RÉDACTION N° 100

COTE : **NBR 011**

TITRE : SANS INTITULÉ GÉNÉRAL
APPENDICES I ET II

NOMBRE DE PAGES : **15**

NOMBRE DE FEUILLES : **15**

APPENDICE I

Sur les applications universelles.

Plusieurs des questions traitées dans ce chapitre (produit tensoriel, extension de l'anneau d'opérateurs d'un module, puissances extérieures) et dans les précédents (monoïde libre, corps des fractions d'un anneau d'intégrité, module libre) rentrent dans un même schéma, que nous retrouverons assez souvent par la suite, et qu'on peut appeler "recherche d'applications universelles". Tout problème de ce type, que nous conviendrons d'appeler "problème (U)" comporte les données suivantes :

1°- On se donne deux espèces de structures (Ens.R , § 8,n°2) S et T (pour abréger, nous dirons souvent, dans ce qui suit, "une structure S (resp. T)" au lieu de "une structure d'espèce S (resp. T)").

Par exemple, on va voir que l'extension de l'anneau d'opérateurs d'un module (§ 2) n'est pas autre chose que l'étude d'un problème (U) particulier, que nous désignerons, pour la commodité de l'exposé sous le nom de problème ($\mathcal{E}$), et pour lequel (avec les notations du § 2,n°1) les espèces de structures S et T sont respectivement celles de A-module unitaire et de B-module unitaire, A étant un sous-anneau du centre de l'anneau B .

2°- On suppose qu'on a défini, pour tout couple d'ensembles E et F , respectivement munis de structures d'espèces S et T , une famille d'applications, dites (S,T)-applications, de E dans F .

Dans le problème ($\mathcal{E}$), les (S,T)-applications d'un A-module E dans un B-module F seront les applications A-linéaires de E dans F .

3°- On suppose qu'on a défini, pour tout couple d'ensembles F,F' munis de structures d'espèce F , une famille d'applications, dites T-applications, de F dans F' .

Dans le problème ($\mathcal{E}$), les T-applications d'un B-module F dans un B-module F' seront les applications B-linéaires de F dans F'.

On suppose en outre que les définitions ci-dessus satisfont aux conditions suivantes :

a) Tout isomorphisme entre ensembles munis de structures T est une T-application.

b) Si des ensembles F,F',F" sont munis de structures T , alors, quelles que soient les T-applications f de F dans F', et g de F' dans F" , $g\circ f$ est une T-application de F dans F" .

c) Si un ensemble E est muni d'une structure S , et des ensembles F,F' de structures T , alors, quelles que soient la (S,T)-application φ de E dans F , et la T-application f de F dans F' , $f\circ\varphi$ est une (S,T)-application de E dans F' .

Le plus souvent, les définitions en question satisfont même à la condition suivante, plus forte que a) :

a') Etant donnés deux ensembles F,F' munis de structures T , pour qu'une application biunivoque f de F sur F' soit un isomorphisme (pour les structures T), il faut et il suffit que f et l'application réciproque de f soient des T-applications.

Pour le problème ($\mathcal{E}$), il est immédiat que les définitions posées ci-dessus satisfont aux conditions a'),b),c) .

Cela posé, on propose d'associer, à tout ensemble E muni d'une structure S , un ensemble F_0, muni d'une structure T , et une (S-T)-application φ_0 de E dans F_0 , de manière à satisfaire à la condition suivante :

(U_1) Toute (S,T)-application φ de E dans un ensemble F muni d'une structure T est de la forme $\varphi=f\circ\varphi_0$, où f est une T-application de F_0 dans F .

Quand cela sera possible, on dira que F_0 et φ_0 sont, respectivement, un ensemble et une application <u>universels</u> associés à E , pour les types de structures et d'applications en question.

Par exemple, il résulte de la prop.2 du § 2,n°1, quâavec les notations de cette proposition, le B-module $E_{(B)}$ et l'application canonique $x \to e \otimes x$ du A-module E dans $E_{(B)}$ sont un ensemble et une application universels pour le problème ($\mathcal{E}$).

Le problème ainsi formulé présente en général (lorsqu'il est possible) un certain caractère d'indétermination. Dans les cas les plus importants, on constate qu'il est possible de satisfaire, non seulement à la condition (U_1), mais aussi à la suivante :

(U_2) L'image $\varphi_0(E)$ de E dans F_0 par φ_0 est telle que deux T-applications de F_0 dans un ensemble F muni d'une structure T , qui coïncident dans $\varphi_0(E)$, coïncident dans F_0 et sont donc identiques.

Par exemple, dans la solution du problème ($\mathcal{E}$) rappelée ci-dessus, le B-module $F_0=E_{(B)}$ est engendré par $\varphi_0(E)$, de sorte que deux applications B-linéaires de F_0 dans un B-module F , qui coïncident dans $\varphi_0(E)$, sont identiques.

Lorsque F_0 et φ_0 satisfont à la fois à (U_1) et (U_2), ils satisfont évidemment aussi à la condition suivante, plus forte que (U_1) :

(U_1') Toute (S,T)-application φ de E dans un ensemble F muni d'une structure T peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme $\varphi = f \circ \varphi_0$, où f est une T-application de F_0 dans F .

De plus, lorsqu'il en est ainsi, et que la condition a') est satisfaite, F_0 et φ_0 sont déterminés d'une manière <u>unique</u>, à un isomorphisme près, par la donnée de E . En effet, si F_0' et φ_0' satisfont aussi aux conditions (U_1) et (U_2), on aura $\varphi_0' = f \circ \varphi_0$, $\varphi_0 = g \circ \varphi_0'$, f et g étant des T-applications de F_0 dans F_0' et de F_0' dans F_0 respectivement.

On en déduit $\varphi_0 = (g \circ f) \circ \varphi_0$, c'est-à-dire que $g \circ f$ coïncide sur $\varphi_0(E)$ avec l'application identique de F_0 sur F_0 ; d'après a),b) et (U_2), $g\,f$ est donc l'application identique de F_0 sur lui-même ; de même , $f \circ g$ est l'application identique de F'_0 sur lui-même ; il s'ensuit (Ens.R, § 2,n°12) que f et g sont des applications biunivoques, réciproques l'une de l'autre, de F_0 sur F'_0 et de F'_0 sur F_0 respectivement ; d'après a'), ce sont des isomorphismes pour les structures T de F_0 et F'_0.

Pour le problème ($\mathcal{E}$), ce raisonnement n'est autre que celui de la démonstration de la prop.1 du § 2.

La recherche d'un ensemble F_0 et d'une application φ_0 satisfaisant à (U_1), et le cas échéant à (U_2), constitue le problème (U) relatif aux types de structures et d'applications donnés. Dans l'état actuel des mathématiques, il ne saurait guère être question de traiter un tel problème que pour des espèces de structures et d'applications <u>explicitées</u>; le problème sera résolu le plus souvent par l'indication d'un procédé de construction <u>explicite</u> pour F_0 et φ_0 à partir de E ; on pourra alors considérer F_0 et φ_0 comme <u>canoniquement associés</u> à E .

C'est ainsi que nous avons procédé au § 2 pour le problème $x \to e \otimes x$ de manière à satisfaire à (U_1) et (U_2).

<u>Exemples</u>.- A l'exemple fourni par le problème ($\mathcal{E}$) s'ajoutent immédiatement les suivants, déjà traités dans ce chapitre et dans les chap.I et II de ce Livre :

1° <u>Produit tensoriel de modules</u>. On se donne (une fois pour toutes) un anneau commutatif A ayant un élément unité. Un ensemble de structure S est un produit de deux A-modules unitaires, un ensemble de structure T un A-module unitaire ; une (S,T)-application sera une application bilinéaire, une T-application une application linéaire. A tout produit

E de deux A-modules unitaires E_1, E_2 on associé le produit tensoriel $F_o = E_1 \otimes E_2$ de E_1 et E_2 et l'application canonique $(x,y) \to x \otimes y$ de E dans F_o , qui constituent dans ce cas (§ 1, n°2) la solution du problème (U). Le lecteur verra aussitôt comment on présente de même le produit tensoriel de modules en nombre quelconque, et la <u>puissance extérieure p-ème</u> d'un module unitaire E (§ 5, n°5 ; en ce cas, les (S,T)-applications sont les applications multilinéaires alternées de E^p dans un module quelconque F).

2° <u>Monoïde libre</u>. Un ensemble de structure S sera un ensemble E <u>sans structure</u> (autrement dit, S est l'espèce "structure vide" qui ne comporte la donnée d'aucun élément d'aucun ensemble de l'échelle d'ensembles construite sur E ; cf. <u>Ens</u>., chap. II). Un ensemble de structure T sera un <u>monoïde</u> (chap. I, § 1, n°3) ; les T-applications seront les <u>représentations</u> pour les structures de monoïde (chap. I, § 1, n°1 et § 4, n°4), les (S,T)-applications seront <u>toutes</u> les applications d'un ensemble E dans un monoïde F . On vérifie alors sans peine qu'on peut prendre pour F_o le monoïde libre $L(E)$ déduit de E (chap. I, § 1, n°3), et pour φ_o l'application qui, à tout $x \in E$, fait correspondre le "mot" de longueur 1 défini par la suite d'un seul terme égal à x .

3° <u>Groupe libre ; module libre</u>. Si, dans l'exemple précédent, on substitue aux structures de monoïde les structures de <u>groupe</u>, on peut prendre pour F_o le <u>groupe libre</u> engendré par les éléments de E (chap. I, § 6, exerc. 19), l'application φ_o étant définie comme ci-dessus. Si on substitue aux structures de monoïde les structures de <u>module à gauche unitaire</u> sur un anneau donné A , on peut prendre pour F_o le module $A^{(E)}$ des <u>combinaisons linéaires formelles</u> d'éléments de E (chap. II, 1, n°8), pour φ_o l'application qui, à tout $x \in E$, fait correspondre l'élément e_x d'indice x dans la base canonique de $A^{(E)}$ (chap. II, § 2, n°4).

4° Corps des fractions d'un anneau d'intégrité. Prenons pour S l'espèce des structures d'anneau d'intégrité, pour T l'espèce des structures d'anneau d'intégrité, pour T l'espèce des structures de corps ; les T-applications seront les isomorphismes d'un corps dans un autre, les (S,T)-applications les isomorphismes d'un anneau d'intégrité dans un corps ; alors on peut prendre pour F_0 le corps des fractions de l'anneau d'intégrité E , pour φ_0 l'application qui, à tout $x \in E$, fait correspondre la fraction xa/a (a élément fixe $\neq 0$ de E) (cf. chap.I, § 9,prop.4).

* D'autres exemples de problèmes (U) sont abordés ultérieurement dans le cours de ce Traité :(*)

5° Complétion d'un espace uniforme. S est l'espèce des structures uniformes (Top.gén., chap.II, §1), T l'espèce des structures uniformes d'espaces séparés et complets ; les (S,T)-applications sont les applications uniformément continues (d'un espace uniforme dans un espace uniforme séparé et complet), les T-applications les applications uniformément continues d'un espace uniforme séparé complet dans un espace de même nature. Alors on peut prendre pour F_0 le complété de l'espace uniforme séparé associé à l'espace uniforme E , pour φ_0 l'application "canonique" de E dans ce complété (Top.gén.,chap.II, §§1 et 3).

(*) Un intéressant "problème (U)" vient seulement d'être posé et résolu tout récemment : c'est celui où S est l'espèce des structures d'espace complètement régulier, T celle des structures de groupe topologique séparé , les T-applications étant les représentations continues (d'un groupe topologique dans un groupe topologique), les (S,T)-applications les applications continues d'un espace complètement régulier dans un groupe topologique séparé (cf. A.MARKOFF, Bull.Ac.Sci. U.R.S.S., t.IX (1945), p.3-64).

NBR 11 8

6° Structure uniforme universelle. On prend pour S l'espèce des structures topologiques d'espace complètement régulier (Top.gén., chap.IX, § 1), pour T l'espace des structures uniformes séparées ; les T-applications sont les applications uniformément continues (d'un espace uniforme séparé dans un espace de même nature), les (S,T)-applications les applications continues d'un espace complétement régulier dans un espace uniforme séparé. Alors on peut prendre pour F_0 l'espace uniforme obtenu en munissant l'espace complètement régulier E de la "structure uniforme universelle" compatible avec sa topologie (Top.Gén., chap.IX, § 1,exerc.5) et pour φ_0 l'application identique.

7° Compactification de Cech. L'espàce S étant la même que dans l'exemple précédent, on prend pour T l'espèce des structures d'espace compact, les T-applications étant les applications continues d'un espace compact dans un espace compact, les (S,T)-applications les applications continues d'un espace complètement régulier dans un espace compact. On peut alors prendre pour F_0 l'espace compact obtenu en complètant E muni de la structure uniforme la moins fine qui rend uniformément continues les applications continues de E dans $[0,1]$ (Top.gén., chap.IX, § 1, exerc.7), pour φ_0 l'application canonique de E dans F_0 . *

APPENDICE II

Produit tensoriel d'une infinité d'algèbres sur un corps.

Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque d'algèbres sur un corps K, ayant chacune un élément unité, que l'on identifie avec l'élément unité e de K, de sorte que K est identifié avec un sous-corps du centre de chacune des algèbres E_ι. Pour toute partie finie L de I, nous désignerons par F_L le produit tensoriel des algèbres E_ι telles que $\iota \in L$ (§ 3, n°1).

Soient L et M deux parties finies de I telles que $L \subset M$, et soit $P = M \cap \complement L$; il existe un isomorphisme canonique $\theta_{L,P}$ de l'algèbre $F_L \otimes F_P$ sur l'algèbre F_M ("associativité du produit tensoriel", cf. § 3, n°1) ; d'autre part, comme les E_ι admettent un élément unité, on a vu au § 3, n°3 qu'il existe un isomorphisme canonique $\psi_{L,M}$ de F_L dans $F_L \otimes F_P$, qui laisse invariants les éléments de K ; désignons par $\varphi_{L,M}$ l'isomorphisme de F_L dans F_M, composé de $\theta_{L,P}$ et de $\psi_{L,M}$. Il résulte immédiatement de cette définition et du fait que, dans chaque F_L, l'élément unité est le produit tensoriel des éléments unités des E_ι tels que $\iota \in L$, que si L, M, N sont trois parties finies de I telles que $L \subset M \subset N$, on a

$$\varphi_{L,N} = \varphi_{M,N} \circ \varphi_{L,M} . \tag{1}$$

Cela étant, soit G un ensemble somme (Ens. R, § 4, n°5) des ensembles F_L, où L parcourt l'ensemble $\mathfrak{F}(I)$ de toutes les parties finies de I, chacun des F_L étant identifié à une partie de G. Désignons par R la relation suivante entre deux éléments arbitraires $x_L \in F_L$ et $x_M \in F_M$ de G (L et M arbitraires dans $\mathfrak{F}(I)$) : "il existe une partie finie N de I, contenant L et M, et telle que $\varphi_{L,N}(x_L) = \varphi_{M,N}(x_M)$".
La relation R est une relation d'équivalence dans G ; il suffit pour le voir de vérifier qu'elle est transitive. Or, s'il existe P contenant

L et M tel que $\varphi_{L,P}(x_L)=\varphi_{M,P}(x_M)$, et Q contenant M et N tel que $\varphi_{M,Q}(x_M)=\varphi_{N,Q}(x_N)$, il résulte de (1) que, pour toute partie finie S contenant P et Q , on a $\varphi_{L,S}(x_L)=\varphi_{N,S}(x_N)$.

Désignons par F l'ensemble quotient G/R , par φ l'application canonique de G sur G/R , par φ_L la restriction de φ à F_L ; il résulte de la définition de R que, pour $L\subset M$, on a

(2) $$\varphi_L = \varphi_M\circ\varphi_{L,M}$$

En outre, chacune des applications φ_L de F_L dans F est *biunivoque*. En effet, si x_L , y_L sont deux éléments de F_L , la relation $\varphi_L(x_L)=\varphi_L(y_L)$ signifie par définition qu'il existe une partie finie M de I contenant L telle que $\varphi_{L,M}(x_L)=\varphi_{L,M}(y_L)$; comme chacune des $\varphi_{L,M}$ est un isomorphisme, on a $x_L=y_L$.

Nous allons maintenant définir sur F une structure d'*algèbre* par rapport au corps K . Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme.- *Si* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est une famille finie quelconque d'éléments de* F , *il existe une partie finie* M *de* I *et* n *éléments* y_i *de* F_M $(1\leqslant i\leqslant n)$ *tels que* $x_i=\varphi_M(y_i)$ *pour* $1\leqslant i\leqslant n$.

En effet, pour chaque indice i , il existe une partie finie L_i de I , et un élément $z_i\in F_{L_i}$, tels que $x_i=\varphi_{L_i}(z_i)$; on répond à la question en prenant pour M la réunion des L_i , et $y_i=\varphi_{L_i,M}(z_i)$ d'après (2).

Cela étant, soient x,y deux éléments quelconques de F ; pour toute partie finie L de I telle qu'il existe un couple d'éléments x_L,y_L de F_L satisfaisant à $x=\varphi_L(x_L)$, $y=\varphi_L(y_L)$ (il y a de telles parties L d'après le lemme), l'élément $\varphi_L(x_L+y_L)$ (resp. $\varphi_L(x_Ly_L)$) de F ne dépend que de x et y et non de l'ensemble L ayant les propriétés précédentes ; en effet, si $L\subset M$ et $x=\varphi_M(x_M)$, $y=\varphi_M(y_M)$, on a $x_M=\varphi_{L,M}(x_L)$ et $y_M=\varphi_{L,M}(y_L)$, en vertu de (2) et du fait que φ_M est

est biunivoque ; comme $\varphi_{L,M}$ est un isomorphisme, on a $x_M+y_M=\varphi_{L,M}(x_L+y_L)$ d'où, d'après (2) $\varphi_M(x_M+y_M)=\varphi_L(x_L+y_L)$. Nous désignerons par $x+y$ (resp. xy) la valeur commune des éléments $\varphi_L(x_L+y_L)$ (resp. $\varphi_L(x_Ly_L)$). On définit ainsi deux lois de composition internes dans F. Le lemme permet de voir aussitôt que ces lois définissent sur F une structure d'<u>anneau</u>, car la vérification des axiomes d'un anneau ne fait jamais intervenir qu'un nombre <u>fini</u> d'éléments de l'anneau. Pour la même raison, on voit que l'image de K par φ est un sous-corps du centre de l'anneau F, isomorphe à K et dont l'élément unité est élément unité de F ; on peut donc identifier ce sous-corps à K. On voit ainsi que F est muni d'une structure d'<u>algèbre</u> sur K ; nous dirons que l'algèbre ainsi définie est le <u>produit tensoriel de la famille d'algèbres</u> $(E_\iota)_{\iota\in I}$, et nous la noterons $\bigotimes_{\iota\in I} E_\iota$. Il est clair alors que chacune des applications φ_L (L partie finie de I) est un <u>isomorphisme</u> (dit <u>canonique</u>) de l'algèbre F_L sur une sous-algèbre de F ; en particulier, on voit que si I est un ensemble fini, F est isomorphe au produit tensoriel F_I déjà défini au §3.

<u>Proposition 1. Pour chaque partie finie</u> L <u>de</u> I, <u>soit</u> f_L <u>une représentation de l'algèbre</u> F_L <u>dans une algèbre</u> G, <u>telle que, pour</u> $L\subset M$, <u>on ait</u>

$$f_L = f_M\circ\varphi_{L,M} \tag{3}$$

<u>Il existe alors une représentation et une seule f du produit tensoriel</u> $F=\bigotimes_{\iota\in I} E_\iota$ <u>dans</u> G, <u>telle que, pour toute partie finie</u> L <u>de</u> I, <u>on ait</u>

$$f_L = f\circ\varphi_L \tag{4}$$

<u>En outre, si chacune des représentations</u> f_L <u>est un isomorphisme de</u> F_L <u>dans</u> G, f <u>est un isomorphisme de</u> F <u>dans</u> G.

En effet, soit x un élément quelconque de F ; il résulte de (3) que pour toute partie finie L de I telle qu'il existe $x_L\in F_L$ satisfaisant à

$x = \varphi_L(x_L)$, l'élément $f_L(x_L)$ de G est indépendant de L : en effet, si $x=\varphi_M(x_M)$ il existe par définition une partie finie N de I contenant L et M, telle que $\varphi_{L,N}(x_L)=\varphi_{M,N}(x_M)=x_N$, d'où, en vertu de (3), $f_N(x_N)=f_L(x_L)=f_M(x_M)$. Si on désigne par $f(x)$ la valeur commune des $f_L(x_L)$, il résulte aussitôt du lemme que f est une représentation de F dans G ; la relation (4) est évidente, et assure l'unicité de f de façon triviale. Enfin, si chacune des f_L est un isomorphisme, la relation $f(x)=0$ entraîne d'après (4) $f_L(x_L)=0$ pour toute partie finie L telle que $x=\varphi_L(x_L)$; on en tire $x_L=0$, d'où $x=0$, f est un isomorphisme de F dans G .

Une première application de la prop.1 est la suivante : soit J une partie quelconque de I, et $F_J= \bigotimes_{\iota \in J} E_\iota$ le produit tensoriel de la sous-famille $(E_\iota)_{\iota\in J}$; appliquons la prop.1 en y remplaçant F par F_J, G par F, f_L par l'application canonique φ_L, où L parcourt l'ensemble $\mathfrak{F}(J)$ des parties finies de J . On voit ainsi qu'il existe un isomorphisme de F_J dans F, identique à l'isomorphisme canonique φ_J défini plus haut lorsque J est fini, et que, dans le cas général, nous appellerons encore isomorphisme <u>canonique</u> et désignerons par φ_J ; pour toute partie finie L de J, on a

$$\varphi_L = \varphi_J \circ \varphi_{L,J}$$

en désignant par $\varphi_{L,J}$ l'application canonique de F_L dans F_J. On en déduit aisément, par application de la prop.1, que si L et M sont deux parties <u>quelconques</u> de I telles que $L\subset M$, on a encore la relation (2) en désignant par $\varphi_{L,M}$ l'application canonique de F_L dans F_M ; par suite, si L,M,N sont trois parties quelconques de I telles que $L\subset M\subset N$, on a encore la relation (1), en remplaçant F par F_N dans l'application de la relation (2) .

 13

Proposition 2.- Soit (L,M) une partition quelconque de l'ensemble I en deux ensembles ; le produit tensorial $F_L \otimes F_M$ est isomorphe à F.

Remarquons d'abord que, si R est une partie finie de L, S une partie finie de M, les applications canoniques $\varphi_{R,L}$ et $\varphi_{S,M}$ permettent de définir un isomorphisme $\omega_{RS,LM}$ de $F_R \otimes F_S$ dans $F_L \otimes F_M$; elles définissent en effet un isomorphisme de $F_R \otimes F_S$ sur $\varphi_{R,L}(F_R) \otimes \varphi_{S,M}(F_S)$, et on sait qu'il existe un isomorphisme canonique de ce dernier produit tensoriel dans $F_L \otimes F_M$ (§ 1, cor. 3 de la prop. 7). Cela étant, pour toute partie finie P de I, il existe un isomorphisme canonique de F_P sur $F_R \otimes F_S$, où $R=P \cap L$ et $S=P \cap M$ ("associativité des produits tensoriels finis" ; on convient de remplacer F_R (resp. F_S) par K lorsque $R=\emptyset$ (resp. $S=\emptyset$)) ; en composant $\omega_{RS,LM}$ avec cet isomorphisme, on obtient un isomorphisme f_P de F_P dans $F_L \otimes F_M$. On vérifie immédiatement qu'on peut appliquer à ces isomorphismes la prop. 1, ce qui donne un isomorphisme f de F dans $F_L \otimes F_M$. Reste à voir que f est un isomorphisme sur $F_L \otimes F_M$; or, pour tout $x \in F_L$ (resp. tout $y \in F_M$), il existe une partie finie R (resp. S) de L (resp. M) et un $x_R \in F_R$ (resp. $y_S \in F_S$) tel que $x=\varphi_{R,L}(x_R)$ (resp. $y=\varphi_{S,M}(y_S)$) ; si z est l'élément de $F_{R \cup S}$ qui correspond à $x_R \otimes y_S$ par l'isomorphisme canonique de $F_R \otimes F_S$ sur $F_{R \cup S}$, on a $f(z)=x \otimes y$, ce qui achève la démonstration.

Nous dirons que l'isomorphisme f et son isomorphisme réciproque sont canoniques.

COROLLAIRE.- Soit $(J_\alpha)_{\alpha \in A}$ une partition quelconque de I ; le produit tensoriel $\bigotimes_{\alpha \in A} F_{J_\alpha}$ est isomorphe à F ("associativité du produit tensoriel").

NBR 11 14

Posons $G_\alpha = F_{J_\alpha}$, $G = \bigotimes_{\alpha \in A} G_\alpha$, et, pour toute partie finie H de A, $G_H = \bigotimes_{\alpha \in H} G_\alpha$; si on pose $R(H) = \bigcup_{\alpha \in H} J_\alpha$, la prop.2 définit (par récurrence sur le nombre d'éléments de H) un isomorphisme canonique de G_H sur $F_{R(H)}$; en composant $\varphi_{R(H)}$ avec cet isomorphisme, on obtient un isomorphisme g_H de G_H dans F. On vérifie immédiatement qu'on peut appliquer aux isomorphismes g_H la prop.1, ce qui définit un isomorphisme g de G dans F. Reste à voir que g applique G sur F. Or, tout $x \in F$ est de la forme $x = \varphi_L(x_L)$, où L est une partie finie de I et $x_L \in F_L$; il existe une partie finie H de A telle que $L \subset R(H)$, d'où on conclut aussitôt qu'il existe un élément z_H de G_H tel que $g_H(z_H) = x$, et le corollaire en résulte.

Les isomorphismes canoniques φ_L permettent d'<u>identifier</u> les F_L à des <u>sous-algèbres</u> de F ; quand on fait cette identification, la relation $L \subset M$ entraîne $F_L \subset F_M$, et F est la <u>réunion</u> des F_L lorsque L parcourt l'ensemble des parties finies de I. On en conclut que F est <u>engendré</u> par la réunion de ses sous-algèbres E_ι, ou encore que tout élément de F est somme d'un nombre fini de produits de la forme $\prod_{\iota \in I} x_\iota$, où $x_\iota \in E_\iota$ pour tout ι, et $x_\iota = e$ sauf pour un nombre fini d'indices (l'ordre dans un tel produit est sans importance, puisque pour $\iota \neq \kappa$, tout élément de E_ι est permutable avec tout élément de E_κ). De même, si, pour tout ι, $(a_{\iota,\alpha_\iota})_{\alpha_\iota \in A_\iota}$ est une <u>base</u> de E_ι, une base de F sera formée de tous les produits $\prod_{\iota \in I} x_\iota$, où $x_\iota = e$ sauf pour un nombre fini d'indices ι, et où, pour ces derniers, x_ι est un des éléments de la base (a_{ι,α_ι}) de E_ι (deux tels produits ne sont égaux que si pour chaque indice ι, les facteurs d'indice ι de chacun d'eux sont égaux).

Montrons enfin comment on peut caractériser un produit tensoriel d'une famille quelconque d'algèbres :

Proposition 3.- Soit E une algèbre sur un corps K ayant un élément unité e . S'il existe une famille $(E_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-algèbres de E contenant K et telles que :

a) pour tout couple d'indices distincts ι, $\varkappa$, tout élément de E_ι est permutable avec tout élément de $E_\varkappa$;

b) pour tout $\varkappa$, $E_\varkappa$ et la sous-algèbre de E engendrée par la réunion des E_ι d'indice $\neq \varkappa$ sont linéairement disjointes sur K ;

c) E est engendrée par la réunion des E_ι ;

- alors il existe un isomorphisme de $F = \bigotimes_{\iota \in I} E_\iota$ sur E , qui coïncide sur chacun des E_ι avec l'application identique.

En effet, les conditions a) et b) entraînent que, pour toute partie finie L de I , il existe un isomorphisme f_L de F_L sur la sous-algèbre de E engendrée par la réunion des E_ι d'indice $\iota \in L$, se réduisant sur chacun des E_ι à l'application identique (en vertu du th.1 du § 3, et par récurrence sur le nombre d'éléments de H) ; comme les f_L vérifient la condition (3), la prop.1 montre l'existence d'un isomorphisme f de F dans E coïncidant sur chaque E_ι avec l'application identique ; la condition c) de l'énoncé assure que f applique F sur E .
