

# RÉDACTION N° 102

**COTE : NBR 013**

**TITRE : OBSERVATIONS SUR LE CHAPITRE II D'ALGÈBRE**

LA TOPOLOGIE PRÉFONTOLOGIQUE

**ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI**

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

**NOMBRE DE PAGES : 8**

NOMBRE DE PAGES : 82

**NOMBRE DE FEUILLES : 8**

NOMBRE DE FEUILLES : 82

**COMMUNICABLE ULTÉRIEUREMENT**

OBSERVATIONS SUR LE CHAPITRE II D'ALGÈBRE  
-----

Remarques générales sur les § 1 et 2.

Je continue à objecter à l'importance exagérée donnée aux modules sur un anneau. La plupart des questions qui sont traitées devraient l'être pour des groupes abéliens à opérateurs quelconques (combinaisons linéaires, sommes infinies d'éléments presque tous nuls, sommes et sommes directes de sous-groupes, toute la théorie des applications linéaires). Ce n'est pas l'artifice saugrenu des pp. 116-117 qui me fera changer d'avis sur ce point.

Je demande donc avec insistance que les deux premiers paragraphes soient remaniés dans l'esprit suivant : faire pour les groupes abéliens à opérateurs quelconques ce qui peut être fait pour eux, puis, si on veut, faire les quelques remarques qui se rapportent aux modules. Pour cette raison, je ne communique pas d'observations détaillées sur les deux premiers paragraphes. Je noterai seulement que j'aimerais à voir réintroduite la notion de relation linéaire entre éléments d'une famille dans un vectoriel, que j'avais définie dans ma contre rédaction. Par ailleurs, quand on définit la notion de base, il y aurait lieu de dire qu'on appelle aussi base toute famille libre dont l'ensemble d'éléments est une base.

En ce qui concerne les exercices :

p. 19 Ex.1, ligne 1. supprimer "n'ayant pas d'élément unité" .

p. 20 Ex.8 a-t-on dit explicitement où que ce soit que l'ensemble des parties finies d'un ensemble infini A est équipotent à A ? Cela dépend, je crois, du théorème assez difficile que  $A \times A$  est équipotent à A . Je ne vois pas comment traiter l'exercice sans connaître ce théorème.

- 2 -

En tous cas, je propose de supprimer la seconde phrase de la parenthèse ( ; en déduire que ... ) : une fois obtenu le résultat énoncé dans la première phrase, tout est trivial.

p. 20. Ex. 9 . Même remarque que pour l'exercice 8 .

p. 30, L. 3 . Insérer au début de la parenthèse : " dont l'analogue "

p. 32, L. 5 . Lire "dont" au lieu de "donc" .

p. 33, Th. 3. Pourquoi ne pas démontrer le théorème en se servant de Jordan-Hölder. On éviterait alors la remarque 1 ; la remarque 2 , convenablement modifiée, pourrait être placée après le théorème 2 et présentée franchement comme une méthode pratique.

p. 34. Df. 1. Pourquoi introduire le terme dimension linéaire qui n'est jamais employé dans la suite ?

p. 37. Il ne me paraît pas bien nécessaire de définir ici les droites et plans en leur donnant un sens provisoire. Par ailleurs, on pourrait appeler co-dimension d'un sous-espace  $V$  la dimension de  $E/V$  , et éviter alors aussi de parler d'hyperplans.

Les exercices 1 à 6 du paragraphe 3 devraient se rapporter à des groupes à opérateurs quelconques ; mettre les exercices de 1 à 9 à la fin du paragraphe 1 .

p. 42, L. 3 du bas. Remplacer "un scalaire  $\neq 0$ " par "le coefficient de  $a_{1k}$  dans l'expression de  $x$  comme combinaison linéaire de  $a_1, \dots, a_n$ ".

En ce qui concerne le paragraphe 4, je persiste à ne pas voir l'intérêt de la notion de dual d'un module sur un anneau quelconque. De plus, en ce qui concerne les relations de dualité entre espaces vectoriels, je continue à penser que la définition contenue dans ma contre-rédaction est meilleure a) parce qu'elle fait jouer des rôles symétriques aux deux espaces qui sont mis en dualité ; b) parce qu'elle s'applique directement aux vectoriels topologiques et ne met pas dans

- 3 -

l'esprit du lecteur un certain nombre de propositions qui ne sont vraies que parce qu'on considère l'espace de toutes les formes linéaires, ce qu'on ne fait jamais en pratique pour les espaces de dimensions infinies ; c) parce que, même pour les espaces de dimensions finies, il me paraît beaucoup plus commode de parler d'espaces mis en dualité par une forme bilinéaire que d'un espace étant isomorphe à celui des formes linéaires sur l'autre (exemple : vecteurs tangents à une variété et différentielles de fonctions sur cette variété). De plus, il me paraît saugrenu de définir la "forme bilinéaire fondamentale" avant de savoir ce que c'est qu'une forme bilinéaire.

p.52, L.7 du bas. Une équation linéaire n'est pas une relation, mais une formule.

p.52. L.2 du bas. "Tout élément  $x_0 \in E$  pour lequel la relation (7) est vraie..." n'a aucun sens. Dire : "Tout élément  $x_0 \in E$  tel que  $u(x_0) = y_0$ " De plus, je crois que c'est aller contre l'usage que de dire que les problèmes de résolution d'équations linéaires en nombres entiers sont des problèmes linéaires. J'objecte donc ici une fois de plus aux modules.

p.53, L.9 . Il me paraît saugrenu de dire qu'une équation est "scalaire"

p.53, L.12 du bas. Lire " $y_0 = (\eta_i)$ " et  $x \rightarrow (\langle x, x'_i \rangle)_{i \in E}$ "

p.55. Proposition 6. Pourquoi parler ici de points ? On peut très bien dire : "... l'ensemble des  $x_0 + x_1$ , où  $x_1 \dots$ "

p. 56. Proposition 7. L.6 Supprimer "scalaire" - L.7 Lire "g" au lieu de " $E^*$ "

p. 57. La remarque 2 est-elle bien importante ?

p. 58. L.13 du bas. Lire " $t_u$ " au lieu de " $t$ ".

p. 58 L.3 du bas. Lire "Soient" au lieu de "Soit".

p. 59. La définition de l'application contragrédiente n'a rien à faire ici. Elle n'a d'intérêt que pour les représentations de groupes.

- 4 -

si on fait des représentations d'algèbres de Lie, ce n'est pas  $\mathfrak{u}$  mais  ${}^t\mathfrak{u}$  qui est intéressant.

p.60. Ramener théorèmes 3 et 4 au rang de propositions.

p.61. Supprimer ce qui concerne la transposée d'une application semi-linéaire.

Réduire le nombre des exercices à la fin du paragraphe 4, dont beaucoup sont triviaux.

p. 61, L.4 du bas <sup>Lire</sup> " ou ni  $E^*$  ni  $E_0$  ne sont réduits à  $\{0\}$  "

p.62. Ex.4. C'est une manière singulièrement tortillée de dire que,  $M$  étant un sous-module de  $A$ , il y a des formes linéaires sur  $M$  qui n'ont pas de prolongement à  $A$ .

p.63, L.7 du bas. Remplacer "En déduire" par "Montrer".

p.63, L.2 et 3 du bas. Lire "de dimensions infinies".

p.64, L.1 et 2, remplacer par "Montrer que la conclusion serait inexacte en général si on ne supposait pas que  $V$  et  $W$  sont tous deux de dimensions finies".

p. 64, L.5 Lire " $\langle x, x'_1 \rangle$ ".

p. 64, L.16 Lire " ${}^t\mathfrak{u}(F^*) / V' \cap {}^t\mathfrak{u}(F^*)$ ".

p. 65, L.3. Au lieu de " $\mathfrak{L} \neq \{0\}$ ", lire " $A \mathfrak{L} \neq \{0\}$ ".

En ce qui concerne le paragraphe 5, je ne comprends pas pourquoi la notion de l'espace vectoriel déduit d'un vectoriel  $V$  par extension du corps de base  $K$  à un sur-corps  $L$  a été omise. C'est une opération d'un usage constant en algèbre et en analyse (passage des représentations réelles aux représentations complexes, etc. etc.). En particulier, le corollaire 1 à la prop.4, §5, p.67 de ma rédaction me paraît essentiel. Par ailleurs, l'inclusion d'un module sur un anneau d'intégrité  $A$  dans un espace vectoriel sur le corps des quotients de  $A$  me paraît tout à fait

- 5 -

inutile ici (si tant est qu'elle soit vraiment nécessaire où que ce soit).

p. 65, proposition 1, L.13 du bas. Formuler comme suit : "Soient  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$ ,  $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$  une base de  $E$ ,  $K_0$  un sous-corps de  $K$ ,  $(\beta_\mu)_{\mu \in M}$  une base de  $K$  par rapport à  $K_0$ . Dans ces conditions, la famille  $(\beta_\mu a_\lambda)_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$  est une base de la structure d'espace vectoriel de  $E$  par rapport à  $K_0$ ."

p.66, Proposition 2. Formuler comme suit, "soient  $E$  un espace vectoriel par rapport à un corps  $K$ ,  $K_0$  un sous-corps de  $K$  et  $E_0$  l'espace vectoriel déduit de  $E$  par restriction à  $K_0$  du corps de base. Soient  $(a_\lambda)$  une famille libre dans  $E$  et  $H_0$  le sous-espace de  $E_0$  engendré par les éléments  $a_\lambda$ . Alors toute partie de  $H_0$  qui est libre par rapport à  $K_0$  l'est aussi par rapport à  $K$ ".

p. 67, L.13. Supprimer "scalaires".

p. 68, L.10. Lire " $(\xi_\mu^{-1} \xi_\lambda)_{\lambda \neq \mu}$ ".

p. 73. Supprimer l'ex. 2.

p. 73. L. 13. Supprimer la parenthèse après  $K$ .

p. 74, ex. 4. Il me semble que cela fait encore appel au théorème que l'ensemble des parties finies d'un ensemble infini est équipotent à cet ensemble.

p. 74. Supprimer l'ex. 5.

p. 88. Supprimer ce qui se rapporte aux applications contragrédientes.

p. 91, L. 14. Au lieu de "est la contragrédiente" lire "est  ${}^t P^{-1}$ , si  $P$  est la matrice de passage".

p. 99, ex. 3. Lignes manquantes.

p. 99, L.1 du bas. Lire "n" au lieu de "m".

p.100, L.13 du bas. Remplacer "une droite supplémentaire de  $H$ " par "un sous-espace de  $E$  supplémentaire de  $H$ ".

- 6 -

p.100, ex.7. Partie a) Faux si  $y = xa$ ,  $a \neq 1$ .

Partie b) Faux ; exemple :  $V = W$ ,  $x_0 \neq y_0$ .

Partie c). Je trouve que  $\mu$  est de la forme  $xyx^{-1}y$  et non  $y^2$ . L'assertion c) peut être démontrée dans le cas où  $K$  est commutatif en montrant que toute matrice de déterminant 1 est produit de matrices de transvections. Dans le cas général, je ne sais pas ce qu'il en est.

Partie d). On peut montrer que la condition est nécessaire, mais je ne sais pas si elle est suffisante.

Ces difficultés relatives à l'ex. 7 entraînent naturellement des difficultés pour les ex. 8 et 9. Dans l'ensemble, mon avis est de se limiter pour ces exercices au cas où  $K$  est commutatif et de les repousser après les déterminants.

En ce qui concerne le § 7, je proteste une fois de plus contre l'introduction d'un anneau de base au lieu d'un corps. Le sens du mot "algèbre" est maintenant bien établi ; si Bourbaki continue cette tendance fâcheuse à changer le sens des mots, il ne sera lu par personne. Le changement est particulièrement regrettable ici, car je ne vois aucun argument en sa faveur. S'il arrive (rarement) qu'on ait à considérer l'anneau d'un groupe avec  $Z$  comme anneau de base, il n'y a pas d'inconvénient à l'appeler "anneau" et non "algèbre". Quant à employer un langage qui conduit à dire par exemple que les entiers d'un corps algébrique forment une algèbre, cela me paraît ridicule.

P. 109, dernier paragraphe. Modifier si on convient que l'anneau de base est un corps.

P. 111, L. 1 à 14. Remplacer par : "Supposons qu'une algèbre  $F$  soit somme directe d'une famille finie  $(F_i)$  d'idéaux bilatères de  $F$ . On a alors, pour  $j \neq i$ ,  $F_i F_j \subset F_i \cap F_j = \{0\}$ , d'où si  $a_i \in F_i$ ,  $b_i \in F_i$ ,

- 7 -

$(\sum a_i)(\sum b_i) = \sum a_i b_i$  . On en conclut que  $F$  est alors isomorphe au produit des sous-algèbres  $F_i$  " .

P. 113, L. 11 à 13. Supprimer.

P. 113. Insérer ce qui suit après la L. 4 : " L'application linéaire  $x \rightarrow \bar{x}$  de  $E$  dans lui-même qui change 1 en 1 et  $v$  en  $-v$  est alors un automorphisme de la structure d'algèbre de  $E$  ; on vérifie en effet facilement que  $\overline{xy} = \bar{x} \bar{y}$  . Cet automorphisme s'appelle la conjugaison de  $E$  . Si  $x = a + bv \in E$  , on a  $x \bar{x} = a^2 - b^2 v \in A$  ; l'élément  $x \bar{x}$  s'appelle la norme de  $x$  et se désigne par  $N(x)$  . On a évidemment  $N(xy) = N(x) N(y)$  " .

P. 114, . En ce qui concerne les algèbres de monoïdes, se méfier de l'article défini dans l'expression " l'algèbre du monoïde" . A mon avis, il n'est pas commode de parler de l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans un corps, car on désire pouvoir introduire plusieurs variables  $x, y, \dots$  et distinguer les anneaux de polynômes en  $x$ , en  $y, \dots$  . A ce sujet, je joins le commencement de la suite de ma contre-rédaction, dont les rédacteurs pourront s'inspirer .

P. 120, L.2. Insérer : "Dans le cas où  $\alpha \neq 0$  , l'application linéaire de  $E$  dans lui-même qui change 1 en 1 et  $u$  en  $u + \alpha$  est un automorphisme de  $E$  . Si  $\alpha = 0$  ,  $\beta = 0$  , montrer que  $E$  n'admet aucun automorphisme distinct de l'identité " .

-----