\varphi(y_K^n)\right] f(y_K^n) \ ;$$

si l'on remarque que

$$\left[\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)\right] f(x_n) = \sum_{K=1}^{p_n-1} \left[\varphi(y_{K+1}^n)-\varphi(y_K^n)\right] f(x_n) \ ,$$

on a donc

$$\lambda_\pi(f) - \lambda_{\pi_1}(f) = \sum_{n\in Z_+} \sum_{K=1}^{p_n-1} \left[\varphi(y_{K+1}^n)-\varphi(y_K^n)\right].\left[f(y_K^n)-f(x_n)\right].$$

Ceci étant, supposons f nulle en dehors de $[a, b]$ compact ; f étant uniformément continue, on pourra, pour $\varepsilon > 0$ donné, supposer π assez fine pour que, sur chaque intervalle $[x_n, x_{n+1}]$, l'oscillation de f soit $< \varepsilon$. La formule ci-dessus donne alors, dès que $\pi_1 < \pi$,

$$(2) \qquad \left|\lambda_\pi(f) - \lambda_{\pi_1}(f)\right| \leqslant \varepsilon.\left[\varphi(b)-\varphi(a)\right]$$

puisque les seuls termes non nuls du $\sum$ sont ceux pour lesquels $y_K^n \in [a,b]$. Il est clair que (2) prouve notre assertion puisque (Chap.II, § 2,) les mesures positives forment un ensemble complet pour la topologie vague.

Considérons alors la mesure μ, limite de λ_π quand π devient de plus en plus fine. Si $f\in \mathcal{L}_+$ est nulle en dehors de $[a,b]$, (1) montre que

$$\lambda_\pi(f) \leqslant \left[\varphi(b)-\varphi(a)\right].\ \|f\| \ ;$$

donc, à la limite, on aura aussi

$$\mu(f) \leqslant [\varphi(b)-\varphi(a)] \cdot \|f\| \qquad \text{pour } f \in \mathcal{L}_+ .$$

Si $[\alpha,\beta]$ est un intervalle compact de R , et si une $f \in \mathcal{L}_+$ est égale à 1 sur $[\alpha,\beta]$, nulle en dehors de $[a,b]$ $(a<\alpha<\beta<b)$, et partout comprise entre 0 et 1, on aura donc

$$\mu(f) \leqslant \varphi(b)-\varphi(a) \quad ;$$

comme a et b peuvent être choisis arbitrairement voisins de α,β , on en conclut, φ étant continue à droite, que

$$\mu([\alpha,\beta]) \leqslant \varphi(\beta) - \varphi(\alpha-0) .$$

Mais, pour les f considérées, il est clair d'après (1) que

$$\lambda_{\pi}(f) \geqslant \varphi(\beta) - \varphi(\alpha-0)$$

d'où à la limite

$$\mu([\alpha,\beta]) \geqslant \varphi(\beta)-\varphi(\alpha-0)$$

et finalement

$$\mu([\alpha,\beta]) = \varphi(\beta)-\varphi(\alpha-0) .$$

En définitive, on a prouvé le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 16 - <u>Soit</u> $\varphi(t)$ <u>une fonction non décroissante et continue à droite sur</u> R . <u>Il existe une intégrale de Radon</u> <u>positive et une seule sur</u> R <u>telle que l'on ait</u>

$$\mu(]a,b]) = \varphi(b)-\varphi(a) \qquad (-\infty < a \leqslant b < +\infty) ;$$

<u>réciproquement, toute intégrale de Radon positive sur</u> R <u>peut être obtenue de cette façon</u>.

L'intégrale définie par φ se note souvent

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\varphi(t) \quad ;$$

on l'appelle une <u>intégrale de Radon-Stieltjes</u>.

<u>Exemples</u> - a) Si $\varphi(t) = t$,

on obtient l'intégrale de Lebesgue, car

$$\varphi(b)-\varphi(a) = b-a$$

est la <u>longueur</u> de l'intervalle $]a,b]$.

b) Si

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geqslant 0 , \end{cases}$$

on obtient la mesure ε_0 , formée d'une masse + 1 placée en 0 .

c) Plus généralement, si φ est constante par morceaux, on bobtient pour μ un intégrale discrète.

d) Si $\varphi(t)$ possède une <u>dérivée continue</u> $\varphi'(t)$, on a

$$d\mu(t) = \varphi'(t)\, dt$$

c'est-à-dire, μ est déterminée par la densité φ' par rapport à l'intégrale de Lebesgue dt. (cf. Exerc.). On a donc alors

$$\int f(t)\, d\varphi(t) = \int f(t).\varphi'(t)dt \qquad \text{pour} \qquad f \in \mathscr{L}(R) .$$

69

§ 5.- Fonctions mesurables sur tout compact.

1 - Le théorème de Lusin -

Théorème 1 (Lusin) - Soient E un espace localement compact, F un espace de Banach, μ une intégrale de Radon positive sur E , f une fonction définie sur E , à valeurs dans F et μ -sommable. Pour tout compact $K \subset E$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_1 \subset K$ sur lequel f est continu et tel que l'on ait

$$\mu (K \cap \complement K_1) < \varepsilon .$$

Soit δ un nombre >0 arbitraire. Comme $f \in \mathcal{L}^1_R$, il existe une $g \in \mathcal{L}_F$ telle que l'on ait

$$(1) \qquad \int \| f(x) - g(x) \| \, d\mu(x) \leqslant \varepsilon \delta .$$

Soit A l'ensemble des $x \in K$ où l'on a

$$\| f(x) - g(x) \| \geqslant \varepsilon \; ;$$

A est mesurable (§ 4 , Prop. 12), et on a

$$\int \| f(x) - g(x) \| \, d\mu(x) \geqslant \varepsilon . \mu(A)$$

d'où résulte, en comparant avec (1), $\mu(A) \leqslant \delta$.

En conséquence, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, il existe un ensemble mesurable $A \subset K$ et une fonction continue g tels que l'on ait

$$\| f(x) - g(x) \| \leqslant \varepsilon \qquad \text{sur} \quad K \cap \complement A ,$$

$$\mu(A) \leqslant \delta .$$

Ceci étant, soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $n > 0$, on peut trouver un ensemble mesurable $A_n \subset K$ et une fonction continue g_n tels que

$$\| f(x) - g_n(x) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad \text{sur} \quad K \cap \complement A_n$$

$$\mu(A_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Soit A la réunion des A_n ; on a

$$\mu(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} ,$$

et, sur $H = K \cap \complement A$, f est limite uniforme de la suite de fonctions continues g_n. H étant mesurable, il existe un compact $K_1 \subset H$ tel que

$$\mu(H \cap \complement K_1) \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Il est clair que f est continue sur K_1, et que

$$\mu(K \cap \complement K_1) \leq \varepsilon .$$

C.Q.F.D.

2 - Définition des fonctions mesurables sur tout compact.

Le Théorème 1 conduit à la notion suivante :

Définition 1 - Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F. On dit que f est mesurable sur tout compact si, quels que soient le compact $K \subset E$ et le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_1 \subset K$ sur lequel f soit continue et tel que l'on ait

$$\mu(K \cap \complement K_1) < \varepsilon .$$

D'après le théorème de Lusin, toute fonction sommable est mesurable sur tout compact. De même, si $F = C$, on a :

Proposition 1 - Toute fonction appartenant à un espace $\mathcal{L}^p_F$ $(1 \leq p < +\infty)$ est mesurable sur tout compact.

Il est clair en effet que la démonstration du Théorème 1 s'applique pour ainsi dire sans modification à une telle fonction. Cela résulte aussi du § 3, Th.8 .

La propriété suivante est pour le moins aussi évidente que la précédente :

Proposition 2 - Toute fonction continue à valeurs dans F est mesurable sur tout compact.

3 - Propriétés élémentaires.

Théorème 2 - Soient $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ des espaces de Banach en nombre fini, et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ des fonctions mesurables sur tout compact à valeurs dans ces F_i. Soit φ une application continue de $F_1 \times \dots \times F_n$

dans un espace de Banach F . Alors $\varphi(f_1,\dots,f_n)$ est mesurable sur tout compact.

Soient, en effet, un compact $K \subset E$ et un nombre $\varepsilon > 0$. Il existe des compacts $(K_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ contenus dans K , tels que

$$\mu(K \cap \complement K_i) < \frac{\varepsilon}{n} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) ,$$

f_i étant continue sur K_i . Il est clair qu'alors $\varphi(f_1,\dots,f_n) = f$ est continue sur le compact

$$K_o = K_1 \cap \dots \cap K_n \quad ;$$

comme

$$\mu(K \cap \complement K_o) < \varepsilon \quad ,$$

le Th. 2 est démontré.

Corollaire 1 du Théorème 2 - Les fonctions complexes définies sur E mesurables sur tout compact forment une algèbre sur C , stable par l'involution $f \longrightarrow \bar{f}$.

Corollaire 2 du Théorème 2 - L'enveloppe supérieure (resp. inférieure) d'une famille finie de fonctions numériques mesurables sur tout compact, est mesurable sur tout compact.

Corollaire 3 du Théorème 2 - Pour qu'une fonction numérique f soit mesurable sur tout compact, il faut et il suffit que f^+ et f^- soient mesurables sur tout compact.

Corollaire 4 du Théorème 2 - Soient f et g deux fonctions mesurables sur tout compact, à valeurs dans F et R respectivement ; la fonction fg est mesurable sur tout compact.

Corollaire 5 du Théorème 2 - Soit f une fonction mesurable sur tout compact à valeurs dans F ; pour tout $a' \in F'$, la fonction scalaire $\langle f(x), a' \rangle$ est mesurable sur tout compact.

Corollaire 6 du Théorème 2 - Si une fonction f , à valeurs dans un Banach F , est mesurable sur tout compact, il en est de même de la fonction numérique $\| f(x) \|$.

Corollaire 7 du Th. 2 - Soit F une algèbre normée complète. Si f et g sont deux fonctions à valeurs dans F , mesurables sur tout compact, il en est de même de f.g .

Corollaire 8 du Th.2 - Soient F un espace de Banach, et $\mathcal{R}(F)$ l'algèbre normée des endomorphismes continus de F . Si f et u sont deux fonctions mesurables sur tout compact, à valeurs dans F et $\mathcal{R}(F)$ respectivement, la fonction u f est mesurable sur tout compact.

Proposition 3 - Soient f et g deux fonctions à valeurs dans F , telles que l'on ait $f(x) = g(x)$ presque partout sur K , pour tout compact $K \subset E$. Si f est mesurable sur tout compact, il en est de même de g .

Soient en effet, un compact $K \subset E$ et un nombre $\varepsilon > 0$. Il existe un compact $K_1 \subset K$, sur lequel f est continue, et tel que l'on ait

$$\mu(K \cap \complement K_1) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

D'autre part, g coïncide avec f presque partout sur K_1 , donc partout sur un compact $K_2 \subset K_1$ et tel que

$$\mu(K \cap \complement K_2) < \frac{\varepsilon}{2} ;$$

g est donc continue sur K_2 , et l'inégalité

$$\mu(K \cap \complement K_2) < \varepsilon$$

achève la démonstration.

Remarque 1 - On peut énoncer l'hypothèse de la Prop.3 en disant que f et g coïncident presque partout sur tout compact ; cette condition est, dans certains cas, plus faible que la relation : f et g coïncident presque partout. On étudiera cette question au chap. IV .

S

4 - Mesurabilité et sommabilité.

Théorème 3 - Pour qu'une fonction f , définie sur E et à valeurs dans F , soit μ-sommable, il faut et il suffit qu'elle soit mesurable sur tout compact et d'intégrale supérieure finie.

Supposons en effet qu'une fonction f à valeurs dans l'espace de Banach F soit mesurable sur tout compact et vérifie

$$\int^{*} \| f(x) \| \, d\mu(x) < +\infty .$$

En modifiant au besoin f sur un ensemble négligeable, on peut supposer qu'elle est nulle en dehors d'un ensemble

$$A = \bigcup_{n \in Z_+} K_n$$

réunion dénombrable de compacts K_n .

Soit alors un nombre $\varepsilon > 0$. Il existe des compacts $K'_n \subset K_n$ vérifiant

$$\mu(K_n \cap \complement K'_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} ;$$

et sur chacun desquels f est continue. Posons

$$K''_n = \bigcup_{p \leq n} K'_p \quad ; \quad M = \bigcup_{n \in Z_+} K''_n \quad ; \quad \text{d'où} \quad \mu(A \cap \complement M) < \varepsilon ,$$

et introduisons les fonctions

$$f_n(x) = f(x) \, \chi_{K''_n}(x) , \qquad f_M(x) = f(x) \, \chi_M(x) ,$$

à valeurs dans F . D'après le Coroll.4 du Th.2, ces fonctions sont mesurables sur tout compact, et vérifient les hypothèses du Th.3 . Nous allons montrer que ces fonctions sont sommables, en examinant d'abord le cas des f_n . Il est clair que, pour celles-ci, tout revient à prouver le Lemme suivant :

Lemme : Soit K une partie compacte de E , f_0 une application continue de K dans F , f la fonction définie sur E par

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si} \quad x \in K \\ 0 & \text{si} \quad x \notin K . \end{cases}$$

Alors f est sommable.

Soit en effet un nombre $\varepsilon > 0$. f étant continue sur K , il existe des ouverts $G_i \subset E$ en nombre fini tels que l'on ait

$$K \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} G_i \ ,$$

$$\| f(x) - f(y) \| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad x, y \in G_i \ ;$$

on en déduit une <u>partition</u> $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de K en ensembles <u>mesurables</u>, tels que

$$x, y \in A_j \qquad \text{implique} \qquad \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon \ .$$

Choisissons un point x_j dans chaque A_j , et posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x_j) & \text{si} \quad x \in A_j \\ 0 & \text{si} \quad x \notin K \end{cases}$$

Il est clair qu'on aura

$$\begin{cases} \| g(x) - f(x) \| < \varepsilon & \text{quel que soit} \quad x \ , \\ \| g(x) - f(x) \| = 0 & \text{pour} \quad x \notin K \ , \end{cases}$$

et donc

(1) $\qquad N_1(g - f) \leqslant \varepsilon . \mu(K)$.

Mais on a

$$g(x) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} f(x_j) \ \chi_{A_j}(x) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} a_j \ g_j(x)$$

où les $a_j \in E$ sont des <u>constantes</u> et où les fonctions numériques g_j sont <u>sommables</u> : par suite g est sommable (§ 3, Prop.8), et (1) montre qu'il en est de même de f , ce qui prouve le Lemme .

Revenons alors à la démonstration du Th.3 des fonctions f_n sont sommables, et convergent fortement en chaque point vers f_M ; comme on a en outre

$$\| f_n(x) \| \leqslant \| f(x) \| \quad ; \quad \int \| f(x) \| \, d\mu(x) < + \infty \ ,$$

on en conclut (Th. de Lebesgue) que f_M est sommable.

Appliquons maintenant ce résultat successivement pour $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$; soient $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ les ensembles M correspondants ; comme

$$\mu(A \cap \complement M_n) < \frac{1}{n} ,$$

A coïncide presque partout avec la réunion des M_n . On a donc

$$f(x) = \lim_{n\,\infty} f_{M_n}(x) \qquad \text{presque partout,}$$

ce qui, en appliquant à nouveau le théorème de Lebesgue, prouve la sommabilité de f . C.Q.F.D.

Corollaire 1 du Théorème 3 - Pour qu'une fonction f soit dans $\mathcal{L}^p_F$ ($1 \leqslant p < +\infty$), il faut et il suffit qu'elle soit mesurable sur tout compact et vérifie

$$\mu^*(\|f\|^p) < +\infty .$$

La nécessité des conditions est évidente ; si elles sont remplies, la fonction

$$g(x) = \|f(x)\|^{p-1} f(x) ,$$

mesurable sur tout compact d'après le Th.2, et d'intégrale supérieure finie d'après

$$\mu^*(\|g\|) = \mu^*(\|f\|^p) ,$$

sera dans $\mathcal{L}^1_F$: on a donc bien $f \in \mathcal{L}^p_F$ (§3, Th. 8) .

Corollaire 2 du Théorème 3 - Soient $f_1,\dots,f_n$ des fonctions complexes sommables $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ une fonction complexe définie et continue sur C^n ; pour que la fonction $\varphi(f_1,\dots,f_n)$ soit sommable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu^*(|\varphi(f_1,\dots,f_n)|) < +\infty .$$

En effet les f_i étant mesurables sur tout compact, il en est de même, d'après le Th.2 , de $\varphi(f_1,\dots,f_n)$; la condition énoncée résulte alors directement du Coroll. 1 du Th.3, appliquée pour $p = 1$.

On laisse au lecteur le soin d'étendre ce résultat au cas des espaces $\mathcal{L}^p$.

5 - Fonctions sommables sur tout compact.

Définition 2 - On dit qu'une fonction f , définie sur E et à valeurs dans F est sommable sur tout compact (relativement à μ) si, pour tout compact $K \subset E$, la fonction $f.\chi_K$ (égale à f sur K , à 0 ailleurs) est sommable.

Remarque - Une étude détaillée de ces fonctions étant l'objet du Chap.IV, on en s'étonnera pas de voir leur rôle réduit ici au minimum.

Proposition 4 - Toute fonction sommable sur tout compact est mesurable sur tout compact ; toute fonction bornée et mesurable sur tout compact est sommable sur tout compact.

Si f est sommable sur tout compact, pour tout compact $K \subset E$ la fonction $f.\chi_K$, étant sommable, est mesurable sur tout compact ; il existe donc un compact $K_1 \subset K$, donc la mesure est arbitrairement voisine de celle de K , et sur lequel $f.\chi_K$ est continue ; $f.\chi_K$ coïncidant sur K avec f , ceci prouve que f est mesurable sur tout compact.

Réciproquement, si f est mesurable sur tout compact et vérifie

$$\sup_{x \in E} \|f(x)\| = M < +\infty \quad ,$$

pour chaque compact $K \subset E$ la fonction $f.\chi_K$ est mesurable sur tout compact (comme produit de deux telles fonctions), et vérifie en outre

$$\mu^*(\|f\chi_K\|) \leqslant M.\mu(K) < +\infty \quad :$$

donc, $f.\chi_K$ est sommable, ce qui achève la démonstration.

Proposition 5 - Soit f une fonction à valeurs dans F ; pour tout entier $n > 0$, posons

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \underline{\text{si}}\ \|f(x)\| \leqslant n \\ n \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|} & \underline{\text{si}}\ \|f(x)\| > n \end{cases}$$

<u>Pour que f soit mesurable sur tout compact, il faut et il suffit que les f_n soient sommables sur tout compact.</u>

<u>Nécessité</u> - Les f_n étant bornées, il suffit (Prop.4) de prouver qu'elles sont mesurables sur tout compact, ce qui résulte immédiatement de ceci : si f est continue sur un compact $K \subset E$, il en est de même des f_n, puisque pour la topologie forte

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o) \quad \text{implique} \quad \lim_{x \to x_o} \|f(x)\| = \|f(x_o)\| .$$

<u>Suffisance</u> : Soient un compact $K \subset E$ et un nombre $\varepsilon > 0$. Il existe, pour chaque $n \in Z_+$, un compact $K_n \subset K$ sur lequel f_n est continue et tel que

$$\mu(K \cap \complement K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} .$$

Les f_n sont <u>toutes</u> continues sur le <u>compact</u>

$$K_o = \bigcap_{n \in Z_+} K_n \quad ,$$

en sorte qu'il en est de même de f ; comme

$$\mu(K \cap \complement K_o) < \varepsilon \quad ,$$

la Prop.5 est démontrée.

<u>Corollaire de la Prop. 5</u> - <u>Pour qu'une fonction numérique positive f soit mesurable sur tout compact, il faut et il suffit que</u> inf (f,n) <u>soit sommable sur tout compact pour tout</u> $n \in Z_+$.

6 - <u>Suites de fonctions mesurables sur tout compact</u>.

<u>Théorème 4</u> - <u>Si une suite</u> $(f_n)_{n \in Z_+}$ <u>de fonctions à valeurs dans</u> F , <u>mesurables sur tout compact, converge fortement en tout point de</u> E <u>vers une fonction limite f , celle-ci est mesurable sur tout compact</u>.

Posons pour $p \in Z_+$

$$f_{n,p}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si} \quad \| f_n(x) \| \leq p \\ p \dfrac{f_n(x)}{\| f(x) \|} & \text{si} \quad \| f_n(x) \| > p \end{cases},$$

et soit f_p la fonction définie de façon analogue à partir de f.

Comme on a

$$\| f(x) \| = \lim_{n\ \infty} \| f_n(x) \| ,$$

on aura

$$f_p(x) = \lim_{n\ \infty} f_{n,p}(x)$$

pour tout $x \in E$ et tout $p \in Z_+$. Si K est un compact, les fonctions $f_{n,p}.\chi_K$ (sommables d'après la Prop.5) convergent vers $f_p.\chi_K$, et restent majorées en norma par la fonction $p.\chi_K$; d'après le théorème de Lebesgue $f_p.\chi_K$ est donc sommable.

Par suite, f_p est, quel que soit $p \in Z_+$, sommable sur tout compact, ce qui, avec la Prop.5, prouve le Théorème 4.

7 - <u>Ensembles mesurables sur tout compact.</u>

<u>Définition 3 - On dit qu'un ensemble</u> $A \subset E$ <u>est mesurable sur tout compact si la fonction caractéristique</u> χ_A <u>est mesurable sur tout compact.</u>

Une fonction sommable étant mesurable sur tout compact, on a la propriété suivante :

<u>Proposition 6 - Tout ensemble mesurable est mesurable sur tout compact.</u>

D'autre part, si A est mesurable sur tout compact, χ_A est, non seulement mesurable sur tout compact, mais sommable sur tout compact - puisque bornée - et réciproquement (Prop.4) ; si $K \subset E$ est compact, on a $\chi_A . \chi_K = \chi_{A \cap K}$; donc :

Proposition 7 - Pour qu'un ensemble $A \subset E$ soit mesurable sur tout compact, il faut et il suffit que $A \cap K$ soit mesurable quel que soit le compact $K \subset E$.

On déduit de là, comme on pourrait du reste le faire directement à partir du Th.4, la propriété suivante :

Proposition 8 - La réunion et l'intersection d'une famille finie ou dénombrable d'ensembles mesurables sur tout compact sont mesurables sur tout compact ; le complémentaire d'un ensemble mesurable sur tout compact est mesurable sur tout compact.

Tout ensemble fermé est mesurable sur tout compact, ainsi que tout ensemble ouvert.

Le Théorème 3 implique d'autre part ceci :

Proposition 9 - Pour qu'un ensemble $A \subset E$ soit mesurable, il faut et il suffit qu'il soit mesurable sur tout compact et que l'on ait

$$\mu^*(A) < +\infty \quad .$$

On déduit de là la propriété suivante :

Proposition 10 - L'intersection d'un ensemble mesurable sur tout compact et d'un ensemble mesurable est un ensemble mesurable.

Il est clair que la Prop. 10 généralise la Prop.7.

8 - Les espaces $\mathcal{L}^{\infty}_F$ et L^{∞}_F .

Nous allons introduire maintenant des notions qui généralisent celles du § 2 :

Définition 4 - On dit qu'une partie $N \subset E$ est négligeable sur tout compact lorsque, pour tout compact $K \subset E$, $N \cap K$ est négligeable . Etant donnée une relation R, contenant un argument variable $x \in E$, la relation « R presque partout sur tout compact » est équivalente à la relation « il existe un ensemble $N \subset E$ négligeable sur tout compact tel que $x \in N$ ou R ».

Les propriétés des ensembles négligeables sur tout compact sont évidemment analogues à celles des ensembles négligeables : toute partie d'un ensemble négligeable sur tout compact est négligeable sur tout compact, de même que la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles négligeables sur tout compact. Un ensemble négligeable est négligeable sur tout compact, mais la réciproque peut être fausse. Si un ensemble $A \subset E$ est mesurable, ou réunion dénombrable d'ensembles mesurables, $A \cap N$ est négligeable dès que N est négligeable sur tout compact, car alors A est, à un ensemble négligeable près, la réunion d'une famille dénombrable de compacts (§ 4 Th. 2).

Définition 5 - Etant donnée une fonction numérique f définie sur E, on appelle vrai maximum (resp. vrai minimum) de f relativement à μ le plus petit (resp. plus grand) élément $M_\infty(f)$ (resp. $m_\infty(f)$) de $\overline{R}$ tel que l'on ait

$$f(x) \leqslant M_\infty(f) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant m_\infty(f))$$

presque partout sur tout compact.

Etant donnée une fonction f à valeurs dans un espace de Banach F, on pose

$$N_\infty(f) = \text{vrai max. } \|f(x)\| \ ;$$

on désigne par $\mathcal{L}^\infty_F$ l'ensemble des fonctions f à valeurs dans F, mesurables sur tout compact, et pour lesquelles on a

$$N_\infty(f) < +\infty \ .$$

Il est clair que $\mathcal{L}^\infty_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_F$; que $N_\infty(f)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty_F$, puisque les relations

$$\|f(x)\| \leqslant \alpha \qquad \text{presque partout sur tout compact}$$

$$\|g(x)\| \leqslant \beta \qquad \text{presque partout sur tout compact}$$

impliquent

$$\|f(x) + g(x)\| \leqslant \alpha + \beta \qquad \text{presque partout sur tout compact.}$$

Les $f \in \mathcal{L}^{\infty}_F$ telles que $N_{\infty}(f) = 0$ forment donc un sous-espace $\mathcal{N}^{\infty}_F$ de $\mathcal{L}^{\infty}_F$, qui n'est autre que l'ensemble des fonctions <u>négligeables sur tout compact</u>. Par passage, au quotient, on obtient donc un <u>espace vectoriel normé</u>

$$L^{\infty}_F = \mathcal{L}^{\infty}_F / \mathcal{N}^{\infty}_F .$$

<u>Proposition 11</u> - <u>L'espace vectoriel normé</u> L^{∞}_F <u>est complet</u>.

Soit, en effet, $(f_n)_{n \in Z_+}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^{\infty}_F$ dont les images dans L^{∞}_F forment une suite de Cauchy :

$$\lim_{p,q\,\infty} N_{\infty}(f_p - f_q) = 0 .$$

Comme les f_p sont en infinité dénombrable, il existe pour chaque $n \in Z_+$ un ensemble $N_n \subset E$ négligeable sur tout compact et un entier k_n tels que les relations

$$p > k_n , \quad q > k_n ; \qquad x \notin N_n$$

impliquent

$$\| f_p(x) - f_q(x) \| < \frac{1}{n} .$$

L'ensemble

$$N = \bigcup_{n \in Z_+} N_n$$

est négligeable sur tout compact, et on voit que, sur $\complement N$, la suite (f_n) est <u>uniformément convergente</u>. Posons alors

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\,\infty} f_n(x) & \text{pour } x \notin N \\ 0 & \text{pour } x \in N . \end{cases}$$

Pour tout compact $K \subset E$, on a

$$\lim_{n\,\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{presque partout sur } K ;$$

ce qui montre que f est mesurable sur tout compact ; en outre, les f_n étant bornées sur $\complement N$, il en est de même de f, qui vérifie donc $N_{\infty}(f) < +\infty$ et par suite $f \in \mathcal{L}^{\infty}_F$; enfin f étant limite uniforme sur $\complement N$ des f_n, on a

$$\lim_{n \infty} N_{\infty}(f-f_n) = 0 ,$$

ce qui prouve la Prop. 11 .

En combinant la Prop.5 et le Th.4, on voit que :

Proposition 12 - Toute fonction mesurable sur tout compact est limite simple d'une suite de fonctions de $\mathcal{L}^{\infty}_F$, et réciproquement.

Enfin, si $f \in \mathcal{L}^{\infty}_F$ et si $K \subset E$ est compact, on a

$$\| f . \chi_K \| \leqslant N_{\infty}(f) . \chi_K \qquad \text{presque partout}$$

et donc

$$\mu^*(\| f . \chi_K \|) < +\infty \quad ;$$

par suite (Th.3 et Déf. 2) :

Proposition 13 - Toute fonction de $\mathcal{L}^{\infty}_F$ est sommable sur tout compact.

9 - Relation entre ensembles et fonctions mesurables.

Théorème 8 - ("Le retour du Diplodocus") - Pour qu'une fonction f , définie sur E et à valeurs dans l'espace de Banach F , soit mesurable sur tout compact pour μ , il faut et il suffit qu'elle vérifie les les conditions suivantes :

a) l'image réciproque par f de toute boule fermée B de F est mesurable sur tout compact ;

b) pour tout compact $K \subset E$, il existe un sous-espace vectoriel fermé séparable V de F tel que l'on ait $f(x) \in V$ presque partout sur K.

1 - Nécessité des conditions. Soit un compact $K \subset E$. D'après la Déf.1, il existe une suite de compacts $K_n \subset K$, vérifiant

$$\mu(K \cap \complement K_n) < \frac{1}{n} ,$$

et sur chacun desquels f est continue. Soit B une boule fermée de F , et posons $A = \overset{-1}{f}(B)$. Il est clair alors que $A \cap K_n$ sera compact pour tout n ; comme la réunion des K_n est, à un ensemble négligeable près, identique à K , on voit que $A \cap K$ est mesurable : d'où la condition a) .

Par ailleurs f, étant continu sur K_n, est limite uniforme sur K_n d'une suite de fonctions étagées ; $f(K_n)$ est donc contenu dans un sous-espace séparable de F, et il en est par suite de même de

$$f\left(\bigcup_{n \in Z_+} K_n\right) = \bigcup_{n \in Z_+} f(K_n)$$

ce qui prouve la nécessité de la condition b).

2 - <u>Suffisance des conditions.</u> Soit un compact $K \subset E$. En modifiant au besoin f sur un ensemble négligeable, on peut supposer, d'après l'hypothèse b), que $f(K)$ est contenu dans un sous-espace fermé et séparable V de F. Soit a_n une suite partout dense dans V, et soit $A_{n,p}$ $(n,p \in Z_+)$ l'ensemble des $x \in K$ où l'on a

$$\| f(x) - a_n \| \leqslant \frac{1}{p} .$$

D'après l'hypothèse a), les $A_{n,p}$ sont mesurables. Pour p donné, définissons alors une suite d'ensembles $B_{n,p} \subset K$ en posant

$$B_{1,p} = A_{1,p} , \ldots , B_{n+1,p} = A_{n+1,p} \cap \complement \bigcup_{k \leqslant n} A_{k,p} \cap K , \ldots .$$

Comme les $A_{n,p}$, les $B_{n,p}$ sont mesurables, et en outre, pour p donné, <u>deux à deux disjoints</u>. Soit $\chi_{n,p}$ la fonction caractéristique de $B_{n,p}$; ce qu'on vient de dire montre que la fonction

$$f_p = \sum_{n \in Z_+}{}' a_n . \chi_{n,p}$$

est mesurable sur tout compact ; comme on a

$$\| f(x) - f_p(x) \| \leqslant \frac{1}{p} \quad \text{sur } K ,$$

on voit que f est limite uniforme sur K de fonctions mesurables sur tout compact, ce qui prouve que f est elle-même mesurable sur tout compact.

<u>Corollaire du Théorème 8</u> - <u>Soit</u> f <u>une application faiblement continue d'un espace compact</u> E <u>dans un espace de Banach séparable</u> F. <u>Pour toute intégrale de Radon positive</u> μ <u>sur</u> E <u>et tout nombre</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un compact</u> $K_1 \subset K$, <u>vérifiant</u>

$$\mu(K \cap \complement K_1) < \varepsilon ,$$

<u>et sur lequel</u> f <u>est fortement continue</u>.

Tout revient à prouver que f est mesurable pour , c'est-à-dire à vérifier la condition a) du Th.8, puisque la séparabilité de F implique la condition b). Or, si B est une boule fortement fermée de F, B est aussi faiblement fermée en sorte que $\overset{-1}{f}(B)$ est fermé puisque f est faiblement continue.

<u>Remarque</u> - L'hypothèse b) du Th.8 est <u>essentielle</u>.

Par exemple, soient $E = [0,1]$, μ la mesure de Lebesgue sur E, F un espace de Hilbert ayant une base orthogonale $(e_t)_{0 \leq t \leq 1}$ équipotente à E, f la fonction $f(t) = e_t$. f vérifie l'hypothèse a) du Th.8, et vérifie même $\mu^*(\|f\|) < +\infty$, mais n'est pas sommable, ni même mesurable, sur E ; car tout compact $K \subset E$ sur lequel f est fortement continue est nécessairement fini, donc négligeable.

<u>Corollaire 2 du Th.8 - Pour qu'une fonction numérique</u> f <u>soit mesurable sur tout compact, il faut et il suffit que pour tout</u> $\alpha \in R$ <u>l'ensemble</u> $\overset{-1}{f}(]\alpha, \,])$ <u>soit mesurable sur tout compact</u>.

La condition est nécessaire d'après le Th.8 et l'équation

$$\overset{-1}{f}(]\alpha, \,]) = \bigcup_{n \in Z_+} \overset{-1}{f}([\alpha + \frac{1}{n}, n]) .$$

Elle est aussi suffisante, puisque, d'après l'équation

$$\overset{-1}{f}([\alpha, \beta]) = \bigcap_{n \in Z_+} \overset{-1}{f}(]\alpha - \frac{1}{n}, \,]) \cap \complement \overset{-1}{f}(]\beta, \,])$$

elle entraîne l'hypothèse a), l'hypothèse b) étant trivialement vérifiée.

10 - <u>Intégrale étendue à un sous-ensemble</u>.

<u>Définition 6 - Soient</u> $A \subset E$ <u>un ensemble mesurable sur tout compact, et</u> f <u>une fonction à valeurs dans</u> F, <u>mesurable sur tout compact</u>.

<u>On dit que</u> f <u>est sommable sur</u> A <u>si la fonction</u> $f \cdot \chi_A$ <u>est</u> μ<u>-sommable</u>. <u>On pose</u>

85

$$\int f(x)\,\chi_A(x)\,d\mu(x) = \int_A f(x)\,d\mu(x)\ .$$

D'après le Th.3, la condition nécessaire et suffisante pour que f soit sommable sur A est que l'on ait

$$\mu^*(\| f.\chi_A \|) < +\infty\ .$$

Comme $\| f\chi_A \| \leqslant \| f \|$, ce sera en particulier le cas si f est sommable (sur E) .

Il est clair que l'on a

$$\left\| \int_A f\,d\mu \right\| \leqslant \int_A \| f \|\,d\mu\ ;$$

que si f et g , à valeurs dans F , sont sommables sur A , il en est de même de f+g , et qu'alors

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu\ .$$

Si d'autre part f est sommable sur A et sur B , f est sommable sur $A \cup B$ puisque

$$\| f.\chi_{A\cup B} \| \leqslant \| f.\chi_A \| + \| f.\chi_B \|\ ;$$

si en outre A et B sont <u>disjoints</u>, on a $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, ce qui donne

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu\ .$$

Plus généralement :

<u>Proposition 14 - Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1_F$; soit $(A_n)_{n\in Z_+}$ une suite d'ensembles mesurables sur tout compact, et deux à deux disjoints ; alors on a</u>

$$\int_{\bigcup_{n\in Z_+} A_n} f.\,d\mu = \sum_{n\in Z_+} \int_{A_n} f.\,d\mu\ ,$$

<u>la série du second membre étant absolument convergente dans F .</u>

En effet, soit

$$A = \bigcup_{n\in Z_+} A_n\ ;$$

A est mesurable sur tout compact ; les A_n étant deux à deux disjoints, on a

$$f.\chi_A = \sum f.\chi_{A_n} \quad ; \quad \sum_{n \in Z_+} N_1(f\,\chi_{A_n}) \leqslant N_1(f) < +\infty \ ,$$

et la Prop. 14 résulte directement du § 2, Th. 2 .

On démontrerait naturellement une proposition analogue en faisant varier f au lieu de A .

Proposition 15 - Une fonction φ sommable sur tout compact est sommable sur tout ensemble mesurable et relativement compact ; si φ est en outre bornée, elle est sommable sur tout ensemble mesurable.

En effet, si un mesurable A est contenu dans un compact K , on a $\|\varphi.\chi_A\| \leqslant \|\varphi.\chi_K\|$ et donc, puisque $\varphi.\chi_K$ est sommable, $\mu^*(\|\varphi.\chi_A\|) < +\infty$: donc φ est sommable sur A .

Si φ est presque partout sur tout compact inférieure en norme à une constante $M < +\infty$, on a $\|\varphi.\chi_A\| \leqslant M.\chi_A$ presque partout et donc φ est sommable sur A dès que A est mesurable. C.Q.F.D.

11 - Fonctions faiblement mesurables sur tout compact.

Soient F un espace de Banach et F' son dual fort. On peut définir dans F' comme dans F , en utilisant la Déf.1, des fonctions mesurables sur tout compact. Mais on peut aussi y introduire la notion plus générale que voici :

Définition 7 - On dit qu'une fonction f , à valeurs dans F' , est faiblement mesurable sur tout compact si, quels que soient le nombre $\varepsilon > 0$ et le compact $K \subset E$, il existe un compact $K_1 \subset K$ vérifiant les conditions suivantes :

a) $\mu(K \cap \complement K_1) < \varepsilon$;

b) f est faiblement continue sur K_1 .

87

Remarque : la topologie faible dont il s'agit ici est naturellement celle qui est obtenue en considérant les formes linéaires déterminées sur F' par les éléments de F (et non ceux de F").

Il est clair que les fonctions faiblement mesurables à valeurs dans F' forment un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}_{F'}$ des fonctions à valeurs dans F' . On a en outre la propriété suivante :

Proposition 16 - Si f est une fonction mesurable à valeurs dans F , et g une fonction faiblement mesurable à valeurs dans F' , la fonction numérique $\langle f, g \rangle$ est mesurable.

Tout revient à montrer que si f et g sont respectivement fortement et faiblement continues sur un compact K_1 , $\langle f, g \rangle$ est continue sur K_1 . Or, g étant faiblement continue sur K_1 , l'ensemble $g(K_1)$ est faiblement compact, donc borné ; la propriété résulte alors du fait que, pour les topologies considérées sur F et F' , l'expression $\langle a, a' \rangle$ est continue par rapport à l'ensemble des variables lorsque a' reste sur une boule de F' .

Corollaire 1 de la Prop. 16 - Si f est une fonction faiblement mesurable à valeurs dans F' , la fonction numérique $\langle a, f \rangle$ est mesurable pour tout $a \in F$.

Corollaire 2 de la Prop. 16 - Si f est une fonction sommable à valeurs dans F , et g une fonction à valeurs dans F' , faiblement mesurable et essentiellement bornée, la fonction numérique $\langle f, g \rangle$ est sommable et on a

$$\left| \int \langle f, g \rangle \, d\mu \right| \leqslant N_1(f) . N_\infty(g) .$$

En effet, comme $\langle f, g \rangle$ est mesurable et vérifie

$$|\langle f, g \rangle| \leqslant \|f\| . \|g\| \leqslant N_\infty(g) . \|f\| \text{ presque partout,}$$

on a

$$\int^* |\langle f, g \rangle| \, d\mu \leqslant N_\infty(g) \, N_1(f)$$

ce qui prouve (Th. 3) que $\langle f, g \rangle$ est sommable et que

$$\left| \int \langle f, g \rangle \, d\mu \right| \leq \int^* |\langle f, g \rangle| \, d\mu \leq N_1(f) . N_\infty(g) .$$

<u>Remarque</u> - Il résulte du Corollaire 2 que, g étant fixée, la formule

$$\tilde{f} \longrightarrow \int \langle f, g \rangle d\mu \qquad (\tilde{f} \in L^1_F)$$

définit une <u>forme linéaire continue</u> sur l'espace de Banach L^1_F .
On verra que, dans certains cas tout au moins, on obtient ainsi <u>toutes</u> les formes linéaires continues sur L^1_F .

12 - <u>Définition d'une fonction mesurable par ses restrictions aux compacts de E</u> .

<u>Théorème 9</u> - <u>Soit</u> $K \longrightarrow f^K$ <u>une application de l'ensemble des parties compactes de E dans l'ensemble des fonctions mesurables sur tout compact à valeurs dans F . Supposons réalisées les conditions suivantes</u> :

a) <u>pour tout compact</u> K , f^K <u>est nulle en dehors de</u> K ;

b) <u>étant donnés deux compacts</u> K_1 <u>et</u> K_2 , <u>tels que</u> $K_1 \subset K_2$, <u>les fonctions</u> f^{K_1} <u>et</u> f^{K_2} <u>coïncident presque partout sur</u> K_1 .

<u>Alors il existe une fonction</u> f <u>mesurable sur tout compact qui, sur chaque compact</u> K , <u>coïncide presque partout avec la fonction</u> f^K .

Désignons par Φ l'ensemble des fonctions φ à valeurs dans F , définies sur des sous-ensembles <u>ouverts</u> U_φ de E , et telles que, pour tout compact $K \subset U_\varphi$, on ait

$$\varphi(x) = f^K(x) \qquad \text{presque partout sur } K .$$

La famille Φ <u>n'est pas vide</u>, car, si U est un ouvert relativement compact, la restriction à U de $f^{\overline{U}}$ appartient à Φ d'après l'hypothèse b) .

On peut ordonner Φ en écrivant $\varphi < \psi$ lorsque la fonction $\psi \in \Phi$ est un <u>prolongement</u> de φ . Nous allons montrer que, avec cette définition, Φ est <u>inductif</u>.

En effet, soit Φ_0 une partie totalement ordonnée de Φ, et considérons l'<u>ouvert</u> U_0 réunion U_φ quand φ parcourt Φ_0. Il existe une seule et unique fonction φ_0, définie dans U_0, et prolongeant les $\varphi \in \Phi_0$; je dis que $\varphi_0 \in \Phi$, ce qui prouvera évidemment notre assertion. Pour cela, soit un <u>compact</u> $K \subset U_0$; les U_φ $(\varphi \in \Phi_0)$ recouvrant K, et formant un ensemble croissant, il existe $\varphi \in \Phi_0$ telle que $K \subset U_\varphi$; φ coïncide presque partout sur K avec f^K ; φ_0, prolongeant φ, possède donc la même propriété, ce qui montre que $\varphi \in \Phi$ comme annoncé.

Soit alors φ un élément <u>maximal</u> de Φ (Th. de Zorn). Je dis que $U_\varphi = E$, ce qui prouvera le Th. 9.

Si l'on avait $U_\varphi \neq E$, l'ensemble $F = \complement U_\varphi$ serait un fermé <u>non vide</u>, et il existerait un ouvert G, relativement compact et rencontrant F. Définissons alors une fonction ψ sur l'<u>ouvert</u> $U_\psi = U_\varphi \cup G \neq U_\varphi$ en posant

$$(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{sur } U_\varphi \\ f^{\bar{G}}(x) & \text{sur } G \cap F . \end{cases}$$

Tout revient à montrer que $\psi \in \Phi$. Or soit un compact $K \subset U_\psi$. Sur $K \cap F$, ψ coïncide presque partout avec f^K d'après l'hypothèse b) et $\psi = f^G$ sur $G \cap F$.

Dans $K \cap U_\varphi$, qui est <u>mesurable</u>, on peut trouver une suite croissante de <u>compacts</u> $K_n \subset K \cap U_\varphi$, tels que

$$\mu(K \cap U_\varphi \cap \complement K_n) < \frac{1}{n} .$$

Comme $K_n \subset U_\varphi$ et comme $\varphi = \psi$ sur U_φ, φ coïncide presque partout sur K_n avec f^{K_n}, donc avec f^K. L'ensemble des points de $K \cap U_\varphi$ où l'on a $\psi(x) \neq f^K(x)$ est donc de mesure $< \frac{1}{n}$, c'est-à-dire négligeable.

Finalement, ψ coïncide presque partout sur $K \subset U_\psi$ avec f^K, ce qui achève la démonstration.

On se servira de ce Théorème au Chap.IV dans la démonstration du Théorème de Lebesgue-Nikodym.

----

§ 6 - Théorèmes de convexité.

1 - Le théorème de convexité.

Soient E un espace localement compact, μ une intégrale de Radon positive sur E, F un espace vectoriel normé complet sur R.

Théorème 1 - Soit f une fonction mesurable sur tout compact, dont les valeurs appartiennent à un sous-ensemble convexe et fermé K de F. Pour toute fonction numérique ρ, positive, sommable et non négligeable, telle que $f\rho$, soit sommable, on a

$$\frac{\int f(x)\,\rho(x)\,d\mu(x)}{\int \rho(x)\,d\mu(x)} \in K .$$

Soit en effet

$$\langle a, a' \rangle \leqslant 1 \qquad (a' \in F')$$

l'équation d'un demi-espace fermé de F contenant K. $f\rho$ étant sommable, il en est de même (§ 3, Coroll. de la Prop.7) de la fonction numérique $\langle f\rho , a' \rangle = \langle f, a' \rangle \rho$; comme $f(x) \in K$, on a

$$\langle f(x)\,\rho(x), a' \rangle \leqslant \rho(x)$$

ce qui, en intégrant, donne la relation

$$\left\langle \frac{\int f\rho\,d\mu}{\int \rho\,d\mu}, a' \right\rangle \leqslant 1 .$$

Donc l'élément $\int f.\rho\,d\mu \Big/ \int \rho\,d\mu$ appartient à tout demi-espace fermé contenant K : c'est dire qu'il appartient à K d'après le théorème de Hahn-Banach.

Corollaire 1 du Th.1 - Si l'intégrale μ est de masse totale égale à 1, et si f est sommable, $\int f \, d\mu$ appartient à l'enveloppe convexe fermée dans F de l'ensemble f(E) .

Il suffit de prendre $\rho(x) \equiv 1$ et d'observer que

$$\int d\mu = \|\mu\| = 1 .$$

Corollaire 2 du Th.1 - Si f est μ - sommable, et si l'ensemble A est mesurable et non négligeable, on a

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in K$$

où K est l'enveloppe convexe fermée de f(E) dans F .

Il suffit de prendre $\rho = \chi_A$ dans le Th.1 .

2 - Cas limite du théorème de convexité.

Rappelons que, K étant un ensemble fermé et convexe dans F , on appelle variété d'appui de K toute variété linéaire fermée V possédant les propriétés suivantes :

a) $V \cap K$ n'est pas vide ;

b) tout segment ouvert $]a, b[$ de K rencontrant V est tout entier dans V .

On dit alors que $V \cap K$ est une face de K .

Si V est en particulier un hyperplan d'appui, on sait qu'on peut toujours mettre son équation sous la forme

$$(1) \qquad \langle a, a' \rangle = \lambda \qquad (a' \in F')$$

avec

$$(2) \qquad \sup_{a \in K} \langle a, a' \rangle = \lambda ,$$

et réciproquement. On obtient alors un premier "cas limite" du Th.1 sous la forme suivante :

Proposition 1 - Pour que l'élément

$$\int f\rho \, d\mu \Big/ \int \rho \, d\mu$$

<u>soit dans un hyperplan d'appui</u> V <u>de</u> K , <u>il faut et il suffit que l'on ait</u>

$$f(x) \in V \cap K \qquad \underline{\text{presque partout}}$$

<u>sur l'ensemble où</u> $\rho(x) \neq 0$.

En effet, on a d'après (2)

$$\langle f(x), a' \rangle \leqslant \lambda ,$$

et donc

$$\langle f(x)\rho(x), a' \rangle - \lambda\, \rho(x) \leqslant 0 ;$$

si l'intégrale de cette fonction est nulle, c'est donc qu'on a

$$\langle f(x)\rho(x), a' \rangle = \lambda\, \rho(x) \qquad \text{presque partout,}$$

d'où immédiatement la Prop.1 .

On va déduire de là, en faisant des hypothèses plus particulières, des résultats plus précis.

<u>Proposition</u> 2 - <u>Soit</u> K <u>une partie faiblement compacte et convexe de</u> F ; <u>si</u> μ <u>est de masse totale égale à un</u> , <u>et si</u> f <u>est une fonction à valeurs dans</u> K <u>et faiblement continue</u>, $\int f\, d\mu$ <u>ne peut appartenir à une face de</u> K <u>que si</u> f(x) <u>appartient à cette face sur le support de</u> μ.

En effet, K étant faiblement compact, toute variété d'appui de K est l'intersection des hyperplans d'appui qui la contiennent. Tout revient donc à prouver la Prop.2 lorsque V est un hyperplan d'appui de K . Mais si $\langle a, a' \rangle = \lambda$ est son équation, l'hypothèse $\int f\, d\mu \in V$ implique d'après la Prop.1

$$\langle f(x), a' \rangle = \lambda \qquad \text{presque partout ;}$$

f étant faiblement continue, il s'ensuit (§ 2, Coroll.2 de la Prop.12) qu'on a

$$\langle f(x), a' \rangle = \lambda$$

en tout point du support de μ , ce qui prouve la Prop. 2 .

En particulier, $\int f\, d\mu$ ne peut se trouver en un <u>point extrémal</u> a de K que si $f(x) = a$ sur le support de μ .

Un second résultat est le suivant :

Proposition 3 - Soit f une fonction mesurable sur tout compact à valeurs dans R^n, telle que $f(E)$ soit contenu dans un sous-ensemble fermé convexe $K \subset R^n$. Soient μ une intégrale positive sur E, $\rho(x)$ une fonction positive non négligeable, telle que ρ et $f\rho$ soient sommable. Pour que $\int f\rho \, d\mu / \int \rho \, d\mu$ appartienne à une variété d'appui V de K, il faut et il suffit que l'on ait $f(x) \in V$ presque partout sur l'ensemble $\rho(x) \neq 0$.

En effet, F étant ici de dimension finie, V est l'intersection d'une famille finie d'hyperplans d'appui. La réunion d'une famille finie d'ensembles négligeables étant négligeable, la Prop.3 résulte immédiatement de la Prop.1.

On remarquera que le raisonnement précédent subsisterait si, F étant de dimension infinie, on était assuré que V soit l'intersection d'une famille dénombrable d'hyperplans d'appui. Il suffit évidemment pour cela, si l'on sait déjà par ailleurs que V est une intersection d'hyperplans d'appui, que le dual fort de F soit séparable. En conséquence :

Proposition 4 - Soient F un espace de Banach réflexif et séparable, K une partie convexe, fermée et bornée de F. Si $f(E) \subset K$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\int f\rho \, d\mu / \int \rho \, d\mu$ appartienne à une variété d'appui V de K est que l'on ait $f(x) \in V$ presque partout sur l'ensemble $\rho(x) \neq 0$.

Tout revient à vérifier que V est une intersection d'hyperplans d'appui (qu'on pourra alors supposer en infinité dénombrable puisque, F étant réflexif et séparable, F' est lui-même séparable). Mais cela provient du fait que, d'après les hypothèses faites, K est faiblement compact : en effet, K étant convexe et fortement fermé, est faiblement fermé ; étant borné, il est contenu dans une boule - ensemble qui, puisque F est réflexif, est faiblement compact.

3 - L'inégalité de Hölder.

Etant donné un nombre réel p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, il existe un nombre réel p' unique vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 .$$

On a aussi $1 \leqslant p' \leqslant +\infty$, et l'on dit que p, p' sont des exposants conjugués. La relation entre p et p' est évidemment symétrique, et s'écrit aussi

$$p' = \frac{p}{p-1} \quad \text{si} \quad 1 < p < +\infty$$

$$p' = +\infty \quad \text{si} \quad p=1 \quad ; \quad p' = 1 \quad \text{si} \quad p = +\infty .$$

On remarquera que la relation $1 \leqslant p \leqslant 2$ équivaut à $2 \leqslant p' \leqslant +\infty$, et que $p = 2$ équivaut à $p' = 2$.

Théorème 2 (Hölder) - Soient F, G, H des espaces vectoriels normés complets, et $(a,b) \to \langle a, b \rangle$ une application linéaire continue de $F \times G$ dans H vérifiant la condition $\| \langle a,b \rangle \| \leqslant \|a\| . \|b\|$. Si p, p' sont des exposants conjugués, les relations

$$f \in \mathcal{L}^p_F \quad , \quad g \in \mathcal{L}^{p'}_G$$

impliquent

$$(1) \qquad \langle f, g \rangle \in \mathcal{L}^1_H$$

et $$(2) \qquad \left\| \int \langle f, g \rangle \, d\mu \right\| \leqslant N_p(f) . N_{p'}(g) .$$

Nous allons d'abord examiner le cas $p=1$, $p' = +\infty$.

Si $f \in \mathcal{L}^1_F$, $g \in \mathcal{L}^{\infty}_G$, la fonction $\langle f, g \rangle$ est, comme f et g, mesurable sur tout compact (§ 5, Th. 2), et vérifie

$$\| \langle f, g \rangle \| \leqslant \|f\| . \|g\| .$$

Or f étant sommable, l'ensemble $\|f\| \neq 0$ est réunion dénombrable d'ensembles mesurables ; sur cet ensemble, on a donc

$$\|g\| \leqslant N_\infty(g) \qquad \text{presque partout ;}$$

par suite, il vient

$$\|\langle f, g\rangle\| \leqslant N_\infty(g).\|f\| \qquad \text{presque partout,}$$

ce qui montre que

$$N_1(\langle f, g\rangle) \leqslant N_1(f)\, N_\infty(g) \quad :$$

donc $\langle f, g\rangle$ est sommable, et on a

$$\left\|\int \langle f, g\rangle\, d\mu\right\| \leqslant N_1(\langle f, g\rangle) \leqslant N_1(f).\, N_\infty(g) \; ,$$

ce qui prouve le Th. 2 dans ce cas.

Il nous reste à examiner le cas où l'on a $1 < p < +\infty$, et donc $1 < p' < +\infty$. Ici encore, $\langle f, g\rangle$ est mesurable sur tout compact, et vérifie

$$(3) \qquad \|\langle f, g\rangle\| \leqslant \|f\|.\|g\| \, .$$

En introduisant la fonction numérique

$$\varphi = \sup\, (\|f\|^p, \|g\|^{p'})$$

laquelle est sommable d'après le § 3, Th. 8, il vient

$$\|f\| \leqslant \varphi^{\frac{1}{p}} \quad , \qquad \|g\| \leqslant \varphi^{\frac{1}{p'}}$$

d'où

$$\|\langle f, g\rangle\| \leqslant \varphi^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} = \varphi \; ;$$

on a donc

$$N_1(\langle f, g\rangle) < +\infty \quad ,$$

ce qui montre (§ 5, Th. 3) que $\langle f, g\rangle \in \mathcal{L}^1_H$. Il reste à démontrer la relation (2) ; d'après (3) et les équations

$$N_p(f) = N_p(\|f\|) \; , \qquad N_{p'}(g) = N_{p'}(\|g\|) \; ,$$

tout revient à prouver (2) lorsque $F = G = H = R$, $\langle a, b\rangle$ étant égal au produit ordinaire $a.b$ de deux nombres de R.

Or, considérons dans le plan R^2 l'ensemble K des points (a, b) tels que l'on ait $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{p'}} \geqslant 1$; l'ensemble K est <u>strictement convexe</u> ; la fonction

$$\varphi(t) = t^{-\frac{p}{p'}} = t^{-\frac{1}{p-1}} = t^{-\lambda} \qquad (\lambda > 0)$$

est en effet strictement convexe dans $]0, +\infty[$ puisque sa dérivée seconde $\varphi''(t) = \lambda(\lambda+1)t^{-\lambda-2}$ est > 0 dans l'intervalle considéré.

Cela étant, considérons deux fonctions

$$f \in \mathcal{L}^p_+ \quad , \quad g \in \mathcal{L}^{p'}_+$$

et considérons la fonction $h = \left(\frac{f^p}{fg} \, , \, \frac{g^{p'}}{fg} \right)$

à valeurs dans R^2. Elle est mesurable sur tout compact, et comme

$$\left(\frac{f^p}{fg}\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\frac{g^{p'}}{fg}\right)^{\frac{1}{p'}} = 1 ,$$

on voit que $h(E)$ est porté par la frontière $a^{\frac{1}{p}} \, b^{\frac{1}{p'}} = 1$ de K.

Introduisons d'autre part la fonction scalaire $\rho = fg$,

laquelle est sommable d'après la relation (1), démontrée plus haut.

On a $h\rho = (f^p \, , \, g^p)$

ce qui, puisque f^p et $g^{p'}$ sont sommables, montre que $h\rho$ est elle-même sommable. On est donc dans les conditions d'application du Th.1, et on voit que

$$\frac{\int h\rho \, d\mu}{\int \rho \, d\mu} \in K \; ;$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\left(\int f^p d\mu \, , \int g^{p'} d\mu\right)}{\int fg \, d\mu} \in K$$

ou enfin, en revenant à la définition de K :

$$\frac{N_p(f) . \, N_{p'}(g)}{N_1(fg)} \geqslant 1 \; ;$$

d'où l'inégalité de Hölder (2).

<u>Corollaire 1 du Th.2</u> - <u>Soient</u> F <u>un espace de Banach</u>, <u>et</u> F' <u>son dual fort</u>. <u>Si</u> $f \in \mathcal{L}^p_F$ <u>et si</u> $f' \in \mathcal{L}^{p'}_{F'}$, <u>la fonction numérique</u> $\langle f, f' \rangle$ <u>est sommable, et on a</u>

$$\left| \int \langle f, f' \rangle \, d\mu \right| \leqslant \| \tilde{f} \|_p \cdot \| f' \|_{p'} \, .$$

On déduit évidemment de là que toute $f' \in \mathcal{L}^{p'}_F$ détermine une <u>forme linéaire continue</u> sur L^p_F, à savoir

$$\tilde{f} \to \int \langle f, f' \rangle \, d\mu \, .$$

<u>Corollaire</u> 2 <u>du Th</u>.2 - <u>Si les fonction numériques</u> f et g <u>appartiennent respectivement à</u> $\mathcal{L}^p_R$ <u>et</u> $\mathcal{L}^{p'}_R$, <u>la fonction</u> fg <u>est sommable et on a</u>

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^{p'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \, .$$

~~Corollaire 3 du Th. 2 - Si les fonctions numériques f et g appartiennent respectivement à $\int^p_R$ et $\int^{p'}_R$, la fonction fg est sommable et on a~~

~~$\int fg \, d \; \int f^p \, d \; \int g^{p'} \, d$~~

<u>Corollaire</u> 3 <u>du Th</u>.2 - <u>Soit</u> $(\mu_n)_{n \in Z}$ <u>une suite de nombres réels positifs</u> ; <u>soient</u> $(x_n)_{n \in Z}$ <u>et</u> $(y_n)_{n \in Z}$ <u>deux suites de nombres réels ou complexes, telles que l'on ait</u>

$$\sum \mu_n |x_n|^p < +\infty \quad , \quad \sum \mu_n |y_n|^{p'} < +\infty \; ;$$

<u>alors la série</u> $\sum \mu_n x_n y_n$ <u>converge absolument, et on a</u>

$$\left| \sum_{n \in Z} \mu_n x_n y_n \right| \leqslant \left(\sum_{n \in Z} \mu_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n \in Z} \mu_n |y_n|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \, .$$

4 - <u>Cas limites de l'inégalité de Hölder</u>.

Nous allons examiner dans quel cas l'inégalité(2) est remplacée par l'égalité

$$(4) \qquad \left| \int \langle f, g \rangle \, d\mu \right| = N_p(f) \, N_{p'}(g) \, .$$

Pour cela, nous ferons les hypothèses suivantes : nous supposerons que $H = R$, et que $F = G$ est un <u>espace de Hilbert</u>, $\langle a, b \rangle$ désignant alors le produit scalaire de deux éléments de F.

Comme on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int \langle f, g \rangle \, d\mu \right| \leqslant \int |\langle f, g \rangle| \, d\mu \leqslant \int \|f\| \, \|g\| \, d\mu \, ,$$

et aussi, en appliquant le Th. 2 aux fonctions $\|f\|$ et $\|g\|$:

$$\int \|f\| \cdot \|g\| \, d\mu \leqslant N_p(\|f\|) . N_{p'}(\|g\|) ,$$

on voit que (4) se décompose en les équations

$$(4') \quad \left| \int \langle f, g \rangle d\mu \right| = \int |\langle f, g\rangle| \, d\mu \; ;$$

$$(4'') \quad \int |\langle f, g\rangle| d\mu = \int \|f\| \cdot \|g\| \, d\mu \; ;$$

$$(4''') \quad \int \|f\| \cdot \|g\| \, d\mu = N_p(\|f\|) . N_{p'}(\|g\|),$$

ce qui nous ramène à examiner successivement ces trois cas limites.

Comme $\langle f,g \rangle \in \mathcal{L}^1_C$, l'équation (4') est élucidée par la proposition suivante :

<u>Lemme 1 - Soit</u> $\varphi \in \mathcal{L}^1_C$; <u>pour qu'on ait</u>

$$(5) \qquad \left| \int \varphi \, d\mu \right| = \int |\varphi| \, d\mu \; ,$$

<u>il faut et il suffit que l'amplitude de</u> $\varphi(x)$ <u>soit presque partout constante sur l'ensemble</u> $\varphi(x) \neq 0$.

La condition est évidemment suffisante, puisqu'alors on a $\varphi = |\varphi| e^{i\theta}$ où θ est presque partout constant.

Réciproquement supposons (5) vérifié ; soit A l'ensemble des $x \in E$ où $\varphi(x) \neq 0$, et posons

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|} & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \, . \end{cases}$$

La fonction f est, comme le voit immédiatement, mesurable sur tout compact, et prend ses valeurs dans l'ensemble convexe D de C défini par l'inégalité

$$|\zeta| \leqslant 1 \, .$$

Comme (5) s'écrit encore

$$\left| \frac{\int f \, |\varphi| \, d\mu}{\int |\varphi| \, d\mu} \right| = 1 \, ,$$

on voit que (5) s'exprime que le point

$$\frac{\int f \, |\varphi| \, d\mu}{\int |\varphi| \, d\mu}$$

est sur la frontière de D , donc est un <u>point extrémal</u> de D . Il s'ensuit, d'après la Prop.1 , que f(x) coïncide avec ce point presque partout sur l'ensemble $\varphi \neq 0$, ce qui prouve le Lemme 1 .

Examinons maintenant (4"). Comme on a partout

$$\left| \langle f, g \rangle \right| \leq \| f \| \cdot \| g \| , \quad (4") \text{ exige}$$

$$\left| \langle f, g \rangle \right| = \| f \| \cdot \| g \| \qquad \text{presque partout ;}$$

d'après le cas limite de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il s'ensuit que l'on peut écrire

$$f(x) = \theta(x)\, g(x) \qquad \text{presque partout sur } g \neq 0$$

où θ est une fonction <u>scalaire</u>. Comme, d'après (4') et le Lemme 1, l'amplitude de

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \theta(x) \, \| g(x) \|^2$$

est presque partout constante, on peut écrire

$$\theta(x) = \alpha . \rho(x) \qquad \text{presque partout}$$

où α est une <u>constante</u> vérifiant $|\alpha| = 1$, et ρ une fonctions à valeurs dans R_+. On aura donc

$$(6) \qquad f = \alpha \,.\, \rho g \qquad \text{presque partout sur } g \neq 0 ,$$

et de même

$$(6') \qquad g = \beta . \rho_1 f \qquad \text{presque partout sur } f \neq 0 .$$

Il nous reste maintenant à examiner (4"'), c'est-à-dire le cas des fonctions à valeurs dans R_+. Nous supposerons d'abord $1 < p < +\infty$.

Soient donc f et g des fonctions appartenant aux espaces $\mathcal{L}^p_+$ et $\mathcal{L}^{p'}_+$, et telles que fg ne soit pas négligeable (sinon, (4"') exige que f et g le soient). Si l'on reprend l'ensemble <u>strictement</u> convexe K introduit dans la démonstration du Th.2, on voit que la condition $N_1(fg) = N_p(f) N_{p'}(g)$ exprime que le point

$$\left(\frac{\int f^p d\mu}{\int fg\, d\mu} , \frac{\int g^{p'} \, d\mu}{\int fg\, d\mu} \right) = (a,b)$$

de R^2 est sur la <u>frontière</u> de K. D'après la Prop.1, ceci exige qu'on ait presque partout

$$\frac{f^p}{fg} = a , \qquad \frac{g^{p'}}{fg} = b ;$$

il s'ensuit, d'une part que les ensembles $f \neq 0$ et $g \neq 0$ coïncident à un ensemble négligeable près ; d'autre part, que sur cet ensemble les fonctions f^p et $g^{p'}$ sont proportionnelles.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}^p_+$, la fonction

$$g = f^{\frac{p}{p'}}$$

est dans $\mathcal{L}^{p'}_+$, et on réalise ainsi effectivement le cas limite.

Examinons maintenant le cas où $p = 1$, et où l'on a $f \in \mathcal{L}^1_+$, $g \in \mathcal{L}^\infty_+$. Comme f est sommable, l'ensemble $f \neq 0$ est réunion dénombrable de compacts ; on a donc

$$fg \leqslant N_\infty(g).\, f \qquad \text{presque partout ;}$$

la condition

$$N_1(fg) = \int fg\, d\mu = N_1(f)\, N_\infty(g) = N_\infty(g) \int f\, d\mu$$

exige donc

$$fg = N_\infty(g)\, f \qquad \text{presque partout,}$$

c'est-à-dire

$$g(x) = N_\infty(g) \qquad \text{presque partout sur } f \neq 0,$$

et cette condition est elle-même suffisante.

Revenons maintenant au cas où f et g sont à valeurs dans F . Nous voyons que :

1) si $1 < p < +\infty$, il existe des constantes a,b non nulles telles que

$$(7) \qquad \frac{\|f\|^p}{a} = \frac{\|g\|^{p'}}{b} \;;$$

d'après (6) et (6'), ceci implique

$$\frac{\|f\|^p}{a} = \rho^p \frac{\|g\|^p}{a} = \frac{\|g\|^{p'}}{b}$$

et par suite, sur $g \neq 0$:

$$\rho = \rho_0 \|g\|^{\frac{p'}{p} - 1}$$

où ρ_0 est une constante ; on a donc

(8) $\qquad f = \alpha\rho g = \theta \,.\, \|g\|^{\frac{p}{p'}-1} \,.\, g$

presque partout sur $g \neq 0$, et en fait presque partout puisque $g = 0$ implique presque partout $g = 0$ d'après (7). On notera que (8) s'écrit aussi

$$\|f\|^{p-1} f = \gamma \,.\, \|g\|^{p'-1} . g$$

où γ est une constante.

2) si $p = 1$, on a d'une part

(9) $\qquad \|g(x)\| = N_{\infty}(g)$

presque partout sur $f \neq 0$, et d'autre part (6) et (6'), (6') et (9) impliquent

$$\rho_1 \|f\| = N_{\infty}(g)$$

et donc

$$\rho_1 = \frac{N_{\infty}(g)}{\|f\|} \quad ;$$

finalement, la condition cherchée s'écrit :

$$g = \gamma \,.\, \frac{f}{\|f\|}$$

presque partout sur $f \neq 0$.

On a donc en conclusion le résultat suivant (qui contient comme cas particulier le Lemme démontré plus haut) :

Théorème 3 - Soient F un espace de Hilbert, p,p' deux exposants conjugués, f et g deux fonctions vérifiant

$$f \in \mathcal{L}_F^p \quad , \quad g \in \mathcal{L}_F^{p'} \quad .$$

Pour qu'on ait

$$\left| \int \langle f, g \rangle \, d\mu \right| = N_p(f) \,.\, N_{p'}(g) \,,$$

il faut et il suffit si $p > 1$ que les fonctions

$$\|f\|^{p-1} . f \qquad \text{et} \qquad \|g\|^{p'-1} . g$$

soient presque partout proportionnelles. Si $p=1$, $p' = +\infty$, il faut et il suffit que f et g aient même amplitude et que $\|g\|$ soit constante, presque partout sur l'ensemble $f(x) \neq 0$.

Corollaire du Th.3 - Soit F un espace de Hilbert. Pour toute $f \in \mathcal{L}^p_F$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, la formule

$$\tilde{g} \longrightarrow \int \langle f, g \rangle \, d\mu \qquad (g \in \mathcal{L}^{p'}_F)$$

définit sur $L^{p'}_F$ une forme linéaire continue dont la norme est égale à $N_p(f)$.

5 - Le théorème de Thorin.

Théorème 4 (Thorin) - Soit f un polynome (non identiquement nul) par rapport à p variables complexes z_i $(1 \leq i \leq p)$; soit K un ensemble non vide borné contenu dans $(\mathbb{R}^*_+)^p$. Pour tout élément $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ de $(\mathbb{R}^*_+)^p$, soit $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ la borne supérieure de $|f(z_1, \ldots, z_p)|$ dans la partie de $\mathbb{C}^p$ définie par la condition $(|z_1|^{1/\alpha_1}, \ldots, |z_p|^{1/\alpha_p}) \in K$. La fonction $\log M(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ est convexe dans $(\mathbb{R}^*_+)^p$.

Nous commencerons par supposer que K est compact et contenu dans un cube fermé dont les projections ne contiennent pas l'origine. Alors l'image K' de K par l'application $(x_i) \rightarrow (\log x_i)$ est un ensemble compact dans $\mathbb{R}^p$. Si on pose $\varphi(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p) = |f(e^{\alpha_1 x_1 + iy_1}, \ldots, e^{\alpha_p x_p + iy_p})|$, $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ est la borne supérieure de φ lorsque (x_k) varie dans K' et chacun des y_k dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$; comme f n'est pas identiquement nul, φ prend des valeurs $\neq 0$ dans cet ensemble donc on a toujours $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) > 0$, et $\log M(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ est donc une fonction numérique finie dans $(\mathbb{R}^*_+)^p$ et même dans $\mathbb{R}^p$ étant donné l'hypothèse faite sur K. Nous devons montrer que quels que soient (β_k) et (λ_k) dans $\mathbb{R}^p$ la fonction $\log M(\beta_1 + \lambda_1 t, \ldots, \beta_p + \lambda_p t)$ de la variable réelle t est convexe dans $\mathbb{R}$; d'après un critère de convexité connu (Fonct.var.réelle, chap.I, § 2, prop.7), il suffit de prouver que, pour tout nombre réel μ, et tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, la borne supérieure de $\log M(\beta_1 + \lambda_1 t, \ldots, \beta_p + \lambda_p t) + \mu t$

dans $[a,b]$ est nécessairement atteinte en l'un au moins des points a,b il revient au même de montrer que la borne supérieure de $\psi(t) = M(\alpha_1+\lambda_1 t,\dots,\alpha_p+\lambda_p t)e^{\mu t}$ dans $[a,b]$ est nécessairement atteinte en a ou b . Cette borne supérieure est aussi celle de la fonction continue

$$\left| f(e^{(\beta_1+\lambda_1 t)x_1+iy_1},\dots,e^{(\beta_p+\lambda_p t)x_p+iy_p})\right| e^{\mu t}$$

lorsque (x_k) varie dans K', chacun des y_k dans $[-\pi,+\pi]$ et t dans $[a,b]$; elle est donc atteinte en un point au moins de cet ensemble compact, soit $(x_k)=(c_k)$, $(y_k)=(d_k)$ et $t=t_0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que t_0 soit distinct de a et de b , et que les valeurs de $\psi(a)$ et $\psi(b)$ soient strictement inférieures à $\psi(t_0)$. On peut évidemment supposer que $t_0=0$; alors la fonction

$$g(t) = f(e^{\beta_1 c_1+id_1+\lambda_1 c_1 t},\dots,e^{\beta_p c_p+id_p+\lambda_p c_p t})\, e^{\mu t}$$

de la variable <u>réelle</u> t , n'est pas constante, et $|g(t)|$ admet un maximum relatif au point 0 : autrement dit, pour t réel et assez petit en valeur absolue, on a $|g(t)| \leqslant |g(0)|$. Mais $g(t)$, qui est une somme d'exponentielles, est définie pour t <u>complexe</u>, et pour u et v réels, on a

$$g(u+iv) = f(e^{\beta_1 c_1+i(d_1+\lambda_1 c_1 v)+\lambda_1 c_1 u},\dots,e^{\beta_p c_p+i(d_p+\lambda_p c_p v)+\lambda_p c_p u})\, e^{\mu u+i\mu v}$$

donc, d'après la définition de t_0 , on a $|g(u+iv)| \leqslant |g(0)|$ pour u réel assez petit en valeur absolue, et v réel <u>quelconque</u> ; a fortiori, pour w complexe tel que $|w|$ soit assez petit, on a $|g(w)| \leqslant |g(0)|$. Or, comme g est développable en série de Taylor au voisinage de 0 , et n'est pas constante, on a

$$g(w) = g(0)+(\rho+\varepsilon(w))w^n$$

où n est un entier, ρ un nombre complexe $\neq 0$ et $\varepsilon(w)$ tend vers 0 avec w ; si alors w est pris assez petit pour que $|\varepsilon(w)| \leqslant \frac{1}{2}|\rho|$, et l'amplitude de w choisie de sorte que l'amplitude de ρw^n soit égale à celle de $g(0)$, on aura $|\varepsilon(w)| \geqslant |g(0)| + \frac{1}{2}|\rho w^n| > |g(0)|$, et on aboutit à une contradiction, ce qui démontre dans ce cas le théorème.

Si maintenant K est un ensemble borné quelconque contenu dans $(\mathbb{R}_+^*)^p$, pour tout nombre $r > 0$ désignons par K_r l'ensemble des points de K dont toutes les coordonnées sont $\geqslant r$; pour r assez petit, K_r n'est pas vide ; soit $M_r(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ la borne supérieure de $|f(z_1,\ldots,z_p)|$ pour $(|z_1|^{1/\alpha_1},\ldots,|z_p|^{1/\alpha_p}) \in K_r$; c'est aussi la borne supérieure de $|f(z_1,\ldots,z_p)|$ pour $(|z_1|^{1/\alpha_1},\ldots,|z_p|^{1/\alpha_p}) \in \overline{K}_r$ donc une fonction convexe dans $(\mathbb{R}_+^*)^p$. Or, comme K est la réunion des K_r , $M(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ est limite de $M_r(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ lorsque r tend vers 0 , pour tout $(\alpha_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ donné ; la fonction $\log M(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$, étant limite de fonctions convexes dans $(\mathbb{R}_+^*)^p$, est elle-même convexe dans cet ensemble.

COROLLAIRE.- <u>Lorsque</u> $(\alpha_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ <u>tend vers un point</u> (δ_k) <u>de</u> $(\mathbb{R}_+)^p$ (dont une au moins des coordonnées est nulle), $M(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ <u>tend vers une limite finie et</u> >0, <u>et la fonction</u> $\log M(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ <u>peut donc être prolongée par continuité en une fonction convexe dans tout</u> $(\mathbb{R}_+)^p$.

En effet, soit V un voisinage borné de (δ_k) dans $(\mathbb{R}_+)^p$; la fonction $f(v_1^{\alpha_1}e^{iy_1},\ldots,v_p^{\alpha_p}e^{iy_p})$ est bornée lorsque $(v_k) \in K$, $(\alpha_k) \in V$ et que chacun des y_k est dans $[-\pi, +\pi]$; la fonction convexe $\log M(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ est donc <u>majorée</u> dans V , et par suite (<u>Fonct. Var. réelle</u>, chap. I, § 2, prop.) admet une limite au point (δ_k), d'où la proposition.

6 - Les inégalités de M. Riesz.

Rappelons que, étant donnés un espace localement compact E, une intégrale μ sur E et un espace de Banach F, on a désigné par $\Phi_F(E,\mu) = \Phi_F$ l'ensemble des fonctions étagées définies sur E, à valeurs dans F, et qui sont définies par des parties mesurables de E. On a vu (§ 4, N° 5) que Φ_F est partout dense dans $\mathcal{L}_F^p$ si $1 \leq p < +\infty$; si $p = +\infty$, l'adhérence de Φ_F dans $\mathcal{L}_F^\infty$ est, comme on le voit immédiatement, l'ensemble des $f \in \mathcal{L}_F^\infty$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\|f\| \geq \varepsilon$ soit mesurable (et non pas seulement mesurable sur tout compact).

Toute fonction $f \in \Phi_F$ peut s'écrire

(1) $$f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \chi_{A_i}(x) \qquad (a_i \in F)$$

où les $A_i \subset E$ sont mesurables et deux à deux disjoints. On a alors

(2) $$\|f(x)\|^p = \sum_{1 \leq i \leq n} \|a_i\|^p \chi_{A_i}(x)$$

pour $1 \leq p < +\infty$, et par suite

(3) $$N_p(f) = \left[\sum_{1 \leq i \leq n} \|a_i\|^p \cdot \mu(A_i)\right]^{1/p} .$$

Lorsque $p = +\infty$ les formules ci-dessus ne sont plus valables. Mais on a la propriété suivante :

Proposition 5 - Pour toute fonction $f \in \Phi_F$, l'expression $N_p(f)$ est une fonction continue de p sur $[1, +\infty]$.

Pour $p < +\infty$, c'est évident d'après (3) ; il reste donc à prouver que

$$N_\infty(f) = \lim_{p \to +\infty} N_p(f) .$$

Or si l'on suppose dans ( ) qu'aucun des A_i n'est négligeable, on a

$$N_\infty(f) = \sup_{1 \leq i \leq n} \|a_i\| ;$$

si $\|a_K\| = N_\infty(f)$, on a alors

$$\mu(A_i)^{\frac{1}{p}} \|a_K\| \leq N_p(f) \leq \left[\sum \mu(A_i)\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|a_K\|$$

pour $p < +\infty$, ce qui implique la propriété annoncée.

Remarque - La Prop.5 est valable pour d'autres fonctions que celles de Φ_F (cf. Exerc.)

La Prop.5 étant démontrée, désignons par $\varphi(f_1,\ldots,f_n)$ une forme n-linéaire définie sur l'espace vectoriel Φ_F. Etant donné un point $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de R^n, tel que l'on ait

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ ,$$

on peut considérer $(\Phi_F)^n$ comme un sous-espace de

$$\mathcal{L}_F^{1/\alpha_1} \times \ldots \times \mathcal{L}_F^{1/\alpha_n}$$

(en convenant de prendre $1/_0 = +\infty$). Nous poserons

$$M_\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sup_{\substack{f_i \in \Phi_F \\ N_{1/\alpha_i}(f_i)\leqslant 1}} |\varphi(f_1,\ldots,f_n)| \ ;$$

$M_\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ a donc des valeurs dans $\overline{R}_+$, et c'est la norme de la forme φ quand on considère $(\Phi_F)^n$ comme sous-espace de $\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \mathcal{L}_F^{1/\alpha_i}$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 5 (M. Riesz) - L'ensemble A des points $(\alpha_i)\in R^n$ tels que $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et pour lesquels

$$M_\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) < +\infty$$

est convexe ; en outre, $\log M_\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ est convexe dans A.

Démonstration - Soient (β_i), (γ_i) deux points de A ; soit $(B_j)_{1\leqslant j\leqslant h}$ une suite finie quelconque d'ensembles mesurables, deux à deux disjoints et non négligeables ; choisissons dans F des points a_{jk} $(1\leqslant j\leqslant h \ , \ 1\leqslant k\leqslant n)$, vérifiant $\|a_{jk}\| = 1$, et posons, pour z_{jk} complexes quelconques :

$$f_k = \sum_{j=1}^{h} z_{jk}\, a_{jk}\, \chi_{B_j} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) \ .$$

On obtient ainsi l'élément $(f_1,\ldots,f_n)$ le plus général de $(\Phi_F)^n$.

On a alors, les B_j et a_{jk} étant fixés :

$$\varphi(f_1,\ldots,f_n) = g(z_{11},\ldots,z_{nn})$$

où g est un polynôme en les z_{jk}.

On a

$$N_{1/\alpha_K}(f_K) = \begin{cases} \left(\sum_j |z_{jk}|^{1/\alpha_K} \mu(B_j) \right)^{\alpha_K} & \text{si } \alpha_K > 0 \\ \sup_j |z_{jK}| & \text{si } \alpha_K = 0 ; \end{cases}$$

Si on désigne par K la partie bornée de $(R_+^*)^{nh}$ définie par les inégalités $\sum_j |x_{jK}| \mu(B_j) \leq 1$ $(1 \leq K \leq n)$, on voit que, si l'on note $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la borne supérieure de $|g(Z_{11}, \ldots, Z_{nn})|$ pour

$$\left(|z_{jK}|^{1/\alpha_K} \right) \in K \quad ,$$

les α_K étant supposés tous > 0, log $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est une fonction convexe dans $(R_+^*)^n$, et peut être prolongée par continuité dans $(R_+)^n$ (Coroll. du th.4). Nous allons voir que, pour tout $(\alpha_K) \in (R_+)^n$, $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est la borne supérieure de $|\varphi(f_1, \ldots, f_n)|$ lorsque les f_K varient en satisfaisant aux conditions $N_{1/\alpha_K}(f_K) = 1$.

Lorsque tous les α_K sont > 0, cela résulte de ce qui précède ; pour le démontrer aussi lorsque certains sont nuls, il suffit de prouver que la borne supérieure $N'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $|\varphi|$ dans les conditions précédentes est <u>continue</u> en tout point de $(R_+)^n$. Or, soit $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la partie de C^{nh} définie par les relations $N_{1/\alpha_K}(f_K) = 1$; c'est un ensemble compact, et il résulte de la continuité de $N_r(f)$ en fonction de r (même pour $r = +\infty$) que pour tout voisinage compact V de $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, il existe un voisinage W de (α_K) dans $(R_+)^n$ tel que la relation $(\lambda_K) \in W$ entraîne $H(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \subset V$; comme φ est uniformément continue dans V, il est clair que $N'(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est aussi voisin qu'on veut de $N'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dès que V est assez petit.

Ce point étant démontré, on a évidemment $N(\beta_1, \ldots, \beta_n) \leq M(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ et $N(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \leq M(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ par définition de M et de N ; on en déduit que pour

$$\alpha_K = \lambda \beta_K + (1-\lambda)\gamma_K \qquad (0 \leq \lambda \leq 1) \quad \text{on a}$$

$$N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq M(\beta_1, \ldots, \beta_n)^{\lambda} \cdot M(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^{1-\lambda}$$

Mais comme le second membre de cette inégalité est indépendant de l'élément $(f_1,\dots,f_n)$ considéré, et comme celui-ci est, ainsi qu'on l'a dit, l'élément le plus général de $(\Phi_F)^n$, on voit qu'on a aussi

$$M(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \leq M(\beta_1,\dots,\beta_n)^{\lambda} \,.\, M(\gamma_1,\dots,\gamma_n)^{1-\lambda} ,$$

ce qui démontre le théorème.

Pour tout $(\alpha_K) \in A$, la forme multilinéaire φ peut donc être prolongée par continuité au produit des adhérences de Φ_F dans les $\mathcal{L}_F^{1/\alpha_K}$ - adhérences qui, on l'a vu, ne sont autres que les $\mathcal{L}_F^{1/\alpha_K}$ lorsque $\alpha_K > 0$.

<u>Exemple</u>. Posons $\varphi(f_1,f_2) = \int f_1 . f_2 \, d\mu$ pour des fonctions f_1, f_2 de Φ_C, et soit A l'ensemble des couples (α,β) tels que φ soit continue en tant de forme linéaire sur le sous-espace $(\Phi_C)^2$ de $\mathcal{L}_C^{1/\alpha} \times \mathcal{L}_C^{1/\beta}$. Comme on a trivialement

$$|\varphi(f_1,f_2)| \leqslant \begin{cases} N_1(f_1)\, N_\infty(f_2) \\ N_\infty(f_1)\, N_1(f_2) , \end{cases}$$

on voit que A contient les points $(0,1)$ et $(1,0)$; étant convexe, il contient les (α,β) tels que $\alpha + \beta = 1$; de plus, on a $M(1,0) = M(0,1) = 1$, et par suite $M(\alpha,\beta) \leqslant 1$ pour ces (α,β) ; on a donc

$$\left| \int f_1 f_2 \, d\mu \right| \leqslant N_{1/\alpha}(f_1)\, N_{1/\beta}(f_2)$$

pour $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha+\beta = 1$, ce qui n'est autre que l'<u>inégalité de Hölder</u>.

7 - Démonstration de quelques inégalités.

Proposition 6 - Soient x et y deux nombres complexes, r et s deux nombres réels tels que $r \geqslant 1$, $s \geqslant r'$. On a

$$\left(|x+y|^r + |x-y|^r \right)^{1/r} \leqslant 2^{1/s'} \left(|x|^s + |y|^s \right)^{1/s} .$$

Posons, pour $(x,y) \in C^2$,

$$N_p(x,y) = \left(|x|^p + |y|^p \right)^{1/p} ;$$

muni de cette norme, C^2 est isomorphe à l'espace L_C^p correspondant à une intégrale formée de deux masses $+1$, et tout revient à prouver que, pour cette intégrale, l'application $(x,y) \longrightarrow (x+y,\ x-y)$ de L_C^s dans L_C^r est continue (ce qui est trivial) et de norme $\leqslant 2^{1/s'}$.

Or, posons

$$M(s,r') = \sup_{\substack{N_s(x,y) \leqslant 1 \\ N_{r'}(z,t) \leqslant 1}} \left| (x+y)z + (x-y)t \right| ;$$

la norme de l'application ci-dessus est précisément égale à $M(s,r')$ d'après le cas limite de l'inégalité de Hölder.

Mais l'expression

$$\varphi(x,y\,;\,z,t) = (x+y)z + (x-y)t$$

étant une forme bilinéaire sur $L_C^s \times L_C^{r'}$, $\log M(s,r')$ est, d'après le th. de Riesz, une fonction convexe du point $(1/s,\ 1/r') \in R^2$.

Comme $r' \leqslant s$, l'équation

$$\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{r'} \right) = \frac{1}{r'} \left(\frac{r'}{s}, 1 \right) + \frac{1}{r}(0,0)$$

prouve donc

$$M(s,r') \leqslant M\left(\frac{s}{r'}, 1\right)^{\frac{1}{r'}} M(\infty, \infty)^{\frac{1}{r}} .$$

De même, l'équation

$$\left(\frac{r'}{s}, 1 \right) = \left(1 - \frac{r'}{s} \right)(0,1) + \frac{r'}{s}(1,1)$$

prouve que

$$M\left(\frac{s}{r}, 1\right) \leqslant M(\infty, 1)^{1-\frac{r}{s'}} M(1,1)^{\frac{r'}{s}} .$$

Comme on a

$$M(\infty,1) = M(\infty,\infty) = 2, \qquad M(1,1) = 1,$$

on trouve immédiatement la relation cherchée.

<u>Proposition</u> 6 bis - <u>Soient</u> x <u>et</u> y <u>deux points d'un espace de Hilbert</u> F, r <u>et</u> s <u>deux nombres réels tels que</u> $r \geqslant 2$, $r \geqslant s \geqslant r'$. <u>On a</u>

$$(\|x+y\|^r + \|x-y\|^r)^{1/r} \leqslant 2^{1/s'}(\|x\|^s + \|y\|^s)^{1/s}.$$

Posons $\|x\| = a$, $\|y\| = b$; la Prop.6 bis sera une conséquence de la Prop.6 si l'on démontre que

$$\|x+y\|^r + \|x-y\|^r \leqslant |a+b|^r + |a-b|^r.$$

Or, on a

$$\|x+y\|^r + \|x-y\|^r = (a^2+2\mathcal{R}\langle a,b\rangle + b^2)^{r/2} + (a^2-2\mathcal{R}\langle a,b\rangle + b^2)^{r/2};$$

posant $\mathcal{R}\langle a,b\rangle = ab\cos\theta$, tout revient à démontrer l'inégalité

$$(a^2+2ab\cos\theta + b^2)^{r/2} + (a^2-2ab\cos\theta+b^2)^{r/2} \leqslant |a+b|^r + |a-b|^r;$$

en supposant par exemple, $0 < a \leqslant b$, et en divisant tout par b^r, on est ainsi conduit à prouver qu'on a

$$\varphi(\theta) = (1+2u\cos\theta+u^2)^{r/2} + (1-2u\cos\theta+u^2)^{r/2} \leqslant (1+u)^r + (1-u)^r = \varphi(0)$$

dès que $0 \leqslant u \leqslant 1$, $r \geqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Or on a

$$\varphi'(\theta) = r\,u\sin\theta\left[(1-2u\cos\theta+u^2)^{\frac{r}{2}-1} - (1+2u\cos\theta+u^2)^{\frac{r}{2}-1}\right];$$

le crochet ne s'annule que pour $\cos\theta = 0$; comme il est < 0 pour $\theta = 0$ en vertu de $\frac{r}{2}-1 \geqslant 0$, on a donc $\varphi'(\theta) \leqslant 0$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $\varphi'(\theta) \geqslant 0$ dans $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Il s'ensuit que le <u>maximum</u> de $\varphi(\theta)$ est $\varphi(0)$, ce qui donne l'inégalité cherchée.

8 - <u>Convexité uniforme des</u> L^p_F.

<u>Proposition</u> 7 - <u>Soient</u> F <u>un espace de Hilbert</u>, p, r, s <u>des nombres réels vérifiant</u> $r \geqslant s \geqslant r'$, $r \geqslant p \geqslant s > 1$. <u>Si</u> f,g <u>sont deux fonctions appartenant à</u> $\mathcal{L}^p_F$, <u>on a</u>

$$\left(\|f+g\|_p^r + \|f-g\|_p^r\right)^{1/r} \leq 2^{1/s'}\left(\|f\|_p^s + \|g\|_p^s\right)^{1/s} .$$

En effet, le premier membre vaut

$$\left[\left(\int \|f+g\|^p \, d\mu\right)^{\frac{r}{p}} + \left(\int \|f-g\|^p \, d\mu\right)^{\frac{r}{p}}\right]^{1/r} .$$

$$= \left[\left(\int \|f+g\|^{r.\frac{p}{r}} \, d\mu\right)^{\frac{r}{p}} + \left(\int \|f-g\|^{r.\frac{p}{r}} \, d\mu\right)^{\frac{r}{p}}\right]^{1/r}$$

$$= \left[N_{\frac{p}{r}}\left(\|f+g\|^r\right) + N_{\frac{p}{r}}\left(\|f-g\|^r\right)\right]^{1/r} .$$

Comme on a $\frac{p}{r} \leq 1$, l'inégalité de Minkowski.

$$N_\alpha(f) + N_\alpha(g) \leq N_\alpha(f+g) \qquad \text{pour} \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

prouve que ce premier membre est majoré par

$$\left[N_{\frac{p}{r}}\left(\|f+g\|^r + \|f-g\|^r\right)\right]^{1/r} = \left[\int \left(\|f+g\|^r + \|f-g\|^r\right)^{\frac{p}{r}}\right]^{1/r} ;$$

mais les hypothèses faites sur p, r, s impliquent $r \geq 2$; on peut donc appliquer la Prop.6 bis, en sorte que l'expression ci-dessus est majorée par

$$\left[\int 2^{p/s'}\left(\|f\|^s + \|g\|^s\right)^{p/s}\right]^{1/r} = 2^{p/rs'}\left[\int \left(\|f\|^s + \|g\|^s\right)^{p/s}\right]^{1/p \cdot \frac{p}{rs}}$$

et, d'après Minkowski appliqué pour $\frac{p}{s} \geq 1$; par $\frac{p}{rs}$

$$2^{p/rs'}\left[\left(\int \|f\|^{s.\frac{p}{s}}\right)^{\frac{s}{p}} + \left(\int \|g\|^{s.\frac{p}{s}}\right)^{\frac{s}{p}}\right]^{\frac{p}{rs}}$$

$$= 2^{\frac{p}{rs'}}\left[\left(\int \|f\|^p\right)^{\frac{s}{p}} + \left(\int \|g\|^p\right)^{\frac{s}{p}}\right]^{\frac{p}{rs}}$$

$$= 2^{\frac{p}{rs'}}\left[\|f\|_p^s + \|g\|_p^s\right]^{\frac{p}{r.s}}$$

Comme on a $p/r \leq 1$, l'inégalité à démontrer en résulte aussitôt.

<u>Théorème</u> 6 - <u>Soient</u> E <u>un espace localement compact</u>, μ <u>une intégrale de Radon positive sur</u> E , F <u>un espace de Hilbert</u>. <u>Pour tout nombre</u> p <u>tel que</u> $1 < p < +\infty$, <u>l'espace vectoriel normé complet</u> $L_F^p(E, \mu)$ <u>est uniformément convexe</u>.

En effet, si $1 < p < +\infty$, on peut trouver des nombres r et s vérifiant $r \geq s \geq r'$, $r \geq p \geq s > 1$, et donc appliquer la Prop.7 . Si deux éléments $f, g \in L_F^p$ vérifient

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1 \quad , \qquad \|f-g\|_p \geq \varepsilon \quad ,$$

on aura donc

$$\| f+g \|_p^r \leq 2^{\frac{r}{s'}+\frac{r}{s}} - \varepsilon^r = 2^r - \varepsilon^r$$

d'où

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p \leq \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^r \right]^{1/r} ,$$

ce qui prouve le Th. 6.

<u>Remarque</u> - La Prop.7 exprimant que la norme de L^p_F vérifie la Prop.6 , on voit que le Th.6 est encore exact si F est, non un espace de Hilbert, mais un espace L^p_F sur un espace de Hilbert F. Il s'ensuit que, par exemple, l'espace

$$L^p_{L^p_{L^p_{L^p_{\mathbb{C}}}}}$$

est uniformément convexe pour $1 < p < +\infty$.

9 - <u>Dualité des espaces</u> L^p_F .

<u>Théorème</u> 7 - <u>Soit F un espace de Hilbert</u>. <u>Pour</u> $1 < p < +\infty$, <u>le dual fort de</u> L^p_F <u>est isomorphe à</u> $L^{p'}_F$.

Posons en effet $\langle \tilde{f} , \tilde{g} \rangle = \int \langle f, g \rangle \, d\mu$

pour $\tilde{f} \in L^p_F$, $\tilde{g} \in L^{p'}_F$. D'après Hölder, on obtient ainsi une forme bilinéaire continue sur $L^p_F \times L^{p'}_{F'}$ et le cas limite (Coroll. du Th.3) montre que

$$\| \tilde{g} \|_{p'} = \sup_{\tilde{f} \in L^p_F} \frac{| \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle |}{\| \tilde{f} \|_p}$$

On peut par suite identifier $L^{p'}_F$ à un sous-espace vectoriel <u>fortement</u> fermé V du dual fort de L^p_F . Ce sous-espace est du reste <u>faiblement dense</u> dans $(L^p_F)'$, car aucun élément non nul de L^p_F n'est orthogonal à V , puisque l'on peut de même identifier L^p_F à un sous-espace de $(L^{p'}_F)'$

Or pour $1 < p < +\infty$, L^p_F est uniformément convexe, donc <u>réflexif</u> ; V étant fortement fermé est donc aussi <u>faiblement</u> fermé ; étant faiblement dense, il est identique à $(L^p_F)'$, ce qui prouve le Th. 7 .

§ 7 - Théorème de Lebesgue-Fubini

1 - Enoncé du théorème.

Soient E_1, E_2 deux espaces localement compact, μ_1, μ_2 deux intégrales de Radon positives définies sur E_1, E_2 respectivement. On a défini (chap.II, § 3, Déf. 1) l'intégrale produit $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ sur l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ en posant, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_C(E)$

$$\iint f(x_1,x_2)\, d\mu(x_1,x_2) = \int d\mu_1(x_1) \int f(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)$$
$$= \int d\mu_2(x_2) \int f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1),$$

la possibilité d'intervertir les signes $\int$ résultant du Théorème de Lebesgue-Fubini « élémentaire » (chap.II, § 3, Th.2). Nous allons dans ce § étendre ce résultat aux fonctions sommables pour μ, à valeurs dans un espace de Banach F quelconque, et démontrer le résultat suivant:

<u>Théorème</u> 1 (Lebesgue-Fubini) - <u>Soit</u> $f(x_1,x_2)$ <u>une fonction définie sur</u> $E = E_1 \times E_2$ <u>à valeurs dans F, et sommable pour l'intégrale produit</u> $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. <u>Alors, pour presque tout</u> $x_1 \in E_1$ (<u>resp.</u> $x_2 \in E_2$) <u>la fonction</u> $f(x_1,x_2)$ <u>est sommable pour</u> μ_2 (<u>resp.</u> μ_1). <u>En outre, les fonctions</u> $f_1(x_1)$ <u>et</u> $f_2(x_2)$, <u>définies presque partout par</u>

$$f_1(x_1) = \int f(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2), \quad f_2(x_2) = \int f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

<u>sont sommables pour</u> μ_1 <u>et</u> μ_2, <u>et on a</u>

$$(1) \quad \iint f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(x_2) = \int f_1(x_1)\, d\mu_1(x_1) = \int f_2(x_2)\, d\mu_2(x_2).$$

Notons d'abord que le Th.1 est élémentaire si f est continue et à support compact ; en effet, la démonstration donnée au Chap.II, § 3, Prop.1 dans le cas des fonctions numériques s'étend sans aucune modification au cas où f est à valeurs dans F, et montre que f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{L}_F(E_1)$ et $\mathcal{L}_F(E_2)$ respectivement - donc sont sommables. Quant à l'équation (1), on la déduit de l'équation correspondante pour les fonctions numériques en remplaçant f par $\langle f, a' \rangle$ où a' est dans le dual fort de F ; on a en effet alors

$$\iint \langle f, a' \rangle \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \int d\mu_1 \int \langle f, a' \rangle \, d\mu_2 = \int d\mu_2 \int \langle f, a' \rangle \, d\mu_1$$

d'où (1) résulte immédiatement d'après la Prop.9 du § 3 .

2 - Cas des fonctions positives et semi-continues inférieurement.

Nous allons examiner tout d'abord le cas où $f \in \mathcal{I}_+ (E_1 \times E_2)$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{L}_+(E_1 \times E_2)$ telles que $\varphi \leqslant f$. $\mathcal{F}$ est un ordonné filtrant croissant, et on a

$$\mu^*(f) = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \mu(\varphi) .$$

Pour tout $x_1 \in E_1$ posons d'une manière générale

$$f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) \ ;$$

il est clair que $f \in \mathcal{I}_+ (E_1 \times E_2)$ implique $f_{x_1} \in \mathcal{I}_+ (E_2)$, et comme les φ_{x_1} $(\varphi \in \mathcal{F})$ forment dans $\mathcal{L}_+(E_2)$ un filtrant croissant dont l'enveloppe supérieure est f_{x_1} , on a $\mu_2^*(f_{x_1}) = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \mu_2(\varphi_{x_1})$. Cette équation montre que $\mu^*(f_{x_1})$ est dans $\mathcal{I}_+ (E_1)$ et que l'on a

$$\int^* \mu_2^*(f_{x_1}) \, d\mu_1(x_1) = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \int d\mu_1 \int \varphi \, d\mu_2$$
$$= \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \iint \varphi \, d\mu_1 \, d\mu_2 \ ;$$

par suite, on a

(2) $$\iint^* f \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \int^* d\mu_1 \int^* f \, d\mu_2$$

et de même

(2') $$\iint^* f \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \int^* d\mu_2 \int^* f \, d\mu_1 .$$

Une première conséquence de ce résultat est donc :

<u>Proposition</u> 1 - <u>Pour qu'une fonction</u> $f \in \mathcal{I}_+ (E_1 \times E_2)$ <u>soit sommable pour</u> $\mu_1 \otimes \mu_2$, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u>

(3) $$\int^* d\mu_1 \int^* f \, d\mu_2 < +\infty .$$

D'autre part, si cette condition est réalisée, on aura d'après (2)

(4) $$\int^* f(x_1, x_2) \, d\mu_2(x_2) < +\infty$$

presque partout sur E_1 ; donc $f(x_1, x_2)$ est μ_2-sommable pour presque tout $x_1 \in E_1$. Mais la fonction (4) étant, comme on l'a vu, dans $\mathcal{I}_+(E_1)$, (3) implique que cette fonction coïncide presque partout avec une fonction sommable, et (2) et (2') achèvent alors la démonstration du Th. 1 dans le cas considéré.

On va déduire de là un résultat important :

<u>Proposition</u> 2 - <u>Soit</u> $N \subset E_1 \times E_2$ <u>un ensemble</u> μ -<u>négligeable</u>. <u>Pour presque tout</u> $x_1 \in E_1$ (<u>resp</u>. $x_2 \in E_2$), <u>la coupe</u> N_{x_1} (<u>resp</u>. N_{x_2}) <u>de</u> N <u>par</u> x_1 (resp. x_2) <u>est</u> μ_2-<u>négligeable</u> (resp. μ_1-<u>négligeable</u>).

En effet, la fonction χ_N étant négligeable, il existe une suite décroissante de fonctions $f_n \in \mathcal{I}_+ (E_1 \times E_2)$ telles que l'on ait

$$f_n \geqslant \chi_N \quad , \qquad \inf \iint f_n \, d\mu_1 \, d\mu_2 = 0 .$$

Les f_n étant en infinité dénombrable, il existe un ensemble μ_1-négligeable $N_1 \subset E_1$ tel que, pour tout $x_1 \notin N_1$, les fonctions $f_n(x_1, x_2)$ de $\mathcal{I}_+(E_2)$ soient toutes μ_2-sommables ; si l'on pose

$$f(x_1,x_2) = \inf f_n(x_1,x_2) \geqslant \chi_N (x_1,x_2) ,$$

il en sera donc de même de $f(x_1,x_2)$ pour $x_1 \notin N_1$, et on aura

$$\int f(x_1,x_2) d\mu_2 (x_2) = \inf \int f_n(x_1,x_2) \, d\mu_2 (x_2) ,$$

pour $x_1 \notin N_1$. Mais les fonctions $\int f_n \, d\mu_2$ étant μ_1-sommables, il en est de même de $\int f \, d\mu_2$, et on a

$$\int d\mu_1 \int f \, d\mu_2 = \inf \int d\mu_1 \int f_n \, d\mu_2 = \inf \iint f_n \, d\mu_1 \, d\mu_2 = 0 .$$

Comme $\chi_N \leqslant f$, il vient donc à fortiori

$$\int^* d\mu_1 \int^* \chi_N \, d\mu_2 = 0 ,$$

ce qui prouve que

$$\mu_2^*(N_{x_1}) = \int^* \chi_N (x_1,x_2) \, d\mu_2 (x_2) = 0 \quad \text{presque partout :}$$

d'où la Prop. 2 .

3 - <u>Cas général</u>

Soit $f \in \mathcal{L}^1_F (E_1 \times E_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{L}_F (E_1 \times E_2)$ et un ensemble μ-négligeable $N \subset E_1 \times E_2$ tels que l'on ait

116

a) $\sum\limits_n \|f_n\|_1 < +\infty$;

b) $f(x_1,x_2) = \sum\limits_n f_n(x_1\,x_2)$ sauf sur N ;

c) $\iint f\,d\mu_1\,d\mu_2 = \sum\limits_n \iint f_n\,d\mu_1\,d\mu_2$.

Mais l'inégalité

$$\int d\mu_1 \left\| \int f_n\,d\mu_2 \right\| \leqslant \int d\mu_1 \int \|f_n\|\,d\mu_2 = N_1(f_n)$$

prouve qu'il existe un ensemble $N_1 \subset E_1$, μ_1-négligeable, et une fonction $g(x_1)$, μ_1-sommable, tels que l'on ait

a') $\sum \int \|f_n\|\,d\mu_2 < +\infty$ sur $\complement N_1$;

b') $g(x_1) = \sum \int f_n(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$ sur $\complement N_1$;

c') $\int g\,d\mu_1 = \sum \int d\mu_1 \int f_n(x_1,x_2)\,d\mu_2 = \iint f\,d\mu_1\,d\mu_2$.

D'après la Prop.2, on peut de plus supposer que, pour tout $x_1 \notin N_1$, l'ensemble N_{x_1} soit μ_2-négligeable. Soit alors un $x_1 \notin N_1$; d'après a'), il existe une fonction μ_2-sommable qui coïncide presque partout avec $\sum f_n(x_1,x_2)$, donc, d'après ce qu'on vient de dire et la relation b), avec $f(x_1, x_2)$; il s'ensuit que $f(x_1,x_2)$ est μ_2-sommable pour $x_1 \notin N_1$, et que

$$\int f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2) = \sum_n \int f_n(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2) = g(x_1) ,$$

pour $x_1 \notin N_1$. La relation c'), et le fait que $g(x_1)$ soit μ_1-sommable, démontrent alors le théorème de Lebesgue-Fubini.

4 - <u>Conséquences du théorème de Lebesgue-Fubini</u>.

<u>Proposition</u> 3 - <u>Si deux ensembles</u> $A_1 \subset E_1$, $A_2 \subset E_2$ <u>sont mesurables pour</u> μ_1, μ_2 , <u>l'ensemble produit</u> $A_1 \times A_2$ <u>est mesurable pour</u> $\mu_1 \otimes \mu_2$ <u>et on a</u>

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\;\mu_2(A_2) .$$

Tout d'abord, la Prop.3 est évidente si A_1, A_2 sont <u>ouverts</u>, comme on le voit en appliquant la Prop.1 et le théorème de Lebesgue-Fubini à $\chi_{A_1 \times A_2}$. Il en est de même si A_1, A_2 sont <u>compacts</u> ,

117

la mesurabilité de $A_1 \times A_2$ résultant alors du fait que $A_1 \times A_2$ est compact.

Dans le cas général, la Prop.3 résulte de ce qui précède et du critère de mesurabilité démontré au §4, Th.1 .

S <u>Remarque</u> - Si $A_1 \times A_2$ est mesurable, <u>et si ni</u> A_1, <u>ni</u> A_2 <u>ne sont négligeables</u>, alors A_1 et A_2 sont mesurables. En effet, d'après le Th.1, la fonction $\chi_{A_1}(x_1)\chi_{A_2}(x_2)$ est μ_2-sommable pour les x_1 n'appartenant pas à un ensemble négligeable ; si A_1 n'est pas négligeable, ce sera donc le cas pour un $x_1 \in A_1$: mais alors la fonction se réduit à $\chi_{A_2}(x_2)$, qui est donc sommable . De même, χ_{A_1} est sommable si A_2 n'est pas négligeable.

La Prop. 3 est un cas particulier de la suivante :

<u>Proposition 4</u> - <u>Soient</u> F_1, F_2, F <u>trois espaces de Banach, et</u> $(a,b) \longrightarrow \langle a,b \rangle$ <u>une application linéaire continue de</u> F_1 F_2 <u>dans</u> F . <u>Si</u> $f_1(x_1)$ <u>et</u> $f_2(x_2)$ <u>sont des fonctions</u> μ_1-<u>sommable et</u> μ_2-<u>sommable à valeurs dans</u> F_1 <u>et</u> F_2 <u>respectivement, la fonction</u> $\langle f_1(x_1), f_2(x_2) \rangle$ <u>est sommable pour</u> $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, <u>et on a</u>

$$(4) \quad \iint \langle f_1, f_2 \rangle \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \left\langle \int f_1 d\mu_1 \, , \int f_2 \, d\mu_2 \right\rangle .$$

Si $f_1 \in \mathcal{L}_{F_1}(E_1)$ et si $f_2 \in \mathcal{L}_{F_2}(E_2)$, on a $\langle f_1, f_2 \rangle \in \mathcal{L}_F(E_1 \times E_2)$, en sorte que $\langle f_1, f_2 \rangle$ est μ-sommable, et que

$$\iint \langle f_1, f_2 \rangle \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \int d\mu_1(x_1) \int \langle f_1, f_2 \rangle \, d\mu_2$$
$$= \int \left\langle f_1, \int f_2 \, d\mu_2 \right\rangle d\mu_1 = \left\langle \int f_1 d\mu_1 \, , \int f_2 \, d\mu_2 \right\rangle .$$

Considérons maintenant le cas général. Si f_1 et f_2 sont sommables, on peut trouver des suites de fonctions $f_n^1 \in \mathcal{L}_{F_1}(E_1)$ et $f_n^2 \in \mathcal{L}_{F_2}(E_2)$ et des ensembles négligeables $N_1 \subset E_1$ et $N_2 \subset E_2$, tels que l'on ait

$$\sum N_1(f_n^1) < +\infty \; , \qquad f_1(x_1) = \sum f_n^1(x_1) \quad \text{sur} \quad \complement N_1 \; ;$$
$$\sum N_1(f_n^2) < +\infty \; , \qquad f_2(x_2) = \sum f_n^2(x_2) \quad \text{sur} \quad \complement N_2 \; .$$

L'application $\langle f, g \rangle$ de $F_1 \times F_2$ dans F étant continue, on aura

(5) $$\langle f_1(x_1), f_2(x_2) \rangle = \sum_{p,q} \langle f_p^1(x_1), f_q^2(x_2) \rangle$$

sur $\complement N_1 \times \complement N_2 = \complement N$; de plus, comme il existe une constante M ($0 \leqslant M < +\infty$) telle que

$$\| \langle f, g \rangle \| \leqslant M \| f \| \cdot \| g \| ,$$

on aura

$$\sum \iint \| \langle f_p^1, f_q^2 \rangle \| \, d\mu_1 \, d\mu_2 \leqslant M \sum N_1(f_p^1) \, N_1(f_q^2) < +\infty \quad ;$$

donc il existe un ensemble $N' \subset E_1 \times E_2$, μ-négligeable, et une fonction $f \in \mathcal{L}^1_F(E_1 \times E_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ tels que l'on ait

(6) $$f(x_1, x_2) = \sum_{p,q} \langle f_p^1(x_1), f_q^2(x_2) \rangle \quad \text{sur } \complement N'$$

$$\iint f \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \sum_{p,q} \iint \langle f_p^1, f_q^2 \rangle \, d\mu_1 \, d\mu_2$$
$$= \sum_{p,q} \left\langle \int f_p^1 \, d\mu_1 , \int f_q^2 \, d\mu_2 \right\rangle = \left\langle \int f_1 d\mu_1 , \int f_2 d\mu_2 \right\rangle$$

Il reste à montrer que les fonctions $f(x_1, x_2)$ et $\langle f_1(x_1), f_2(x_2) \rangle$ coïncident presque partout sur $E_1 \times E_2$.

Or on peut supposer que f_1 et les f_n^1 sont nulles en dehors d'un ensemble $A_1 \subset E_1$, réunion <u>dénombrable</u> d'ensembles mesurables $A_n^1 \subset E_1$; de même, que f_2 et les f_n^2 sont nulles en dehors d'un ensemble $A_2 \subset E_2$, réunion dénombrable d'ensembles mesurables $A_n^2 \subset E_2$. D'après (5) et (6), $\langle f_1, f_2 \rangle$ et f coïncident en dehors de l'ensemble $A_1 \times A_2$, puisqu'elles sont alors nulles.

Par ailleurs, sur $A_1 \times A_2$, les points où $\langle f_1, f_2 \rangle$ et f ne coïncident pas sont contenus dans l'ensemble

$$(N_1 \times A_2) \cup (N_2 \cup A_1) \cup (N_1 \times N_2) \cup N' .$$

N' est négligeable comme on l'a vu ; il en est de même de $N_1 \times N_2$ (Prop. 3) ; enfin, on a

$$N_1 \times A_2 = \bigcup N_1 \times A_n^2 ,$$

et les $N_1 \times A_n^2$ étant négligeables (Prop.3) il en est de même de $N_1 \times A_2$, ainsi bien entendu que de $N_2 \times A_1$; en définitive, f et $\langle f_1, f_2 \rangle$ coïncident presque partout sur $E_1 \times E_2$, ce qui achève la démonstration.

5 - Extension à un produit fini quelconque d'intégrales.

Il est clair que le théorème de Lebesgue-Fubini étant démontré pour le produit de deux intégrales, on pourra l'étendre au produit d'un nombre fini quelconque d'intégrales.

Par exemples, soient F_1, F_2, F_3 trois espaces localement compacts, G leur produit direct, λ_1, λ_2, λ_3 trois intégrales de Radon positives sur F_1, F_2, F_3, et μ l'intégrale produit. Soit $g(x_1, x_2, x_3)$ une fonction μ-sommable ; puisque (Chap.II, § 3, Prop.) l'on a

$$\mu = (\lambda_1 \otimes \lambda_2) \otimes \lambda_3$$

une première application du théorème de Lebesgue-Fubini montre que, pour presque tout point $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, la fonction $g(x_1, x_2, x_3)$ est λ_3-sommable ; en outre, la fonction

$$(1) \qquad \int g(x_1, x_2, x_3)\, d\lambda_3(x_3)$$

est sommable pour $\lambda_1 \otimes \lambda_2$, et on a

$$(2) \qquad \int g\, d\mu = \iint d\lambda_1(x_1)\, d\lambda_2(x_2) \int g(x_1, x_2, x_3)\, d\lambda_3(x_3).$$

En écrivant

$$\mu = \lambda_1 \otimes (\lambda_2 \otimes \lambda_3)$$

on trouverait de même

$$\int g\, d\mu = \int d\lambda_1(x_1) \iint g(x_1, x_2, x_3)\, d\lambda_2(x_2)\, d\lambda_3(x_3).$$

Maintenant, soit N_1 l'ensemble (λ_1-négligeable) des $x_1 \in F_1$ où $g(x_1, x_2, x_3)$ n'est pas $\lambda_2 \otimes \lambda_3$ - sommable ; si $x_1 \notin N_1$, une nouvelle application de Lebesgue-Fubini montre que

$$\iint g(x_1,\ x_2,\ x_3)\ d\lambda_2\ (x_2)\ d\ \lambda_3\ (x_3)$$
$$= \int d\ \lambda_2\ (x_2) \int g\ (x_1,\ x_2,\ x_3)\ d\lambda_3\ (x_3)\ ,$$

en sorte qu'il vient

$$(3) \qquad \int g\ d\mu = \int d\ \lambda_1\ (x_1) \int d\ \lambda_2 (x_2) \int g(x_1,x_2,x_3)\ d\ \lambda_3\ (x_3)$$

avec en outre les propriétés plus précises que voici : $g(x_1,\ x_2,\ x_3)$ est λ_3-sommable pour presque tout $(x_1,x_2) \in F_1 \times F_2$; la fonction

$$\int g(x_1,x_2,\ x_3)\ \ d\ \lambda_3\ \ (x_3)$$

est λ_2-sommable pour presque tout x_1 ; enfin, la fonction

$$\int d\ \lambda_2\ (x_2) \int g(x_1,x_2,x_3)\ d\ \lambda_3\ (x_3)$$

est λ_1-sommable, et l'on a (3) .
