RÉDACTION NON NUMÉROTÉE

COTE DELR 003

TITRE CALCUL LINÉAIRE - PROJET DÉTAILLÉ
MANUSCRIT AUTOGRAPHE DE DELSARTE, PIÈCE UNIQUE
VERSION DACTYL. : EN EXÉCUTION DES DÉCISIONS DE L'ESCORIAL

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 29

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 29

Calcul linéaire. (Projet détaillé)

Plan - Faits saillants - Objet du calcul linéaire

I/ - Etude du groupe des translations : caractères ; opérateurs de translation ; opérateurs du groupe ; propriétés de ces derniers ; exemples.

II/ - Polynomes Bernoulliens attachés à un tel opérateur ; indicatrices ; propriétés ; formule sommatoire. Applications : formule de Taylor ; polynomes de Bernoulli ; polynomes d'Hermite ; polynomes de Legendre et tous autres.

III/ - Formalisme général des développements en série :

a/ Développement en séries d'exponentielles, en partant de l'opérateur de dérivation ; formation du produit de composition généralisé ; cas des fonctions moyenne-périodique ; idée de la démonstration de convergence

b/ Formalisme du développement suivant certaines fonctions propres d'un opérateur possédant un spectre continu. Exemples : séries de Taylor ; Séries de Bessel ; [Fourier-Bessel ; Bessel-Dini ; Schlömilch] ; Séries inverses de factorielles.

IV/ - ~~Retour sur les opérateurs de translation finis~~. Retour sur les opérateurs du groupe des translations. Inversion de ces opérateurs lorsqu'ils sont finis. Problème analogue au problème de Cauchy. Solution formelle.

Projet détaillé.

Laïus scurrile. L'objet du calcul linéaire est de réunir dans le cadre d'un formalisme unique un grand nombre de techniques diverses de l'analyse, qui, toutes, se rattachent à l'idée de linéarité, car elles utilisent les propriétés formelles les plus immédiates des opérateurs linéaires.

I/ 1.- Définition du groupe des translations sur la droite : la transformation t_a de ce groupe fait correspondre au nombre réel x, le nombre réel $y = x + a$, où a est réel.

2.- Propriété formelle servant de définition aux caractères $j_\lambda(x)$ de ce groupe :

$$j_\lambda(x+y) = j_\lambda(x)\, j_\lambda(y)$$

les seuls caractères continus sont les exponentielles $e^{\lambda x}$ où λ est un paramètre complexe

3.- L'opérateur de translation $T_y[f]$ est l'opérateur linéaire fonctionnel, qui, à la fonction $f(x)$ de la variable réelle x fait correspondre la fonction $f(x+y)$, x étant la variable et y, réel, jouant le rôle de paramètre.

4.- Les opérateurs attachés au groupe des translation, brièvement, les opérateurs du groupe, sont les opérateurs linéaires fonctionnels permutables avec tout opérateur de translation. La transformée $g(x)$ de la fonction $f(x)$ par un tel opérateur δ sera notée

$$g(x) = \delta_x[f(\xi)]$$

et la propriété de définition se traduit par la condition

$$\delta_{x+y}[f(\xi)] = \delta_x[f(\xi+y)]$$

En particulier on a

$$\delta_x[f(\xi)] = \delta_0[f(\xi+x)]$$

égalité qui rattache ces opérateurs aux fonctionnelles linéaires.

Théorème 1 Si l'application de l'opérateur δ au caractère $e^{\lambda x}$ est possible, on a

$$\delta_x[e^{\lambda\xi}] = A(\lambda)\, e^{\lambda x}$$

$A(\lambda)$ ne dépend que de λ; c'est l'indicatrice de l'opérateur δ; en général elle n'est définie que sur un sous-ensemble du plan complexe de la variable λ.

Théorème 2 Si δ et ε sont deux opérateurs du groupe et si la fonction $f(x)$ est telle que

$$g(x) = \delta_x[f(\xi)] \qquad h(x) = \varepsilon_a[f(\xi)]$$

$$k(x) = \varepsilon_a[g(\xi)] \qquad \ell(x) = \delta_a[h(\xi)]$$

existent, alors $k(x) = \ell(x)$.

5- Exemples : Combinaison linéaire à coefficients constants d'opérateurs de translation;

Opérateur de composition : $\delta_x[f(\xi)] = \int k(\xi)\, f(x+\xi)\, d\xi$;

Opérateurs différentiels à coefficients constants;

Opérateurs généraux de Bochner.

II/ 1/- Définitions. Un opérateur δ attaché au groupe des translations est dit régulier

a/ s'il est défini dans le champ des polynômes

b/ si l'indicatrice $A(\lambda)$ est définie et holomorphe dans un voisinage de l'origine du plan des λ.

Il ne sera question ici que de tels opérateur.

Un opérateur régulier est normal si $A(0) \neq 0$. L'application d'un tel opérateur à un polynome donne un polynome de même degré.

Un opérateur régulier est anormal d'ordre p si $\lambda = 0$ est un zéro d'ordre p de $A(\lambda)$. On constate facilement de proche en proche que $\delta_0 [\xi^q] = 0$ pour q entier $\leq p-1$, de sorte que l'application d'un tel opérateur a un polynome de degré $n > p$ donne un polynome de degré $n-p$.

Théorème 1 - si $\delta_a [f(\xi)]$ est anormal d'ordre p, l'opérateur

$$\varepsilon_a [f(\xi)] = \delta_a [F(\xi)]$$

où F est une primitive quelconque d'ordre p de f, est un opérateur normal.

2/- Supposons maintenant l'opérateur δ régulier et normal ; soit $A(\lambda)$ son indicatrice - les polynomes Bernoulliens attachés à cet opérateur sont définis par le développement

$$\frac{e^{\lambda x}}{A(\lambda)} = B_0(x) + \lambda B_1(x) + \dots + \lambda^n B_n(x) + \dots$$

leur degré est marqué par leur indice ; on a

$$\frac{dB_n}{dx} = B_{n-1}(x) \; ;$$

enfin l'application de l'opérateur δ aux deux membres de la relation de définition, montre, de proche en proche, que l'on a

$$\delta_x [B_n(\xi)] = \frac{x^n}{n!}$$

3 - Les polynomes Bernoulliens permettent d'inverser un opérateur régulier normal dans le champ des polynomes : l'équation

$$\delta_x [f(\xi)] = \sum_{p=0}^{n} a_p \frac{x^p}{p!} = g(x)$$

a pour unique solution polynomiale

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p B_p(x).$$

On peut encore écrire

$$\delta_x [f(\xi+y)] = g(x+y) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \frac{d^p g}{dy^p}$$

et

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x) \frac{d^p g}{dy^p} = \sum_{p=0}^{n} B_p(x) \delta_y \left[\frac{d^p f}{d\xi^p} \right]$$

4 - On peut généraliser la formule précédente. Si $f(x)$ possède des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$, on a, par intégration par parties :

$$\int_0^{\xi-x-y} B_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta) \, d\eta = \sum_{p=0}^{n} B_p(x) f^{(p)}(\xi) - \sum_{p=0}^{n} B_p(\xi-y) f^{(p)}(x+y).$$

puis, en prenant le δ des deux membres, (en supposant seulement que les $\delta_y \left[\frac{d^p f}{d\xi^p} \right]$ existent) :

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\, \delta_y\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] - \delta_y\left[\int_0^{\xi-x-y} B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta\right] ;$$

c'est la formule sommatoire générale.

5. Exemples

a/ l'opérateur δ est l'opérateur identique ; on a $B_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et la formule sommatoire se réduit à la formule de Taylor

b/ l'opérateur δ est l'opérateur de différentiation finie normalisée :

$$\delta_x[f(\xi)] = \int_0^a f(x+\xi)\, d\xi .$$

Les polynomes $B_n(x)$ sont liés simplement aux polynomes de Bernoulli classiques ; on a

$$\mathcal{B}_n(x) = \frac{n!}{a^{n-1}}\left[B_n(ax) - B_n(0)\right]$$

en désignant par $\mathcal{B}_n(x)$ les polynomes de Bernoulli classiques. La formule sommatoire donne facilement la formule d'Euler-Mac-Laurin.

c/ L'opérateur δ a pour expression

$$\delta_x[f(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} f(x+\xi)\, d\xi ;$$

et on a

$$B_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!}\, e^{-x^2} \cdot \frac{d^n \cdot e^{x^2}}{dx^n}$$

ces polynomes sont liés aux polynomes d'Hermite $D_n(x)$; on a

$$B_n(x) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^{n/2} \cdot n!} \cdot D_n(ix\sqrt{2}) .$$

d/ Partons du développement connu :

$$J_0\left[\mu\sqrt{1-u^2}\right] e^{\mu u} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{P_n(u)}{n!}$$

P_n étant le $n^{ième}$ polynome de Legendre et J_0 la fonction de Bessel de première espèce d'indice zéro ; le changement de variable

$$x = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \quad ; \qquad \lambda = \mu\sqrt{1-u^2} \qquad \text{donne}$$

$$J_0(\lambda)\ e^{\lambda x} = B_0(x) + \ldots + \lambda^n B_n(x) + \ldots$$

avec $$B_n(x) = \frac{1}{n!}\ (1+x^2)^{n/2} \cdot P_n\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

Ces polynomes peuvent être considérés comme polynome Bernoulliens relatifs à un opérateur δ ayant pour indicatrice $\frac{1}{J_0(\lambda)}$; Or $\frac{1}{I_0(\lambda)}$, (où I_0 est la fonction de Bessel) est une fonction paire, bornée pour λ réel et de l'ordre de $e^{-|\lambda|}$ pour λ réel infini ; elle possède une image de Fourier

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda x}}{I_0(\lambda)}\, d\lambda$$

définie pour x réel, et on a

$$\frac{1}{I_0(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, e^{i\lambda x}\, dx$$

L'opérateur $$\delta_x[f(\xi)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\xi)\, f(x+\xi)\, d\xi$$

a donc une indicatrice définie pour λ imaginaire pure et x réduisant alors à $\frac{1}{J_0(\lambda)}$.

Cet opérateur est défini dans le champ des polynomes et ses polynomes Bernoulliens sont les $B_n(x)$ que nous venons de définir.

III. Première partie - Formalisme des développements en série d'exponentielles.

1.- Considérons l'opérateur de dérivation $\mathfrak{D}[f] = \frac{df}{dx}$; il admet pour fonctions propres les exponentielles $e^{\lambda x}$; on a $\mathfrak{D}[e^{\lambda x}] = \lambda e^{\lambda x}$, et les seules solutions de l'équation $\mathfrak{D}[f] = \lambda f$ sont de la forme $k e^{\lambda x}$; k étant une constante quelconque. Si donc l'équation

$$\mathfrak{D}[f] = \lambda f + g \qquad (1)$$

possède une solution f, elle en possède une infinité de la forme $f + k e^{\lambda x}$, k étant une constante. D'autre part, il est clair qu'une solution de

$$\mathfrak{D}[f] = \lambda f + e^{\mu x}$$

est $\frac{e^{\mu x}}{\mu - \lambda}$. Supposons que g soit tel que l'équation (1) ait des solutions ; désignons par $\mathfrak{L}_\lambda[g] = f$ l'une d'entre elles, choisie arbitrairement, mais d'une manière déterminée. On aura

$$\mathfrak{L}_\lambda[e^{\mu x}] = \frac{e^{\mu x}}{\mu - \lambda} + k e^{\lambda x}$$

k dépendant de λ et μ. On peut choisir par exemple la solution de (1) nulle pour $x = 0$:

$$\mathfrak{L}_\lambda[g] = \int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} g(\xi)\, d\xi$$

alors $$\mathfrak{L}_\lambda[e^{\mu x}] = \frac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda}$$

2/. Considérons maintenant une fonctionnelle linéaire $\delta[f]$, telle que

$$\delta[e^{\lambda x}] = A(\lambda)$$

soit une fonction analytique de λ possédant une infinité de zéros $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \dots ; \lambda_n ; \dots$

que pour simplifier nous supposerons tous simples. Envisageons une fonction $f(x)$ développable en série procédant suivant les exponentielles $e^{\lambda_n x}$:

$$f(x) = \sum_n a_n e^{\lambda_n x}$$

On a formellement

$$\mathcal{L}_\lambda [f(\xi)] = \sum_n a_n \frac{e^{\lambda_n x} - e^{\lambda x}}{\lambda_n - \lambda}$$

puis

$$\delta \{ \mathcal{L}_\lambda [f(\xi)] \} = \sum_n a_n \frac{A(\lambda_n) - A(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} \; ; \quad \delta \{ \mathcal{L}_{\lambda_n} [f] \} = a_n A'(\lambda_n)$$

et par suite $$a_n = \frac{\delta \{ \mathcal{L}_{\lambda_n} [f] \}}{A'(\lambda_n)} = \frac{1}{A'(\lambda_n)} \cdot \delta \left[\int_0^\xi e^{\lambda_n (\xi - \tau)} f(\tau) \, d\tau \right] ;$$

qui donne une détermination formelle très simple des coefficients de la série envisagée.

3/. Reprenons maintenant un opérateur δ attaché au groupe des translations et supposons que son indicatrice $A(\lambda)$ soit une fonction entière de λ ayant une infinité de zéros $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \dots ; \lambda_n ; \dots$ tous simples.

Une fonction $f(x)$ est moyenne-périodique par rapport à l'opérateur δ si $\delta_x [f(\xi)]$ est identiquement nulle. Les exponentielles $e^{\lambda_n x}$ sont évidemment moyenne-périodiques. Par analogie avec le cas bien connu des fonctions périodiques on peut présumer que toute fonction moyenne-périodique est développable en série d'exponentielles moyenne-périodiques :

$$f(x) = \sum_n a_n e^{\lambda_n x}$$

Le formalisme que nous venons d'indiquer donne

$$a_n = \frac{1}{A'(\lambda_n)} \delta_0 \left[\int_0^\xi e^{\lambda_n(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta \right]$$

On peut démontrer la validité de tels développements en faisant des hypothèses convenables sur la fonction $f(x)$ et sur l'opérateur δ. Il est évidemment indiqué d'envisager la somme des résidus de la fonction de λ

$$F(\lambda; x) = \frac{e^{\lambda x}}{A(\lambda)} \cdot \delta_0 \left[\int_0^\xi e^{\lambda(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta \right] ;$$

Si $f(x)$ est moyenne-périodique, et de croissance au plus exponentielle pour x infiniment grand positif ou négatif, on peut montrer que

$$F(\lambda; x) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi, \qquad \text{pour } \mathcal{R}[\lambda] \text{ assez grand } > 0$$

et

$$= \int_0^{-\infty} e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi, \qquad \text{pour } \mathcal{R}[\lambda] \text{ assez grand } < 0$$

ce qui permet de constater que la somme des résidus de $F(\lambda; x)$ est $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Au lieu de faire jouer le même rôle aux divers résidus de $F(\lambda; x)$, on peut leur attribuer des poids et les énumérer de manières variées, ce qui conduit à des procédés de sommation analogues à ceux employés dans la théorie des séries de Fourier, qu'on retrouve du reste en prenant pour δ l'opérateur de différentiation finie.

2ème partie. Formalisme de développements plus généraux

4/- Le formalisme exposé dans la première partie s'étend aux cas où on remplace l'opérateur de dérivation par un opérateur linéaire $\vartheta[f]$ possédant un spectre continu S dans le plan complexe :

$$\vartheta[j_\lambda(x)] = \varphi(\lambda)\, j_\lambda(x).$$

On doit de plus faire l'hypothèse supplémentaire que les seules solutions de l'équation

$$\vartheta[f] = \varphi(\lambda)\, f$$

pour λ appartenant à S, sont de la forme $k\, j_\lambda(x)$, k étant une constante. Cette nécessité conduit souvent à restreindre l'ensemble A des fonctions f que l'on considère. Le reste suit comme plus haut : Si l'équation

$$\vartheta[f] = \varphi(\lambda)\cdot f + g$$

possède une solution f appartenant à l'ensemble linéaire A, elle en possède une infinité d'autres de la forme $f + k\, j_\lambda(x)$; désignons encore par $\mathcal{L}_\lambda[g]$ l'une de ces solutions, choisie arbitrairement mais d'une manière déterminée ; on a

$$\mathcal{L}_\lambda[j_\rho(x)] = \frac{j_\rho(x)}{\varphi(\rho) - \varphi(\lambda)} + k\, j_\lambda(x)$$

k dépendant de λ et de ρ. On notera que la fonction $\varphi(\lambda)$ est nécessairement univalente sur S.

Si on envisage ensuite une fonctionnelle linéaire $\delta[f]$ telle que

$$\delta[\delta_\lambda(x)] = A(\lambda)$$

soit définie et dérivable sur S, et y possède une infinité de zéros

$$\lambda_1 ; \lambda_2 ; \dots ; \lambda_n ; \dots$$

supposés tous simples, ~~[illegible]~~ pour fixer les idées, et si on considère une fonction $f(x)$ développable en une série de la forme

$$f(x) = \sum_n a_n \delta_{\lambda_n}(x)$$

le même procédé formel que celui donné plus haut pour les séries d'exponentielles, fournit une détermination très simple des a_n, par la formule

$$a_n = \frac{\delta\{\rho_{\lambda_n}[f]\}}{B(\lambda_n)}$$

où on a posé

$$B(\lambda) = \lim_{\substack{\mu \in S \\ \lambda \in S \\ \mu \to \lambda}} \frac{A(\mu) - A(\lambda)}{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)} ;$$

5./ Exemples.

a/ Séries de Taylor - On prend $\vartheta[f] = x \frac{df}{dx}$ et $\delta_\lambda(x) = x^\lambda$; S est tout le plan complexe, $\varphi(\lambda) = \lambda$. L'hypothèse d'unicité, à un facteur près, de la solution de

$$\vartheta[f] = \lambda f$$

est satisfaite d'elle-même. Il n'y a aucune restriction à apporter à la classe linéaire A qui est formée de fonctions analytiques $f(x)$ définies en étant seulement

multiformes dans un voisinage de l'origine du plan des x. Comme solution de 14

$$\mathfrak{D}[f] = \lambda f + g$$

on choisira

$$f(x) = \mathfrak{L}_\lambda[g] = \int_a^x \left(\frac{x}{\xi}\right)^\lambda \cdot g(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi}$$

a étant une constante complexe non nulle. Pour obtenir la série de Taylor, il faut prendre pour $\delta[f]$ la circulation de f sur un contour entourant l'origine; ~~en~~ partant du ~~point~~ point a, en y revenant; il vient alors

$$\delta[x^\lambda] = A(\lambda) = a^\lambda \left[e^{2\pi i \lambda} - 1\right]$$

dans les zéros sont les entiers positifs et négatifs : $\lambda = n$; on trouve facilement $B(n) = a^n \cdot 2\pi i$, puis

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot d\xi$$

on retrouve l'expression des coefficients de la série de Laurent. [C'est un contour entourant l'origine pris dans le sens direct]

b/ <u>Séries de Bessel</u>. La classe linéaire A est celle formée des fonctions $f(x)$ de la variable réelle x, définies et deux fois dérivables dans $[0; +\infty)$, leur dérivée première étant nulle à l'origine. On prend

$$\mathfrak{D}[f] = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{df}{dx} \qquad (\text{avec } \mathcal{R}[p] > -\tfrac{1}{2})$$

et

$$J_\lambda(x) = \frac{2^p \cdot p!}{(\lambda x)^p} \cdot J_p(\lambda x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{p!}{(p+k)!} \left(\frac{\lambda i x}{2}\right)^{2p},$$

on a

$$\mathcal{D}[j_\lambda(x)] = -\lambda^2 j_\lambda(x)$$

l'ensemble S étant défini par

$$\mathcal{R}[\lambda] > 0 \quad ; \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}[\lambda] = 0 \; ; \quad \mathcal{I}[\lambda] \geq 0.$$

Toutes les conditions sont remplies et on peut prendre, pour solution de

$$\mathcal{D}[f] = -\lambda^2 f + g$$

appartenant à A, l'expression suivante :

$$\mathcal{L}_\lambda[g(x)] = \frac{\pi}{2 x^p} \int_0^x \xi^{p+1} \left[N_p(\lambda x) J_p(\lambda \xi) - J_p(\lambda x) N_p(\lambda \xi) \right] g(\xi) \, d\xi$$

(en introduisant les fonctions de Bessel de première et seconde espèce J_p et N_p). Cette expression a un sens et donne une fonction appartenant à la classe A si

1°/ $g(x)$ est définie et intégrable pour $x \geq 0$

2°/ $\lim_{x=0} [x \cdot g(x)] = 0$

3°/ $\int_0 x^{2p+1} g(x) \, dx$ converge uniformément.

On peut envisager de formes diverses de fonctionnelles δ :

α/ $\delta[f(x)] = f(\omega)$; (ω réel positif), donne

$$A(\lambda) = \frac{2^p p!}{(\lambda\omega)^p} J_p(\lambda\omega)$$

et fournit le formalisme des séries de Fourier-Bessel

β/ $\delta[f(x)] = (H + p) f(\omega) + \omega f'(\omega)$; (ω réel positif ; H réel), donne

$$A(\lambda) = \frac{2^p \cdot p!}{(\lambda\omega)^p} \left[H\, J_p(\lambda\omega) + \lambda\omega\, J'_p(\lambda\omega) \right]$$

et fournit le formalisme des séries de Bessel-Dini.

γ/. $$\delta[f(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi \cdot \sin\theta)\, \frac{\sin^{2p+1}\theta}{\cos^{2p}\theta}\, d\theta \quad ; \quad (\text{avec } -\tfrac{1}{2} \leq \mathcal{R}[p] \leq +\tfrac{1}{2})$$

donne

$$A(\lambda) = \frac{p!}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\tfrac{1}{2} - p\right) \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}$$

et fournit le formalisme des séries de Schlömilch.

ε/. Séries inverses de factorielles.

DELR003

- IV -

Inversion des opérateurs du groupe des translations.

1-/ Inversion d'opérateurs réguliers pour certaines formes du second membre -

La théorie des polynomes Bernoulliens permet l'inversion dans le champ des polynomes. Plus généralement, si δ est un opérateur régulier d'indicatrice $A(\lambda)$,

$$\varepsilon_x [f(\xi)] = e^{-ax} \delta_x [e^{a\xi} f(\xi)]$$

est encore un opérateur régulier d'indicatrice $A(\lambda + a)$, et les polynomes Bernoulliens relatifs à cet opérateur permettent d'inverser l'opérateur δ dans le champ des fonctions qui sont le produit de e^{ax} par un polynome.

2/ Inversion des opérateurs finis - Nous dirons qu'un opérateur δ est "fini" si le calcul de $\delta_0 [f(\xi)]$ n'utilise les valeurs de la fonction $f(x)$, (et d'un certain nombre de ses dérivées) dans un intervalle fini $[0; a]$; alors le calcul de $\delta_x [f(\xi)]$ n'utilise les valeurs des mêmes fonctions que dans l'intervalle $[x; x+a]$. (a est l'amplitude de l'opérat.) Nous appellerons "Problème de Cauchy généralisé" le problème suivant : δ étant un opérateur fini d'amplitude a, et $g(x)$ une fonction connue dans $(-\infty ; +\infty)$, inverser l'équation

$$\delta_x [f(\xi)] = g(x)$$

connaissant les valeurs de $f(x)$ dans un intervalle de longueur a, par exemple $[0; a]$, ces valeurs satisfaisant naturellement à la condition

$$\delta_0 [f(\xi)] = g(0).$$

Il est possible de donner de ce problème une solution formelle pourvu que δ ait une indicatrice entière $A(\lambda)$ ayant une infinité de zéros : $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \ldots ; \lambda_n ; \ldots$ dont

aucun n'est nul.

Supposons donc qu'il existe une solution $f(x)$ et soit y un nombre réel arbitraire, mais fixe ; posons

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{g(y)}{A(0)}$$

on a

$$\delta_y [\varphi(\xi)] = 0$$

Supposons encore que $\varphi(x)$ soit prolongeable dans $(-\infty, +\infty)$ suivant une fonction moyenne-périodique par rapport à δ : $\Phi(x)$; supposons enfin que $\Phi(x)$ soit développable en exponentielles-moyenne-périodiques ; on aura alors, d'après $\underline{III}_a$

$$\Phi(x) = \sum_n \frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)} \cdot \delta_0 \left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_n(\xi - z)} \Phi(z)\, dz \right]$$

les différents termes du second membre s'écrivent aussi

$$\frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)} \cdot \delta_0 \left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_n(\xi - z)} \Phi(z)\, dz \right]$$

Sous cette forme on voit, l'opérateur δ étant fini, que le calcul des coefficients ne fait intervenir que les valeurs de $\Phi(x)$ dans $[y ; y+a]$; ~~[illegible]~~ on peut donc écrire

$$\Phi(x) = \sum_n \frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)} \left\{ \delta_0 \left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_n(\xi - z)} f(z)\, dz \right] + \frac{e^{-\lambda_n y} g(y)}{\lambda_n} \right\}$$

Pour x dans $[y ; y+a]$ on a

$$f(x) = \frac{g(y)}{A(0)} + \sum_n \frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)} \left\{ \delta_0 \left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_n(\xi - z)} f(z)\, dz \right] + \frac{e^{-\lambda_n y} g(y)}{\lambda_n} \right\}$$

On a d'ailleurs

$$\delta_0\left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_n(\xi-\sigma)} f(\sigma)\,d\sigma\right] = \delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_n(\xi-\sigma)} f(\sigma)\,d\sigma\right] + \int_0^{y} e^{-\lambda_n \xi}\, g(\xi)\,d\xi$$

de sorte que l'on a, quel que soit y, et pour $x \in [y;\ y+a]$

$$f(x) = \frac{g(y)}{A(0)} + \sum_n \frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)} \left\{ \delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_n(\xi-\sigma)} f(\sigma)\,d\sigma\right] + e^{-\lambda_n y}\,\frac{g(y)}{\lambda_n} + \int_0^{y} e^{-\lambda_n \xi}\, g(\xi)\,d\xi \right\}$$

le calcul des coefficients du second membre utilise les valeurs de $g(x)$ dans $(-\infty;\ +\infty)$ et celle de $f(x)$ dans $[0;\ a]$; le problème posé est donc formellement résolu. Cette solution suppose que $f(x)$ existe, que les valeurs de $f(x)$ dans tout intervalle de longueur a sont prolongeables dans $(-\infty,\ +\infty)$ en fonction moyenne-périodique par rapport à δ, et qu'enfin ces prolongements moyenne-périodiques sont développables en séries d'exponentielles suivant l'algorithme exposé au III a.

3- Application au cas où δ est un opérateur différentiel à coefficients constants. On retombe alors sur un problème de Cauchy au sens classique.

En exécution des décisions de l'Escorial : DELR003

PROJET DETAILLÉ DE CALCUL LINÉAIRE.

PLAN : Laïus scurrile ; objet du calcul linéaire.

I.- Etude du groupe des translations sur la droite ; caractères ; opérateurs de translation ; opérateurs du groupe ; propriétés de ces derniers ; exemples.

II.- Polynomes bernouilliens attachés à un opérateur du groupe des translations ; opérateurs réguliers normaux et anormaux ; indicatrices ; propriétés diverses ; applications : formule de Taylor, polynomes de Bernouilli, formule d'Euler-Mac. Laurin, polynomes d'Hermite, de Legendre, etc.

III.- Formalisme général des développements en série :
a) Développement en séries d'exponentielles à partir de l'opérateur de dérivation ; formation du produit de composition généralisé ; cas des fonctions moyenne-périodiques ; idée de la démonstration de convergence. B
b) Formalisme des développements suivant certaines fonctions propres d'un opérateur possédant un spectre continu ; exemples: séries de Taylor, séries de Bessel, (Fourier-Bessel, Bessel-Dini, Schlömilch), séries inverses de factorielles.

IV.- Retour sur les opérateurs du groupe des translations ; inversion de ces opérateurs quand ils sont finis ; problème analogue au problème de Cauchy, solution formelle.

-=-=-=-=-=-=-=-=-

- I -

Laïus scurrile.- L'objet du calcul linéaire est de réunir dans le cadre d'un formalisme unique un grand nombre de techniques diverses de l'analyse, qui, toutes, se rattachent à l'idée de linéarité, car elles utilisent les propriétés formelles les plus immédiates des opérateurs fonctionnels linéaires.

1) Définition du groupe des translations sur la droite : la transformation t_a de ce groupe fait correspondre au nombre réel x, le nombre réel $y = x + a$, où a est réel.

2) Propriété formelle servant de définition aux caractères $j_\lambda(x)$ de ce groupe :

$$j_\lambda(x + y) = j_\lambda(x) . j_\lambda(y)$$

Les seuls caractères continus sont les exponentielles $e^{\lambda x}$ où λ est un paramètre complexe.

3) L'opérateur de translation est l'opérateur linéaire fonctionnel $T_y[f]$, qui, à la fonction f(x) de la variable réelle x, fait correspondre la fonction $f(x + y)$, x étant la variable et y, réel, jouant le rôle de paramètre.

4) Les opérateurs attachés au groupe des translations, brièvement, les opérateurs du groupe, sont les opérateurs linéaires fonctionnels permutables avec tout opérateur de translation. La transformée g(x) de la fonction f(x) par un tel opérateur δ sera notée

$$g(x) = \delta_x[f(\xi)]$$

et la propriété de définition se traduit par la condition

$$\delta_{x+y}[f(\xi)] = \delta_x[f(\xi + y)]$$

en particulier on a

$$\delta_x[f(\xi)] = \delta_0[f(\xi + x)]$$

égalité qui rattache ces opérateurs aux fonctionnelles linéaires.

.....

DELR 003

Théorème I. Si l'application de l'opérateur δ au caractère $e^{\lambda x}$ est possible, on a

$$\delta_x [e^{\lambda \xi}] = A(\lambda)\, e^{\lambda x}$$

$A(\lambda)$ ne dépend que de λ, c'est l'indicatrice de l'opérateur δ ; en général, elle n'est définie que sur un sous-ensemble du plan com-plexe de la variable λ.

Théorème II. Si δ et ε sont deux opérateurs du groupe et si la fonction $f(x)$ est telle que

$$g(x) = \delta_x [f(\xi)] ; \quad h(x) = \varepsilon_x [f(\xi)], \quad k(x) = \varepsilon_x [g(\xi)] ; \quad m(x) = \delta_x [h(\xi)]$$

existent, alors $k(x) = m(x)$.

5) Exemples : Combinaisons linéaires à coefficients constants d'opéra-teurs de translation,

Opérateur de composition : $\delta_x [f(\xi)] = \int h(\xi) f(x+\xi)\, d\xi$;

Opérateurs différentiels à coefficients constants,

Opérateurs plus généraux de Bochner.

- II -

1) Définitions. Un opérateur δ attaché au groupe des translations est dit régulier,

a.- s'il est défini dans le champ des polynomes,

b.- si son indicatrice $A(\lambda)$ est définie et holomorphe dans un voisinage de l'origine du plan des λ.

Il ne sera question dans ce paragraphe que de tels opérateurs.

Un opérateur régulier est normal si $A(o) = o$. L'application d'un tel opérateur à un polynome donne un polynome de même degré.

Un opérateur régulier est anormal d'ordre p si $\lambda = o$ est un zéro d'ordre p de l'indicatrice. On constate aisément de proche en proche qu'alors

$$\delta_0 [\xi^q] = o$$

pour q entier inférieur à p, de sorte que l'application d'un tel opérateur à un polynome de degré n supérieur à p, donne un polynome de degré $n - p$.

Théorème I. Si $\delta_x [f(\xi)]$ est anormal d'ordre p, l'opérateur

$$\varepsilon_x [f(\xi)] = \delta_x [F(\xi)]$$

où F désigne une primitive quelconque d'ordre p et f, est un opérateur normal.

2) Supposons maintenant l'opérateur δ régulier et normal ; soit $A(\lambda)$ son indicatrice. Les polynomes bernouilliens attachés à cet opérateur sont définis par le développement

$$\frac{e^{\lambda x}}{A(\lambda)} = B_0(x) + \lambda B_1(x) + \cdots + \lambda^n B_n(x) + \cdots$$

leur degré est marqué par leur indice ; on a

$$\frac{d\, B_n}{d\, x} = B_{n-1}(x) ;$$

enfin l'application de l'opérateur δ aux deux membres de la relation de définition, montre, de proche en proche, que l'on a

$$\delta_x [B_n(\xi)] = \frac{x^n}{n!}$$

3) Les polynomes bernouilliens permettent d'inverser un opérateur régulier et normal dans le champ des polynomes : l'équation

$$\delta_a [f(\xi)] = \sum_{p=0}^{n} a_p \frac{x^p}{p!} = g(x) \qquad \cdots\cdots$$

a pour unique solution polynominale

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p B_p(x)$$

On peut encore écrire

$$\delta_x[f(\xi+y)] = g(x+y) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \frac{d^p g}{dy^p}$$

et

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\, \delta_y\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right]$$

4) On peut généraliser la formule précédente. Si $f(x)$ possède des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$, il vient, par intégration par parties:

$$\int_0^{\xi-x-y} B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\, f^{(p)}(\xi) - \sum_{p=0}^{n} B_p(\xi-y)\, f^{(p)}(x+y)\ ;$$

puis, en prenant les δ des deux membres, (en supposant seulement que les $\delta_y\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right]$ existent) :

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\, \delta_y\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] - \delta_y\left[\int_0^{\xi-x-y} B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta\right]\ ;$$

c'est la formule sommatoire générale.

5) Exemples.

a. L'opérateur δ est l'opérateur identique ; on a $B_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et la formule sommatoire se réduit à la formule de Taylor.

b. L'opérateur δ est l'opérateur de différentiation finie normalisé :

$$\delta_x[f(\xi)] = \int_0^x f(x+\xi)\, d\xi\ ;$$

les polynomes $B_n(x)$ sont liés simplement aux polynomes de Bernouilli classiques. La formule sommatoire donne facilement la formule d'Euler-Mac. Laurin.

c. L'opérateur δ a pour expression

$$\delta_x[f(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} f(x+\xi)\, d\xi\ ;$$

et on a

$$B_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^n\, n!}\, e^{-x^2} \frac{d}{dx} e^{x^2}\ ;$$

Ces polynomes sont liés aux polynomes d'Hermite $D_n(x)$ par la formule

$$B_n(x) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^{n/2}\, n!} \cdot D_n\left(ix\sqrt{2}\right)\ ;$$

d. L'opérateur δ a pour expression

$$\delta_x[f(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+\xi)}{4 \operatorname{Ch} \frac{\pi\xi}{2}}\, d\xi\ ;$$

son indicatrice

$$A(\lambda) = \delta_0\left[e^{\lambda\xi}\right]$$

définie pour $\Re[\lambda] < \pi/2$, a pour valeur $1/2 \cos\lambda$; on a

$$B_n(x) = \frac{2^n}{n!} \cos n\varphi \cdot \operatorname{cosec}^n \varphi$$

avec $x = \operatorname{cotg} \varphi$

.....

DELR 003

ces polynomes sont liés aux polynomes de Tchebitchef par la formule

$$B_n(x) = \frac{2^n}{n!}(1+x^2)^{n/2}\, T_n\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right] ;$$

e. Les polynomes orthogonaux classiques peuvent être considérés comme des polynomes bernouilliens ; considérons, par exemple; les polynomes de Legendre et de Laguerre, définis de la manière suivante :

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{du^n}\left[(u^2-1)^n\right] ; \quad L_n(u) = (-1)^n u^{1-\alpha} e^u \frac{d^n}{du^n}\left[u^{n+\alpha-1} e^{-u}\right] ;$$

Ils satisfont aux relations de récurrence

$$(1-u^2)P_n' + n u P_n - n P_{n-1} = 0 ; \quad uL_n' - nL_n - n(n+\alpha-1)L_{n-1} = 0$$

Si on pose

$$B_n(x) = \frac{1}{n!}(1+x^2)^{n/2} P_n\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right] ; \quad C_n(x) = \frac{(-x)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha)} L_n\left(\frac{1}{x}\right) ;$$

on constate que ces relations deviennent

$$\frac{dB_n}{dx} = B_{n-1} ; \qquad \frac{dC_n}{dx} = C_{n-1}$$

Les polynomes B_n et C_n peuvent donc être regardés comme bernouilliens, on a d'ailleurs

$$\sum_n \lambda^n B_n(x) = J_0(\lambda) e^{\lambda x} \quad \text{et} \quad \sum_n \lambda^n C_n(x) = 2^{1-\alpha} \lambda^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{\alpha-1}(2\sqrt{\lambda})\, e^{\lambda x} ;$$

en introduisant les fonctions de Bessel de première espèce ; on est donc amené à rechercher les opérateurs δ ayant pour indicatrices

$$1/J_0(\lambda) \qquad \text{et} \qquad 2^{\alpha-1}\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} \Big/ J_{\alpha-1}(2\sqrt{\lambda})$$

Ils sont la forme d'un produit de composition, pris sur l'intervalle $(-\infty ; +\infty)$; les noyaux $k(x)$ de ces opérateurs s'obtiennent à l'aide des formules d'inversion de Laplace et de Fourier ; ils ne se ramènent pas aux transcendantes classiques. On a des résultats analogues, mais un peu plus compliqués pour les polynomes de Jacobi.

- III -

Première partie. Formalisme des développements en séries d'exponen-tielles.

1) Considérons l'opérateur de dérivation,

$$\vartheta[f] = \frac{df}{dx}$$

il admet pour fonctions propres les exponentielles $e^{\lambda x}$; on a $\vartheta[e^{\lambda x}] = \lambda e^{\lambda x}$; et les seules solutions de l'équation $\vartheta[f] = \lambda f$ sont de la forme $k e^{\lambda x}$, k étant une constante quelconque. Si donc l'équation

$$\vartheta[f] = \lambda f + g \qquad (1)$$

possède une solution f, elle en possède une infinité : $f + k e^{\lambda x}$.
Il est clair d'autre part qu'une solution de

$$\vartheta[f] = \lambda f + e^{\mu x}$$

est

$$e^{\mu x}/(\mu - \lambda)$$

DEL R 003

Supposons donc que g soit tel que (1) ait des solutions ; désignons par $\rho_\lambda[g]$ l'une d'entre elles, choisie arbitrairement, mais d'une manière déterminée. On aura

$$\rho_\lambda[e^{\mu x}] = \frac{e^{\mu x}}{\mu - \lambda} + k\, e^{\lambda x}$$

k dépendant de λ et μ. On peut prendre par exemple

$$\rho_\lambda[g] = \int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} g(\xi)\, d\xi ;$$

alors

$$\rho_\lambda[e^{\mu x}] = \frac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda}$$

2) Considérons maintenant une fonctionnelle linéaire $\delta[f]$, telle que

$$\delta[e^{\lambda x}] = A(\lambda)$$

soit une fonction analytique de λ possédant une infinité de zéros

$$\lambda_1 ; \lambda_2 ; \cdots ; \lambda_n ; \cdots$$

que, pour fixer les idées, nous supposerons tous simples. Envisageons une fonction $f(x)$ développable en série procédant suivant les exponentielles $e^{\lambda_n x}$:

$$f(x) = \sum_n a_n e^{\lambda_n x} ;$$

on a formellement

$$\rho_\lambda[f(\xi)] = \sum_n a_n \frac{e^{\lambda_n x} - e^{\lambda x}}{\lambda_n - \lambda}$$

puis

$$\delta\{\rho_{\lambda_n}[f]\} = a_n A'(\lambda_n) ;$$

et par suite

$$a_n = \frac{1}{A'(\lambda_n)} \cdot \delta\left[\int_0^\xi e^{\lambda_n(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta\right] ;$$

d'où une détermination formelle des coefficients a_n du développement.

3) Reprenons maintenant un opérateur δ attaché au groupe des translations et supposons que son indicatrice $A(\lambda)$ soit une fonction entière de λ ayant une infinité de zéros, tous simples,

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots ; \lambda_n ; \cdots$$

Une fonction $f(x)$ est moyenne-périodique par rapport à l'opérateur δ si $\delta_x[f(\xi)]$ est identiquement nulle. Les exponentielles $e^{\lambda_n x}$ sont évidemment moyenne-périodiques. Par analogie avec le cas bien connu des fonctions périodiques, on peut présumer que toute fonction moyenne-périodique sera développable en série d'exponentielles moyenne-périodiques :

$$f(x) = \sum_n a_n e^{\lambda_n x}$$

Le formalisme que nous venons d'indiquer donne alors

$$a_n = \frac{1}{A'(\lambda_n)} \delta_\xi\left[\int_0^\xi e^{\lambda_n(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta\right] ;$$

DEL R003

(25)

On pout démontrer la validité do tels développements en faisant des hypothèses convenables sur la fonction f(x) et sur l'opérateur δ . Il est naturel d'envisager la somme des résidus de la fonction de λ :

$$F(\lambda;x) = \frac{e^{\lambda x}}{A(\lambda)}\,\delta_\xi\left[\int_0^\xi e^{\lambda(\xi-\beta)} f(\beta)\,d\beta\right];$$

si f(x) est moyenne-périodique, et de croissance au plus exponentielle pour x infiniment grand positif ou négatif, pn peut montrer que

$$F(\lambda;x) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi \qquad \text{pour } \mathcal{R}[\lambda] \text{ assez grand positif,}$$

et

$$= \int_0^{-\infty} e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi \qquad \text{pour } \mathcal{R}[\lambda] \text{ assez grand négatif.}$$

cette remarque permet de constater que la somme des résidus de $F(\lambda\,;\,x)$ est $1/2\,[f(x+0)+f(x-0)]$. Au lieu de faire jouer le même rôle aux divers résidus de $F(\lambda;x)$, on peut leur attribuer des poids et les énumérer de manières variées, ce qui conduit à des procédés de sommation analogues à ceux employés dans la théorie des séries de Fourier, qu'on retrouve en prenant pour δ l'opérateur de différentiation finie.

La combinaison

$$\delta_x\left[\int_0^\xi f(\xi-\beta)\,g(\beta)\,d\beta\right]$$

joue un grand rôle dans ce qui précède ; on la rencontre déjà dans l'expression du reste de la formule sommatoire générale ; elle joue, dans la détermination des coefficients des exponentielles moyenne-périodiques dans le développement d'une fonction moyenne-périodique, le même rôle que le produit de composition dans la détermination des coefficients de Fourier d'une fonction périodique ; elle se réduit d'ailleurs à ce produit de composition si δ est l'opérateur de différentiation finie et si f et g sont périodiques par rapport à cet opérateur ; la combinaison en question est donc une sorte de produit de composition généralisé.

<u>Deuxième partie</u> . Formalisme de développements plus généraux.

4) Le formalisme exposé dans la première partie s'étend au cas où on remplace l'opérateur de dérivation par un opérateur linéaire $\mathfrak{D}[f]$ possédant un spectre continu S dans le plan complexe

$$\mathfrak{D}[f_\lambda(x)] = \varphi(\lambda)\,f_\lambda(x)\,;$$

On doit de plus faire l'hypothèse que les seules solutions de l'équation

$$\mathfrak{D}[f] = \varphi(\lambda)\,f \qquad (1)$$

pour λ appartenant à S, sont de la forme $k\,f_\lambda(x)$, k étant une constante. Cette nécessité conduit souvent à restreindre l'ensemble des fonctions f auxquelles est applicable l'opérateur $\mathfrak{D}$. Soit donc A la classe linéaire des fonctions f telles que les seules solutions de (1) appartenant à A soient de la forme $k\,f_\lambda(x)$. Ceci étant posé, le reste suit comme plus haut :

Si l'équation

$$\mathfrak{D}[f] = \varphi(\lambda)\,f + g$$

possède une solution f appartenant à A, elle en possède une infinité, de la forme $f + k\,f_\lambda(x)$; désignons encore par $\mathcal{L}_\lambda[g]$ l'une de ces solutions, choisie arbitrairement, mais d'une manière déterminée. On a

$$\mathcal{L}_\lambda[f_\mu(x)] = \frac{f_\mu(x)}{\varphi(\mu)-\varphi(\lambda)} + k\,f_\lambda(x)$$

DELR 003

la constante k dépendant de λ et μ . On notera que la fonction φ est nécessairement univalente sur S.

Si on envisage ensuite une fonctionnelle linéaire δ telle que

$$\delta[J_\lambda(x)] = A(\lambda)$$

soit définie et dérivable sur S, et y possède une infinité de zéros

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

supposés tous simples, par exemple, et si on considère une fonction f(x) développable en une série de la forme

$$f(x) = \sum_n a_n J_{\lambda_n}(x)$$

le procédé formel déjà employé fournit une détermination des a_n par la formule

$$a_n = \frac{\delta[\rho_{\lambda_n}[f]]}{B(\lambda_n)}$$

où on a posé

$$B(\lambda) = \lim_{\substack{\mu \in S \\ \lambda \in S \\ \mu \to \lambda}} \frac{A(\lambda) - A(\mu)}{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)} ;$$

5) Exemples.

a. Séries de Taylor.- On prend

$$\vartheta[f] = x \frac{df}{dx} ;$$

et $J_\lambda(x) = x^\lambda$; S est tout le plan complexe, $\varphi(\lambda) = \lambda$; l'hypothèse d'unicité à un facteur près, de la solution de

$$\vartheta[f] = \lambda f$$

est satisfaite d'elle-même ; il n'y a aucune restriction à faire pour définir la classe linéaire A qui est formé des fonctions analytiques f(x) définies et éventuellement multiformes dans un voisinage de l'origine du plan des x. Comme solution de

$$\vartheta[f] = \lambda f + g$$

on choisira

$$f(x) = \rho_\lambda[g] = \int_a^x \left(\frac{x}{\xi}\right)^\lambda g(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi} ;$$

a étant une constante non nulle. On obtiendra la série de Taylor en prenant pour δ la variation de la fonction f(x) par circulation de x dans le sens positif sur un contour entourant l'origine, partant de a et y revenant. Il vient alors

$$\delta[x^\lambda] = A(\lambda) = a^\lambda [e^{2\pi i \lambda} - 1] ;$$

dont les zéros sont les entiers positifs et négatifs : $\lambda = n$;

on trouve $B(n) = 2\pi i \cdot a^n$, puis

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi ;$$

ce qui redonne l'expression des coefficients de la série de Laurent. (C est un contour entourant l'origine et pris dans le sens direct).

b. Séries de Bessel.- La classe linéaire A est formée des fonctions f(x) de la variable réelle x, définies et deux fois dérivables dans $[0, +\infty)$, leur dérivée première étant nulle pour x = 0.

On prend

$$\vartheta[f] = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{df}{dx} \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{R}[p] > -\frac{1}{2}$$

DELR003

et

$$J_\lambda(x) = \frac{2^p \cdot p!}{(\lambda x)^p} \cdot J_p(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{p!}{(n+p)!} \left(\frac{\lambda i x}{2}\right)^{2p} ;$$

on a

$$\vartheta[J_\lambda(x)] = -\lambda^2 J_\lambda(x) ;$$

l'ensemble S étant défini par

$$\Re[\lambda] > 0 \qquad \text{ou} \qquad \Re[\lambda] = 0 \; ; \; \Im(\lambda) \geqslant 0 ;$$

toutes les conditions sont remplies et on peut prendre pour solution de

$$\vartheta[f] = -\lambda^2 f + g$$

appartenant à A, l'expression suivante

$$\ell_\lambda[g] = \frac{\pi}{2^p x^p} \int_0^x \xi^{p+1} \left[N_p(\lambda x) J_p(\lambda \xi) - J_p(\lambda x) N_p(\lambda \xi)\right] g(\xi)\, d\xi ;$$

(en introduisant les fonctions de Bessel de première et seconde espèce J_p et N_p) Cette expression a un sens et donne une fonction appartenant à A si g(x) est définie et intégrable pour x positif, Lim. (x.g) = 0 quand x tend vers zéro, et si

$\int_0 x^{2p+1} g(x)\,dx$ converge uniformément.

On peut envisager des formes diverses de fonctionnelles δ :

a) $\delta[f(x)] = f(\omega)$; (ω réel positif) donne $A(\lambda) = \frac{2^p \cdot p!}{(\lambda\omega)^p} \cdot J_p(\lambda\omega)$

et fournit le formalisme des séries de Fourier-Bessel.

b) $\delta[f(x)] = (H+p) f(\omega) + \omega f'(\omega)$; (ω réel positif, H réel) donne

$$A(\lambda) = \frac{2^p \cdot p!}{(\lambda\omega)^p} \cdot \left[H J_p(\lambda\omega) + \lambda\omega J'_p(\lambda\omega)\right]$$

et fournit le formalisme des séries de Bessel-Dini.

c) $\delta[f(x)] = \int_0^{\pi} f(\eta + \omega\theta) \frac{\sin^{2p+1}\theta}{\cos^{p+1}\theta}\, d\theta$; (avec $-\frac{1}{2} < \Re[p] < +\frac{1}{2}$) donne

$$A(\lambda) = \frac{p!}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right) \frac{\sin \lambda\eta}{\lambda\eta}$$

fournit le formalisme des séries de Schlömilch.

c. Séries inverses de factorielles. On prend

$$\vartheta[f] = x\left[f(x-1) - f(x)\right]$$

et

$$J_\lambda(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1+\lambda)}$$

Si la fonctionnelle $\delta[f]$ est choisi de telle sorte que les zéros de A(λ) soient les entiers positifs, on retrouve les séries inverses de factorielles classiques.

- IV -

Inversion des opérateurs du groupe des translations.

1) Inversion d'opérateurs réguliers pour certaines formes du second membre. La théorie des polynomes bernouilliens permet d'effectuer l'inversion dans le champ des polynomes. Plus généralement, si δ est un opérateur régulier d'indicatrice A(λ),

DELR003

$$\varepsilon_x[f(\xi)] = e^{-ax}\,\delta_x[e^{a\xi}f(\xi)]$$

est encore un opérateur régulier d'indicatrice $A(\lambda + a)$ et les polynomes bernoulliens relatifs à cet opérateur permettent d'inverser l'opérateur dans le champ des fonctions qui sont le produit d'un polynome par l'exponentielle e^{ax}.

2. Inversion des opérateurs finis.

Nous dirons qu'un opérateur δ est fini si le calcul de $\delta_0[f(\xi)]$ n'utilise les valeurs de la fonction f(x) et d'un certain nombre de ses dérivées que dans un intervalle fini $[0 ; a]$; alors le calcul de $\delta_x[f(\xi)]$ n'utilise les valeurs des mêmes fonctions que dans l'intervalle $[x ; x + a]$. a sera appelé l'amplitude de l'opérateur.

Nous désignerons sous le nom de problème de Cauchy généralisé la question suivante : δ étant un opérateur fini d'amplitude a, et g(x) une fonction connue dans $(-\infty ; +\infty)$, inverser l'équation

$$\delta_x[f(\xi)] = g(x)$$

connaissant f(x) dans un intervalle de longueur a, par exemple $[0 ; a]$, ces valeurs satisfaisant naturellement à la condition

$$\delta_0[f(\xi)] = g(0)$$

Il est possible de donner de ce problème une solution formelle pourvu que δ ait une indicatrice entière $A(\lambda)$ ayant une infinité de zéros $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \ldots ; \lambda_n ; \ldots$ dont aucun n'est nul. Supposons donc qu'il existe une solution f(x) et soit y un nombre réel arbitraire, mais fixe. Posons

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{g(y)}{A(0)}$$

on a

$$\delta_y[\varphi(\xi)] = 0$$

Supposons encore que $\varphi(x)$ soit prolongeable dans $(-\infty, +\infty)$ suivant une fonction moyenne-périodique par rapport à δ : $\Phi(x)$; supposons enfin que $\Phi(x)$ soit développable en série d'exponentielles-moyenne-périodique ; on aura alors, d'après III_a,

$$\Phi(x) = \sum_n \frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)}\,\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_n(\xi-\eta)}\Phi(\eta)\,d\eta\right];$$

Les différents termes du second membre s'écrivent aussi

$$\frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)}\,\delta_0\left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_n(\xi-\eta)}\Phi(\eta)\,d\eta\right]$$

Sous cette forme on voit, l'opérateur δ étant fini, que le calcul des coefficients ne fait intervenir que les valeurs de $\Phi(x)$ dans $[y ; y + a]$; on peut donc écrire

$$\Phi(x) = \sum_n \frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)}\left\{\delta_0\left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_n(\xi-\eta)}f(\eta)\,d\eta\right] + e^{-\lambda_n y}\frac{g(y)}{\lambda_n}\right\};$$

et il vient pour x dans $[y ; y + a]$,

$$f(x) = \frac{g(y)}{A(0)} + \sum_n \frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)}\left\{\delta_0\left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_n(\xi-\eta)}f(\eta)\,d\eta\right] + e^{-\lambda_n y}\frac{g(y)}{\lambda_n}\right\};$$

DELR003

D'autre part

$$\delta_0\left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_n(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\right] = \delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_n(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\right] + \int_0^{y} e^{-\lambda_n \xi} g(\xi)\,d\xi \;;$$

de sorte que l'on a, quel que soit y, et pour $x \in [y\,;\, y+a]$:

$$f(x) = \frac{g(y)}{A(0)} + \sum_n \frac{e^{\lambda_n x}}{A'(\lambda_n)} \left\{ \delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_n(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\right] + e^{-\lambda_n y}\,\frac{g(y)}{\lambda_n} + \int_0^{y} e^{-\lambda_n \xi} g(\xi)\,d\xi \right\} ;$$

Le calcul des coefficients du second membre utilise les valeurs de g(x) dans $(-\infty\,,+\infty)$ et celles de f(x) dans $[0\,;\,a]$; le problème posé est donc formellement résolu. Cette solution suppose que f(x) existe, que les valeurs de f(x) dans tout intervalle de longueur a sont prolongeables dans $(-\infty\,;+\infty)$ en fonction moyenne-périodiques par rapport à δ , et qu'enfin ces prolongements moyenne-périodiques sont développables en séries d'exponentielles suivant l'algorithme exposé en III_a.

3) Application au cas où δ est un opérateur différentiel à coefficients constants. On retombe alors sur le problème de Cauchy au sens classique.

=-=-=-=-=-=-=-=-