RÉDACTION NON NUMÉROTÉE

COTE DELR 001

TITRE CALCUL OPÉRATIONNEL (ÉTAT 2-3)
DELSARTE (MANUSCRIT AUTOGRAPHE, PIÈCE UNIQUE)

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 87

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 87

Calcul opérationnel. Observations diverses et table des matières.

Ce qui suit n'est qu'une première rédaction faite d'un premier jet, en conséquence :

a/ ne tenir aucun compte du style ni des différentes numérotations, (paragraphes, théorèmes, formules)

b/ les quatre premiers paragraphes concernent des opérateurs à propos desquels il serait désirable de fixer une axiomatique, chose à laquelle le rédacteur n'est pas encore parvenu ; il a donc dû se contenter, dans l'énoncé de chaque théorème, de fixer les quelques hypothèses de calcul sous lesquelles ce théorème est valide. La question est donc ouverte.

Bourbaki

Plan détaillé [Heaviside]. - § 1 - Définitions et propriétés générales.

- Il est question dans ce qui suit des fonctions d'une variable réelle, qu'on désignera, suivant les circonstances par x, y, ξ, etc...
- Le domaine de définition X de ces fonctions est donc la droite indéfinie.
- Ce domaine est aussi l'espace du groupe des translations à un paramètre

$$x \to x+y.$$

- Parmi toutes les fonctions $f(x)$ de la variable réelle x, il en est qui jouent un rôle particulier relativement à ce groupe, ce sont les "caractères" du groupe, qui satisfont par définition à la propriété

$$f(x+y) = f(x)\, f(y)$$

Si on impose à ces caractères d'être des fonctions continues, on sait (¹) que les solutions de cette équation sont les fonctions exponentielles $e^{\lambda x}$, où λ peut prendre des valeurs complexes.

Opérateur linéaire. Il y a lieu de considérer les opérateurs linéaires définis sur tout ou partie de l'ensemble des fonctions de ~~une~~ variable réelle. Ces opérateurs $A(f)$ satisfont aux conditions habituelles :

$$\begin{cases} A(f+g) = A(f) + A(g) \\ A(kf) = k\,A(f) \end{cases}$$

k étant une constante quelconque.

Il y a intérêt à envisager simultanément ces opérateurs et le groupe des

---

(¹). - Démonstration ici ou ailleurs :

translations ; certains d'entre-eux vont se comporter de manière particulière relativement au groupe : ceux ainsi que les opérateurs de translation : $T_y(f)$ qui font correspondre à une fonction $f(x)$ la fonction $f(x+y)$, x étant la variable et y un paramètre, transforment un caractère $e^{\lambda x}$ en le multipliant par une constante $e^{\lambda y}$. Cette propriété n'est qu'un nouvel aspect de la propriété fondamentale des caractères. (7)

<u>Définition</u>. Nous dirons qu'un opérateur linéaire $\delta[f]$ est du groupe des translations quand il est permutable avec un opérateur de translation quelconque. Quand il y aura lieu de préciser les variables dans la fonction f et dans le résultat de l'application d'un tel opérateur à la fonction f, on le notera $\delta_x[f(\xi)] = g(x)$.

Ces opérateurs forment un groupe qui contient comme sous groupe le groupe des opérateurs de translation. Leur propriété de définition s'exprime par l'égalité

$$\delta_{x+y}[f(\xi)] = \delta_x[f(\xi+y)] \qquad (1)$$

quelles que soient x, y et f, pourvu que les deux membres aient un sens.

<u>Théorème</u> : L'application d'un opérateur du groupe à un caractère, quand elle est possible, reproduit ce caractère multiplié par une constante.

Soit $\delta[f]$ un opérateur du groupe ; supposons possible l'application de cet opérateur au caractère $e^{\lambda x}$; posons

$$g(x) = \delta_x [e^{\lambda \xi}]$$

Soit T_y un opérateur de translation ; on a

$$h(x) = T_y [g(\xi)] = g(x+y) = \delta_{x+y} [e^{\lambda \xi}] = \delta_x [e^{\lambda(\xi+y)}] = e^{\lambda y} \delta_x [e^{\lambda \xi}] = e^{\lambda y} g(x).$$

. L'égalité

$$g(x+y) = e^{\lambda y} g(x)$$

a lieu quelles que soient x et y ; faisant $x=0$, on en tire

$$g(y) = e^{\lambda y} g(0).$$

Ce qui prouve bien l'assertion.

La constante $g(0)$ n'est autre que $\delta_0 [e^{\lambda \xi}]$. Elle dépend de λ et de l'opérateur ; c'est une fonction $A(\lambda)$ qu'on appellera "indicatrice" de l'opérateur. Elle n'est pas définie en général pour toutes les valeurs complexes de λ.

<u>Exemples</u>

a/ <u>Opérateur de dérivation</u> : $\delta_x [f(\xi)] = \dfrac{df}{dx}$; l'indicatrice est λ.

b/ <u>Opérateur différentiel à coefficients constants :</u>

$$\delta_x [f(\xi)] = \sum_{p=0}^{n} a_p \frac{d^p f}{dx^p} ;$$

dont l'indicatrice est le polynome

$$A(\lambda) = \sum_{p=0}^{n} a_p \lambda^p ;$$

c/ <u>Opérateur de différentiation finie</u> :

$$\delta_x [f(\xi)] = f(x+a) - f(x)$$

a étant une constante réelle ; son indicatrice est la fonction entière

$$A(\lambda) = e^{a\lambda} - 1$$

d/ <u>Opérateur un peu plus général</u>

$$\delta_x [f(\xi)] = \int_a^b f(x+\xi) . d[\alpha(\xi)] \; ;$$

a et b étant des constantes finies. Son indicatrice est la fonction entière

$$A(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda\xi} \, d[\alpha(\xi)]$$

e/ <u>Opérateur de Fourier</u>

$$\delta_x [f(\xi)] = \lim_{y=+\infty} \frac{1}{2y} \int_{-y}^{+y} f(x+\xi) \, d\xi$$

L'indicatrice

$$A(\lambda) = \lim_{y=+\infty} \left[\frac{\sin \lambda y}{\lambda y} \right]$$

n'est pas définie pour $\mathcal{R}[\lambda] \neq 0$; elle est égale à 1 pour $\lambda = 0$

et elle est nulle pour λ imaginaire pure non nulle.

f/ <u>Opérateur de Laplace</u> :

$$\delta_x [f(\xi)] = \lim_{y=+\infty} \frac{1}{y} \int_0^y f(x+\xi) \, d\xi \; ;$$

l'indicatrice

$$A(\lambda) = \lim_{y=+\infty} \left[\frac{e^{\lambda y} - 1}{\lambda y} \right]$$

n'est pas définie pour $\mathcal{R}[\lambda] > 0$; elle est nulle pour $\mathcal{R}[\lambda] \leq 0$, sauf pour $\lambda = 0$; dans ce dernier cas elle a pour valeur l'unité.

<u>Remarque</u>. De la définition des opérateurs δ résulte que toute combinaison linéaire de tels opérateurs est encore un opérateur δ. En particulier les combinaisons linéaires d'opérateurs de translation et les limites de ces combinaisons, quand elles existent, sont des opérateurs δ. C'est ainsi que l'opérateur de dérivation s'écrit

$$\lim_{y=0} \frac{T_y - T_0}{y}$$

et que l'opérateur de différentiation finie a pour expression $T_a - T_0$; de la même manière l'opérateur envisagé en $\mathcal{L}$ se met symboliquement sous la forme

$$\delta = \int_a^b T_\xi \, d[\alpha(\xi)] \; ;$$

les opérateurs de translation forment évidemment un groupe abélien ; plus généralement les combinaisons linéaires d'opérateurs de translation sont aussi deux à deux permutables ; il y a plus, nous allons démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème 2</u>. Le groupe des opérateurs δ est abélien.

La démonstration repose sur la remarque suivante, qui est évidente :

Soit $\alpha[F]$ une fonctionnelle linéaire s'appliquant aux fonctions F d'une variable ξ ;

Soit $b[G]$ une autre fonctionnelle linéaire s'appliquant aux fonctions G d'une autre variable η ; considérons la fonction $f(\xi+\eta)$; $a[f(\xi+\eta)]$ est une fonction de η ; $b[f(\xi+\eta)]$ est une fonction de ξ ; on a

$$a\{b[f(\xi+\eta)]\} = b\{a[f(\xi+\eta)]\} ;$$

cela résulte immédiatement de ce que $f(\xi+\eta)$ est une fonction symétrique de ξ et η ;

Pour démontrer le théorème il suffit maintenant de tenir compte de la relation fondamentale (1). Soit δ un des opérateurs considérés ; le résultat de l'application de cet opérateur à la fonction $f(x)$ peut être regardé comme une fonctionnelle linéaire de la fonction $f(\xi+x)$ car

$$\delta_x[f(\xi)] = \delta_0[f(\xi+x)] ;$$

dans ces conditions, si ε est un autre opérateur du groupe, on a

$$\varepsilon_x[\delta_\xi\{f(\eta)\}] = \varepsilon_0[\delta_0\{f(\xi+\eta+x)\}] = \delta_0[\varepsilon_0\{f(\xi+\eta+x)\}] = \delta_x[\varepsilon_\xi\{f(\eta)\}]$$

d'après la remarque précédente. Les opérateurs ε et δ sont donc bien permutables.

- § 2 - Les opérateurs réguliers

Les opérateurs réguliers sont des opérateurs δ ayant un sens dans l'anneau des polynomes et tels de plus que leur indicatrice $A(\lambda)$ soit une fonction entière de λ.

Les opérateurs considérés en a, b, c, d, dans le paragraphe précédent, donnent des exemples d'opérateurs réguliers.

Un opérateur régulier transforme un polynome $P(x)$ de degré n en un autre polynome, on a en effet, compte tenu de la formule (1) et de la formule de Taylor pour les polynomes

$$\delta_x[P(\xi)] = \delta_0[P(\xi+x)] = \delta_0\left[\sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} P^{(p)}(\xi)\right] = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \delta_0[P^{(p)}(\xi)] \qquad (2)$$

en introduisant les dérivées successives du polynome P ; on voit de plus que le polynome transformé est au plus de degré n. En particulier l'application d'un opérateur régulier à une constante donne une constante qui peut éventuellement être nulle.

<u>Opérateurs réguliers normaux</u>. Un opérateur régulier sera dit normal lorsque son application à une constante non nulle fournit une constante non nulle. L'origine $\lambda=0$ n'est pas un zéro de l'indicatrice d'un tel opérateur, si k est une constante on a $\delta[k] = k\,A(0)$; enfin un opérateur régulier normal transforme un polynome de degré n en un polynome de même degré : en effet la formule (2) montre que le coefficient de x^n dans $\delta_x[P(\xi)]$ est $\frac{1}{n!} P^{(n)}(0)\,A(0)$.

<u>Opérateurs réguliers anormaux</u>. Un opérateur régulier sera dit anormal d'ordre p, p étant un entier positif, lorsque son application (si $A(\lambda)$ a un zéro d'ordre $p+1$) à un polynome quelconque de degré inférieur ou égal à p donne identiquement zéro. Il est nécessaire et suffisant, pour qu'il en soit ainsi, que $\delta_x[\xi^q] \equiv 0$ quelque

soit l'entier positif q inférieur ou égal à p, et que $\delta_x[\xi^{p+1}]$ ne soit pas identiquement nul ; si ces conditions sont remplies, l'opérateur δ transforme un polynome de degré $n > p$ en un polynome de degré $n-p-1$, on le constate sans peine en tenant compte de la formule (2). Ajoutons enfin que l'indicatrice $A(\lambda)$ d'un opérateur régulier anormal d'ordre p admet la valeur $\lambda = 0$ comme zéro d'ordre $p+1$; c'est ce qu'on vérifie en remarquant que

$$\frac{A(\lambda)}{\lambda^{p+1}} = \delta_0\left[\frac{1}{\lambda^{p+1}}\left(e^{\lambda\xi} - 1 - \frac{\lambda\xi}{1!} - \frac{\lambda^2\xi^2}{2!} - \dots - \frac{\lambda^p\xi^p}{p!}\right)\right]$$

continuité de δ_0 nécessaire ??

se réduit à $\delta_0\left[\frac{\xi^{p+1}}{(p+1)!}\right]$, qui n'est pas nul, pour $\lambda = 0$.

Il est facile de rattacher les opérateurs anormaux aux opérateurs normaux, en se restreignant toutefois à ~~considérer des~~ appliquer ces opérateurs à des fonctions sommables. Remarquons d'abord que si $A(\lambda)$ est l'indicatrice d'un opérateur régulier δ, l'indicatrice de l'opérateur régulier $\delta_x\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right]$ sera $\lambda^p A(\lambda)$. Soit alors un opérateur régulier anormal δ ~~d'ordre~~ d'ordre p dont $A(\lambda)$ est l'indicatrice. ~~Cet~~ L'opérateur $\varepsilon_x[f(\xi)] = \delta_x[F(\xi)]$, où $F(\xi)$ est une quelconque primitive d'ordre $p+1$ de f, est parfaitement défini car $F(\xi)$ est définie à un polynome de ξ, de degré p, près, tandis que δ est anormal d'ordre p. D'après la remarque qui précède, l'indicatrice de cet opérateur ε est $\frac{A(\lambda)}{\lambda^{p+1}}$, donc cet opérateur est normal. On rattache ainsi de manière unique tout opérateur anormal à un opérateur normal ; c'est ainsi par exemple qu'à l'opérateur anormal d'ordre 0

que nous avons appelé opérateur de différentiation finie :

$$\delta_a[f(\xi)] = f(x+a) - f(x)$$

correspond l'opérateur normal

$$\varepsilon_a[f(\xi)] = \int_x^{x+a} f(\xi)\, d\xi.$$

Ce qui précède nous permet de nous tourner maintenant à la considération des opérateurs réguliers normaux.

<u>Polynomes Bernoulliens</u>. Soit donc δ un tel opérateur d'indicatrice $A(\lambda)$; la fonction $\dfrac{e^{\lambda x}}{A(\lambda)}$ est une fonction analytique de λ développable suivant les puissances positives croissantes de λ, puisque $A(0)$ n'est pas nul. Les coefficients de ce développement seront des polynomes en x, soit donc

$$\frac{e^{\lambda x}}{A(\lambda)} = B_0(x) + \lambda B_1(x) + \dots + \lambda^n B_n(x) + \dots \qquad (3)$$

On vérifie sans peine que les degrés de ces polynomes sont marqués par leurs indices ; de plus, en dérivant membre à membre par rapport à x, on constate que l'on a

$$B_{n-1}(x) = \frac{dB_n}{dx}. \qquad (4)$$

Calculons le δ_x des deux membres ; on trouve

$$e^{\lambda x} = \delta_x\left[\frac{e^{\lambda \xi}}{A(\lambda)}\right] = \delta_x\left[B_0(\xi) + \lambda B_1(\xi) + \dots + \lambda^n B_n(\xi) + \dots\right] ;$$

Pour $\lambda = 0$, on trouve

$$1 = \delta_x [B_0(\xi)]$$

puis

$$\frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} = \delta_x \left[B_1(\xi) + \lambda B_2(\xi) + \dots + \lambda^{n-1} B_n(\xi) + \dots \right]$$

cette nouvelle identité donne, pour $\lambda = 0$

$$\frac{x}{1!} = \delta_x [B_1(\xi)]$$

et ainsi de suite; on a de proche en proche

$$\delta_x [B_n(\xi)] = \frac{x^n}{n!} \qquad (5)$$

<u>Exemples</u>.

Si δ se réduit à l'opérateur identique de translation T_0, son indicatrice $A(\lambda) = 1$ et on a

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Si δ est l'opérateur normalisé de différentiation finie :

$$\delta_x [f(\xi)] = \int_x^{x+a} f(\xi)\, d\xi ,$$

son indicatrice est $A(\lambda) = \dfrac{e^{\lambda a} - 1}{\lambda}$, et les "polynomes de Bernoulli" proprement dits sont définis par le développement

$$\frac{\lambda e^{\lambda x}}{e^{\lambda a} - 1} = B_0(x) + \lambda B_1(x) + \dots + \lambda^n B_n(x) + \dots$$

les premiers sont

$$B_0(x) = \frac{1}{a} \quad ; \quad B_1(x) = \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \quad ; \quad B_2(x) = \frac{x^2}{2a} - \frac{x}{2} + \frac{a}{12} \quad ;$$

L'introduction des polynomes bernoulliens se justifie par le théorème suivant.

<u>Théorème 3</u> Si δ est un opérateur régulier normal et si $f(x)$ est un polynome, l'équation

$$\delta_x [g(\xi)] = f(x) \qquad (6)$$

a une solution et une seule $g(x)$ dans le champ des polynomes.

Ce fait résulte immédiatement de ce que δ est normal.

Les conditions (5) définissent donc complètement les polynomes Bernoulliens. Elles entraînent bien les relations (4) compte tenu des théorèmes 2 et 3. Si $f(x)$ a pour expression

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p \frac{x^p}{p!}$$

le polynome $g(x)$, unique solution de (6) a pour valeur

$$g(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p B_p(x). \qquad (7)$$

<u>Formule sommatoire</u>

La formule (7) peut se mettre sous une forme un peu différente, d'apparence plus générale. On a d'abord

$$\delta_x [g(\xi + y)] = f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \frac{d^p f}{dy^p} \quad ;$$

d'où

$$g(x+y) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x) \frac{d^p f}{dy^p}$$

mais l'équation (6) donne aussi, par application du théorème 2.

$$\frac{d^p f}{dy^p} = \delta_y \left[\frac{d^p g}{d\zeta^p} \right]$$

et par suite

$$g(x+y) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x) \, \delta_y \left[\frac{d^p g}{d\zeta^p} \right] ; \qquad (8).$$

Ceci en étendant cette relation à des fonctions quelconques pourvues d'un nombre suffisant de dérivées que nous allons aboutir aux formules sommatoires. Évaluons par intégration par partie l'intégrale

$$\int_0^{\zeta-x-y} B_n(x+\eta) \, f^{(n+1)}(\zeta-\eta) \, d\eta$$

f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$; on trouve

$$- \Big| B_n(x+\eta) \, f^{(n)}(\zeta-\eta) \Big|_0^{\zeta-x-y} + \int_0^{\zeta-x-y} B_{n-1}(x+\eta) \, f^{(n)}(\zeta-\eta) \, d\eta$$

$$= B_n(x) \, f^{(n)}(\zeta) - B_n(\zeta-y) \, f^{(n)}(x+y) + \int_0^{\zeta-x-y} B_{n-1}(x+\eta) \, f^{(n)}(\zeta-\eta) \, d\eta$$

et il vient de proche en proche, puisque $B_0(x)$ est une constante,

$$\int_0^{\zeta-x-y} B_n(x+\eta) \, f^{(n+1)}(\zeta-\eta) \, d\eta = \sum_{p=0}^{n} B_p(x) \, f^{(p)}(\zeta) - \sum_{p=0}^{n} B_p(\zeta-y) \, f^{(p)}(x+y)$$

d'où, en prenant les δ_y des deux membres

$$\delta_y\left[\int_0^{\xi-x-y} B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta\right] = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\, \delta_y\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] - \sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(x+y)\, \delta_y\left[B_p(\xi-y)\right];$$

mais

$$\delta_y\left[B_p(\xi-y)\right] = \delta_0\left[B_p(\xi)\right] = \begin{cases} 0\,; & (p \geq 1) \\ 1\,; & (p=0) \end{cases}$$

et il reste finalement la formule dite "formule sommatoire" :

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\, \delta_y\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] - \delta_y\left[\int_0^{\xi-x-y} B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta\right]. \qquad (9)$$

<u>Exemples</u> : <u>formule de Taylor</u> : il suffit de prendre $\delta = T_0$; on a

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \frac{d^p f}{dy^p} - \int_0^x \frac{(x-\eta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\eta+y)\, d\eta$$

<u>formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin</u>. Il suffit de prendre pour δ l'opérateur de différentiation finie normalisé. Les $B_n(x)$ sont alors les polynomes de Bernoulli proprement dits ; on a après quelques réductions

$$f(x+y) = \frac{1}{a}\int_y^{y+a} f(\xi)\, d\xi + \sum_{p=1}^{n} B_p(x).\left[f^{(p-1)}(y+a) - f^{(p-1)}(y)\right] - R_n$$

avec

$$R_n = \int_0^a B_n(x-y)\, f^{(n)}(y+y)\, dy \qquad \text{pour} \quad x \geq a$$

$$= \int_0^x B_n(x-y)\, f^{(n)}(y+y)\, dy + \int_x^a B_n(a+x-y)\, f^{(n)}(y+y)\, dy$$

$$\text{pour} \qquad 0 < x < a$$

$$= \int_0^a B_n(a+x-y)\, f^{(n)}(y+y)\, dy \qquad \text{pour} \qquad x \leq 0$$

Dans cette dernière formule faisons $x=0$, puis, successivement changeons y en

$$y+a\,;\quad y+2a\,;\quad \dots\quad ;\ y+ra$$

et ajoutons, on trouve

$$\frac{1}{a}\int_y^{y+(r+1)a} f(\xi)\, d\xi = f(y) + f(y+a) + f(y+2a) + \dots + f(y+ra)$$

$$\sum_{p=1}^{n} B_p(0)\left[f^{(p-1)}\{y+(r+1)a\} - f^{(p-1)}(y)\right] + \int_0^a B_n(a-y)\left[\sum_{q=0}^{r} f^{(n)}(y+y+qa)\right] dy\,;$$

Cette formule est d'une assez grande importance pratique pour le calcul approché des intégrales définies

$\longleftrightarrow$

§ 3 – Les fonctions moyenne-périodiques relativement aux opérateurs réguliers.

§ 3. Fonctions moyenne-périodiques.

Soit δ un opérateur du groupe des translations. Nous disons que la fonction $f(x)$ est moyenne périodique relativement à cet opérateur, si $\delta_x[f(\xi)]$ est identiquement nul. Si δ est l'opérateur de différentiation finie, on

$$\delta_x[f(\xi)] = f(x+a) - f(x)$$

on obtient ainsi les fonctions périodiques. Si δ est un opérateur différentiel à coefficients constants, on obtient les solutions de l'équation différentielle correspondante.

<u>Caractères moyenne-périodiques.</u> Si δ possède une indicatrice entière $A(\lambda)$ admettant pour zéros

$$\lambda_1 ; \lambda_2 ; \ldots ; \lambda_n ; \ldots$$

il est clair que les caractères $e^{\lambda_i x}$ sont moyenne-périodiques; il en est évidemment de même de toute combinaison linéaire finie à coefficients constants de telles exponentielles.

<u>Problème</u>. Considérons l'opérateur

$$\varepsilon_x[f(\xi)] = \frac{df}{dx} - \mu f$$

μ étant un nombre complexe quelconque. Son indicatrice est $\lambda - \mu$, elle a un zéro unique μ. Soit d'autre part $f(x)$ une fonction moyenne périodique relativement à l'opérateur δ; posons $g(x) = \varepsilon_x[f(\xi)]$. ~~D'après le théorème 2~~ Les opérateurs δ étant permutables, on a

$$\delta_x[g(\xi)] = \varepsilon_x\{\delta_\xi[f(\xi)]\} = 0$$

$g(x)$ est donc aussi moyenne-périodique par rapport à δ. Inversement, $g(x)$, moyenne périodique par rapport à δ étant donnée, proposons nous de trouver $f(x)$, solution de

$$\varepsilon_x[f(\xi)] = g(x) \qquad (10)$$

et qui soit aussi moyenne-périodique par rapport à δ.

Nous remarquerons d'abord que les seules fonctions moyenne-périodiques par rapport à ε, c'est-à-dire les seules solutions de l'équation

$$\frac{df}{dx} - \mu f = 0$$

sont $k e^{\mu x}$, k étant une constante. En second lieu, si $f(x)$ est une solution quelconque de (10), la fonction $h(x) = \delta_x [f(\xi)]$ d'après le théorème 2, est moyenne périodique par rapport ~~à~~ à ε; on a donc nécessairement $h(x) = k e^{\mu x}$, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit moyenne-périodique par rapport à δ est donc que $h(x)$ soit nulle pour $x = 0$, par exemple. Soit alors $F(x)$ une solution quelconque de (10); toute autre solution $G(x)$ de (10) sera telle que $F(x) - G(x)$ soit moyenne périodique par rapport à ε; on aura donc

$$G(x) = F(x) + k e^{\mu x}$$

Écrivons que $\delta_0 [G(\xi)]$ est nul. Il vient

$$\delta_0 [F(\xi)] + k A(\mu) = 0$$

On tire de là

$$G(x) = F(x) - \frac{e^{\mu x}}{A(\mu)} \delta_0 [F(\xi)]$$

pourvu que $e^{\mu x}$ ne soit pas moyenne-périodique par rapport à δ, et cette fonction $G(x)$ est moyenne périodique par rapport à δ. Le problème posé a donc une solution et une seule pourvu que $A(\mu)$ ne soit pas nul. Si $A(\mu)$ est nul il n'a pas de solution, à moins que toutes les solutions de (10) ne répondent à la question.

Précisons l'expression de la solution unique quand elle existe. Cherchons pour cela une solution de (10) de la forme $u(x) e^{\mu x}$. On a

$$g(x) = \varepsilon_x [u(\xi) e^{\mu \xi}] = e^{\mu x} \frac{du}{dx}$$

Utilisation des équations $\delta[f] = 0$, $\varepsilon[f] = 0$ respectivement.

et on peut prendre successivement

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{p(x-\xi)} g(\xi)\, d\xi. \\ G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{p(x-\xi)} g(\xi)\, d\xi - \frac{e^{px}}{A(p)} \delta_0 \left[\int_0^\xi e^{p(\xi-\eta)} g(\eta)\, d\eta \right] ; \end{cases}$$

On suppose naturellement dans ce qui précède, que la fonction $g(x)$ est telle que les expressions précédentes aient un sens.

Dans le cas où $A(p)$ est nul, le problème posé est impossible, si $\delta_0 \left[\int_0^\xi e^{p(\xi-\eta)} g(\eta)\, d\eta \right]$ est différent de zéro. Au contraire, si cette quantité est nulle, toutes les solutions de $\varepsilon_x [f(\xi)] = g(x)$ sont moyenne-périodiques par rapport à δ.

L'étude précédente met en évidence à côté d'une fonction ~~moyenne-périodique~~ $f(x)$, moyenne-périodique relativement à δ, la combinaison

$$F(p;x) = \frac{e^{px}}{A(p)} \cdot \delta_0 \left[\int_0^\xi e^{p(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta \right]$$

Cette combinaison, que nous supposons exister, va jouer un rôle important. Nous ferons dorénavant, sur l'opérateur δ, les hypothèses suivantes :

1°/ ~~Il~~ l'Indicatrice $A(\lambda)$ est une fonction entière de λ

2°/ Quand la fonction moyenne-périodique $f(x)$ est telle que l'expression

$$\delta_0 \left[\int_0^\xi e^{p(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta \right]$$

existe quel que soit p, cette expression est une fonction entière de p.

Dans ces conditions $F(p;x)$ est une fonction méromorphe de p ayant pour pôles les zéros $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \dots ; \lambda_n ; \dots$ de l'indicatrice. Pour le moment nous supposerons tous ces zéros simples.

Envisageons d'abord le cas où $f(\delta)$ est une somme finie d'exponentielles moyenne-périodiques

$$f(\delta) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\lambda_i \delta}$$

On trouve aisément

$$F(p;x) = e^{px} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p-\lambda_i}$$

les pôles de $F(p;x)$ sont donc les zéros $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \dots ; \lambda_n$ de $A(\lambda)$, les résidus correspondants étant $a_i e^{\lambda_i x}$ c'est-à-dire la part due à la présence de l'exponentielle $e^{\lambda_i x}$ dans l'expression de $f(x)$.

Considérons maintenant une fonction moyenne-périodique par rapport à δ, telle que

$$\delta_0 \left[\int_0^{\xi} e^{p(\xi-\delta)} f(\delta)\, d\delta \right]$$

existe pour toutes valeurs de p et telle encore qu'il existe un nombre $\alpha \geq 0$ et un nombre $\beta \leq 0$ satisfaisant aux conditions que les intégrales

$$\int^{+\infty} e^{-z\delta} f(\delta)\, d\delta ; \qquad \int^{-\infty} e^{-z\delta} f(\delta)\, d\delta$$

convergent respectivement pour $\mathcal{R}[z] > \alpha$ et $\mathcal{R}[z] < \beta$.

Moyennant ces hypothèses on peut simplifier l'expression de $F(p;x)$. Notons tout d'abord que l'on a, compte tenu du théorème 2 et du fait que $f(x)$ est

moyenne périodique,

$$\delta_0\left[\int_{\xi}^{a+\xi} e^{p(\xi-\vartheta)} f(\vartheta)\, d\vartheta\right] = \delta_0\left[\int_0^a e^{-p\vartheta} f(\xi+\vartheta)\, d\vartheta\right] = \int_0^a e^{-p\vartheta}\, \delta_0\left[f(\xi+\vartheta)\right] d\vartheta$$

$$= \int_0^a e^{-p\vartheta}\, \delta_\vartheta\left[f(\xi)\right] d\vartheta = 0$$

On peut donc écrire

$$F(p;x) = \frac{e^{px}}{A(p)}\, \delta_0\left[\int_0^{\xi+a} e^{p(\xi-\vartheta)} f(\vartheta)\, d\vartheta\right]$$

quelle que ~~soit~~ la constante a.

Supposons maintenant $\mathcal{R}[p] \geq \alpha$ et calculons

$$\delta_0\left[\int_{\xi}^{+\infty} e^{p(\xi-\vartheta)} f(\vartheta)\, d\vartheta\right] = \delta_0\left[\int_0^{+\infty} e^{-p\vartheta} f(\xi+\vartheta)\, d\vartheta\right]$$

Par hypothèse

$$\varepsilon_\xi\left[f(\vartheta)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-p\vartheta} f(\xi+\vartheta)\, d\vartheta$$

est un opérateur du groupe ayant un sens pour la fonction $f(\vartheta)$ et l'application du théorème 2 donne

$$\delta_0\left[\varepsilon_\xi\{f(\vartheta)\}\right] = \delta_0\left[\varepsilon_0\{f(\xi+\vartheta)\}\right] = \varepsilon_0\left[\delta_\vartheta\{f(\xi)\}\right] = 0$$

On remarque de même que, pour $\mathcal{R}[p] \leq \beta$, on a

$$\delta_0\left[\int_0^{-\infty} e^{p(\xi-\vartheta)} f(\vartheta)\, d\vartheta\right] = 0$$

Il vient par suite

$$F(p;x) = \frac{e^{px}}{A(p)}\,\delta_0\left[\int_0^{+\infty} e^{p(\xi-x)} f(\xi)\,d\xi\right] \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}[p] \geq \alpha \geq 0$$

$$= \frac{e^{px}}{A(p)}\,\delta_0\left[\int_0^{-\infty} e^{p(\xi-x)} f(\xi)\,d\xi\right] \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}[p] \leq \beta \leq 0$$

ou encore, à cause de $\delta_0[e^{p\xi}] = A(p)$,

$$F(p;x) = \int_0^{+\infty} e^{p(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}[p] \geq \alpha \geq 0$$

$$= \int_0^{-\infty} e^{p(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}[p] \leq \beta \leq 0$$

Nous allons maintenant chercher à évaluer la somme des résidus de $F(p;x)$ relatifs aux pôles $p = \lambda_i$; la fonction

$$G(p;x) = \int_0^{x} e^{p(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi$$

est une fonction entière de p. Nous posons $F(p;x) = G(p;x) + H(p;x)$ avec

$$H(p;x) = \int_x^{+\infty} e^{p(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}[p] \geq \alpha \geq 0$$

$$= \int_x^{-\infty} e^{p(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}[p] \leq \beta \leq 0$$

Il revient au même de chercher la somme des résidus de $H(p;x)$. Nous supposerons pour cela que $f(x)$ est à variation bornée dans tout intervalle fini et que cette fonction a une croissance exponentielle, au plus, à l'infini — ce qui entraîne l'existence des nombres α et β. Considérons alors une succession de circonférences C_n de centre

origine et de rayon croissants, dans le plan de la variable p. Nous supposons qu'aucune de ces circonférences ne passe par un zéro de $\Delta(p)$. Cherchons la limite de

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} G(p;x)\,du$$

quand le rayon de C_n croît indéfiniment. Cette intégrale s'écrit encore, en désignant par r_n le rayon de C_n

$$\frac{r_n}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left[G(r_n e^{i\varphi};x)-G(-r_n e^{i\varphi};x)\right]d\varphi \qquad (11)$$

La quantité

$$\frac{p}{2}\left[G(p;x)-G(-p;x)\right]=\frac{p}{2}\left[\int_x^{+\infty}e^{p(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{x}e^{-p(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi\right]$$

a, sous les hypothèses précitées, et d'après un lemme classique,(1) pour limite $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ quand $|p|$ devient infini, $R[p]$ restant positif, et cela, uniformément par rapport à l'argument de p pourvu qu'il soit compris dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right)$. La somme des résidus de $G(p;x)$, et aussi celle de $F(p,x)$ est par suite aussi égale à $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ car c'est là la limite de l'intégrale quand r_n devient infini.(2). Il est clair, en effet, que les arcs de C_n définis par

---

(1). Démonstration de ce lemme ici ou dans les séries de Fourier.

(2). Il faut encore, pour être complet, vérifier que $p\,G(p;x)$ reste fini quand p devient infini en restant imaginaire pur. - A voir, hypothèses sur δ pour qu'il en soit ainsi ??

$\Re[p] > 0$; $\Re[p] < \alpha$; $\Re[p] < |\beta|$

donnent, pour l'argument φ de p, des intervalles de variation tendant vers zéro quand le rayon r_n de C_n grandit indéfiniment. ??

D'autre part le résidu de $F(p;x)$ relatif au pôle simple $p = \lambda_i$ a pour valeur

$$\frac{e^{\lambda_i x}}{A'(\lambda_i)} \cdot \delta_0 \left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi - \eta)} f(\eta)\, d\eta \right] \quad ??$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

<u>Théorème 4</u> Soit $f(x)$ une fonction à variation bornée dans tout intervalle fini, à croissance au plus exponentielle pour x infiniment grand positif ou négatif, moyenne périodique par rapport à un opérateur δ du groupe des translations ;

Cet opérateur δ est tel que :

- Son indicatrice $A(\lambda)$ soit une fonction entière dont les zéros, supposés simples sont $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \dots ; \lambda_n ; \dots$,
- que $\delta_0 \left[\int_0^{\xi} e^{p(\xi - \eta)} f(\eta)\, d\eta \right]$ existe et soit une fonction entière de p ;
- qu'il soit permutable avec l'opérateur $\varepsilon_a^-[f(\xi)] = \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} f(a+\xi)\, d\xi$ et avec l'opérateur $\varepsilon_a^+[f(\xi)] = \int_0^{-\infty} e^{-p\xi} f(a+\xi)\, d\xi$; [que le th. 2 soit applicable],

dans ces conditions la série

$$\sum_i \frac{e^{\lambda_i x}}{A'(\lambda_i)} \cdot \delta_0 \left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi - \eta)} f(\eta)\, d\eta \right]$$

converge et a pour somme $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ pour toute valeur finie de x.

Dans le cas où λ_i est une racine multiple d'ordre p de $A(\lambda)$, le résidu correspondant de $F(p;x)$ s'écrit

$$\frac{p\,e^{\lambda_i x}}{A^{(p)}(\lambda_i)}\cdot\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)}(x+\xi-\eta)^{p-1}f(\eta)\,d\eta\right];$$

il est donc de la forme

$$\sum_{q=0}^{p-1} b_{iq}\,x^q e^{\lambda_i x}$$

avec

$$\cancel{b_{iq}}\quad b_{iq}=\frac{p\,C_{p-1}^{q}}{A^{(p)}(\lambda_i)}\,\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)}(\xi-\eta)^{p-q-1}f(\eta)\,d\eta\right];$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier, dans ce cas, que les fonctions $x^q e^{\lambda_i x}$; $(q=0;1;\dots;p-1)$ sont moyenne-périodiques ; on s'en convainc en développant $A(\lambda)$ suivant les puissances de $\lambda-\lambda_i$ et en tenant compte de

$$e^{\lambda x}A(\lambda)=\delta_x\left[e^{\lambda_i\xi}\left(1+\frac{\lambda-\lambda_i}{1!}\cdot\xi+\frac{(\lambda-\lambda_i)^2}{2!}\xi^2+\dots\right)\right]$$

pour $\lambda=\lambda_i$, on trouve

$$\delta_x\left[e^{\lambda_i\xi}\right]=0\ ;$$

il vient ensuite

$$\frac{e^{\lambda x}A(\lambda)}{\lambda-\lambda_i}=\delta_x\left[e^{\lambda_i\xi}\left(\frac{\xi}{1!}+\frac{(\lambda-\lambda_i)}{2!}\xi^2+\dots\right)\right]$$

qui, pour $\lambda=\lambda_i$ donne, compte tenu de $A'(\lambda_i)=0$,

$$\delta_x\left[\xi\,e^{\lambda_i\xi}\right]=0\ ;$$ et ainsi de suite.

On peut résumer le théorème 4 en disant que toute fonction moyenne-périodique à variation bornée dans tout intervalle fini, et de comportement au plus exponentiel à l'infini, est une combinaison linéaire à coefficients constants d'exponentielles moyenne-périodiques.

Ce résultat contient l'intégration des équations différentielles à coefficients constants sans second membre. Il contient aussi la théorie des séries de Fourier des fonctions périodiques à variation bornée. Il suffit de prendre l'opérateur

$$\delta_x [f(\xi)] = f(x+a) - f(x).$$

On a

$$A(\lambda) = e^{a\lambda} - 1$$

dont les zéros sont

$$\lambda = 0 ; \quad \pm \frac{2\pi i}{a} ; \quad \pm \frac{4\pi i}{a} ; \ldots ; \quad \pm \frac{2k\pi i}{a} ; \ldots$$

pour lesquels on a $A'(\lambda) = a$, et il vient

$$\frac{e^{\lambda_i x}}{A'(\lambda_i)} \delta_0 \left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i (\xi - \eta)} f(\eta)\, d\eta \right] = \frac{e^{\frac{2n\pi i}{a} x}}{a} \cdot \int_0^a e^{-\frac{2n\pi i}{a} \xi} f(\xi)\, d\xi ;$$

c'est l'expression habituelle des coefficients de Fourier.

Ajoutons enfin que si l'indicatrice $A(\lambda)$ n'a pas de zéro, il n'existe pas de fonction moyenne périodique à variation bornée, dont la croissance soit au plus exponentielle pour les grandes valeurs de la variable. Ce cas se présente pour l'opérateur

$$\delta_x [f(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} f(x+\xi)\, d\xi$$

dont l'indicatrice est

$$A(\lambda) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \qquad (^1)$$

$$\longleftrightarrow$$

§ 4. ~~Reso~~ Inversion des opérateurs de groupe.

Nous étudions dans ce paragraphe les équations de la forme

$$\delta_x [f(\xi)] = g(x) \qquad (12)$$

le second membre étant connu. Nous supposons toujours δ régulier ; une première remarque s'impose, si $f(x)$ est une solution de cette équation, $f(x) + h(x)$ sera encore solution si $h(x)$ est moyenne-périodique par rapport à δ ; autrement dit, les solutions de (12) sont définies à une fonction moyenne périodique près.

La théorie des polynomes bernoulliens permet d'inverser δ quand le second membre $g(x)$ est un polynome ; elle permet même d'aller plus loin. Introduisons l'opérateur

$$\varepsilon_x [f(\xi)] = e^{-ax}\, \delta_x \left[e^{a\xi} f(\xi) \right]$$

On a

$$\varepsilon_x [f(\xi+y)] = e^{-ax}\, \delta_x \left[e^{a\xi} f(\xi+y) \right] = e^{-a(x+y)} \cdot \delta_x \left[e^{a(\xi+y)} f(\xi+y) \right]$$

$$= e^{-a(x+y)}\, \delta_{x+y} \left[e^{a\xi} f(\xi) \right] = \varepsilon_{x+y} [f(\xi)]$$

d'après le théorème 1, ε est un opérateur du groupe ; son indicatrice est évidemment $A(\lambda+a)$, en désignant par $A(\lambda)$ l'indicatrice de δ. ε sera un opérateur

---

(1) Peut-il exister d'autres fonctions moyenne-périodiques ayant des types de croissance plus élevés ?

normal si e^{ax} n'est pas une fonction moyenne-périodique par rapport à δ; plaçons-nous d'abord dans ce cas. Introduisons les polynomes bernoulliens de l'opérateur ε; ils sont définis par le développement

$$\frac{e^{\lambda x}}{A(\lambda+a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{B}_n(a;x)$$

Ils ont les propriétés habituelles, en particulier

$$\varepsilon_x\left[\mathcal{B}_n(a;\xi)\right] = \frac{x^n}{n!}$$

ou encore

$$\delta_x\left[e^{a\xi}\mathcal{B}_n(a;\xi)\right] = e^{ax}\frac{x^n}{n!}$$

ces polynomes permettent donc l'inversion de l'opérateur δ quand g(x) est le produit de e^{ax} par un polynome; si

$$g(x) = \left[\sum_{p=0}^{n} A_p \frac{x^p}{p!}\right] e^{ax}$$

une solution particulière de (12) est

$$f(x) = \left[\sum_{p=0}^{n} A_p \mathcal{B}_p(a;x)\right] e^{ax}.$$

Supposons maintenant que a soit une racine multiple d'ordre p de $A(\lambda)$; alors l'opérateur ε est anormal d'ordre p-1. Considérons alors l'opérateur ε normalisé, c'est à dire l'opérateur $\bar{\varepsilon}$ qu'on obtient en appliquant ε à une quelconque primitive d'ordre p de la fonction f:

$$\bar{\varepsilon}_x\left[f(\xi)\right] = \varepsilon_x\left[\int_0^{\xi} \frac{(\xi-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} f(\eta)\, d\eta\right] = e^{-ax}\, \delta_x\left[e^{a\xi}\int_0^{\xi} \frac{(\xi-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} f(\eta)\, d\eta\right];$$

cet opérateur est normal; son indicatrice est $\frac{1}{\lambda^p} A(\lambda+a)$, et nous introduirons encore les polynomes Bernoulliens définis par le developpement

$$\frac{\lambda^p e^{\lambda x}}{A(\lambda+a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{B}_n(a;x)$$

Ils ont les propriétés habituelles, et on a en particulier

$$\bar{\varepsilon}_x\left[\mathcal{B}_n(a;\xi)\right] = \frac{x^n}{n!}$$

ou encore

$$\delta_x\left[e^{a\xi}\int_0^{\xi} \frac{(\xi-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} \mathcal{B}_n(a;\eta)\, d\eta\right] = e^{ax}\frac{x^n}{n!}$$

Ces formules permettent d'obtenir une solution particulière de (12) pour

$$g(x) = e^{ax}\sum_{q=1}^{n} A_q \frac{x^q}{q!}$$

à savoir

$$f(x) = e^{ax}\int_0^{x} \frac{(x-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}\cdot\left[\sum_{q=1}^{n} A_q\, \mathcal{B}_q(a;\xi)\right] d\xi .$$

Les résultats précédents ne fournissent une solution au problème de l'inversion d'un opérateur δ que pour des formes très particulières du second membre $g(x)$.

Nous allons dans ce qui suit donner une solution générale valable pour une catégorie importante d'opérateurs δ. Commençons d'abord par fixer quelques conventions de langage.

1°/ Nous dirons qu'un opérateur δ est fini quand le calcul de $\delta_x[f(\xi)]$ utilise seulement les valeurs prises par $f(\xi)$ et par un certain nombre, fini, de ses dérivées et de certaines de ses primitives, sur un intervalle fini. D'après le théorème 1 il est nécessaire et suffisant pour cela, que le calcul de $\delta_0[f(\xi)]$ utilise les valeurs de ces fonctions sur un intervalle fini $(a;b)$ - alors le calcul de $\delta_x[f(\xi)]$ utilise les valeurs de ces fonctions sur l'intervalle fini $(x+a;\ x+b)$. Nous supposerons de plus que l'indicatrice $A(\lambda)$ est entière.

2°/ Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ ~~satisfait~~ définie de $-\infty$ à $+\infty$, satisfait aux conditions C lorsque : α/ elle est moyenne périodique par rapport à un opérateur fini ;

β/ elle est à variation bornée dans tout intervalle fini

γ/ elle est de type de croissance au plus exponentiel à l'infini

3°/ Soit δ un opérateur fini, (δ_0 opérant sur l'intervalle $[a,b]$), Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $y+a$, $y+b$ satisfait aux conditions C_1 lorsque : α/ elle est à variation bornée dans $(y+a;\ y+b)$

β/ $\delta_y[f(\xi)] = 0$

γ/ elle est prolongeable de $-\infty$ à $+\infty$ en une fonction satisfaisant aux conditions C.

4°/ Reprenons l'opérateur δ et la fonction f du 3°; nous dirons que ces deux éléments satisfont aux conditions C_2 lorsque : α/ $\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{p(\xi-\sigma)} f(\sigma)\, d\sigma\right]$ existe et est une fonction entière de p;

β/ le théorème 2 s'applique à δ et aux opérateurs

$$\varepsilon_x^-[f(\xi)] = \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} f(x+\xi)\, d\xi \ ; \qquad \varepsilon_x^+[f(\xi)] = \int_0^{-\infty} e^{-p\xi} f(x+\xi)\, d\xi \ ;$$

Nous allons maintenant apporter un complément au théorème 4. Supposons que f et δ satisfassent aux conditions C_2 ; le théorème 4 est applicable et on doit remarquer ~~de la~~ que le calcul des coefficients du développement convergent de $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ n'exige, par l'intermédiaire du calcul des $\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi-\vartheta)} f(\vartheta)\, d\vartheta\right]$, que la connaissance de f et d'un nombre fini de ses dérivées et de certaines de ses primitives, dans l'intervalle $(a;b)$. Il suffirait d'ailleurs tout aussi bien de connaître ces mêmes fonctions dans un quelconque intervalle $(y+a;y+b)$ car

$$\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi-\vartheta)} f(\vartheta)\, d\vartheta\right] - \delta_0\left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_i(\xi-\vartheta)} f(\vartheta)\, d\vartheta\right] =$$

$$\delta_0\left[\int_0^{y} e^{\lambda_i(\xi-\vartheta)} f(\vartheta)\, d\vartheta\right] - \delta_0\left[\int_{\xi}^{y+\xi} e^{\lambda_i(\xi-\vartheta)} f(\vartheta)\, d\vartheta\right] ;$$

le premier terme du second membre se réduit à $A(\lambda_i)\cdot\int_0^{y} e^{-\lambda_i\vartheta} f(\vartheta)\, d\vartheta$ qui est nul, et nous avons déjà constaté, au cours de la démonstration du théorème 4 que le second était nul quelque soit y.

Cette remarque nous permet d'affirmer que si une fonction $f(x)$ satisfait aux conditions C_1 elle est prolongeable <u>d'une seule manière</u> suivant une fonction satisfaisant aux conditions C ; [δ est le prolongement de la fonction satisfaisant aux conditions C_2].

Arrivons maintenant à la résolution de

$$\delta_x[f(\xi)] = g(\xi)$$

lorsque δ est fini et $g(x)$ intégrable. Pour simplifier, nous supposerons dans la suite que $A(0)$ n'est pas nul ; il n'y aurait que peu de modifications à faire

Subir à ce qui suit dans le cas contraire.

Considérons une solution de l'équation dans l'intervalle $y+a$; $y+b$; soit

$$\varphi_y(x) = f(x) - \frac{g(y)}{A(0)} ;$$

on a évidemment

$$\delta_y [\varphi_y(\xi)] = 0$$

Nous nous tournerons à rechercher les solutions satisfaisant aux conditions C_2, c'est à dire telle que, pour toute valeur de y, $\varphi_y(x)$ satisfasse à la condition C_1, δ et ~~son prolt~~ le prolongement de $\varphi_y(x)$ satisfaisant à la condition C_2. On peut alors appliquer à $\varphi_y(x)$ et à son prolongement le théorème 4 et on a

$$\frac{1}{2}\left[\varphi_y(x+0) + \varphi_y(x-0)\right] = \sum_i \frac{e^{\lambda_i x}}{A'(\lambda_i)} \cdot \delta_0 \left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} \varphi_y(\eta) \cdot d\eta\right]$$

en supposant, pour simplifier l'écriture, que toutes les racines de l'indicatrice sont simples. On peut écrire aussi le second membre d'après la remarque faite plus haut

$$\sum_i \frac{e^{\lambda_i x}}{A'(\lambda_i)} \cdot \delta_0 \left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} \varphi_y(\eta)\, d\eta\right]$$

ou encore

$$\sum_i \frac{e^{\lambda_i x}}{A'(\lambda_i)} \cdot \delta_0 \left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} \left[f(\eta) - \frac{g(y)}{A(0)}\right] d\eta\right]$$

~~car~~ car le calcul de $\delta_0 \left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} \varphi_y(\eta)\, d\eta\right]$ ne fait intervenir que

les valeurs de $\varphi_y(x)$ et, éventuellement, d'un certain nombre de ses primitives et de ses dérivées dans l'intervalle $(y+a;\ y+b)$. Nous avons donc, finalement

$$\frac{1}{2}\left[\varphi_y(x+0)+\varphi_y(x-0)\right] = \sum_i \frac{e^{\lambda_i x}}{A'(\lambda_i)} \cdot \left\{ \delta_0\left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta\right] + \frac{e^{-\lambda_i y} g(y)}{\lambda_i}\right\}$$

cette formule est valable quel que soit x; pour x compris dans l'intervalle $(y+a;\ y+b)$ elle donne

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] = \frac{g(y)}{A(0)} + \sum_i \frac{e^{\lambda_i x}}{A'(\lambda_i)} \left\{ \delta_0\left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta\right] + \frac{e^{-\lambda_i y} g(y)}{\lambda_i}\right\};$$

Reprenons maintenant une transformation déjà utilisée plus haut; on a

$$\delta_0\left[\int_y^{y+\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta\right] - \delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta\right] =$$

$$\delta_0\left[\int_\xi^{y+\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta\right] - \delta_0\left[\int_0^{y} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta\right]$$

le second terme du second membre est nul comme se réduisant à $A(\lambda_i)\cdot\int_0^y e^{-\lambda_i\eta} f(\eta)\, d\eta$;

quant au premier il s'écrit

$$\delta_0\left[\int_0^y e^{-\lambda_i\eta} f(\xi+\eta)\, d\eta\right] = \int_0^y e^{-\lambda_i\xi}\, \delta_\xi[f(\eta)]\, d\xi = \int_0^y e^{-\lambda_i\xi} g(\xi)\, d\xi;$$

Nous avons donc, quel que soit y et pour $a+y < x < b+y$,

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] = \frac{g(y)}{A(0)} + \sum_i \frac{e^{\lambda_i x}}{A'(\lambda_i)}\left\{\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\right] + e^{-\lambda_i \xi}\frac{g(y)}{\lambda_i} + \int_0^{y} e^{-\lambda_i \xi} g(\xi)\,d\xi\right\};$$

le calcul des coefficients de la série figurant au second membre exige seulement la connaissance de $f(x)$ et d'un certain nombre de ses primitives et de ses dérivées dans l'intervalle $(a;b)$.

Le calcul précédent prouve que s'il existe une solution de l'équation (12) satisfaisant aux conditions C_3 et prenant des valeurs données dans l'intervalle $(a;b)$, ainsi que celles de ses primitives et de ses dérivées dont la connaissance est nécessaire au calcul de $\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\right]$, ces valeurs satisfaisant de plus à la condition $\delta_0[f(\xi)] = g(0)$, cette solution est unique, et elle est donnée par la série précédente alors nécessairement convergente.

Un cas particulier important est celui où δ est un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre n :

$$\delta_n[f(\xi)] = \sum_{p=0}^{n} a_p \frac{d^p f}{dx^p};$$

On doit prendre alors $a = b = 0$; on trouve aisément

$$\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_i(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\right] = f(0).\left[a_1 + a_2\lambda_i + a_3\lambda_i^2 + \dots + a_n\lambda_i^{n-1}\right]$$
$$+ f'(0)\left[a_2 + a_3\lambda_i + \dots + a_n\lambda_i^{n-2}\right] + \dots\dots + a_n f^{(n-1)}(0) = A_i$$

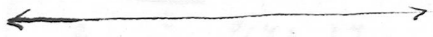
de plus la condition $y+a < x < y+b$, donne ici $x = y$ et on trouve

$$f(x) = \sum_i \frac{1}{A'(\lambda_i)} \int_0^x e^{\lambda_i (x-\xi)} g(\xi)\, d\xi + \sum_i \frac{A_i}{A'(\lambda_i)} e^{\lambda_i x}$$

les sommations sont ici finies en n termes ; le terme en $g(x)$ disparait identiquement car il a pour coefficient

$$\frac{1}{A(0)} + \sum_i \frac{1}{\lambda_i A'(\lambda_i)}$$

qui est la somme des résidus de la fraction rationnelle $\frac{1}{\lambda A(\lambda)}$, inverse d'un polynome de degré au moins égal au second. On vérifie aisément, d'après les valeurs des A_i, que $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées sont bien égales à $f(0)$, $f'(0)$, — $f^{(n-1)}(0)$ pour $x=0$.



§ 5. Opérateurs singuliers ; l'opérateur de Fourier.

Une théorie générale des opérateurs singuliers serait fort complexe. Nous nous bornerons ici à envisager deux cas particuliers importants. Ce paragraphe sera consacré à l'étude de l'opérateur de Fourier.

Soit d'abord l'opérateur

$$\delta_x^t [f(\xi)] = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{+t} f(x+\xi)\, d\xi$$

qu'on obtient par normalisation d'un opérateur de différentiation finie :

$$\varepsilon_x^t [f(\xi)] = \frac{1}{2t} [f(x+t) - f(x-t)]$$

L'indicatrice de δ^t est $\frac{\operatorname{sh} \lambda t}{\lambda t}$; celle de ε^t est $\frac{\operatorname{sh} \lambda t}{t}$;

La première de ces deux indicatrices s'annulle pour

$$\lambda = \pm \frac{\pi i}{t} \; ; \; \pm \frac{2\pi i}{t} \; ; \ldots \; ; \; \pm \frac{n\pi i}{t} \; ; \ldots$$

Soit une fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions du théorème 4 ; on a alors

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] = \sum_n a_n \, e^{\frac{n\pi i}{t} x}$$

où n prend toutes les valeurs entières positives ou négatives, mais non nulles, et où

$$a_n = \frac{1}{A'\left[\frac{n\pi i}{t}\right]} \, \delta_0^t \left[\int_0^{\xi} e^{\frac{n\pi i}{t}(\xi - y)} f(y)\, dy \right]$$

ce qui donne, après quelques réductions

$$a_n = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{n\pi i \xi}{t}} f(\xi)\, d\xi$$

compte tenu de $\delta_0^t[f(\xi)] = 0$; il viens donc

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] = \sum_n \delta_0^t \left[e^{\frac{n\pi i}{t}(x-\xi)} f(\xi) \right] \qquad (13)$$

Supposons maintenant que t devienne infiniment grand positif ; l'indicatrice $\frac{\operatorname{sh} \lambda t}{\lambda t}$ n'a pas de limite lorsque λ n'est pas imaginaire pure ; elle tend vers 0 pour λ imaginaire pure non nulle ; elle tend vers 1 pour $\lambda = 0$. Enfin l'opérateur δ^t a pour limite, par définition, l'opérateur de Fourier. Nous désignerons cet opérateur limite par δ. La variété zéro de l'indicatrice de cet opérateur se compose donc de deux demi droites opposées : $\lambda = \pm \rho i$; ρ étant réel et non nul. On peut remarquer que tous les zéros de l'indicatrice de δ^t se trouvent sur cette variété,

et que la réunion de tous ces zéros, quand t varie, constitue précisément la variété; de plus, cette dernière est une multiplicité linéaire dont on a extrait un point. (40)

Ces remarques géométriques évidentes donnent la clé des propriétés essentielles de l'opérateur de Fourier.

Considérons une fonction $f(x)$ qui soit la somme d'un nombre fini d'exponentielles moyenne-périodiques par rapport à δ;

$$f(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p \, e^{i\mu_p x} \quad ,$$

les μ_p sont donc réels et non nuls. Il est clair que

$$\delta_0\left[e^{-i\mu x} f(x)\right] = \sum_{p=1}^{n} a_p \, \delta_0\left[e^{i(\mu_p-\mu)x}\right] = \begin{cases} 0 \; ; & (\mu \neq \mu_p) \\ a_p \; ; & (\mu = \mu_p) \end{cases}$$

de sorte qu'on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{p=1}^{n} \delta_0\left[e^{i\mu(x-\xi)} f(\xi)\right] \tag{14}$$

les μ, dans la sommation, prenant les valeurs $\mu_1 ; \mu_2 ; \ldots ; \mu_p ; \ldots \mu_n$.

On notera l'analogie complète de cette formule avec la formule (13). On remarquera aussi que la raison pour laquelle ce calcul des coefficients a_p réussit, est que la variété zéro de l'indicatrice de δ se compose d'une variété linéaire dont on a extrait l'origine. Ajoutons encore que rien n'est changé si $f(x)$ comporte un terme constant :

$$f(x) = a_0 + \sum_{p=1}^{n} a_p \, e^{i\mu_p x} \quad ;$$

on a encore

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \delta_0 \left[e^{i\mu(x-\xi)} f(\xi) \right] \qquad (15)$$

μ prend cette fois les valeurs 0 ; μ_1 ; μ_2 ... μ_n. Il n'est donc plus nécessaire, comme dans le cas des opérateurs réguliers, que $f(x)$ soit moyenne-périodique par rapport à δ.

Nous allons généraliser la formule (15) en considérant une fonction de la forme

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu x} \, d[\alpha(\mu)]$$

$\alpha(\mu)$ étant une fonction à variation bornée dans tout intervalle fini et aussi dans l'intervalle $(-\infty ; +\infty)$, cette dernière condition signifiant que

$$\lim_{t=\infty} \int_{-t}^{+t} \left| d[\alpha(\mu)] \right|$$

existe. L'intégrale donnant $f(x)$ est alors prise en valeur principale au sens de Cauchy :

$$f(x) = \lim_{t=\infty} \int_{-t}^{+t} e^{i\mu x} \, d[\alpha(\mu)]$$

elle existe d'après la condition précédente.

Nous convendrons de prendre $\alpha(\mu)$ nul pour μ infiniment grand négatif. Dans le cas où

$$f(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p e^{i\mu_p x} \quad ; \quad (\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n)$$

$\alpha(\mu)$ est une fonction en escalier ; on a :

$$\alpha(\mu) = 0 \qquad (-\infty < \mu < \mu_1)$$

$$\alpha(\mu) = a_1 \qquad (\mu_1 < \mu < \mu_2)$$

$$\alpha(\mu) = a_1 + a_2 \qquad (\mu_2 < \mu < \mu_3)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\alpha(\mu) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (\mu_n < \mu < +\infty)$$

et

$$\delta_0 \left[e^{-i\mu\xi} f(\xi) \right]$$

n'est autre que la fonction de saut de $\alpha(\mu)$.

Arrivons-en au cas général. Soit

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu x} \, d.[\alpha(\mu)]$$

Nous ferons d'abord un calcul purement formel. Supposons que $\alpha(\mu)$ soit continue pour $\mu = \nu$; on peut écrire symboliquement

$$d[\alpha(\nu)] = \delta_0 \left[e^{-i\nu\xi} f(\xi) \right] = \lim_{\tau = \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-i\nu\xi} f(\xi) \, d\xi$$

Dans le cas présent, la quantité $\frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-i\nu\xi} f(\xi) \, d\xi$ sera infiniment petite pour τ infiniment grand; supposons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu\xi} f(\xi) \, d\xi$ ait une valeur principale au sens de Cauchy, nous voyons que $2\tau \, d[\alpha(\nu)]$ aura une limite finie quand τ deviendra infini en même temps que $d\nu$ tend vers zéro, car $d[\alpha(\nu)]$ sera de même ordre infinitésimal que $d\nu$ si on fait l'hypothèse que les nombres dérivés de $\alpha(\mu)$ sont bornés pour $\mu = \nu$. Nous regarderons donc $d\nu$ et $\frac{1}{2\tau}$ comme deux infiniment petits de même

ordre et nous poserons $\frac{1}{2\pi} = k\, d\nu$, k étant une constante, ce qui donne

$$d[\alpha(\nu)] = k\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu\xi} f(\xi)\, d\xi\right] d\nu$$

en intégrant et en convenant de prendre $\alpha(0) = 0$, il vient

$$\alpha(\nu) = k\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-i\nu\xi}}{i\xi} f(\xi)\, d\xi$$

Ce calcul n'a qu'une valeur formelle, mais il conduit à envisager l'expression

$$\lim_{\tau=\infty} \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{1 - e^{-i\nu\xi}}{i\xi} f(\xi)\, d\xi$$

qui s'écrit encore

$$\lim_{\tau=\infty} . \lim_{t=\infty} \int_{-\tau}^{+\tau} \left[\int_{-t}^{+t} \frac{e^{ip\xi} - e^{i(p-\nu)\xi}}{i\xi}\, d[\alpha(p)]\right] d\xi$$

ou, en intégrant par partie

$$\lim_{\tau=+\infty} . \lim_{t=\infty} \int_{-\tau}^{+\tau} \left\{ \frac{e^{it\xi} - e^{i(t-\nu)\xi}}{i\xi}\, \alpha(t-0) - \frac{e^{-it\xi} - e^{-i(t+\nu)\xi}}{i\xi}\, \alpha(-t+0) \right.$$

$$\left. - \int_{-t}^{+t} \left[e^{ip\xi} - e^{i(p-\nu)\xi}\right] \alpha(p)\, dp. \right\} d\xi$$

et enfin

$$\lim_{\tau=+\infty} . \lim_{t=+\infty} . \left[\alpha(t-0) \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{it\xi} - e^{i(t-\nu)\xi}}{i\xi}\, d\xi - \alpha(-t+0) \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{-it\xi} - e^{-i(t+\nu)\xi}}{i\xi}\, d\xi \right.$$

$$\left. - 2\int_{-t}^{+t} \left[\frac{\sin p\tau}{p} - \frac{\sin (p-\nu)\tau}{p-\nu}\right] \alpha(p)\, dp \right];$$

Pour passer à la limite, nous nous appuierons sur le théorème suivant (¹)

Soit $f(x)$ une fonction à variation bornée dans tout intervalle fini et aussi de $-\infty$ à $+\infty$; quel que soit t, réel fini ou infini, on a

$$\lim_{\tau=+\infty} \int_{-t}^{+t} \frac{\sin \tau \xi}{\xi} f(\xi)\, d\xi = \frac{\pi}{2}\left[f(0+0) + f(0-0) \right];$$

$$\lim_{\tau=+\infty} \int_{-t}^{+t} \frac{\sin \tau \xi}{\xi} f(x+\xi)\, d\xi = \frac{\pi}{2}\left[f(x+0) + f(x-0) \right];$$

D'ailleurs on a

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{it\xi} - e^{i(t-\nu)\xi}}{i\xi}\, d\xi = \frac{1}{i}\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\cos t\xi - \cos (t-\nu)\xi}{\xi}\, d\xi + \int_{-\tau}^{+\tau} \left[\frac{\sin t\xi}{\xi} - \frac{\sin (t-\nu)\xi}{\xi} \right] d\xi;$$

$$= \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\sin t\xi}{\xi}\, d\xi - \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\sin (t-\nu)\xi}{\xi}\, d\xi$$

dans la limite pour t, infiniment grand positif en $\pi - \pi = 0$, quelque soit τ et en particulier pour $\tau = +\infty$; d'ailleurs $\alpha(t-0)$ reste borné ; on a donc

$$\lim_{\tau=+\infty} . \lim_{t=+\infty} \alpha(t-0) \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{it\xi} - e^{i(t-\nu)\xi}}{i\xi}\, d\xi = 0;$$

et aussi

$$\lim_{\tau=+\infty} . \lim_{t=+\infty} \alpha(-t+0) . \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{-it\xi} - e^{-i(t+\nu)\xi}}{i\xi}\, d\xi = 0;$$

(¹) Démonstration ici ou ailleurs.

De plus on a, toujours par application du même théorème :

$$\lim_{\tau=+\infty} \int_{-t}^{+t} \frac{\sin p\tau}{p} \alpha(p)\, dp = \frac{\pi}{2}\left[\alpha(0+0) + \alpha(0-0)\right]$$

quel que soit t, et en particulier pour $t=+\infty$, et aussi

$$\lim_{\tau=+\infty} \cdot \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} \frac{\sin (p-\nu)\tau}{(p-\nu)} \alpha(p)\, dp = \frac{\pi}{2}\left[\alpha(\nu+0) + \alpha(\nu-0)\right].$$

Il vient donc finalement, en prenant la valeur principale de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-i\nu\xi}}{i\xi} f(\xi)\, d\xi = \pi\left[\alpha(\nu+0) + \alpha(\nu-0)\right] - \pi\left[\alpha(0+0) + \alpha(0-0)\right]$$

On a pris $\alpha(0)=0$; si donc $\alpha(p)$ est continue pour $p=0$, il vient

$$\alpha(\nu+0) + \alpha(\nu-0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-i\nu\xi}}{i\xi} \cdot f(\xi)\, d\xi \quad ; \qquad (16)$$

Cette formule est valable lorsque

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\, d\left[\alpha(p)\right]$$

$\alpha(p)$ étant à variation bornée dans tout intervalle fini et aussi de $-\infty$ à $+\infty$, nulle pour $p=0$ et continue pour cette valeur de p. Nous verrons bientôt la signification de cette dernière condition.

On a constaté plus haut, sur un cas particulier, que $\delta_0\left[e^{-ip\xi} f(\xi)\right]$ était la fonction de saut de $\alpha(p)$; nous allons montrer maintenant que cette propriété est

générale. Reprenons l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{i\mu x} \, d[\alpha(\mu)] \, ;$$

il vient :

$$\delta_0 \left[e^{-i\nu\xi} f(\xi) \right] = \lim_{\tau=\infty} . \lim_{t=\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} \int_{-t}^{+t} e^{i(\mu-\nu)\xi} \, d[\alpha(\mu)] \, d\xi$$

$$= \lim_{\tau=\infty} . \lim_{t=\infty} \int_{-t}^{+t} \frac{\sin(\mu-\nu)\tau}{(\mu-\nu)\tau} \, d[\alpha(\mu)] \, ;$$

Soit s_ν le saut de $\alpha(\mu)$ pour $\mu = \nu$:

$$s_\nu = \alpha(\nu+0) - \alpha(\nu-0)$$

et posons

$$\alpha(\mu) = s_\nu + \beta(\mu) \qquad \text{pour} \qquad \mu > \nu$$

$$\alpha(\mu) = \beta(\mu) \qquad \text{pour} \qquad \mu < \nu$$

$$\alpha(\nu-0) = \beta(\nu) \qquad \text{pour} \qquad \mu = \nu$$

$\beta(\mu)$ est donc continue pour $\mu = \nu$; prenons $t > |\nu|$; il vient

$$\int_{-t}^{+t} \frac{\sin(\mu-\nu)\tau}{(\mu-\nu)\tau} \, d[\alpha(\mu)] = s_\nu + \int_{-t}^{+t} \frac{\sin(\mu-\nu)\tau}{(\mu-\nu)\tau} \, d[\beta(\mu)] \, ;$$

et

$$\delta_0 \left[e^{-i\nu\xi} f(\xi) \right] = s_\nu + \lim_{\tau=\infty} . \lim_{t=\infty} \int_{-t}^{+t} \frac{\sin(\mu-\nu)\tau}{(\mu-\nu)\tau} \, d[\beta(\mu)]$$

a/ $\left|\dfrac{\sin(p-\nu)\tau}{(p-\nu)\tau}\right| \leq 1$; par suite

$$\left|\int_{\nu-\varepsilon}^{\nu+\varepsilon} \frac{\sin(p-\nu)\tau}{(p-\nu)\tau}\, d[\beta(p)]\right| < \omega_\varepsilon(\nu)$$

en désignant par $\omega_\varepsilon(\nu)$ la variation totale de $\beta(p)$ dans l'intervalle $(\nu-\varepsilon;\ \nu+\varepsilon)$. $\beta(p)$ étant continue pour $p=\nu$, cette variation totale tend vers zéro avec ε, on peut donc assigner un nombre positif ε tel que $\omega_\varepsilon(\nu)$ soit inférieur à un nombre positif α, donné aussi petit que l'on veut.

b/ Soit ε ainsi choisi, on a

$$\left|\frac{\sin(p-\nu)\tau}{(p-\nu)\tau}\right| < \frac{1}{\tau\varepsilon}$$ dans l'intervalle $(\nu+\varepsilon;\ t)$ et aussi dans l'intervalle $(-t;\ \nu-\varepsilon)$; on a donc

$$\left|\int_{-t}^{\nu-\varepsilon} \frac{\sin(p-\nu)\tau}{(p-\nu)\tau}\, d[\beta(p)]\right| + \left|\int_{\nu+\varepsilon}^{t} \frac{\sin(p-\nu)\tau}{(p-\nu)\tau}\, d[\beta(p)]\right| < \frac{2V}{\tau\varepsilon} ;$$

en désignant par V la variation totale de $\alpha(p)$ de $(-\infty$ à $+\infty)$. Cette limite supérieure peut à son tour être rendue aussi petite que l'on veut en prenant τ assez grand. On a donc

$$\lim_{\tau=\infty}\ \lim_{t=\infty} \int_{-t}^{+t} \frac{\sin(p-\nu)\tau}{(p-\nu)\tau}\, d[\beta(p)] = 0$$

et

$$\delta_0\left[e^{-i\nu\xi} f(\xi)\right] = \alpha_\nu ;$$

En résumé :

Si une fonction $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{ipx} \, d[\alpha(p)] \qquad (18)$$

$\alpha(p)$ étant à variation bornée de $-\infty$ à $+\infty$, on a

a/

$$\delta_0 \left[e^{-ip\xi} f(\xi) \right] = \alpha(p+0) - \alpha(p-0)$$

b/

$$\lim_{t=+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-t}^{+t} \frac{1-e^{-ip\xi}}{i\xi} f(\xi) \, d\xi = \left[\alpha(p+0) + \alpha(p-0)\right] - \left[\alpha(0+0) + \alpha(0-0)\right]$$

Si on convient que $\alpha(0)$ est nul, et que toutes les discontinuités de $\alpha(p)$ sont régulières : $\alpha(p) = \frac{1}{2}\left[\alpha(p+0) + \alpha(p-0)\right]$, ce qui peut toujours être réalisé sans rien changer à $f(x)$, on voit que la connaissance de $f(x)$ détermine entièrement $\alpha(p)$.

Les premiers membres des expressions a et b ont certainement un sens lorsque $f(x)$ est de valeur absolue intégrable de $-\infty$ à $+\infty$, mais cela ne suffit pas pour pouvoir affirmer que $f(x)$ est de la forme (18).

On notera que la condition de continuité de $\alpha(p)$ à l'origine s'exprime par

$$\delta_0 \left[f(\xi) \right] = 0.$$

On ne connaît pas la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit de la

forme (18), mais en particularisant la fonction $\alpha(p)$ on obtient des catégories importantes de fonctions $f(x)$ pour lesquelles le théorème précédent admet une réciproque. C'est ainsi par exemple qu'en supposant $\alpha(p)$ monotone on obtient des fonctions $f(x)$ qu'on appelle ~~définies positives~~ de type positif et qu'il est possible de caractériser intrinsèquement. (1)

Ce cas est important en statistique et calcul des probabilités.

⟷

§ 6. Le Calcul opérationnel de Fourier.

Reprenons la formule (18) du précédent paragraphe et supposons que $\alpha(p)$ ait une dérivée $g(p)$ qui soit à variation bornée. On a alors

$$f(x) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{ipx}\, g(p)\, dp ; \qquad (19)$$

et la condition que $\alpha(p)$ soit à variation totale finie se traduit par l'existence de

$$\lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} |g(p)|\, dp ;$$

$g(p)$ est donc à valeur absolue intégrable de $(-\infty$ à $+\infty)$.

La fonction $f(x)$ possède les propriétés suivantes

a/ elle est bornée car

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(p)|\, dp ;$$

b/ elle est continue ; cela résulte immédiatement de l'uniforme convergence du second membre de (19) lorsque t devient infini, par rapport à x;

Renvoi aux traités spéciaux et à Bochner.

c/ $f(x)$ tend vers zéro quand x devient infiniment grand positif ou négatif.

1°/ ~~f(x) a une dé~~ $g(p)$ a une dérivée bornée dans l'intervalle $(a;b)$ et est nulle en dehors de cet intervalle ; alors

$$f(x) = \int_a^b e^{ipx} g(p)\, dp = \frac{1}{ip}\left[e^{ipb} g(b) - e^{ipa} g(a)\right] - \frac{1}{ip}\int_a^b e^{ipx} g'(p)\, dp$$

$$\leq \frac{1}{|p|}\left\{ \left| e^{ipb} g(b) - e^{ipa} g(a) \right| + M\,|b-a| \right\}$$

M désignant la borne supérieure de $g'(p)$; l'assertion est donc exacte sous ces hypothèses ; il en est de même si $g(p)$ nulle en dehors de $(a;b)$ possède une dérivée bornée dans un nombre fini d'intervalles constituant $(a;b)$; c'est le cas si $g(p)$ est une fonction en escaliers dans $(a;b)$

2°/. $g(p)$ est nulle en dehors de $(a;b)$ et est intégrable dans $(a;b)$. On peut alors trouver dans $(a;b)$ une fonction en escaliers : $g_1(p)$ telle que

$$\int_a^b |g(p) - g_1(p)|\, dp < \varepsilon$$

aussi petit que soit ε positif ; soit $f_1(x) = \int_a^b e^{ipx} g_1(p)\, dp$; on a

$$|f(x) - f_1(x)| < \int_a^b |g(p) - g_1(p)|\, dp < \varepsilon$$

quel que soit x ; or $f_1(x)$ tend vers 0 quand x devient infiniment grand positif ou négatif ; il en est donc de même de $f(x)$

3°/ $g(p)$ est de valeur absolue intégrable dans l'intervalle $(-\infty; +\infty)$; on a alors

$$|f(x)| \leq \left| \int_{-t}^{+t} e^{ipx} g(p)\, dp \right| + \int_{+t}^{+\infty} |g(p)|\, dp + \int_{-\infty}^{-t} |g(p)|\, dp ;$$

les deuxième et troisième termes peuvent être rendus aussi petits qu'on le veut en

prenant t assez grand, et, d'après ce qu'on vient de voir, le premier terme tend vers zéro quand $|x|$ devient infiniment grand. (51)

Nous dirons que $f(x)$ est l'image de Fourier de $g(p)$.

Les fonctions $g(p)$ à variation bornée et de valeur absolue intégrable dans $(-\infty, +\infty)$ forment évidemment une classe linéaire A, qui contient $g(-p)$; $\overline{g(p)}$; $g(p+a)$; $e^{iap}g(p)$; pour tout a réel, et aussi $k(p)\,g(p)$ si $k(p)$ est bornée, et intégrable dans tout domaine fini.

Les images $f(x)$ des fonctions $g(p)$ de la classe A forment une classe linéaire B ; mais les propriétés a, b, c ne caractérisent pas les fonctions de cette classe. Si $f(x)$ appartient à B il en est de même de $f(-x)$; $\overline{f(x)}$; $f(x+a)$; $e^{iax}f(x)$; (a réel) ; qui sont les images de $g(-p)$; $\overline{g(-p)}$; $e^{iap}g(p)$; $g(p+a)$.

Soit $g(p)$ appartenant à A ; posons

$$\alpha(p) = \int_0^p g(p)\,dp$$

$\alpha(p)$ est à variation totale finie dans $(-\infty ; +\infty)$, on a

$$f(x) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{ipx}\, d[\alpha(p)]$$

puis, par la formule (16) du précédent paragraphe, compte tenu de la continuité de $\alpha(p)$;

$$\alpha(p) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} \frac{1-e^{-ip\xi}}{i\xi} \cdot f(\xi)\, d\xi ;$$

Si on dérive par rapport à p, on obtient

$$g(p) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-ip\xi} f(\xi)\, d\xi \qquad (20).$$

le second membre de (20) n'étant pas uniformément convergent, une légitimation directe de cette formule est nécessaire ; considérons l'expression

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{t=+\infty} \cdot \lim_{\tau=+\infty} \int_{-t}^{+t} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{i\xi(\nu-p)} g(\nu)\, d\nu\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{t=+\infty} \cdot \lim_{\tau=+\infty} \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\sin.(\nu-p)t}{(\nu-p)} \cdot g(\nu)\, d\nu$$

dont la valeur, d'après le lemme déjà plusieurs fois utilisé au cours du précédent paragraphe, n'est autre que $\frac{1}{2}[g(p+0) + g(p-0)]$; on peut toujours poser que les discontinuités des fonctions de A sont régulières, car cela ne modifie en rien l'intégrale (19) ; on voit donc que toute fonction de A s'exprime à l'aide de son image $f(x)$ de B, par la formule (20). Chaque fonction de A possède une seule image dans B ; le théorème précédent prouve inversement que toute fonction de B est l'image d'une seule fonction de A.

<u>Autre forme de ces résultats</u>.

D'après (19), si $g(p)$ est paire, il en est de même de $f(x)$; (19) s'écrit alors :

$$f(x) = 2 \cdot \lim_{t=+\infty} \cdot \int_0^t \cos px \cdot g(p)\, dp \; ; \qquad (19)_1$$

tandis que (20) devient

$$g(p) = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{t=+\infty} \cdot \int_0^t \cos p\xi \cdot f(\xi)\, d\xi \; ; \qquad (20)_1$$

~~[illegible]~~;

De même si $g(p)$ est impaire, il en est de même de $f(x)$ et on a

$$f(x) = 2i \lim_{t=+\infty} \int_0^t \sin px \cdot g(p)\, dp \; ; \qquad (19)_2$$

$$g(p) = \frac{-i}{\pi} \lim_{t=+\infty} \int_0^t \sin p\xi \cdot f(\xi)\, d\xi \; ; \qquad (20)_2$$

Plus généralement, si

$$g(p) = A(p) + B(p)$$

avec

$$A(p) = \frac{1}{2}\left[g(p) + g(-p)\right] \; ; \qquad B(p) = \frac{1}{2}\left[g(p) - g(-p)\right] \; ;$$

on a

$$\frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] = 2 \lim_{t=+\infty} \int_0^t \cos px \cdot A(p)\, dp = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} \cos px \cdot g(p)\, dp \; ;$$

$$\frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right] = 2i \lim_{t=+\infty} \int_0^t \sin px \cdot B(p)\, dp = i \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} \sin px \cdot g(p)\, dp \; ;$$

et

$$A(p) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t=+\infty} \int_0^t \cos p\xi \cdot \left[f(\xi) + f(-\xi)\right] d\xi = \frac{1}{2\pi} \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} \cos p\xi \cdot f(\xi)\, d\xi \; ;$$

$$B(p) = \frac{-i}{2\pi} \lim_{t=+\infty} \int_0^t \sin p\xi \cdot \left[f(\xi) - f(-\xi)\right] d\xi = \frac{-i}{2\pi} \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} \sin p\xi\, f(\xi)\, d\xi \; ;$$

On écrit habituellement :

$$g(p) = A(p) + B(p) = \frac{1}{\pi} \lim_{t=+\infty} \int_0^t \left[C(\xi) \cdot \cos p\xi + S(\xi) \sin p\xi\right] d\xi \qquad (20)_3$$

avec

$$C(x) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} \cos px \cdot g(p)\, dp \; ; \qquad S(x) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} \sin px \cdot g(p)\, dp \; ; \qquad (19)_3$$

Ce sont les formules d'analyse harmonique de la fonction $g(p)$ de la classe A.

<u>Produit de H. Weyl</u> : (Faltung).

Soient $g_1(p)$ et $g_2(p)$ deux fonctions de A ; posons

$$\lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} |g_1(p)|\, dp = C_1 \; ; \qquad \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} |g_2(p)|\, dp = C_2 \; ;$$

et considérons la fonction de deux variables réelles

$$h(p;\nu) = g_1(\nu) \cdot g_2(p-\nu) \; ;$$

d'après le théorème de Fubini sur une fonction mesurable des variables p et ν ; de plus on a, quelque soit ν

$$\lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} |h(p;\nu)|\, dp = C_2\, |g_1(\nu)|$$

et

$$\lim_{t=+\infty} \cdot \lim_{\tau=+\infty} \int_{-t}^{+t} \int_{-\tau}^{+\tau} |h(p;\nu)|\, dp\, d\nu = C_1 C_2$$

$h(p;\nu)$ est donc de valeur absolue intégrable dans tout le plan $(p;\nu)$, pour cette raison

$$\lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} g(p;\nu)\, d\nu = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} g_1(\nu) \cdot g_2(p-\nu)\, d\nu = g(p) \qquad (21)$$

existe quel que soit p sauf peut être sur un ensemble de mesure nulle ; cette fonction $g(p)$ est de valeur absolue intégrable de $(-\infty$ à $+\infty)$ et elle est à variation bornée ; en effet

$$|g(p') - g(p'')| < \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} |g_1(\nu)|\, |g_2(p'-\nu) - g_2(p''-\nu)|\, d\nu$$

et si V_2 est la borne supérieure de la variation totale de $g_2(p)$ pour une division quelconque, la borne supérieure de la variation de $g(p)$ pour une division quelconque sera $C_1 V_2$. De là résulte que $g(p)$ appartient à la classe A. Cette fonction sera appelée le produit de H. Weyl des fonctions g_1 et g_2 de A.

///

Image de $g(p)$ dans B

Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les images de $g_1(p)$ et $g_2(p)$; l'image de $g(p)$ est définie par

$$f(x) = \lim_{t=\infty} \int_{-t}^{+t} e^{ipx} g(p)\, dp = \lim_{t=\infty} . \lim_{\tau=\infty} \int_{-t}^{+t} dp . \left[\int_{-\tau}^{+\tau} g_1(\nu) . e^{i\nu x} . g_2(p-\nu)\, e^{i(p-\nu)x} . d\nu \right]$$

x étant donné, les fonctions $g_1(\nu)\, e^{i\nu x}$; $g_2(p)\, e^{ipx}$ appartiennent à A ; le second membre converge donc absolument, d'après le théorème de Fubini, et on peut intervertir l'ordre des intégrations, ce qui donne

$$f(x) = f_1(x) . f_2(x).$$

L'image du produit de H. Weyl des fonctions $g_1(p)$ et $g_2(p)$ est donc le produit des images de ces fonctions. Cette image est indépendante de l'ordre des facteurs, comme le produit de H. Weyl lui-même, car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\nu)\, g_2(p-\nu)\, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\nu_1)\, g_1(p-\nu_1)\, d\nu_1 \; ;$$

La Classe B peut donc être regardée comme un ~~corps~~ anneau commutatif.

Intégration et dérivation.

a/ Supposons que $g(p)$ de la classe A ait une dérivée $g'(p)$ appartenant à A ; alors les intégrales $\int_t^{+\infty} |g'(p)|\, dp$ et $\int_{-\infty}^{-t} |g'(p)|\, dp$ ont un sens et tendent vers zéro quand t devient infiniment grand positif. Soient

$$F_+(t) = \int_t^{+\infty} g'(p)\, dp \quad ; \qquad F_-(t) = \int_{-\infty}^{-t} g'(p)\, dp$$

ces deux fonctions de t tendent d'ont vers zéro quand t devient infiniment grand positif ; on

$$F_+'(t) = -g'(t) \quad ; \qquad F_-'(t) = -g'(-t) \; ;$$

donc

$$F_+(t) = a_+ - g(t) \qquad F_-(t) = a_- + g(-t)$$

a_+ et a_- étant des constantes ; nous voyons donc que lorsque t devient infiniment grand positif $g(t)$ et $g(-t)$ ont des limites déterminées : a_+ et $-a_-$; enfin la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} g(p)\, dp$ implique que ces limites sont nulles ; on a

donc

$$\lim_{t=+\infty} g(t) = 0 \quad ; \qquad \lim_{t=+\infty} g(-t) = 0 \; .$$

Cherchons alors l'image $f_1(x)$ de $g'(p)$:

$$f_1(x) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{ipx} g'(p)\, dp = \lim_{t=+\infty} \left[e^{ipt} g(t) - e^{-ipt} g(-t) - ix \int_{-t}^{+t} e^{ipx} g(p)\, dp \right]$$

$$= -ix\, f(x)$$

en désignant par $f(x)$ l'image de $g(p)$ et en tenant compte de la nullité des limites de $g(t)$ et de $g(-t)$.

L'image de $g'(p)$ est donc $-ix\,f(x)$;

b/ Reprenons $g(p)$ de la classe A et supposons que cette fonction ait une primitive $g_1(p)$ appartenant à A; si $f(x)$ et $f_1(x)$ sont les images de $g(p)$ et $g_1(p)$, on aura, d'après ce qu'on vient de voir

$$f(x) = -ix\, f_1(x)$$

donc, l'image de la primitive $g_1(p)$ sera $\dfrac{i\,f(x)}{x}$; cette image étant bornée et continue, $f(0)$ est nécessairement nul et on a

$$0 = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} g(p)\,dp.$$

c/ Soit encore $g(p)$ de la classe A et supposons que $p\,g(p)$ appartienne encore à A; la dérivation en x de $(1g)$ donne au second membre une intégrale uniformément convergente, on a donc

$$f'(x) = i \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{ipx} \cdot p\, g(p)\,dp\;;$$

La combinaison de ces différents résultats permet de dresser le tableau suivant, où la colonne de droite contient les images des fonctions de la colonne de gauche, ces dernières étant supposées appartenir à A:

Fonctions de A.	Images dans B
$g(p)$	$f(x)$
$g'(p)$	$-ix\, f(x)$
$g''(p)$	$-x^2 f(x)$
$g'''(p)$	$i x^3 f(x)$
	.....
$p\, g(p)$	$-i\, f'(x)$
$g(p) + p\, g'(p)$	$-x\, f'(x)$
$2 g'(p) + p\, g''(p)$	$i x^2 f'(x)$
	.....
$p^2 g(p)$	$-f''(x)$
$2p\, g(p) + p^2 g'(p)$	$i x\, f''(x)$
$2 g(p) + 4p\, g'(p) + p^2 g''(p)$	$x^2 f''(x)$
	....

etc.

Calcul opérationnel. Application aux équations différentielles.

La méthode qui consiste à substituer leurs images aux fonctions de A dans le calcul de certaines intégrales ou la résolution de certaines équations différentielles, porte le nom de calcul opérationnel. Au tableau précédent, ~~que l'on~~ qu'on appelle tableau de Van-der-Pol, il est commode d'adjoindre les formules qui suivent, dont certaines ont été signalées antérieurement et dont les autres sont évidentes :

Fonctions de A	Images dans B	
$g(kp)$	$\lvert k\rvert . f\left(\frac{x}{k}\right)$	(k réel)
$\overline{g(p)}$	$\overline{f(-x)}$	
$e^{iap}\, g(p)$	$f(x+a)$	(a réel)
$g(p+a)$	$e^{iax} f(x)$	(δ^o)
une primitive de $g(p)$;	$\frac{i f(x)}{x}$	
$\frac{d^n . g(p)}{dp^n}$;	$(-ix)^n f(x)$	
$p^n g(p)$	$(-i)^n . \frac{d^n . f(x)}{dx^n}$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\nu)\, g_2(p-\nu)\, d\nu$;	$f_1(x) . f_2(x)$.	

<u>Exemple</u>. prenons

$$g(p) = \begin{cases} (1-p^2)^{n-\frac{1}{2}} & (\ |p| \leq 1) \\ 0 & (\ p > 1) \end{cases}$$

avec $\mathcal{R}[n] \geq \frac{5}{2}$; Soit $f(x)$ l'image de $g(p)$; On vérifie aisément la relation

$$(1-p^2)\, g''(p) + (2n-3)\, p\, g'(p) + (2n-1)\, g(p) = 0$$

valable de $(-\infty$ à $+\infty)$ les points -1 ; $+1$ étant ~~exclus~~ compris. Cette relation s'écrit

$$-\left[p^2 g''(p) + 4p\, g'(p) + 2g(p)\right] + (2n+1)\left[p\, g'(p) + g(p)\right] + g''(p) = 0 ;$$

à cause de l'hypothèse faite sur n, les fonctions

$$p^2 g''(p) + 4p\, g'(p) + 2 g(p) \; ; \qquad p\, g'(p) + g(p) \; ; \qquad g''(p)$$

appartiennent à A ; passant aux images on a donc

$$x^2 f''(x) + (2n+1)\, x f'(x) + x^2 f(x) = 0$$

Si on fait le changement de fonction

$$f(x) = x^{-n} J(x)$$

on trouve pour $J(x)$ l'équation de Bessel :

$$x^2 J''(x) + x J'(x) + (x^2 - n^2) J(x) = 0$$

D'ailleurs

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} g(p)\, dp = 2 \int_0^1 (1-p^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos px \, dp$$

est évidemment une fonction entière de x ; $J(x)$ est donc proportionnelle à la fonction de Bessel de première espèce et il vient $f(x) = k\, x^{-n} J_n(x)$. On détermine k en faisant $x = 0$; on trouve

$$f(0) = 2 \int_0^1 (1-p^2)^{n-\frac{1}{2}} dp = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{k}{2^n\, \Gamma(n+1)} \; ;$$

puis, compte tenu de la formule d'inversion (20).

$$J_n(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-p^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos px \, dx \; ;$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_n(x) \cos px \, dx = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} (1-p^2)^{n-\frac{1}{2}} & ; \; (p \leq 1) \\ 0 & ; \; (p > 1) \end{cases}$$

on étend ces formules au cas où $-\frac{1}{2} < \mathcal{R}[n] < \frac{5}{2}$.

Pour d'autres exemples ; (intégrales $e^{-|x|}$ et e^{-x^2}) voir Bochner, Vorlesungen über fouriersche integrale.

§7, l'opérateur de Laplace.

Considérons l'opérateur

$$\delta_x^t [f(\xi)] = \frac{1}{t} \int_0^t f(x+\xi)\, d\xi$$

dont l'indicatrice est $\dfrac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda t}$; les zéros en sont :

$$\pm \frac{2\pi i}{t} \; ; \qquad \pm \frac{4\pi i}{t} \; ; \ldots \; ; \qquad \pm \frac{2n\pi i}{t} \; ; \ldots$$

Lorsque t devient infiniment grand positif l'indicatrice $\dfrac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda t}$ n'a pas de limite si $\mathcal{R}[\lambda] > 0$; elle tend vers zéro pour $\mathcal{R}[\lambda] < 0$; elle tend aussi vers zéro pour λ imaginaire pure non nulle, elle tend vers l'unité si λ est nul. La variété zéro de l'indicatrice de cet opérateur est donc le lieu des points

$$\lambda = -\sigma + i\rho \; ; \qquad \begin{cases} \sigma \text{ réel} > 0 \; ; \\ \rho \text{ réel} \neq 0 \; ; \end{cases}$$

c'est un demi-plan, ce n'est pas une variété linéaire ; de plus le lieu des zéros des indicatrices des opérateurs δ^t, à savoir les deux demi-droites

$$\lambda = i\rho \; ; \qquad (\rho \text{ réel} \neq 0)$$

n'en qu'une partie de cette variété. Ces faits différencient nettement l'opérateur de Laplace

de l'opérateur de Fourier ; ils en compliquent notablement la théorie.

Comme toujours, commençons par examiner le cas d'une somme finie d'exponentielles moyenne-périodiques par rapport à l'opérateur δ de Laplace :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{\lambda_n x}$$

avec $\lambda_n = -\sigma_n + i\rho_n$.

Nous supposerons, pour fixer les idées

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots < \sigma_N$$

et nous ne faisons aucune hypothèse particulière sur la distribution des λ_n. Dans ces conditions, pour déterminer les a_n, on est obligé d'opérer de proche en proche : formons la quantité

$$\delta_0 \left[e^{-\lambda \xi} f(\xi) \right]$$

avec $\lambda = -\sigma + i\rho$; elle est nulle pour

$\sigma < \sigma_1$ et aussi pour $\sigma = \sigma_1$; $\rho \neq \rho_1$

elle se réduit à a_1 pour $\lambda = \lambda_1$; elle est infinie pour $\sigma > \sigma_1$.

Ayant calculé a_1 par ce procédé, formons maintenant

$$\delta_0 \left[e^{-\lambda \xi} \left\{ f(\xi) - a_1 e^{\lambda_1 \xi} \right\} \right] ;$$

elle est nulle pour

$\sigma < \sigma_2$ et aussi pour $\sigma = \sigma_2$; $\rho \neq \rho_2$

elle se réduit à a_2 pour $\lambda = \lambda_2$; elle est infinie pour $\sigma > \sigma_2$.

On détermine ainsi, de proche en proche les a_i et les λ_i, mais il est impossible de déterminer à priori l'un des termes de $f(x)$ sans avoir déterminé au préalable tous ceux qui le précèdent. Cur une conséquence du fait que la variété zéro de l'indicatrice de δ n'est pas linéaire.

Parmi les combinaisons linéaires d'exponentielles moyenne-périodique par rapport à δ il y aurait lieu de distinguer :

les sommes discrètes finies ou infinies,
les sommes étendues à des continus linéaires,
les sommes étendues à des continus superficiels,

La détermination des coefficients des exponentielles dans les sommes continues pourrait sans doute s'obtenir par extension du procédé récurrent qui vient d'être indiqué ; quoiqu'il en soit on s'est borné jusqu'à maintenant à envisager les combinaisons linéaires d'exponentielles pour lesquelles les λ sont distribués sur une même droite ; en revenant derechef sur le cas des sommes finies nous allons apercevoir pour quelles raisons cette considération s'imposait.

Examinons d'abord deux cas extrêmes :

a/ Soit la somme finie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{\lambda_n x}$$

les λ_n étant distribués sur une parallèle à l'axe des imaginaires pures :

$$\lambda_n = -\sigma + i\mu_n$$

il vient alors

$$e^{\sigma x} f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i p_n x}$$

une fois σ connu, les a_n et les p_n vont se déterminer, comme au § 5, en faisant intervenir l'opérateur de Fourier:

$$\varepsilon_x [f(\xi)] = \lim_{t=+\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{+t} f(x+\xi)\, d\xi ,$$

et en calculant

$$\varepsilon_0 \left[e^{(\sigma - ip)\xi} f(\xi) \right]$$

on a

$$a_n = \varepsilon_0 \left[e^{(\sigma - i p_n)\xi} f(\xi) \right]$$

$$0 = \varepsilon_0 \left[e^{(\sigma - i p)\xi} f(\xi) \right] \qquad \text{pour} \quad p \neq p_n$$

les a_n et les λ_n se déterminent donc individuellement cette fois.

6/ Soit maintenant la somme finie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\sigma_n x}$$

où les λ_n sont tous réels ; $f(x)$ est évidemment une fonction analytique de x ; nous considérerons donc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\sigma_n z} \quad ; \qquad (z = x + iy)$$

et nous remarquerons que

$$f(x+iy) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\sigma_n x} \quad e^{-i\sigma_n y}$$

Lorsqu'on y fixe x et qu'on y regarde les deux membres comme fonctions de la variable ~~réelle~~ réelle y, est une somme d'exponentielles moyenne-périodiques par rapport à l'opérateur de Fourier; on a donc

$$\mathcal{E}_0 \left[e^{i\mu\xi} \cdot f(x+i\xi) \right] = 0 \qquad \text{pour } (\mu \neq \sigma_n)$$

$$\mathcal{E}_0 \left[e^{i\sigma_n \xi} f(x+i\xi) \right] = a_n e^{-\sigma_n x}$$

ou encore

$$a_n = \mathcal{E}_0 \left[e^{\sigma_n (x+i\xi)} \cdot f(x+i\xi) \right]$$

Le procédé formel est le même dans chaque cas, cependant il faut noter qu'en (a) il a été suffisant de considérer $f(x)$ comme fonction de la variable réelle x, tandis qu'en (b) il a été nécessaire d'envisager les valeurs complexes de la variable.

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner les sommes finies

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{\lambda_n x}$$

avec

$$\lambda_n = -\sigma_n + i(\alpha\sigma_n + \beta) \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels})$$

Il verra qu'on obtient les a_n en appliquant ~~les~~ l'opérateur de Fourier

à la fonction $f(z)$, multipliée par un facteur exponentiel convenable et calculée sur une droite de coefficient angulaire $-1/\alpha$.

Nous n'examinerons pas le cas des sommes discrètes infinies et nous passerons immédiatement aux intégrales simples de l'une ou l'autre des formes :

$$f(x) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{(-\sigma+ip)x} g(p)\, dp \; ; \qquad (a)$$

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{\alpha}^{t} e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma \; ; \quad (\alpha \geq 0) \; ; \qquad (b)$$

respectivement analogue aux sommes finies (a) et (b).

Pour l'intégrale (a) il suffit de considérer les valeurs réelles de x ; pour l'intégrale (b) on doit envisager les valeurs complexes de z ; on doit donc préalablement examiner à quelles conditions le second membre de (b) est une fonction analytique de z.

<u>Intégrale (a)</u>. On a

$$e^{\sigma x} f(x) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{ipx} g(p)\, dp \; ;$$

Il suffit d'appliquer les résultats du paragraphe (6) ; $e^{\sigma x} f(x)$ est l'image de Fourier de $g(p)$; si $g(p)$ appartient à la classe A, le second membre de la formule précédente converge uniformément ; si $e^{\sigma x} f(x)$ appartient à la

classe B et on a

$$g(p) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{(\sigma - ip)\xi} f(\xi)\, d\xi \;;$$

σ étant fixé, on peut regarder $g(p)$ comme fonction $E(\lambda)$ de $\lambda = -\sigma + ip$; on peut alors écrire

$$E(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi \;;$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{t=+\infty} \left[\int_0^{+t} e^{-\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi + \int_0^{t} e^{\lambda\xi} f(-\xi)\, d\xi \right]$$

La formule d'inversion des intégrales de type (a) comporte donc la somme de deux intégrales de type (b).

<u>Etude des intégrales du type (b)</u> – Considérons l'intégrale

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_0^{t} e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma \;; \qquad (22)$$

Nous supposerons $k(\sigma)$ définie dans $[0; +\infty)$ et intégrable dans tout domaine fini. Supposons que l'intégrale

$$\lim_{t=+\infty} \int_0^{t} e^{-\sigma x_0} |k(\sigma)|\, d\sigma$$

où x_0 est réel, soit convergente ; il est clair que (22) sera absolument et uniformément convergente pour $\mathcal{R}[z] \geqslant x_0$;

Soit maintenant n un entier positif;

$$f_n(z) = \int_0^n e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma$$

est une fonction analytique entière de z, et la suite de fonctions $f_n(z)$ converge uniformément vers la fonction $f(z)$ dans le domaine ouvert

$$\mathcal{R}[z] > x_0$$

donc $f(z)$ est une fonction analytique holomorphe dans ce domaine.

p désignant un entier positif, on a

$$f_n^{(p)}(z) = \int_0^n (-1)^p \sigma^p e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma$$

d'autre part

$$\lim_{\sigma = +\infty} \sigma^p e^{-\sigma z + \sigma z'} = 0$$

pour $\mathcal{R}[z] > \mathcal{R}[z']$; il en résulte que l'intégrale

$$\lim_{t = +\infty} \int_0^t (-1)^p \sigma^p e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma$$

converge absolument et uniformément dans le domaine

$$\mathcal{R}[z] \geq x_1 > x_0$$

par suite, dans ce domaine, la limite de cette intégrale n'est autre que $f^{(p)}(z)$.

<u>Remarque</u>. On aurait des résultats analogues en considérant des intégrales de la forme

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{0} e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma$$

dans le domaine d'existence et d'holomorphie sera le demi-plan

$$\mathcal{R}[z] < x_0$$

si l'intégrale

$$\lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{0} e^{-\sigma x_0} |k(\sigma)|\, d\sigma$$

converge ; enfin on considère aussi les intégrales

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma$$

dans le domaine d'existence et d'holomorphie est une bande

$$x_0 < \mathcal{R}[z] < x_1$$

dont l'épaisseur $x_1 - x_0$ peut d'ailleurs être nulle, et qui peut même disparaître.

Toutes ces intégrales s'appellent des intégrales de Laplace.

<u>Inversion des intégrales de Laplace</u> - Reprenons l'intégrale

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma$$

holomorphe dans la bande

$$x_0 < \mathcal{R}[z] < x_1$$

Soit c un nombre réel compris entre ces limites ; quel que soit y réel on a

$$f(c+iy) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-c\sigma y} \cdot e^{-c\sigma} k(\sigma)\, d\sigma ;$$

le second membre est une intégrale de Fourier ; on peut lui appliquer les résultats du § 6, lorsque $e^{-c\sigma} k(\sigma)$ appartient à A pour toute valeur de c appartenant au segment $(x_0 ; x_1)$; il vient alors

$$e^{-c\sigma} k(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{i\sigma y} f(c+iy)\, dy$$

$$k(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t=+\infty} \int_{c-it}^{c+it} e^{\sigma z} f(z)\, dz$$

en supposant que toutes les discontinuités de $k(\sigma)$ sont régulières. On notera que le second membre est une intégrale du type (a).

<u>Retour sur les intégrales du type (a).</u>

Nous venons de constater que l'inversion des intégrales du type (b) conduit à des intégrales du type (a) :

$$k(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t=+\infty} \int_{c-it}^{c+it} e^{\sigma z} f(z)\, dz \qquad (23)$$

où $f(z)$ est une fonction analytique holomorphe dans une bande

$$x_0 < \mathcal{R}[z] < x_1 \qquad (24)$$

contenant le chemin d'intégration : $\mathcal{R}[z] = c$.

Il est naturel de faire une étude spéciale de ces intégrales.

<u>Définition</u>. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans la bande (24) ; nous disons qu'elle appartient à la classe linéaire $\mathfrak{A}$ lorsque, à toute bande

$$x'_0 < \mathcal{R}[z] < x'_1 \qquad (25)$$

correspond un nombre positif $M(x'_0 ; x'_1)$, tel que

$$\lim_{t=+\infty} \frac{1}{i} \int_{c-it}^{c+it} |f(z)| \, dz$$

existe et soit inférieur à $M(x'_0 ; x'_1)$ pour

$$x'_0 < c < x'_1.$$

On sait (1) que cela a pour conséquence qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre positif T tel que

$$|f(z)| < \varepsilon \qquad (26)$$

pour $|y| > T$ et z dans la bande (25).

---

(1) . Démonstration ici ou dans fonctions analytiques spéciales ; (Phragmen - Lindelöf).

Reprenons l'intégrale (23) en supposant que $f(z)$ appartienne à $\mathfrak{A}$

1°/ Quel que soit c

$$x_0 < c < x_1$$

l'intégrale 23 est absolument convergente : on a en effet

$$k(\sigma) = \frac{e^{c\sigma}}{2\pi} \cdot \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{i\sigma y} f(c+iy)\, dy$$

et

$$\left| \int_{-t}^{+t} e^{i\sigma y} f(c+iy)\, dy \right| < \frac{1}{i} \int_{c-it}^{c+it} |f(z)|\, dz$$

2°/ L'intégrale (23) est indépendante de c, pour

$$x_0 < c < x_1$$

Le théorème de Cauchy donne en effet

$$\int_{c_1-it}^{c_1+it} e^{\sigma z} f(z)\, dz - \int_{c_2-it}^{c_2+it} e^{\sigma z} f(z)\, dz = \int_{c_1+it}^{c_2+it} e^{\sigma z} f(z)\, dz - \int_{c_1-it}^{c_2-it} e^{\sigma z} f(z)\, dz ;$$

et les deux intégrales du second membre tendent vers 0 quand t devient infini à cause de (26).

3°/ Dans tout domaine fini intérieur à la bande

$$x_0 < \mathcal{R}[z] < x_1$$

la fonction $f(z)$ possède une dérivée bornée; il en résulte que, considérée comme fonction de y, $f(-c+iy)$ est à variation totale bornée dans tout intervalle fini, pour

$$x_0 < -c < x_1 \quad ;$$

$f(z)$ appartenant à $\mathcal{A}$, on voit de plus que $f(-c+iy)$, en tant que fonction de y, appartient à la classe A. D'après les résultats du § 6, nous avons par suite la formule d'inversion :

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-z\sigma} k(\sigma)\, d\sigma \qquad (27)$$

4°/ L'intégrale (27) est absolument convergente :

L'image de Fourier de $f(-c+iy)$ est $2\pi e^{-c\sigma} k(\sigma)$ qui appartient à la classe B; prenons c_1 et c_2 :

$$x_0 < -c_2 < -c_1 < x_1 \quad ;$$

on peut écrire

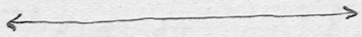
$$2\pi e^{-c_1\sigma} k(\sigma) = e^{(-c_2 - -c_1)\sigma} \cdot \left[2\pi e^{-c_2\sigma} k(\sigma) \right] ;$$

le crochet figurant au second membre est l'image de Fourier de $f(-c_2+iy)$; c'est une fonction de B, par suite bornée; le premier membre est donc de valeur absolue ~~intégrale~~ intégrable dans $[0; +\infty]$; on constaterait d'une

manière analogue qu'il est de valeur absolue intégrable dans $[-\infty; 0]$ en utilisant c_3 :

$$x_0 < c_2 < c_3 < x_1$$

de là résulte l'assertion.



§ 8. Le calcul opérationnel de Laplace

Reprenons une intégrale de Laplace

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma$$

qui représente une fonction holomorphe dans une bande

$$x_0 < \Re[z] < x_1 ;$$

Nous avons indiqué, dans le précédent paragraphe les règles de dérivation et d'inversion de ces intégrales :

$$f^{(p)}(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} (-1)^p e^{-\sigma z} \cdot \sigma^p k(\sigma)\, d\sigma ;$$

et

$$k(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t=+\infty} \int_{c-it}^{c+it} e^{\sigma z} f(z)\, dz ;$$

Indiquons encore quelques opérations importantes qu'il est possible de faire

subir à ces expressions, ces opérations ayant d'ailleurs déjà été rencontrées dans le calcul opérationnel de Fourier.

a/ <u>Produit de H. Weyl, ou faltung</u> –

Soient deux intégrales de Laplace

$$f_1(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-\sigma z} k_1(\sigma)\, d\sigma ; \qquad f_2(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-\sigma z} k_2(\sigma)\, d\sigma ;$$

holomorphes dans la même bande :

$$x_0 < \mathcal{R}[z] < x_1$$

Calculons le produit $f_1(z)\, f_2(z)$; à cause de l'absolue convergence des intégrales donnant $f_1(z)$ et $f_2(z)$ dans leur commune bande d'holomorphie, on a

$$f_1(z)\, f_2(z) = \lim_{t=+\infty} \cdot \lim_{\tau=+\infty} \int_{-t}^{+t} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-(\sigma+\rho) z} k_1(\sigma)\, k_2(\rho)\, d\sigma\, d\rho$$

prenons comme variable σ et $\sigma + \rho = \varsigma$, il vient

$$\cancel{f_1(z)\, f_2(z) = \lim_{t=+\infty} \cdot \lim_{\tau=\infty} \int_{-t}^{+t}}$$

$$f_1(z)\, f_2(z) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-\varsigma z} k(\varsigma)\, d\varsigma$$

avec

$$k(\varsigma) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} k_1(\sigma)\, k_2(\varsigma - \sigma)\, d\sigma$$

Cette dernière intégrale étant d'elle-même convergente pour presque toutes les valeurs de s.

b/ Intégration de $k(\sigma)$ sous le signe somme

Nous considérerons seulement les intégrales de Laplace à limite inférieure nulle :

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma .$$

holomorphes dans le demi-plan

$$\mathcal{R}[z] > x_0 .$$

Posons

$$x_0^+ = \mathrm{Max}\,[0 ; x_0].$$

prenons $x > x_0^+$ et considérons les fonctions

$$H(\sigma) = e^{-x\sigma} k(\sigma) \quad \text{pour } \sigma \geqslant 0 ; \quad = 0 \quad \text{pour } \sigma < 0$$

$$K(\sigma) = e^{-x\sigma} \quad \text{pour } \sigma \geqslant 0 ; \quad = 0 \quad \text{pour } \sigma < 0$$

formons le produit de H. Weyl de ces deux fonctions :

$$I(\sigma) = \lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} H(\tau)\, K(\sigma - \tau)\, d\tau = \lim_{t=+\infty} \int_0^{+t} H(\tau)\, K(\sigma - \tau)\, d\tau$$

$$= 0 \quad \text{pour } \sigma < 0$$

$$= e^{-x\sigma} \int_0^{\sigma} k(\tau)\, d\tau = e^{-x\sigma} k_1(\sigma) . \quad \text{pour } \sigma \geqslant 0$$

~~x étant négatif et $k(\sigma)$ étant intégrable dans tout domaine finie, les fonctions $H(\sigma)$ et $K(\sigma)$ sont de valeur absolue intégrable dans $(-\infty, +\infty)$~~ (77)

x étant négatif, $K(\sigma)$ est de valeur absolue intégrable dans $(-\infty, +\infty)$;

x étant supérieur à x_0, $H(\sigma)$ est de valeur absolue intégrable dans $(-\infty, +\infty)$;

on en déduit comme au § 6, par application du théorème de Fubini que $I(\sigma)$ est de valeur absolue intégrable dans $(-\infty ; +\infty)$. Donc

$$\lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-x\sigma} \left| k_1(\sigma) \right| d\sigma \qquad (28)$$

existe ; il vient d'autre part, en intégrant par partie

$$\int_0^t e^{-x\sigma} k(\sigma)\, d\sigma = e^{-xt} k_1(t) + x \int_0^t e^{-x\sigma} k_1(\sigma)\, d\sigma ;$$

les intégrales figurant dans les deux membres ont des limites pour t infini, donc

$$\lim_{t=+\infty} e^{-xt} k_1(t)$$

existe et cette limite est nécessairement nulle à cause de (28).

Dans ces conditions il vient

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma$$

$$= \lim_{t=+\infty} \left[e^{-zt} k_1(t) + z \int_0^t e^{-\sigma z} k_1(\sigma)\, d\sigma \right]$$

$$= \lim_{t=+\infty} . z \int_0^t e^{-\sigma z} k_1(\sigma)\, d\sigma$$

pour

$$\Re[z] > x_0^+$$

On a donc

$$\frac{1}{z} f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z} k_1(\sigma)\, d\sigma$$

et plus généralement

$$\frac{1}{z^p} f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z} k_p(\sigma)\, d\sigma$$

avec

$$k_p(\sigma) = \int_0^\sigma k_{p-1}(\tau)\, d\tau ; \qquad p = 1; 2, \ldots$$

c/ <u>Dérivation de $k(\sigma)$ sous le signe somme</u>

Reprenons ~~f~~ l'intégrale

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma$$

Supposons que $k(\sigma)$ ait une dérivée et que l'intégrale

$$g(z) = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z} k'(\sigma)\, d\sigma$$

converge absolument dans un certain demi-plan ; d'après ce qui précède, on aura, dans un demi-plan convenable

$$\frac{g(z)}{z} = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z} \left[k(\sigma) - k(0) \right] d\sigma$$

$$= \lim_{t=+\infty} \left[\int_0^t e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma \right] - \frac{k(0)}{z} \qquad (\text{car } \mathcal{R}[z] < 0)$$

$$= f(z) - \frac{k(0)}{z}$$

donc

$$z f(z) - k(0) = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z} k'(\sigma)\, d\sigma$$

puis de proche en proche et sous des conditions analogues :

$$z^p f(z) - z^{p-1} k(0) + z^{p-2} k'(0) \cdots + (-1)^p k^{(p-1)}(0) = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z} k^{(p)}(\sigma)\, d\sigma$$

$$(p = 1; 2; \cdots)$$

Tous ces résultats et quelques autres, d'une évidence immédiate, sont réunis dans le tableau suivant :

1°/ valables pour les intégrales de Laplace de la forme

$$\lim_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} \qquad \text{comme de la forme} \qquad \lim_{t=+\infty} \int_0^{+t} ;$$

$k(\sigma)$ $\qquad$ $f(z)$;

$k(m\sigma)$ $\qquad$ $\frac{1}{m} f\left(\frac{z}{m}\right)$; $\qquad$ (m réel et > 0).

$e^{a\sigma} k(\sigma)$	$f(z-a)$	(a quelconque)
$k(\sigma - a)$	$e^{az} f(z)$	(a réel ; formule valable seulement pour les intégrales à 2 limites infinies).
$\left.\begin{array}{ll} 0 & \text{pour } \sigma < a \\ k(\sigma - a) & \text{pour } \sigma \geqslant a \end{array}\right\}$	$e^{az} f(z)$	(a réel en > 0 ; formule valable pour les intégrales ayant une limite nulle en l'autre infinie).
$(-1)^p \sigma^p k(\sigma)$	$f^{(p)}(z)$	
$\lim\limits_{t=+\infty} \int_{-t}^{+t} k_1(\tau)\, k_2(\sigma - \tau)\, d\tau$;	$f_1(z)\, f_2(z)$	

2°/ Valables pour les intégrales ayant une limite nulle et une limite infinie

$\int_0^\sigma k(\tau)\, d\tau$;	$\dfrac{f(z)}{z}$	
$k'(\sigma)$	$z f(z) - k(0)$	
$-\sigma k'(\sigma)$	$z f'(z) + f(z)$	
$\sigma^2 k''(\sigma)$	$z f''(z) + 2 f(z)$	

.....

$k''(\sigma)$	$z^2 f(z) - z\,k(0) + k'(0)$
$-\sigma\, k''(\sigma)$	$2z\, f(z) + z^2 f'(z) - k(0)$
$\sigma^2 k''(\sigma)$	$2 f(z) + 4z\, f'(z) + z^2 f''(z)$

.....

etc...

Toutes ces formules, dont les conditions de validité ont été explicitées plus haut, permettent le calcul de certaines intégrales et la résolution de certaines équations différentielles linéaires. Il arrive parfois que le calcul opérationnel de Laplace réussit quand on ne peut appliquer le calcul opérationnel de Fourier, et inversement; mais il arrive aussi que les deux méthodes soient applicables simultanément.

<u>Exemple</u>

Prenons

$$k(\sigma) = \sigma^n J_n(\sigma)$$

$J_n(\sigma)$ étant la fonction de Bessel d'indice n; à partir de l'équation de Bessel on déduit aisément l'équation

$$\sigma^2 k''(\sigma) - (2n-1)\,\sigma\, k'(\sigma) + \sigma^2 k(\sigma) = 0\,;$$

Posons

$$f(z) = \lim_{t=+\infty} \int_0^t e^{-\sigma z}\, k(\sigma)\, d\sigma$$

La relation différentielle devient, d'après le tableau précédent

$$z^2 f(z) + 4z f'(z) + z^2 f''(z) + (2n-1)\left[z f'(z) + f(z)\right] + f''(z) = 0$$

ou

$$(1+z^2)\, f''(z) + (2n+3)\, z f'(z) + (2n+1)\, f(z) = 0$$

ou encore

$$\left[(1+z^2) f'(z)\right]' + (2n+1)\left[z f(z)\right]' = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$\frac{1}{(1+z^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left[A + B\int_0^z (1+y^2)^{n-\frac{1}{2}}\, dy\right] ;$$

Nous supposerons $\mathcal{R}[n] > -\frac{1}{2}$; si B n'est pas nul l'expression précédente a une limite finie non nulle pour z réel infiniment grand positif ; or, $|J_n(\sigma)|$ est bornée, de 0 à l'infini, par un nombre M, on a

$$\left|\int_0^t e^{-\sigma z} k(\sigma)\, d\sigma\right| < M\int_0^t e^{-\sigma z}\sigma^n\, d\sigma$$

pour z réel et positif le second membre est inférieur à $\dfrac{M\,\Gamma(n)}{z^{n+1}}$;

$f(z)$ a donc pour limite zéro quand z réel devient infiniment grand positif ; on a par suite

$$f(z) = \frac{A}{(1+z^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

La formule d'inversion est applicable ici, car la fonction égale à

$$\begin{cases} e^{-c\sigma}\,\sigma^n\,J_n(\sigma) & \text{pour } \sigma \geq 0 \\ 0 & \text{pour } \sigma < 0 \end{cases}$$

~~appartie~~

appartient à la classe A pour tout c positif ; il vient donc

$$\sigma^n J_n(\sigma) = \frac{A}{2\pi i} \lim_{t=+\infty} \int_{c-it}^{c+it} e^{\sigma z} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+\frac{1}{2}}} \; ;$$

l'évaluation des parties principales des deux membres, en prenant σ comme infiniment petit principal, permet la détermination de la constante A, qu'on trouve égale à

$$\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

$\longleftrightarrow$

Séries d'inverses de factorielles.

x et λ variables complexes ;

<u>Elément fondamental.</u> $$\delta_\lambda(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1+\lambda)}$$

<u>Opérateur $\mathcal{D}$</u> . $$\mathcal{D}[f] = x[f(x-1) - f(x)] ;$$

on a $$\mathcal{D}[\delta_\lambda(x)] = x\left[\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\lambda)} - \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1+\lambda)}\right] = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\lambda+1)}[x+\lambda-x] = \lambda\,\delta_\lambda(x) ;$$

<u>Domaine X</u> : $\mathcal{R}[x] > 0$;

<u>Domaine Λ</u> : $\mathcal{R}[\lambda] > 0$;

<u>Étude de l'équation :</u> $\mathcal{D}[f] = \lambda f$;

On pose $$f(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1+\lambda)} \cdot g(x) ;$$

alors $$\mathcal{D}[f] - \lambda f = x f(x-1) - (x+\lambda) f(x) = \frac{x\,\Gamma(x)}{\Gamma(x+\lambda)} g(x-1) - \frac{x\,\Gamma(x)}{\Gamma(x+\lambda)} g(x)$$

on a donc $$g(x-1) = g(x)$$

et g est une fonction périodique de période 1.

<u>Classe A</u> . Elle doit être telle que les seules solutions de $\mathcal{D}[f(x)] = \lambda f(x)$, appartenant à A soit de la forme $k\,\delta_\lambda(x)$; k étant une constante. pour ces solutions, la fonction périodique $g(x)$ doit donc se réduire à une constante

Considérons l'ensemble des fonctions analytiques et holomorphes de la variable complexe x, dans X ; ayant la propriété suivante : elles sont $O\left[\frac{1}{x^n}\right]$; $[\mathcal{R}[n] > 0]$, sur tout chemin s'éloignant à l'infini dans X.

a/ cette classe est linéaire : Si $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à cette classe

et si

$$f(x) = O\left[\frac{1}{x^n}\right] ; \qquad g(x) = O\left[\frac{1}{x^m}\right]$$

sur tout chemin s'éloignant à l'infini dans X, si, de plus, $\mathcal{R}[m] \leq \mathcal{R}[n]$, on a

$$F(x) = f(x) + g(x) = O\left[\frac{1}{x^n}\right] + O\left[\frac{1}{x^m}\right] = O\left[\frac{1}{x^m}\right]$$

sur un tel chemin. Nous prendrons cette classe pour classe linéaire A ;

b/ $j_\lambda(x)$ appartient à A pour $\mathcal{R}[\lambda] > 0$.

Dans X, on peut appliquer la formule de Stirling, et on a

$$j_\lambda(x) \sim \frac{x^x \sqrt{2\pi x}\, e^{-x}}{(x+\lambda)^{x+\lambda} \cdot \sqrt{2\pi(x+\lambda)}\, e^{-x-\lambda}} = e^\lambda \sqrt{\frac{x}{x+\lambda}}\, \frac{1}{(x+\lambda)^\lambda} \left(\frac{x}{x+\lambda}\right)^x$$

$x^\lambda j_\lambda(x)$ a donc pour limite l'unité et $j_\lambda(x) = O\left[\frac{1}{x^\lambda}\right]$;

c/ les seules solutions de $\mathcal{D}[f(x)] = \lambda f(x)$ appartenant à A sont de la forme $k\, j_\lambda(x)$, k étant une constante.

Posant $f(x) = j_\lambda(x) \cdot g(x)$, où $g(x)$ est une fonction périodique de période 1, on est amené à rechercher les fonctions $g(x)$ qui sont de la forme $O[x^m]$, $\mathcal{R}[m]$ étant quelconque, pour tout chemin allant à l'infini tracé dans X; mais $g(x)$ étant périodique, sera alors $O[x^m]$ pour tout chemin du plan allant à l'infini ; elle se réduit donc à une constante.

Dans ces conditions, si $F(x)$ est convenable, et si l'équation

$$\mathcal{D}[f(x)] = \lambda f(x) + F(x)$$

a une solution $f(x)$ appartenant à A, toutes ses solutions appartenant à A sont de la forme

$$f(x) + k\, j_\lambda(x).$$

A/ <u>Séries en x^λ</u>

x et λ variables complexes.

<u>Elément fondamental</u> : $j_\lambda(x) = x^\lambda$;

<u>Opérateur $\mathcal{D}$</u>. $\mathcal{D}[f] = x \dfrac{d}{dx}$;

on a $\mathcal{D}[j_\lambda(x)] = \lambda j_\lambda(x)$;

<u>Domaine X</u>. le plan complexe de la variable x

<u>Domaine Λ</u>. ~~la partie du plan de λ définie par $\mathcal{R}[\lambda]$~~. le plan complexe de la variable λ.

<u>Classe A</u>. Ensemble des fonctions analytiques de x définies dans un cercle de centre origine, sauf peut être à l'origine.

Les seules solutions de $\mathcal{D}[f] = \lambda f$ appartenant à A sont de la forme $k\, j_\lambda(x)$.

Si $g(x)$ est une fonction analytique de x, une solution particulière de

$$\mathcal{D}[f] = \lambda f + g$$

est

$$f(x) = \int_a^x \left(\frac{x}{\xi}\right)^\lambda g(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi}$$

où a peut être pris arbitrairement $\neq 0$; [on suppose $g(x)$ holomorphe pour $x = a$].

Si $\delta[f]$ est une fonctionnelle linéaire quelconque, et si

$$\delta[j_\lambda(x)] = A(\lambda)$$

admet pour zéros $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \ldots ; \lambda_n ; \ldots$, on a le développement formel

$$g(x) = \sum_n a_n x^{\lambda_n} ; \qquad \text{avec} \qquad a_n = \frac{\Delta_{\lambda_n}[g]}{A'(\lambda_n)}$$

où on a posé

$$\Delta_\lambda[g] = \delta\left[\int_a^x \left(\frac{x}{\xi}\right)^\lambda g(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi}\right]$$

a pourrait être pris arbitrairement.

<u>Exemple</u>. $\delta[f]$ représente la variation de f quand la variable décrit un circuit autour de l'origine, en partant de a et y revenant, [dans le sens + par exemple].

Alors: $A(\lambda) = a^\lambda\left[e^{2\pi i\lambda} - 1\right]$

dont les zéros sont $\lambda = \pm n$; n entier ≥ 0 ; On prendra $\lambda_n = n$; n prenant les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$; d'ailleurs

$$A'(\lambda_n) = 2\pi i\, a^n$$

D'autre part $\Delta_{\lambda_n}[g]$ est égale à la valeur de

$$a^n \int g(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi^{n+1}}$$

l'intégrale étant prise le long d'un lacet partant du point a et y revenant après avoir entouré l'origine dans le sens direct, en évitant toutes les autres singularités de $g(x)$.

On a donc

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C g(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi^{n+1}}$$

C étant un cercle de centre origine, de rayon suffisamment petit. On retrouve l'expression des coefficients du développement de Laurent.