

RÉDACTION N° 097

**RÉDACTION N° 096**

COTE : NBR 008

**COTE : NBR 007**

TITRE : LIVRE II. ALGÈBRE  
CHAPITRE IV. (ÉTAT 6)

**TITRE : CHAPITRE V. ÉTUDE LOCALE DES FONCTIONS**

**ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI**

**NOMBRE DE PAGES : 56**

**NOMBRE DE FEUILLES : 56**

## CHAPITRE V.

## ETUDE LOCALE DES FONCTIONS.

De très nombreux problèmes, dans la plupart des théories mathématiques se présentent sous la forme suivante : étant donnée une fonction numérique  $f$ , définie dans une partie  $A$  d'un espace topologique  $E$ , comment "se comporte-t-elle" au voisinage d'un point donné  $a \in \bar{A}$  ? Ce sont ces problèmes que nous appelons d'une manière générale problèmes d'étude locale d'une fonction.

Il faut d'abord les poser de façon précise. On a défini, au point  $a$ , les expressions  $\liminf_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$  et  $\limsup_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ . On peut donc penser que le problème dont nous venons de parler comporte uniquement la détermination de ces deux nombres (et éventuellement de toutes les valeurs d'adhérence de  $f$  au point  $a$ , relativement à  $A$ ). Mais on s'aperçoit vite que les renseignements obtenus ainsi sont insuffisants ; par exemple, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , les trois fonctions  $x$ ,  $x^2$  et  $\sqrt{x}$  tendent toutes trois vers  $+\infty$  ; mais, des expressions

$$(x+1)-x, \quad (x+1)^2-x^2, \quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

la première tend vers 1, la seconde vers  $+\infty$ , la troisième vers 0. La valeur limite d'une fonction n'est donc pas seule importante, mais encore la manière dont cette fonction tend vers sa limite. Tout le problème consiste à distinguer à cet égard les diverses fonctions ayant au point  $a$  mêmes limites inférieure et supérieure, autrement dit, à les comparer entre elles.

Comment faire cette comparaison ? On est guidé par le fait que, dans la plupart des questions, il n'y a pas lieu de considérer comme très différentes l'une de l'autre, au point de vue de leur comportement en un point, deux fonctions qui ne diffèrent que par un facteur constant. Ceci conduit tout naturellement à comparer une fonction  $f$  à une fonction  $g$  en étudiant le rapport  $f/g$  (supposé exister) dans un voisinage de  $a$  ; suivant les valeurs des limites inférieure et supérieure de cette fonction en  $a$ , on est amené à considérer l'allure de  $f$  au voisinage de  $a$  comme très différente ou au contraire semblable à celle de  $g$ . Nous commencerons par énumérer les différents cas possibles, en indiquant les notations qui permettent de les désigner de façon abrégée ; nous considérerons ensuite plus particulièrement les fonctions d'une variable réelle, où la comparaison aux fonctions (H) permet de pousser beaucoup plus loin la notion d'étude locale ; enfin, nous exposerons des méthodes générales d'étude locale de fonctions définies par certains procédés qu'on rencontre très fréquemment en Analyse.

§ 1. Définitions et notations.

Parmi les fonctions numériques définies sur  $A$ , on est amené à distinguer les deux classes suivantes :

- 1° Les fonctions bornées dans un voisinage du point  $a \in \bar{A}$  ; dans l'étude locale des fonctions au voisinage de  $a$ , on les désignera par la notation  $B(x)$ , la lettre  $B$  étant affectée d'indices lorsque plusieurs fonctions de cette nature figurent dans les raisonnements.
- 2° Les fonctions tendant vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $a$  en restant dans  $A$  ; on les désignera par la notation  $\epsilon(x)$ , la lettre  $\epsilon$  étant

affectée d'indices pour distinguer les différentes fonctions de cette nature dans un raisonnement.

Enfin, on désignera par la lettre  $K$ , affectée d'indices, les constantes  $\neq 0$  intervenant dans les raisonnements.

Pour éviter tout malentendu, il y aura lieu de rappeler brièvement ces conventions chaque fois qu'on les utilisera dans une question de manière systématique.

Cela posé, examinons les différents cas qui peuvent se produire quand on compare, au sens défini ci-dessus, une fonction  $f$  à une fonction  $g$  au voisinage de  $a$ . Nous supposons une fois pour toutes, dans ce chapitre, que les fonctions  $g$  qui servent de termes de comparaison, sont finies et strictement positives dans un voisinage de  $a$ ; le rapport  $f/g$  est alors défini dans un voisinage de  $a$ .

Posons  $\alpha = \liminf_{x \rightarrow a, x \in A} |f(x)|/g(x)$ ,  $\beta = \limsup_{x \rightarrow a, x \in A} |f(x)|/g(x)$  on a  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ . Nous distinguerons les cas suivants :

1°  $\beta < +\infty$ ,  $\alpha$  quelconque ; on a alors  $f(x) = B(x)g(x)$ , et on dit (par un abus de langage) que  $f$  croît moins vite que  $g$  au voisinage de  $a$ .

2°  $\alpha = 0$ ,  $\beta$  quelconque ; on a  $f(x) = g(x)/B(x)$  aux points où  $f$  est finie, et on dit que  $f$  croît plus vite que  $g$  au voisinage de  $a$ .

3°  $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$  ; on a  $f(x) = B_1(x)g(x)$ , et  $f(x) = g(x)/B_2(x)$  aux points où  $f$  est finie ; on dit que  $f$  croît aussi vite que  $g$  au voisinage de  $a$ .

4°  $\alpha = \beta = 0$  ; on a  $f(x) = \epsilon(x)g(x)$  ; on dit que  $f$  est négligeable par rapport à (ou devant)  $g$  au voisinage de  $a$ .

5°  $\alpha = \beta = +\infty$  ; alors  $f(x) = g(x)/\varepsilon(x)$  aux points où  $f$  est finie ; on dit que  $f$  est prépondérante sur  $g$  au voisinage de  $a$  .

6°  $0 < \alpha = \beta < +\infty$  ; alors  $|f(x)| = \alpha(1+\varepsilon(x))g(x)$  ; on dit que  $|f|$  est équivalente à  $\alpha g$  au voisinage de  $a$  . Ce cas est surtout intéressant lorsque  $f$  garde un signe constant au voisinage de  $a$  ; alors, si  $f \geq 0$  ,  $f$  est équivalente à  $\alpha g$  ; si  $f \leq 0$  , on dit que  $f$  est équivalente à  $-\alpha g$  .

Plus généralement, on dit encore que deux fonctions  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $a$  (même si  $g$  ne satisfait pas aux hypothèses énoncées ci-dessus), lorsque on a  $f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x)$  .

Le cas 1° (resp. 2°) peut encore s'exprimer comme suit : il existe une constante  $K$  telle que  $0 < K < +\infty$  et un voisinage  $V$  de  $a$  tels que, dans  $V \cap A$  , on ait  $|f(x)| \leq Kg(x)$  (resp.  $|f(x)| \geq Kg(x)$ ) .

Il peut se faire qu'aucun de ces deux cas ne soit réalisé, mais qu'il existe cependant une constante  $K$  et un voisinage  $V$  de  $a$  tels que  $f(x) \leq Kg(x)$  (ou  $f(x) \geq Kg(x)$ ) dans  $V \cap A$  ; il y a parfois lieu, dans certaines questions, de considérer ces cas.

Enfin, on peut avoir  $\liminf_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)/g(x) = -\infty$  , et  $\limsup_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)/g(x) = +\infty$  ; on dit alors que  $f$  et  $g$  ne sont pas comparables .

On observera que les relations entre  $f$  et  $g$  correspondant aux cas 4°, 5°, 6° généralisent les relations entre fonctions d'un corps de Hardy, que nous avons respectivement désignées de la même manière. On pourrait donc les noter également par les mêmes signes, dans le cas général, que dans le cas de fonctions d'un corps de Hardy ; et, en fait, lorsque  $A$

est une partie de la droite numérique  $\mathbb{R}$  , nous écrivons souvent

$$f < g \quad , \quad f > g \quad , \quad f \sim g$$

au lieu de

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad , \quad f(x) = g(x)/\varepsilon(x) \quad , \quad f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x)$$

respectivement ; dans ce même cas, nous écrivons aussi

$$f \ll g \quad , \quad f \gg g$$

au lieu de

$$f(x) = B(x)g(x) \quad , \quad f(x) = g(x)/B(x)$$

respectivement.

Par contre, lorsqu'il s'agira de fonctions de plusieurs variables, nous nous abstiendrons strictement d'utiliser ces notations, ou d'autres notations aussi condensées ; elles ne permettent pas, en effet, d'exprimer de façon adéquate les divers cas qui peuvent se produire, et risquent par suite d'entraîner de graves erreurs. Considérons, par exemple, deux fonctions  $f, g$  , définies dans un voisinage du point  $(0,0)$  de  $\mathbb{R}^2$  ; il se peut que, pour toute valeur fixe de  $x$  ,  $f(x,y)/g(x,y)$  tende vers 0 avec  $y$  , et, de même, que ce rapport tende vers 0 avec  $x$  pour toute valeur fixe de  $y$  ; mais ce serait une conclusion erronée d'en déduire  $f(x,y) = \varepsilon(x,y)g(x,y)$  au voisinage de  $(0,0)$  (et c'est pourtant ce qu'on serait tenté de faire si on écrivait chacune des relations existant entre  $f$  et  $g$  sous une forme telle que  $f < g$ ) ; les relations indiquées se traduiraient par exemple, avec les notations adoptées, de la manière suivante :

$$f(x,y) = \varepsilon_1^{(x)}(y)g(x,y) = \varepsilon_2^{(y)}(x)g(x,y)$$

étant entendu que l'on ne préjuge en rien, de cette manière sur la limite du rapport  $f/g$  lorsque le couple  $(x,y)$  tend vers  $(0,0)$ .

Les propriétés suivantes des fonctions de type B ou  $\varepsilon$  sont immédiates, et correspondent d'ailleurs en partie à celles des signes de comparaison des fonctions d'un corps de Hardy, données au ch. IV ; nous laissons au lecteur le soin de les vérifier :

- (1)  $B_1 \pm B_2 = B_3$  ,  $B \pm \varepsilon = B_1$  ,  $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 = \varepsilon_3$
- (2)  $B_1 B_2 = B_3$  ,  $B\varepsilon = \varepsilon_1$  ,  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_3$
- (3) Si  $\varphi$  est une fonction numérique, définie dans  $\mathbb{R}$  , et bornée dans toute partie bornée de  $\mathbb{R}$  , on a  $\varphi \circ B = B_1$ .
- (4) Si  $\psi$  est une fonction numérique définie dans un voisinage de 0 sur  $\mathbb{R}$  , et tendant vers 0 en ce point, on a  $\psi \circ \varepsilon = \varepsilon_1$ .

§ 2. Etude locale des fonctions de variable réelle.

Développements asymptotiques.

Nous allons maintenant nous attacher plus particulièrement au cas où  $A$  est une partie de la droite numérique  $\mathbb{R}$  ,  $a$  étant un point de  $\bar{\mathbb{R}}$  adhérent à  $A$  ; c'est ce que nous désignons brièvement sous le nom d'étude locale des fonctions de variable réelle.

Lorsque  $a$  est fini, il y a lieu, en général, de distinguer, dans l'étude locale des fonctions définies sur  $A$  , au voisinage de  $a$  , l'étude à droite et l'étude à gauche de  $a$  (c'est-à-dire respectivement l'étude, au voisinage de  $a$  , de la restriction de la fonction envisagée à l'ensemble  $A \cap ] a, +\infty [$  ou à l'ensemble  $A \cap ] -\infty, a [$ ).

Or, l'étude d'une fonction  $f(x)$ , à droite (resp. à gauche) de  $a$ , se ramène évidemment à celle de la fonction  $f(1/(x-a))$  (resp. de  $f(-1/(x-a))$ ) au voisinage de  $+\infty$  (cette fonction étant définie sur l'image réciproque de  $A$  par l'application  $x \rightarrow 1/(x-a)$ , resp.  $x \rightarrow -1/(x-a)$ ) ; de même l'étude d'une fonction  $f(x)$  au voisinage de  $-\infty$  se ramène à celle de  $f(-x)$  au voisinage de  $+\infty$ .

Aussi supposons-nous désormais, dans les définitions et propositions ultérieures de ce chapitre, que l'étude des fonctions envisagées se fait au voisinage de  $+\infty$  (ces fonctions étant donc définies sur une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  non bornée supérieurement) ; chaque fois que ce sera utile, nous indiquerons les résultats correspondants qu'on en déduit (au moyen des changements de variables précédents) pour l'étude locale au voisinage d'un autre point de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Position du problème. Comme termes de comparaison pour l'étude locale des fonctions au voisinage de  $+\infty$ , nous prendrons les fonctions (H) positives (et éventuellement des fonctions appartenant à des corps de Hardy obtenus en adjoignant au corps des fonctions (H) des primitives de certaines fonctions (H)). Ces fonctions (la constante 0 mise à part) restent bien strictement positives au voisinage de  $+\infty$ .

Quels renseignements peut-on alors se proposer d'obtenir sur le comportement d'une fonction  $f$  au voisinage de  $+\infty$ , en la comparant aux fonctions (H) ? C'est ce que nous allons d'abord indiquer, en faisant abstraction, pour le moment, de la possibilité d'obtenir ~~par~~ pour une fonction quelconque, des renseignements de cette nature, (problème sur lequel nous revenons plus loin), et en procédant par ordre de précision croissante.



1° Le minimum qu'on puisse demander est de trouver une fonction de comparaison  $g$  telle que  $f(x) \leq Kg(x)$ , ou  $f(x) \geq Kg(x)$  (avec une constante  $K$  convenable) au voisinage de  $+\infty$ .

2° Un résultat déjà meilleur sera l'obtention d'une fonction de comparaison  $g$  telle que  $f \ll g$ , autrement dit, ce qu'on appelle encore une limitation supérieure (ou majoration) de la croissance de  $f$ .

Le meilleur résultat dans ce sens sera obtenu si on détermine une fonction de comparaison  $g_0$  telle que  $f \ll g_0$ , mais que, pour toute fonction  $g < g_0$ , la relation  $f \ll g$  n'ait plus lieu.

3° On peut ensuite se proposer d'opérer de même sur la fonction  $1/f$  c'est-à-dire de trouver une fonction de comparaison  $h$  telle que  $f \gg h$  (limitation inférieure ou minoration de la croissance de  $f$ ).

Le meilleur résultat de cette sorte sera atteint si on détermine une fonction de comparaison  $h_0$  telle que  $f \gg h_0$ , mais qu'on n'ait  $f \gg h$  pour aucune fonction  $h$  telle que  $h > h_0$ .

Si on a en outre  $h_0 \sim Kg_0$ , on peut en déduire que  $f$  croît aussi vite que  $g_0$ .

4° Ce résultat étant supposé atteint, on peut chercher ensuite s'il existe une constante  $K$  telle que  $f \sim Kg_0$ ; dans ce cas, on dit que  $Kg_0$  est une partie principale de  $f$  (on remarquera que cette notion est relative au système de fonctions de comparaison choisi).

5° Si on veut aller plus loin, on est amené à considérer la différence  $f_1 = f - Kg_0$ , qui est  $< g_0$ ; les mêmes problèmes qui se sont posés pour  $f$  se posent de nouveau, dans le même ordre, pour  $f_1$ .

Procédant ainsi de proche en proche, on est finalement amené à la notion de développement asymptotique de f au voisinage de +∞ :

Définition 1. On dit qu'on a obtenu un développement asymptotique d'ordre n d'une fonction f au voisinage de +∞ (relativement à un système donné de fonctions de comparaison), si on a déterminé n fonctions de comparaison  $g_1, g_2, \dots, g_n$  telles que  $g_1 \succ g_2 \succ \dots \succ g_n$  et que, si on pose  $f = g_1 + g_2 + \dots + g_n + R_n$ , on ait  $R_n \prec g_n$ . Les  $g_i$  sont dits les termes du développement,  $R_n$  en est dit le reste.

Le premier terme  $g_1$  n'est autre qu'une partie principale de f, et, de façon générale,  $g_i$  est une partie principale de  $f - (g_1 + \dots + g_{i-1})$ . Une fonction peut admettre plusieurs développements asymptotiques distincts (de même ordre) par rapport à un même système de fonctions de comparaison ; par exemple,  $(x^2+x)+1$ , et  $x^2+(x+1)$  sont deux développements asymptotiques d'ordre 2, en fonctions (H), de la fonction  $x^2+x+1$ . Aussi est-on amené à restreindre l'ensemble des fonctions de comparaison par rapport auxquelles on cherche des développements asymptotiques. Nous dirons qu'un ensemble  $\mathcal{T}$  de fonctions de comparaison est un ensemble de fonctions-types, s'il satisfait à la condition suivante :

(T) Si f et g sont deux fonctions de  $\mathcal{T}$ , la condition  $f \sim g$  entraîne  $f = g$ .

Un tel ensemble n'est autre qu'une partie d'un corps de Hardy totalelement ordonné par la relation " $f \prec g$  ou il existe  $k \leq 1$  telle que  $f \sim kg$ ".

D'après la définition des termes d'un développement asymptotique, il est immédiat qu'une fonction ne peut avoir qu'un seul développement asymptotique d'ordre donné, relativement à un ensemble de

fonctions-types donné.

Citons, comme ensembles de fonctions-types les plus employés, l'ensemble des fonctions  $kx^a$  ( $a$  réel quelconque  $k$  constante), et l'ensemble des fonctions  $x^a(\log x)^\beta e^{P(x)}$  ( $a, \beta$  nombres réels quelconques,  $P(x)$  polynôme à coefficients réels quelconques) ; on vérifie aussitôt la propriété (T) pour ces deux ensembles.

Un développement relatif à l'ensemble des fonctions types  $kx$  est dit développement asymptotique ordinaire.

Possibilités de comparaison aux fonctions (H). Exemples. Nous avons laissé

en suspens la question de savoir si le processus décrit ci-dessus peut ou non se poursuivre pour une fonction  $f$  arbitrairement donnée. Un instant de réflexion suffit à montrer que la réponse est négative, même si on impose à  $f$  des restrictions telles que la continuité ou la monotonie au voisinage de  $+\infty$ .

Tout d'abord, il est évident qu'on ne pourra obtenir de majoration de la croissance de  $f$ , si  $f$  devient infini dans tout voisinage de  $+\infty$  ; de même, on ne pourra en avoir de minoration, si  $f$  s'annule dans tout voisinage de  $+\infty$ .

Une fonction est dite oscillante au voisinage d'un point si elle change de signe dans tout voisinage de ce point ; d'après le théorème de Weierstrass (Top. gén., ch.IV, § 5, th. ), toute fonction continue oscillante au voisinage de  $+\infty$  s'annule dans tout voisinage de ce point ; elle ne peut donc admettre de minoration de sa croissance par une fonction (H). Par exemple  $\sin x$  admet une majoration, mais pas de minoration ;  $1/\sin x$  admet une minoration, mais pas de majoration ; enfin  $\operatorname{tg} x$

n'admet ni majoration ni minoration au voisinage de  $+\infty$ .  
 Montrons maintenant comment on peut définir une fonction  $f$ , mono-  
tone et continue au voisinage de  $+\infty$ , et qui croît plus vite que  
toute fonction (H). Il suffit de prendre pour  $f$  une juxtaposition  
 des fonctions linéaires  $f_n$ , la fonction  $f_n$  étant définie dans  
 l'intervalle  $[n, n+1]$  par la condition

$$f_n(n) = e_n(n) \quad , \quad f_n(n+1) = e_{n+1}(n+1)$$

D'après la prop.2 du § 2 du ch.IV, il ne saurait exister de  
 fonction (H) croissant plus vite que  $f$ .

Le même raisonnement, légèrement modifié, conduit au  
 résultat plus général connu sous le nom de théorème de  
Du Bois Reymond :

Etant donnée une suite  $(f_n)$  de fonctions continues  
croissantes, définies dans un voisinage de  $+\infty$ , et  
telles que  $f_{n+1} > f_n$  quelque soit  $n$ , il existe une  
fonction  $\varphi$  continue et croissante dans un voisinage de  
 $+\infty$  et telle que  $\varphi > f_n$  quel que soit  $n$ .

On commence par remplacer la suite  $(f_n)$  par une suite  
 $(g_n)$  ayant les mêmes propriétés, mais telle que, de plus,  
 $g_{n+1} \geq g_n$  quel que soit  $n$ , et que  $g_n = f_n$  à partir d'une  
 certaine valeur  $x_n$  de  $x$ . Pour construire une pareille  
 suite, on procède par récurrence ;  $g_n$  étant définie, on a  
 $f_{n+1} > g_n$ , donc  $f_{n+1} \geq g_n$  pour  $x \geq x_{n+1}$  ; on prendra  
 alors  $g_{n+1} = f_{n+1}$  pour  $x \geq x_{n+1}$ , et  $g_{n+1} = \text{Max}(f_{n+1}, g_n)$   
 pour  $x < x_{n+1}$ . Cela étant, on posera

$$\varphi(n) = g_n(n)$$

et, pour  $n \leq x \leq n+1$ , on posant  $x=(n+1)t+(1-t)n$  ( $0 \leq t \leq 1$ )

$$\varphi(x) = (1-t)g_n(x) + tg_{n+1}(x)$$

On vérifie aussitôt que  $\varphi$  est croissante ; comme  $\varphi \geq g_n$  pour  $x > n$ , on a  $\varphi/g_n \geq g_{n+1}/g_n$  pour  $x > n+1$ , d'oà  $\varphi > g_n \sim f_n$ .

Si on définissait  $f_n$  par les conditions  $f_n(n)=(-1)^n e_n(n)$ ,  $f_n(n+1)=(-1)^{n+1} e_{n+1}(n+1)$ ,  $f_n$  étant en outre linéaire dans  $[n, n+1]$  la juxtaposition des  $f_n$  serait une fonction qui ne serait comparable à aucune fonction (H).

Toutefois l'existence des fonctions de la nature précédente présente un intérêt surtout théorique, car, pour l'immense majorité des fonctions (monotones et continues au voisinage de  $+\infty$ ) qui se présentent dans les parties les plus diverses de l'Analyse, il s'est trouvé jusqu'ici qu'on pouvait toujours obtenir une limitation inférieure et une limitation supérieure de leur croissance à l'aide de fonctions (H).

On peut même dire que, lorsqu'on a affaire à une fonction  $f$  ne devenant pas infinie en valeur absolue dans tout voisinage de  $+\infty$ , la détermination d'une majoration de la croissance de  $f$  au moyen d'une fonction (H) n'est pas en général un problème difficile ; il en est tout autrement en ce qui concerne la détermination d'une meilleure majoration de cette espèce, ou même seulement la démonstration de l'existence d'une meilleure majoration.

Dans des cas simples, cette meilleure majoration  $g_0$  est évidente ; par exemple, pour  $f(x)=\sin x$ , on a  $g_0(x)=1$ . Soit  $G(x)$  le nombre des couples  $(p,q)$  d'entiers tels que  $p^2+q^2 \leq x$  ; on démontre fort aisément que  $G(x) \sim \pi x$  ;

- 114 -

mais, si on pose  $R(x) = G(x) - \pi x$ , on sait seulement que

$$R(x) \leq x^{27/82}$$

et que, dans cette formule, l'exposant de  $x$  ne peut pas être remplacé par  $1/4$  (il faut d'ailleurs des moyens techniques très puissants et très complexes pour arriver à ces résultats ; quant au problème de l'existence et de la détermination d'une meilleure majoration pour  $R(x)$ , il reste en suspens).

On peut enfin construire des fonctions qui n'admettent pas de meilleure majoration par des fonctions (H) ; si  $f$  croît plus vite que toute fonction (H),  $1/f$  possède évidemment cette propriété. Mais on peut aussi obtenir une telle fonction croissant indéfiniment : par un procédé analogue à celui employé dans le théorème de Du Bois Reymond, on peut former une fonction  $f$  croissante, continue et tendant vers  $+\infty$ , telle que  $f < 1/n(x)$ , quel que soit  $n$  ; il résulte alors d'un théorème sur les fonctions (H) <sup>(1)</sup>, que  $f$  ne peut admettre une meilleure majoration par une telle fonction.

Il peut être tout aussi difficile de déterminer si une fonction admet une minoration de sa croissance par une fonction (H) (et même déjà de savoir si une fonction est ou non oscillante au voisinage de  $+\infty$ ).

Par exemple, on sait que la fonction  $R(x)$  définie ci-dessus est oscillante, mais (comme elle n'est pas continue) on ignore si sa croissance peut être limitée inférieurement par une fonction (H).

Lorsqu'on a obtenu une meilleure majoration  $g_0$  et une meilleure minoration  $h_0$  pour la croissance d'une fonction  $f$ , il se peut, bien entendu, que l'on ait  $h_0 < g_0$ ; s'il en est ainsi, l'étude locale de  $f$  ne peut se prolonger au-delà de ce stade.

Par exemple, si  $f(x) = x + x^2 \sin^2 x$ , on a  $g_0 = x^2$ ,  $h_0 = x$ .

Dans cet exemple,  $f$  n'est pas monotone au voisinage de  $+\infty$ , mais on peut aisément former des exemples analogues à l'aide de fonctions élémentaires monotones : c'est ainsi que  $f(x) = (x^2 \cos^2 x + \sin^2 x) e^{x^2}$  est monotone, comme on le vérifie aisément, mais on a  $g_0 = x^2 e^{x^2}$ , et  $h_0 = e^{x^2}$ .

Si les remarques et exemples qui précèdent montrent clairement qu'il ne saurait être question de chercher une partie principale (ni a fortiori un développement asymptotique) d'une fonction quelconque, il n'en reste pas moins vrai que les fonctions pour lesquelles ces recherches ont un sens se présentent très fréquemment et jouent un rôle prépondérant en Analyse. En premier lieu, si  $f(1/x)$  est continue ainsi que ses  $n+1$  premières dérivées dans un voisinage de 0, le développement de Taylor d'ordre  $n$  de  $f(1/x)$ , dans lequel on remplace  $x$  par  $1/x$ , est un développement asymptotique ordinaire d'ordre  $n$  de  $f(x)$ , comme il résulte de la limitation du reste de la formule de Taylor (ch. I, § 4). En dehors de ce cas, qu'on peut considérer comme trivial, il existe de nombreux cas où on peut obtenir un développement asymptotique d'une fonction de façon élémentaire, à savoir ceux où la fonction est déduite par des opérations algébriques, ou des opérations de composition, ou des opérations du Calcul infinitésimal, de fonctions dont on connaît déjà des développements asymptotiques ; ces cas seront examinés dans les

paragrapes qui suivent. Enfin, on trouvera d'autres exemples de recherche de parties principales et de développements asymptotiques, nécessitant une technique plus poussée, dans la partie de cet ouvrage consacrée aux Intégrales à noyaux.

Parmi les résultats les plus remarquables obtenus dans ce genre de questions, il faut citer particulièrement ceux de Théorie analytique des nombres, où on étudie au voisinage de  $+\infty$  des fonctions définies arithmétiquement, et qui ont en général des valeurs entières (et par suite sont discontinues). Les techniques utilisées dans ces recherches sont parmi les plus délicates et les plus complexes de toute l'Analyse.

Par exemple, si  $\bar{\omega}(x)$  désigne le nombre des nombre premiers  $\leq x$ , et  $p(n)$  le nombre des partitions d'un ensemble de  $n$  éléments, on démontre que pour  $x$  (resp.  $n$ ) voisin de  $+\infty$ , on a

$$\bar{\omega}(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

Les méthodes employées permettent en outre d'avoir un développement asymptotique d'ordre aussi grand qu'on veut de  $p(n)$ ; au contraire, par suite de difficultés analytiques, jusqu'ici insurmontées, on ne connaît même pas la meilleure majoration de la fonction  $f(x) = \bar{\omega}(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}$  (à supposer qu'il en existe une; on a seulement pu démontrer que  $f(x) \ll x e^{-A\sqrt{\log x \log \log x}}$ , ( $A$  constante numérique) et qu'on ne peut pas remplacer le second membre par  $\frac{\sqrt{x} \log \log \log x}{\log x}$



§ 3. Calcul de développements asymptotiques :

A. Opérations algébriques, fonctions de fonctions, fonctions réciproques.

Somme et produit. Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que les développements asymptotiques donnés sont relatifs à un ensemble  $\mathcal{T}$  de fonctions-types, contenant le corps des constantes réelles, et tel que le produit et le quotient de deux fonctions de  $\mathcal{T}$  appartiennent encore à  $\mathcal{T}$  ; il en est ainsi par exemple, de l'ensemble des fonctions  $kx^a$ , correspondant aux développements asymptotiques ordinaires.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un même ensemble, au voisinage de  $+\infty$ , et soient

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_m + \varepsilon_1 f_m$$

$$g = g_1 + g_2 + \dots + g_n + \varepsilon_2 g_n$$

( $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  fonctions de  $x$  tendant vers 0 avec  $1/x$ ) des développements asymptotiques de  $f$  et  $g$  relatifs à  $\mathcal{T}$ . Entre deux termes  $f_i, g_j$  existe par hypothèse une des relations  $f_i \prec g_j, f_i \succ g_j, f_i = Kg_j$ . En groupant, dans la somme  $f+g$ , les termes des deux développements qui ne diffèrent que par un facteur constant, et en faisant pour un moment abstraction des restes, on obtient une somme

$$u_1 + u_2 + \dots + u_p$$

de fonctions de  $\mathcal{T}$ , telles que  $u_1 \succ u_2 \succ u_3 \succ \dots \succ u_p$ . Pour obtenir un développement asymptotique de  $f+g$ , il suffira de ne garder dans cette somme que les termes  $u_r$  tels que l'on ait à la fois  $u_r \succ \varepsilon_1 f_m$  et  $u_r \succ \varepsilon_2 g_n$ ; il se peut d'ailleurs qu'il n'y

ait aucun terme  $u_r$  ayant cette propriété ; c'est le cas où, en supposant par exemple  $m \leq n$ , les  $m$  premiers termes du développement de  $g$  sont opposés aux termes de même indice du développement de  $f$  ; on peut seulement alors dire, en général, que  $f+g \ll f_m$ . Si on ne se trouve pas dans ce cas, soit  $p$  le plus grand indice  $r$  ayant la propriété précédente ; on peut alors écrire

$$f+g = u_1 + u_2 + \dots + u_p + \varepsilon_3 u_p$$

et on a ainsi le développement asymptotique (relatif à  $\mathcal{T}$ ) d'ordre le plus élevé de  $f+g$ , que permettent d'obtenir les développements donnés de  $f$  et  $g$ .

Il se peut qu'on n'ait  $g_j \gg \varepsilon_1 f_m$  pour aucune valeur de l'indice  $j$  ; le développement de  $f+g$  obtenu de la manière précédente est alors le même (au reste près) que celui de  $f$ . Par exemple, si  $f = x/(x+1)$ ,  $g = e^{-x}$ , on a les développements

$$\begin{aligned} f &= 1 - 1/x + 1/x^2 - \dots + (-1)^n / x^{n-1} + \varepsilon_1 / x^{n-1} \\ g &= e^{-x} \end{aligned}$$

( $\mathcal{T}$  étant ici formé des fonctions  $x^\alpha (\log x)^\beta e^{P(x)}$ ). Comme  $e^{-x} \ll 1/x^n$  quel que soit  $n$ ,  $f+g$  et  $f$  ont les mêmes développements.

Formons maintenant le produit  $fg$  ; en ne considérant d'abord que les produits  $f_i g_j$ , on peut (d'après l'hypothèse sur  $\mathcal{T}$ ), en groupant ceux de ces termes qui ne diffèrent que par un facteur constant, les ranger en une somme

$$v_1 + v_2 + \dots + v_q$$

de fonctions de  $\mathcal{T}$ , telles que  $v_1 \gg v_2 \gg \dots \gg v_q$  ; on obtiendra un développement asymptotique de  $fg$ , relatif à  $\mathcal{T}$ , en ne gardant

- 119 -

que les termes  $v_s$  tels que  $v_s \succ \varepsilon_1 g_1 f_m$  et  $v_s \succ \varepsilon_2 f_1 g_n$ . Ici il existe toujours de pareils termes, car on a  $v_1 = f_1 g_1$ ; si  $\sigma$  est le plus grand indice  $s$  ayant cette propriété, on peut écrire

$$fg = v_1 + v_2 + \dots + v_\sigma + \varepsilon_4 v_\sigma$$

et on a ainsi le développement d'ordre le plus élevé de  $fg$ , relativement à  $\mathcal{I}$ , que l'on puisse obtenir à l'aide des développements donnés de  $f$  et  $g$ .

On peut ainsi obtenir de proche en proche un développement asymptotique d'une somme ou d'un produit d'un nombre quelconque de fonctions dont on connaît les développements, et en particulier, celui d'une puissance entière  $> 0$  quelconque de  $f$ .

Fonctions de fonctions. Commençons par examiner un cas particulier :

soit  $f$  une fonction tendant vers 0 avec  $1/x$ , et dont on connaisse un développement

$$(1) \quad f = f_1 + f_2 + \dots + f_m + \varepsilon_1 f_m$$

relatif à  $\mathcal{I}$ ; soit d'autre part  $\varphi$  une fonction continue ainsi que ses  $n+1$  premières dérivées dans un voisinage de 0; on peut alors écrire, d'après la formule de Taylor

$$(2) \quad \varphi \circ f = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n + \varepsilon_2 f^n$$

les  $a_i$  étant les coefficients du développement de Taylor de  $\varphi$  au point  $x=0$ . Remplaçons dans (2) le polynôme  $a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n$  par son développement asymptotique obtenu à partir de (1) par application des procédés décrits ci-dessus; en ne gardant que les termes de ce développement qui sont  $\succ \varepsilon_2 f_1^n$ , on aura le développement d'ordre le plus élevé qu'on puisse déduire de ceux de  $f$  et  $\varphi$ .

Passons à d'autres cas. Supposons d'abord que toute puissance d'une fonction (positive) de  $\mathcal{I}$  appartienne aussi à  $\mathcal{I}$ . Alors, du développement (1) d'une fonction positive  $f$ , relatif à  $\mathcal{I}$ , on peut déduire un développement relatif à  $\mathcal{I}$  de toute puissance  $f^\alpha$ ; il suffit d'écrire  $f=f_1(1+g)$  avec  $g=f_2/f_1+f_3/f_1 + \dots + f_m/f_1 + \epsilon_1 f_m/f_1$ ,  $g$  tend donc vers 0 avec  $1/x$ ; d'autre part, on a des développements de Taylor d'ordre quelconque de  $\varphi(x)=(1+x)^\alpha$  au voisinage de 0; comme  $f^\alpha = f_1^\alpha \cdot (1+g)^\alpha$ , on appliquera le procédé précédent pour développer  $(1+g)^\alpha$ , et en multipliant chacun des termes de ce développement par  $f_1^\alpha$ , on aura un développement de  $f^\alpha$  relatif à  $\mathcal{I}$ .

Montrons maintenant comment on peut obtenir de même un développement de  $\log f$  ( $f > 0$ ) à partir d'un développement (1) de  $f$ ; on aura, avec les mêmes notations

$$\log f = \log f_1 + \log (1+g)$$

et on connaît des développements de Taylor d'ordre quelconque de  $\log (1+x)$  au voisinage de 0; on en déduira donc un développement de  $\log f$  relatif à  $\mathcal{I}$  pourvu qu'on sache former un développement de  $\log f_1$  relatif à ce même ensemble de fonctions-types.

Exemple. Soit à chercher, au voisinage de  $x = 0$ , un développement asymptotique de  $\log(1-x^x)$ . On a

$$x^x = e^{x \log x}$$

donc, comme  $x \log x$  tend vers 0 avec  $x$ , on a, en appliquant la formule de Taylor d'ordre 3, par exemple

$$x^x = 1+x \cdot \log x + \frac{x^2(\log x)^2}{2} + \frac{x^3(\log x)^3}{6} + \epsilon(x) \cdot x^3(\log x)^3$$

et par suite

- 121 -

$$\log(1-x^x) = \log(x \cdot \log(1/x)) + \log\left(1 + \frac{x \log x}{2} + \frac{x^2 (\log x)^2}{6} + \varepsilon(x) x^2 (\log x)^2\right).$$

Or, en appliquant les méthodes précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} \log\left(1 + \frac{x \log x}{2} + \frac{x^2 (\log x)^2}{6} + \varepsilon(x) x^2 (\log x)^2\right) &= \\ &= \frac{x \log x}{2} + \frac{x^2 (\log x)^2}{24} + \varepsilon_1(x) x^2 (\log x)^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \log(1-x^x) &= \log x + \log \log(1/x) + \frac{x \log x}{2} + \frac{x^2 (\log x)^2}{24} + \\ &+ \varepsilon_1(x) x^2 (\log x)^2 \end{aligned}$$

C'est un développement relatif à l'ensemble des fonctions de la forme  $x^\alpha (\log(1/x))^\beta (\log \log(1/x))^\gamma$  qui est bien un ensemble de fonctions-types. On remarquera qu'on ne détermine cet ensemble de fonctions-types qu'à posteriori ; c'est toujours de cette manière qu'on procède en pratique, car on ne peut savoir quel ensemble  $\mathcal{T}$  conviendra avant d'entreprendre le calcul ; pour conduire ce dernier, on se laisse guider par le principe suivant : décomposer le plus possible les fonctions (H) qui interviennent en sommes de fonctions plus simples, ordonnées pour la relation " $\succ$ ".

Cherchons maintenant à obtenir un développement de  $e^f$ , connaissant le développement (1) de  $f$ . Il faut ici distinguer plusieurs cas :

1° Supposons d'abord que  $f_m \ll 1$  ( $f_m$  bornée), et soit  $k$  le plus petit indice  $\ll m$  tel que  $f_k \ll 1$  ; on peut alors écrire

$$e^f = e^{f_1} e^{f_2} \dots e^{f_k} e^g$$

avec  $g = f_{k+1} + \dots + f_m + \varepsilon_1 f_m$  ; comme  $g$  tend vers 0 avec  $1/x$ , et que l'on connaît des développements de Taylor d'ordre quelconque de  $e^x$ , on pourra développer  $e^g$  suivant la méthode générale donnée ci-dessus.

D'autre part nous supposerons qu'en adjoignant à  $\mathcal{T}$  tous les produits de la forme  $h e^{h_1} e^{h_2} \dots e^{h_n}$ , où  $h, h_1, \dots, h_n$  sont des fonctions de  $\mathcal{T}$  telles que  $h_1 \succ h_2 \succ \dots \succ h_n \succ 1$ , on obtienne encore un ensemble  $\mathcal{T}$  de fonctions-types; le produit de deux fonctions de  $\mathcal{T}'$  appartiendra encore évidemment à  $\mathcal{T}'$  dans ce cas rentre par exemple celui où  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des puissances  $x^a$ ; alors, en multipliant le développement de  $e^x$  par  $e^{f_1 + \dots + f_k}$ , on obtient un développement de  $e^f$  relatif à  $\mathcal{T}'$ .

2° Supposons en second lieu  $f_m \succ 1$ ; alors le développement (1) ne donnera même pas, en général, la partie principale de  $e^f$  relativement à  $\mathcal{T}'$ ; on peut seulement dire que  $e^f / e^{f_1 + \dots + f_m}$  est d'ordre 0 par rapport à  $e^{f_m}$  (en étendant ici une notion qui a été définie pour les fonctions d'un corps de Hardy).

Exemples. 1) Cherchons un développement de  $x^{x^x}$  au voisinage de  $x=0$ ; on a

$$x^{x^x} = e^{\log x \cdot e^{x \cdot \log x}}$$

$$\text{et } \log x \cdot e^{x \cdot \log x} = \log x + x(\log x)^2 + \frac{x^2(\log x)^3}{2} + \varepsilon(x)x^2(\log x)^3$$

en prenant, par exemple, un développement à 3 termes; le premier seul de ces termes est non borné, les autres tendent vers 0; d'où

$$x^{x^x} = x \cdot e^{x(\log x)^2 + \frac{x^2(\log x)^3}{2} + \varepsilon(x)x^2(\log x)^3}$$

$$= x + x^2(\log x)^2 + \frac{1}{2} x^3(\log x)^4 + \frac{1}{2} x^3(\log x)^3 + \varepsilon_1(x)x^3(\log x)^3$$

d'après la méthode générale.

2) Considérons la fonction  $e^{e^x \sin(1/x)}$  au voisinage de  $+\infty$ . Comme on peut avoir un développement asymptotique ordinaire d'ordre quelconque de  $\sin(1/x)$  par

la formule de Taylor, on en déduit un développement d'ordre quelconque de  $e^x \sin(1/x)$  relatif à l'ensemble des fonctions  $x^\alpha e^{P(x)}$  ( $P(x)$  polynôme). Mais tous les termes de ce développement sont de la forme  $k e^x/x^n$ , donc tendant vers  $+\infty$ ; on ne peut donc pas avoir de partie principale de la fonction donnée, qui soit de la forme

$$e^{e^{P(x)} Q(1/x)}$$

$P$  et  $Q$  étant des polynômes.

Remarque. Ce dernier exemple montre qu'on peut avoir un développement asymptotique d'ordre quelconque du logarithme d'une fonction sans en pouvoir déduire de développement de cette fonction elle-même; un développement de  $\log f$  est donc un renseignement beaucoup moins précis sur  $f$  qu'un développement de  $f$ , et il en est de même, à fortiori, d'un développement de  $1_n(f)$ , pour  $n > 1$ .

Toutefois, de tels développements peuvent rendre de grands services dans beaucoup de questions d'Analyse; et il importe lorsqu'on calcule sur des fonctions dont on connaît des développements de certains logarithmes, de se rendre compte de la nature de l'approximation des expressions que l'on calcule à l'aide de ces fonctions; pour cela, il n'y a qu'à essayer de former successivement des développements des logarithmes itérés de l'expression considérée, jusqu'à ce qu'on puisse y parvenir, à l'aide des développements donnés.

Par exemple, si on sait que  $f \sim x^\alpha$ , et  $\log g \sim x^\beta$  ( $\alpha$  et  $\beta > 0$ ), que peut-on dire de  $fg$ ? On aura  $\log fg = \log f + \log g = x^\beta + \epsilon(x) x^\beta$  puisque  $\log x \ll x^\beta$ ;

- 124 -

on a donc  $\log fg \sim \log g$ , autrement dit, le fait que  $f$  soit connu avec plus de précision que  $g$  ne présente aucun intérêt pour la connaissance du produit  $fg$ ; il en serait de même pour la somme  $f+g$ , comme on le voit sans peine.

De ce qui précède, et de la définition des fonctions (H), on déduit la possibilité, dans certains cas, d'avoir un développement asymptotique de la fonction composée  $\varphi \circ f$ , lorsqu'on connaît un développement de  $f$ , et que  $\varphi$  est une fonction (H). Il en sera toujours ainsi, en particulier, quand aucune exponentielle n'entre-  
ra dans la formation de  $\varphi$ .

Fonctions réciproques. Lorsque  $f$  est monotone au voisinage de  $+\infty$ , la relation  $x = f(y)$  est biunivoque pour  $y$  voisin de  $+\infty$ , et définit donc  $y$  en fonction monotone de  $x$  au voisinage du point  $a = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y)$ ; c'est cette fonction que, par abus de langage, nous désignerons sous le nom de fonction réciproque de  $f$  dans ce qui suit.

Par un changement de variable sur  $x$ , on peut toujours supposer que  $a = +\infty$ ; le problème que nous allons examiner est de trouver un développement asymptotique de la fonction réciproque de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ , connaissant un développement asymptotique de  $f$  au voisinage de ce point.

Nous n'aborderons ce problème que lorsque  $f$  est une fonction (H); il serait facile de généraliser les résultats qui vont suivre moyennant des hypothèses moins restrictives sur  $f$ .



Nous examinerons d'abord le cas où  $f(y) = y - g(y)$ ,  $g$  étant une fonction (H) telle que  $g(y) < y$ . Formons la suite de fonctions

$$\begin{aligned}
y_0 &= x \\
y_1 &= x + g(y_0) = x + g(x) \\
y_2 &= x + g(y_1) = x + g(x + g(x)) \\
&\dots\dots\dots \\
y_n &= x + g(y_{n-1}) \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que la différence  $y - y_n$  tend vers 0 avec  $1/x$ , et trouver une fonction (H) équivalente à cette différence ; il en résultera qu'un développement asymptotique de  $y_n$ , limité à un nombre convenable de termes, donnera immédiatement un développement de  $y$ , ce qui, vu la forme de  $y_n$ , ramène le problème à un développement de fonctions composées.

Pour établir ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant, relatif aux fonctions (H) :

Lemme. Soient  $p$  et  $q$  deux fonctions (H) non identiquement nulles et telles que  $q(x) > 0$  au voisinage de  $+\infty$ .

- 1° Si  $q < p/p'$ , on a  $p(x+q(x)) \sim p(x)$ .
- 2° Si on a à la fois  $q < p/p'$  et  $q < x$ , on a  $p(x-q(x)) \sim p(x)$ .

1° Les deux propositions sont évidentes si  $p \sim K$  (constante  $\neq 0$ ) ; on peut donc supposer  $p < 1$  (sans quoi on raisonnerait sur  $1/p$ ) ; on en tire  $p' < 1$ . On a

$$p(x+q(x)) = p(x) + q(x)p'(x+\theta q(x)) \quad \text{avec } 0 < \theta < 1$$

Comme  $|p'|$  tend vers 0, elle décroît pour  $x$  assez grand, donc on aura  $|p'(x+\theta q(x))| < |p'(x)|$  ; comme  $qp' < p$ , on en déduit aussitôt la proposition.

2° La condition  $q \ll x$  assure que  $x-q(x)$  tend vers  $+\infty$  avec  $x$ .

On a encore

$$p(x-q(x)) = p(x)-q(x)p'(x-\theta q(x)) \quad \text{avec } 0 < \theta < 1$$

On a ici  $|p'(x-\theta q(x))| < |p'(x-q(x))|$ ; la proposition sera démontrée si on établit que l'expression  $q(x)p'(x-q(x))/p(x-q(x))$  tend vers 0 avec  $1/x$ . Or, cela est immédiat si  $p'/p \gg 1$ , car alors  $|p'/p|$  est croissante pour  $x$  assez grand, et

$$\left| \frac{q(x)p'(x-q(x))}{p(x-q(x))} \right| < q(x) \left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right|$$

La proposition est tout aussi évidente si  $p'/p \sim K$  (constante  $\neq 0$ ), car alors  $p'(x-q(x))/p(x-q(x)) \sim p'(x)/p(x)$ . Reste uniquement à examiner le cas où  $p'/p \ll 1$ .

Supposons d'abord  $p'/p \ll 1/x$ . Alors

$$p'(x-q(x))/p(x-q(x)) = B(x)/(x-q(x)), \text{ donc}$$

$$q(x)p'(x-q(x))/p(x-q(x)) = B(x) (q(x)/x)/(1-q(x)/x)$$

et comme  $q \ll x$  par hypothèse, on en déduit bien la proposition.

On remarquera qu'on a démontré ainsi, d'après la prop. 6 du § 1 du ch. IV, que, pour toute fonction  $p \ll 1$  d'ordre fini par rapport à  $x$ , et non équivalente à une constante, et toute fonction  $q \ll x$ , on a  $p(x-q(x)) \sim p(x)$ .

Supposons maintenant que  $1/x \ll p'/p \ll 1$ ; la fonction  $t=p'/p$  est alors d'ordre fini par rapport à  $x$ , et on a  $q \ll x$ ; en lui appliquant la proposition précédente, on a

$$p'(x-q(x))/p(x-q(x)) \sim p'(x)/p(x)$$

ce qui permet de conclure encore dans ce dernier cas.

Remarque. Les conditions imposées à  $q$  ne peuvent être améliorées, comme le montrent les exemples suivants :

- a)  $p(x) = e^x$ ,  $q(x) = 1 = p(x)/p'(x)$ ,  $p(x+q(x)) = e \cdot p(x)$  ;  
 b)  $p(x) = \log x$ ,  $q(x) = x - \log(x) \prec p(x)/p'(x) = x \log x$ ,  
 $p(x-q(x)) = \log \log x \prec p(x)$ .

Le lemme étant démontré, revenons à l'étude de la suite  $(y_n)$ . De la définition de  $y$ , on tire  $x/y = 1 - g(y)/y$  ; quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , il en est de même de  $y$ , donc  $g(y)/y$  tend vers 0, ce qui montre que  $y \sim x = y_0$ . On a en outre

$y - y_0 = y - x = g(y) = g(x) + g(y)g'(z)$  où  $z$  est compris entre  $x$  et  $y$  ; quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , il en est donc de même de  $z$  donc, comme  $g' \prec 1$ ,  $g'(z)$  tend vers 0, autrement dit

$$y - x - g(x) = \epsilon(x)g(y) = \epsilon(x)(y - x)$$

ce qui donne

$$(3) \quad y - x \sim g(x) \prec x$$

Montrons maintenant que, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $y_n$  tend vers  $+\infty$ , et que l'on a

$$(4) \quad y - y_n \prec y - y_{n-1}$$

En effet, on a  $y - y_1 = g(y) - g(y_0) = g'(z_0)(y - y_0)$

où  $z_0$  est compris entre  $y$  et  $y_0$ , donc tend vers  $+\infty$  avec  $x$  ; donc  $g'(z_0)$  tend vers 0 avec  $1/x$ , ce qui montre que  $y - y_1 \prec y - y_0 \sim y$ , et entraîne par suite  $y_1 \sim y$  ; le raisonnement se poursuit de la même manière, par récurrence.

De (4), on déduit, de proche en proche,  $y - y_n \prec y - y_0 \sim g(x)$ , d'où  $(y - x) - (y_n - x) \prec y - x$ , ce qui entraîne  $y_n - x \sim y - x \sim g(x)$ .

Limitons-nous maintenant au cas où  $g(x)$  n'est pas équivalent à une constante  $K \neq 0$  ; on peut toujours le faire, car si on avait  $g \sim K$  , on pourrait écrire l'équation  $x = y - g(y)$  sous la forme

$$x = y - K - g_1(y)$$

avec  $g_1(y) \ll 1$  , et le changement de variable  $u = y - K$  ramènerait au cas que nous considérons. Nous allons alors, à l'aide du lemme, trouver une fonction (H) équivalente à  $y - y_n$  .

Pour cela, montrons que, si une fonction  $z$  est telle que  $z - x \sim g(x)$ , on a  $g'(z) \sim g'(x)$ . En effet, pour  $x$  assez grand, comme  $g'$  est monotone,  $g'(z)$  est comprise entre  $g'(x + (1 + \epsilon)g(x))$  et  $g'(x + (1 - \epsilon)g(x))$ . Pour appliquer le lemme, il nous suffit de voir que  $g \ll g'/g''$  ; or, si  $g$  est d'ordre infini par rapport à  $x$  , on a (ch. IV, § 1, prop. 6)  $g''/g' \sim g'/g$  , et comme  $g' \ll 1$  ,  $g \ll g/g'$  ; si au contraire,  $g$  est d'ordre fini par rapport à  $x$  , comme  $g$  n'est pas équivalent à une constante, on a  $g''/g' \sim K/x$  , et on a d'autre part  $g \ll x$  .

On a alors  $y - y_n = g'(z_{n-1})(y - y_{n-1})$ , où  $z_{n-1}$  est compris entre  $y$  et  $y_{n-1}$  , et par suite tel que  $z_{n-1} - x \sim g(x)$  ; donc  $g'(z_{n-1}) \sim g'(x)$  et  $y - y_n \sim g'(x)(y - y_{n-1})$  ; de proche en proche, on en tire

$$(5) \quad y - y_n \sim g(x)(g'(x))^n$$

On aura donc un développement asymptotique de  $y$  , en prenant un développement asymptotique de  $y_n$  , et en lui ajoutant le développement (à 1 terme), de  $y - y_n$  , donné par (5), suivant la règle donnant la somme de deux développements.

Le cas que nous venons d'examiner paraît bien particulier ; mais il permet d'aborder des cas beaucoup plus généraux dans l'étude des fonctions réciproques des fonctions (H). Supposons en effet que, si f est la fonction (H) considérée, on puisse écrire, pour un indice r convenable, en prenant le logarithme d'ordre r de la relation  $x = f(y)$ ,  ${}_r x = {}_s y - g(y)$  avec  $g(y) \ll {}_s y$  ou  ${}_r x = e_t y - g(y)$  avec  $g(y) \ll e_t y$  (s et t entiers positifs,  $e_0 y = {}_1 y = y$ ) ; en posant  $x_1 = {}_r x$ ,  $y_1 = {}_s y$  ou  $y_1 = e_t y$  suivant les cas, on est ramené à une relation entre  $x_1$  et  $y_1$  du type étudié. On reviendra ensuite à l'expression de y en prenant des logarithmes ou exponentielles successifs du développement trouvé, ce qui ramène à des problèmes déjà traités.

Exemples. 1) Soit à trouver un développement de la fonction réciproque de  $f(y) = y/\log y$  ; on tire de  $x = y/\log y$ ,

$$\log x = \log y - \log \log y$$

ou, en posant  $x_1 = \log x$ ,  $y_1 = \log y$

$$x_1 = y_1 - \log y_1$$

Prenons l'approximation d'ordre 3, soit

$$z = x_1 + \log(x_1 + \log(x_1 + \log(x_1)))$$

d'après (5), on a

$$y_1 - z \sim \log x_1 / x_1^3$$

d'où, en développant z, on obtient

$$y_1 = x_1 + \log x_1 + \frac{\log x_1}{x_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\log x_1}{x_1} \right)^2 + \frac{\log x_1}{x_1^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{\log x_1}{x_1} \right)^3 - \frac{3}{2} \frac{(\log x_1)^2}{x_1^3} + \frac{\log x_1}{x_1^3} + o(x_1) \frac{\log x_1}{x_1^3}$$

puis, en revenant à y,

- 130 -

$$y = e^{y_1} = e^{x_1} \left[ x_1 + \log x_1 + \frac{\log x_1}{x_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\log x_1}{x_1} \right)^2 + \frac{\log x_1}{x_1^2} + \varepsilon_1(x_1) \frac{\log x_1}{x_1^2} \right]$$

Il suffit ensuite de remplacer  $x_1$  par  $\log x$  dans ce développement pour avoir un développement de  $y$ , relatif à l'ensemble des fonctions-types  $x^\alpha (\log x)^\beta (\log \log x)^\gamma$ .

2) Cherchons un développement de la fonction réciproque de  $f(y) = ye^{e^y}$ ; la relation  $x = ye^{e^y}$  s'écrit

$$\log \log x = y + \log(1 + e^{-y} \log y)$$

Posons  $x_1 = \log \log x$ ; en prenant l'approximation  $z$  d'ordre 1, on trouve  $y - z \sim gg' \sim -e^{-2x_1} (\log x_1)^2$

et on a d'autre part

$$z = x_1 - \log(1 + e^{-x_1} \log x_1) = x_1 - e^{-x_1} \log x_1 + \frac{1}{2} e^{-2x_1} (\log x_1)^2 + \varepsilon(x) e^{-2x_1} (\log x_1)^2$$

d'où, en revenant à la variable  $x$ ,

$$y = \log \log x - \frac{\log \log \log x}{\log x} - \frac{1}{2} \left( \frac{\log \log \log x}{\log x} \right)^2 (1 + \varepsilon(x))$$

Remarque. On généralisera aisément les résultats précédents lorsque  $g(y)$  n'est pas une fonction (H), mais satisfait aux diverses conditions relatives à ses dérivées que nous avons utilisées. Toutefois, il faut se garder de simplifier inconsidérément des problèmes de cet ordre; c'est ainsi qu'on aboutirait à des résultats erronés si, en recherchant un développement de la fonction réciproque d'une fonction  $f(y)$ , on remplaçait  $f$  par une fonction équivalente; c'est ce que montre l'exemple des fonctions équivalentes  $f_1(y) = \log y$  et  $f_2(y) = \log y - 1$ , dont les fonctions réciproques sont

respectivement  $e^x$  et  $e^{x+1}$ , et ne sont donc pas équivalentes.

§ 4. Calcul de développements asymptotiques :

B. Développement d'une primitive.

Le problème que nous nous posons dans ce paragraphe est le suivant : soit  $f$  une fonction continue par morceaux et positive dans un intervalle  $]a, +\infty[$ , et admettant une primitive dans cet intervalle (ce qui sera le cas si  $f$  est continue et bornée par morceaux dans  $]a, +\infty[$ ) ; que peut-on dire de l'allure d'une primitive  $\int_b f$  ( $b > a$ ) au voisinage de  $+\infty$ , selon les renseignements qu'on possède sur l'allure de la fonction  $f$  elle-même ?

Bien entendu, tous les résultats qui vont suivre s'appliquent aussi à une fonction négative dans un voisinage de  $+\infty$  en changeant simplement les signes ; par contre, nous n'aborderons pas ici l'étude des primitives des fonctions oscillantes ; cette question est en effet d'une tout autre nature que celle dont nous allons nous occuper, tant au point de vue des résultats que des moyens employés ; elle se rattache à des problèmes plus généraux, que nous étudierons dans la partie de cet ouvrage consacrée aux Intégrales à noyaux.

Il est immédiat, tout d'abord, que  $\int_b f$  est croissante au voisinage de  $+\infty$ , et par suite que  $\int_b^{+\infty} f(t)dt$  existe, et est finie ou égale à  $+\infty$ . Une première question consiste à déterminer dans lequel de ces deux cas on se trouve : à cet effet, le théorème de la moyenne fournit immédiatement le critère de comparaison suivant, qui est fondamental :

Si f et g sont deux fonctions positives dans un voisinage de +∞ et telles que f ≤ g, on a ∫<sub>b</sub><sup>+∞</sup> f(t)dt ≤ ∫<sub>b</sub><sup>+∞</sup> g(t)dt ; par suite :

- 1° Si ∫<sub>b</sub><sup>+∞</sup> g(t)dt est finie, ∫<sub>b</sub><sup>+∞</sup> f(t) est finie.
- 2° Si ∫<sub>b</sub><sup>+∞</sup> f(t)dt est infinie, ∫<sub>b</sub><sup>+∞</sup> g(t)dt est infinie.

On en déduit que, si f et g sont deux fonctions positives au voisinage de +∞, telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup f(x)/g(x) < +\infty$ , (ce que nous notons encore  $f(x) = B(x)g(x)$  ou  $f \leq g$ ), et si  $\int_b^{+\infty} g(t)dt$  est finie, il en est de même de  $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ ; de même, si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \inf f(x)/g(x) > 0$  ( $f(x) = g(x)/B(x)$ , ou  $f \geq g$ ), et si  $\int_b^{+\infty} g(t)dt = +\infty$ , on a  $\int_b^{+\infty} f(t)dt = +\infty$ .

Comme nous allons le voir, les fonctions de comparaison qu'on utilise surtout sont les fonctions (H); toutefois, il ne faut pas perdre de vue qu'une fonction peut fort bien ne pas admettre de majoration par une fonction (H) de primitive finie, et même prendre la valeur +∞ dans tout voisinage de +∞, et admettre cependant une primitive finie dans un voisinage de +∞.

Considérons par exemple la fonction f, définie dans  $[0, +\infty[$  par les conditions :  $f(n) = +\infty$  pour tout entier  $n \geq 0$ , et

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \frac{|x - (n + \frac{1}{2})|}{\sqrt{1 - [x - (n + \frac{1}{2})]^2}} \quad \text{pour } n < x < n+1 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

On a  $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x)dx = 2(2 - \sqrt{3})$

comme on le vérifie aisément.

Pour utiliser les fonctions (H) dans l'application du critère de comparaison, il faut d'abord savoir quelles fonctions (H) ont une intégrale finie; c'est ce qu'on détermine aisément, grâce à la



connaissance des primitives des fonctions (H) les plus simples. En premier lieu,  $x^{\mu+1}/(\mu+1)$  est une primitive de  $x^\mu$  pour  $\mu \neq -1$ , et  $\log x$  une primitive de  $1/x$ ; donc :  $\int_a^{+\infty} x^\mu dx$  ( $a > 0$ ) est finie pour  $\mu < -1$ , infinie pour  $\mu \geq -1$ . Le critère de comparaison permet donc de conclure chaque fois qu'on a  $f \leq x^\mu$  avec  $\mu < -1$  ou  $f \geq x^\mu$  avec  $\mu \geq -1$ : dans le premier cas,  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  est finie, dans le second elle est infinie.

Il y a doute lorsqu'on connaît seulement une majoration de  $f$  d'ordre  $\geq -1$  par rapport à  $x$ , et une minoration d'ordre  $< -1$ . Lorsqu'on ne connaît pas de partie principale de  $f$ , il n'existe pas de procédé général pour déterminer la nature de l'intégrale de  $f$ . Si au contraire  $f$  est équivalente à une fonction (H), soit  $g$ , il ne peut y avoir doute que lorsque  $g < 1/x$  et  $g > x^\mu$  pour tout exposant  $\mu < -1$ ; c'est le cas par exemple si  $g(x) = 1/x(\log x)^\mu$ . ( $\mu > 0$ ).

Mais  $(\log x)^{-\mu+1}/(-\mu+1)$  est une primitive de  $1/(x(\log x)^\mu)$  si  $\mu \neq +1$ , et  $\frac{1}{2}x$  est une primitive de  $1/(x \log x)$ ; donc  $\int_a^{+\infty} dx/(x(\log x)^\mu)$  est finie pour  $\mu > +1$ , infinie pour  $\mu \leq +1$ .

On pourra donc de nouveau conclure lorsqu'on aura  $f \leq 1/(x(\log x)^\mu)$  avec  $\mu > +1$  ou  $f \geq 1/(x(\log x)^\mu)$  avec  $\mu \leq +1$ : dans le premier cas  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  est finie, dans le second elle est infinie.

Plus généralement,  $(\frac{1}{n}x)^{-\mu+1}/(-\mu+1)$  est une primitive de  $1/(x \cdot \log x \cdot \frac{1}{2}x \dots \frac{1}{n-1}x \cdot (\frac{1}{n}x)^\mu)$  si  $\mu \neq +1$ , et  $\frac{1}{n+1}x$  est une primitive de  $1/(x \cdot \log x \cdot \frac{1}{2}x \dots \frac{1}{n}x)$ ; on en déduit que, si on a  $f \leq 1/(x \cdot \log x \cdot \frac{1}{2}x \dots \frac{1}{n-1}x \cdot (\frac{1}{n}x)^\mu)$  avec  $\mu > 1$ ,  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  est finie; cette intégrale est au contraire infinie lorsqu'on a  $f \geq 1/(x \cdot \log x \dots \frac{1}{n-1}x \cdot (\frac{1}{n}x)^\mu)$  avec  $\mu \leq 1$ . Ce critère est dit

critère logarithmique d'ordre n (le critère de comparaison à  $x^\mu$  est dit, par extension, critère logarithmique d'ordre 0).

Il est rare, en pratique, qu'on ait à utiliser un critère logarithmique d'ordre  $> 3$  ; mais on peut aisément définir des fonctions continues par morceaux, pour lesquelles aucun critère logarithmique (d'ordre si élevé soit-il) ne permet de dire si leur intégrale est finie ou non au voisinage de  $+\infty$  . Il suffit de former une fonction  $f$  telle qu'on ait à la fois  $f < 1/(x \cdot \log x \dots 1_n x)$  et  $f > 1/(x \cdot \log x \dots (1_n x)^\mu)$  pour tout entier  $n$  et tout exposant  $\mu > 1$  ; nous allons montrer qu'on peut le faire de sorte que l'intégrale de  $f$  soit finie ou infinie.

Déterminons d'abord par récurrence une suite  $(a_n)$  telle que  $a_0 = 1$  , et  $1_{n+1} a_{n+1} = 1_{n+1} a_n + 1$  pour  $n \geq 0$  ; cette suite tend évidemment vers  $+\infty$  ; si on pose

$f_n(x) = 1/(x \cdot \log x \cdot 1_2 x \dots 1_n x)$  pour  $a_n \leq x \leq a_{n+1}$  on aura  $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(t) dt = 1$  , donc, si  $f$  est une juxtaposition des  $f_n$  ,  $\int_1^{+\infty} f(t) dt = +\infty$  , et  $f$  satisfait bien aux conditions précédentes. La fonction ainsi formée n'est pas continue, mais il serait aisé de la modifier légèrement au voisinage des points  $a_n$  de manière qu'elle soit continue et décroissante dans  $[1, +\infty[$  , et jouisse des mêmes propriétés que ci-dessus.

Déterminons maintenant une suite  $(b_n)$  telle que  $1/1_n b_n = 1/2^n$  c'est-à-dire  $b_n = e_n(2^n)$  ; cette suite tend encore vers  $+\infty$  .

Si on pose

$\varepsilon_n(x) = 1 / (x \cdot \log x \cdot 1_2 x \dots 1_{n-1} x \cdot (1_n x)^2)$  pour  $b_n \leq x \leq b_{n+1}$

on aura

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \varepsilon_n(x) dx \leq 1/2^n$$

et par suite, si  $g$  est une juxtaposition des  $\varepsilon_n$ ,

$\int_2^{+\infty} g(t) dt$  est finie, et aucun critère logarithmique

n'est applicable à  $g$ . On modifierait aisément  $g$  de manière à la rendre continue, tout en conservant ses autres propriétés.

On peut toutefois montrer que, pour une fonction (H), il existe toujours un entier  $n \geq 0$  tel que le critère logarithmique d'ordre  $n$  lui soit applicable <sup>(1)</sup>.

Il est utile de formuler les critères correspondant aux critères logarithmiques précédents, et relatifs aux primitives d'une fonction, continue et bornée par morceaux et positive dans un intervalle ouvert borné  $I$ , mais non bornée au voisinage de l'origine ou de l'extrémité de  $I$ . On peut se limiter au cas d'une fonction positive  $f$ , définie dans un intervalle  $]0, a[$ , mais non bornée au voisinage de 0; le changement de variable  $u = 1/t$ , ramène alors l'étude de la primitive de  $f(t)$  au voisinage de 0 à celle de la primitive de  $f(1/u)/u^2$  au voisinage de  $+\infty$ , d'où les critères suivants :

1° Si, au voisinage de 0,  $f \leq x^\mu$ , avec  $\mu > -1$ ,  $\int_0^a f(t) dt$  est finie; cette intégrale est au contraire infinie si  $f \gg x^\mu$  avec  $\mu \leq -1$ .

2° Si, au voisinage de 0, on a  $f \leq 1 / (x \cdot \log(1/x) \cdot 1_2(1/x) \dots \dots \dots 1_{n-1}(1/x) \cdot (1_n(1/x))^\mu)$ , avec  $\mu > 1$ ,  $\int_0^a f(t) dt$  est finie; cette intégrale est au contraire infinie lorsque

$f \gg 1 / (x \cdot \log(1/x) \cdot 1_2(1/x) \dots \dots \dots 1_{n-1}(1/x) \cdot (1_n(1/x))^\mu)$  avec  $\mu \leq 1$

On notera que, pour les critères logarithmiques d'ordre  $\geq 1$  les conditions pour l'exposant  $\mu$  sont les mêmes au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de 0 ; elles sont inversées au contraire pour le critère d'ordre 0 .

Exemples. 1) Si on considère l'intégrale

$$\int_0^1 t^p (1-t)^q dt$$

l'application du critère d'ordre 0 aux voisinages des points 0 et 1 montre que la condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale soit finie est qu'on ait  $p > -1$  et  $q > -1$ . Cette intégrale est dite intégrale eulérienne de première espèce, et se note  $B(p+1, q+1)$ .

2) On appelle de même intégrale eulérienne de seconde espèce

et on note  $\Gamma(x)$ , l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Comme  $e^{-t}$  est finie au point  $t=0$ , et que  $e^{-t} < t^\mu$  quel que soit  $\mu > 0$ , au voisinage de  $+\infty$ , l'application des critères d'ordre 0 montre que la condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale soit finie est  $x > 0$ .

Lorsqu'une fonction  $f$  possède un développement asymptotique au voisinage de  $+\infty$ , relatif à un ensemble de fonctions-types  $\mathcal{T}$ , la seule connaissance de sa partie principale permet, par application des critères logarithmiques, de voir si  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  est finie ou infinie. L'application du lemme 3 et de la prop. 4 du § 1 du ch. IV permet d'aller plus loin, et d'obtenir un développement asymptotique de la primitive  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  au voisinage de  $+\infty$ .

Soit en effet

$$(1) \quad f = f_1 + f_2 + \dots + f_n + R_n$$

le développement asymptotique de  $f$  ; distinguons deux cas :

1°  $\int_a^{+\infty} f_n(t)dt = +\infty$  ; alors, on a (lemme 3 du §1 du ch.IV)

$$\int_a^x f_1(t)dt \succ \int_a^x f_2(t)dt \succ \dots \succ \int_a^x f_n(t)dt \succ \int_a^x R_n(t)dt$$

donc

$$F = \int_a^x f_1 + \int_a^x f_2 + \dots + \int_a^x f_n + \int_a^x R_n$$

est un développement asymptotique de  $F$  relatif au corps de Hardy formé en adjoignant au corps des fonctions (H) celles des primitives de  $f_1, f_2, \dots, f_n$  qui ne sont pas des fonctions (H).

2°  $\int_a^{+\infty} f_n(t)dt$  finie ; soit alors  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) le premier indice tel que  $\int_a^{+\infty} f_k(t)dt$  soit finie ; si on pose

$$K = \int_a^{+\infty} (f(t) - f_1(t) - \dots - f_{k-1}(t))dt$$

$K$  est finie, puisque la fonction intégrée est équivalente à  $f_k$  ; et on peut écrire

$$(2) \quad F = \int_a^x f_1(t)dt + \dots + \int_a^x f_{k-1}(t)dt + K - \int_x^{+\infty} f_k(t)dt - \dots - \int_x^{+\infty} f_n(t)dt - \int_x^{+\infty} R_n(t)dt$$

Si  $K \neq 0$ , (2) est un développement asymptotique de  $F$  relatif au corps de Hardy obtenu en adjoignant au corps des fonctions (H) celles des primitives de  $f_1, f_2, \dots, f_n$  qui ne sont pas des fonctions (H), car on a (lemme 3 du §1 du ch.IV)

$$\int_a^x f_1(t)dt \succ \int_a^x f_2(t)dt \succ \dots \succ \int_a^x f_{k-1}(t)dt \succ K \succ \int_x^{+\infty} f_k(t)dt \succ \dots \succ \int_x^{+\infty} f_n(t)dt \succ \int_x^{+\infty} R_n(t)dt$$

Si  $K=0$ , on aura encore un développement asymptotique de  $F$  en supprimant le terme  $K$  du second membre de (2).

Lorsque  $k=1$ , on a  $K = \int_a^{+\infty} f(t)dt$ , et le développement de  $F$  s'écrit simplement

$$F = K - \int_x^{+\infty} f_1(t)dt - \dots - \int_x^{+\infty} f_n(t)dt - \int_x^{+\infty} R_n(t)dt$$

En général, les primitives qui figurent dans le développement de  $F$  n'appartiennent pas à l'ensemble  $\mathcal{T}$  ; pour avoir un développement de  $F$  relatif à  $\mathcal{T}$ , il suffira d'avoir un développement, relatif à  $\mathcal{T}$ , de chacune des primitives qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{T}$ , et de faire ensuite la somme de ces développements suivant la règle donnée au § 3. On est donc ramené à un problème qui est résolu en principe par la prop. 7 du § 1 du ch. IV : trouver un développement asymptotique d'une primitive d'une fonction (H). Supposons par exemple que  $g$  soit une fonction (H) telle que  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$  soit infinie ; la proposition rappelée donne une partie principale de  $\int_a^x g(t)dt$ , soit  $g_1$  ; on a donc  $g < g_1$ , d'où  $g - g_1 < g_1$  ; ~~comme  $g - g_1 < g_1$~~  ; comme  $g - g_1$  est une fonction (H), on pourra obtenir une partie principale de  $\int_a^x (g - g_1)dt$ , soit  $g_2$ , en supposant que cette primitive croisse indéfiniment avec  $x$ , et on aura  $g_2 < g_1$  ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne éventuellement à une fonction  $g_n$  telle que  $h = g - (g_1 + g_2 + \dots + g_n)$  ait une intégrale bornée au voisinage de  $+\infty$  ; on cherchera alors une partie principale  $g_{n+1}$  de  $\int_x^{+\infty} h(t)dt$ , puis une partie principale  $g_{n+2}$  de  $\int_x^{+\infty} (h - g_{n+1})dt$ , et ainsi de suite : on aboutira finalement à un développement de la forme

$$\int_a^x g(t)dt = g_1 + g_2 + \dots + g_n + K - g_{n+1} - g_{n+2} - \dots - g_m + R_m$$

avec  $K = \int_a^{+\infty} h(t)dt$  ( $K$  est à supprimer qu'il est nul, et il peut se faire naturellement que, si loin qu'on pousse le développement, on ne rencontre jamais de termes tendant vers 0).

On aurait de même un développement de  $\int_x^{+\infty} g(t)dt$ , si cette intégrale est finie ; mais ici, tous les termes du développement tendent vers 0.

- 139 -

Bien entendu, en procédant comme nous venons de l'indiquer, on n'obtiendra pas nécessairement un développement relatif à un ensemble  $\mathcal{T}$  de fonctions-types donné à l'avance, en général ; l'ensemble des fonctions-types auquel est relatif le développement se détermine en réalité a posteriori, comme nous l'avons déjà signalé.

Exemples. 1) Soit  $f(x) = 1/\log x$  ( $x > 1$ ) ; comme  $\log x < x^\mu$  pour tout exposant  $\mu > 0$ ,  $\int_a^{+\infty} dt/\log t = +\infty$ .  $f$  étant d'ordre 0 par rapport à  $x$ , on a, d'après la prop. 7 du § 1 du ch. IV,

$$\int_a^x dx/\log x \sim x/\log x$$

$$\text{puis } 1/\log x - (x/\log x)' = 1/(\log x)^2$$

fonction qui est de nouveau d'ordre 0 par rapport à  $x$ , donc

$$\int_a^x dx/(\log x)^2 \sim x/(\log x)^2$$

De proche en proche, on obtient ainsi le développement

$$\int_a^x dt/\log t = x/\log x + x/(\log x)^2 + \dots + (n-1)! x/(\log x)^n + R_n$$

On voit que, si loin qu'on pousse le développement, tous les termes tendent vers  $+\infty$ .

2) Soit  $f(x) = e^{-x^2}$  ; on a  $f(x) < x^\mu$  quel que soit  $\mu$ , donc  $\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx$  est finie.  $f$  est d'ordre  $-\infty$  par rapport à  $x$ , donc on a

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim e^{-x^2}/2x$$

puis

$$e^{-x^2} + (e^{-x^2}/2x)' = -e^{-x^2}/2x^2$$

fonction qui est de nouveau d'ordre  $-\infty$  par rapport à  $x$ , d'où

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}/2t^2 dt \sim e^{-x^2}/4x^3$$

et ainsi de suite, ce qui donne le développement

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = (e^{-x^2}/2x) \cdot (1 - 1/2x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{1}{x^4} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n x^{2n}})$$

Remarque fondamentale. Si on peut, comme nous venons de le voir, <sup>S + R<sub>n</sub></sup> déduire, de renseignements sur l'allure d'une fonction  $f \geq 0$  au voisinage de  $+\infty$ , des renseignements sur l'allure de ses primitives, cela est dû au fait que, d'après le lemme 3 du §1 du ch.IV, on peut intégrer des relations de comparaison telles que  $f \ll g$ ,  $f \prec g$ ,  $f \sim g$ , pourvu que  $g$  soit strictement positive et qu'on choisisse convenablement les primitives des deux membres. Pour les fonctions (H), (ou plus généralement des fonctions appartenant à un corps de Hardy), nous avons vu au ch.IV qu'on pouvait aussi en général dériver ces relations de comparaison. Il en est tout autrement lorsqu'il s'agit de fonctions quelconques (dérivables au voisinage de  $+\infty$ ) : de la seule existence d'une relation de comparaison entre deux de ces fonctions, il est impossible de déduire l'existence d'une relation de comparaison entre leurs dérivées ; plus brièvement, on ne peut pas dériver des relations de comparaison, lorsque les fonctions qui y figurent n'appartiennent pas à un même corps de Hardy.

Des exemples fort simples suffisent à le montrer :

- 1° On a  $\sin x^2 \prec x$ , mais non  $2x \cos x^2 \prec 1$  ;
- 2° On a  $x^2/2 + x \cdot \sin x + \cos x \sim x^2/2$ , mais non  $x(1 + \cos x) \sim x$ .



Exercices. 1) Soit  $\varphi(x)$  une fonction définie dans un voisinage de  $+\infty$  croissante, admettant une dérivée continue et bornée par morceaux, et telle que  $\varphi(x) > x$ . Soit  $f$  une fonction positive, continue et bornée par morceaux dans un voisinage de  $+\infty$ ; montrer que :

a) S'il existe un nombre strictement positif  $\theta < 1$  tel que

$$\varphi'(x)f(\varphi(x)) \leq \theta f(x)$$

dans un voisinage de  $+\infty$ ,  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  est finie ;

b) si

$$\varphi'(x) f(\varphi(x)) \geq f(x)$$

dans un voisinage de  $+\infty$ ,  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  est infinie (critère d'Ermakoff). (Dans le cas a), on montrera qu'on a, pour

$x > x_0$  avec  $x_0$  assez grand

$$(1-\theta) \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt \leq \theta \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt$$

Démonstration analogue dans le cas b)).

2) Soient  $f, g$  deux fonctions strictement positives, continues et bornées par morceaux dans un voisinage de  $+\infty$ . Montrer que les intégrales, dans un intervalle  $]a, +\infty[$ , des fonctions  $f/(1+fg)$  et  $\text{Min}(f, 1/g)$  sont simultanément finies ou infinies.

### § 5. Séries à termes positifs.

Sommabilité des séries à termes positifs. Dans tout ce paragraphe, nous entendons par série à termes positifs une série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  telle que  $u_n \geq 0$  à partir d'une certaine valeur de  $n$ . Bien entendu, tout ce qui sera dit relativement à ces séries s'étend immédiatement aux séries dont les termes sont  $\leq 0$  à partir d'une certaine valeur de  $n$ , en changeant simplement les signes.

On sait qu'une série à termes positifs est toujours sommable au sens large ; dans les questions où interviennent de telles séries, le premier problème qui se pose à leur sujet est de savoir si elles sont ou non sommables (c'est-à-dire si leur somme est finie ou infinie).

La méthode la plus simple et la plus féconde pour aborder ce problème consiste à associer à la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  une fonction  $f$ , positive au voisinage de  $+\infty$ , continue et bornée par morceaux, définie dans  $]0, +\infty[$ , et telle que, pour tout entier  $n > 0$ ,

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i = \int_0^{a_n} f(t)dt$$

où  $(a_n)$  est une suite tendant vers  $+\infty$  ; la somme de la série sera finie ou infinie en même temps que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ , ce qui ramène le problème à celui traité au § 4 .

Cette association peut se faire de bien des manières ; nous en utiliserons deux. On appellera pour abrégé fonction gauche associée à la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , et on désignera par  $u_g(x)$ , la fonction définie par

$$u_g(x) = u_n \quad \text{pour } n-1 < x \leq n \quad (n=1,2,\dots)$$

On appellera de même fonction droite associée à la série, la fonction  $u_d(x)$  telle que

$$u_d(x)=0 \text{ pour } 0 < x < 1, \quad u_d(x)=u_n \text{ pour } n \leq x < n+1 \quad (n=1,2,\dots)$$

Il est immédiat que l'on a

$$s_n = \int_0^n u_g(t)dt = \int_0^{n+1} u_d(t)dt = \int_1^{n+1} u_d(t)dt$$

et par suite, on est ramené à la considération des intégrales

$$\int_0^{+\infty} u_g(t)dt \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} u_d(t)dt .$$

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sont deux séries à termes positifs, il est immédiat que la relation  $u_n \leq v_n$  pour  $n > n_0$  est équivalente à  $u_g(x) \leq v_g(x)$  (et aussi à  $u_d(x) \leq v_d(x)$ ) pour  $x > n_0 - 1$  (resp.  $x > n_0$ ); il en résulte que les relations  $u_n \leq v_n$ ,  $u_n < v_n$ ,  $u_n \sim v_n$  ( $n$  tendant vers  $+\infty$  dans  $\mathbb{N}$ ) sont respectivement équivalentes à  $u_g \leq v_g$ ,  $u_g < v_g$ ,  $u_g \sim v_g$  (ou aux analogues pour les fonctions droites),  $x$  tendant vers  $+\infty$  dans  $\mathbb{R}$ .

On en déduit le critère de comparaison fondamental :

Soient  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  deux séries à termes positifs, telles  $u_n \leq v_n$ ; si  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  est finie, il en est de même de  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ; si  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est infinie, il en est de même de  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ .

Pour appliquer ce critère, il nous faut donc des séries de comparaison; les plus simples sont celles où  $u_n = f(n)$ ,  $f$  étant une fonction (H). Il n'y a lieu, naturellement, de considérer que des fonctions  $f$  tendant vers 0 avec  $1/n$ , car pour tout autre cas, la somme de la série est infinie. Si maintenant  $f$  est une fonction (H) positive tendant vers 0, elle est décroissante; on en conclut les inégalités

$$u_g(x) \leq f(x) \leq u_d(x) \quad (\text{la seconde pour } x \geq 1)$$

d'où, en vertu du critère de comparaison pour les intégrales, on déduit que la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  et l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  sont finies ou infinies simultanément.

D'où les critères logarithmiques pour les séries à termes positifs

1° Si une série à termes positifs  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est telle que  $u_n \leq n^{\mu}$ , avec  $\mu < -1$ , sa somme est finie; sa somme est au contraire infinie si  $u_n \geq n^{\mu}$  avec  $\mu \geq -1$  (critère d'ordre 0).

2° Si une série à termes positifs  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est telle que  $u_n \leq 1/(n \cdot \log n \cdot 1_2^n \dots 1_{p-1}^n \cdot (1_p^n)^\mu)$  avec  $\mu > 1$ , sa somme est finie ; sa somme est au contraire infinie si on a  $u_n \geq 1/(n \cdot \log n \cdot 1_2^n \dots 1_{p-1}^n \cdot (1_p^n)^\mu)$  avec  $\mu \leq 1$  (critère d'ordre p)

Bien entendu, on peut former des séries à termes positifs et décroissants pour lesquelles aucun critère logarithmique ne permet de déterminer si leur somme est finie ou non ; il suffit de considérer la série  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ , f étant une fonction telle que les critères logarithmiques pour les intégrales ne lui soient pas applicables (voir § 4). Mais en pratique, on a rarement à appliquer des critères logarithmiques d'ordre élevé.

Comme  $q^n < 1/n^\mu$  quel que soit  $\mu > 0$  si  $0 < q < 1$ , l'application du critère d'ordre 0 nous reconne le fait connu que la somme de la série géométrique  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  est finie pour  $0 < q < 1$ . En prenant cette série comme terme de comparaison, on obtient un critère qui peut se mettre sous la forme suivante (critère de Cauchy)

La somme d'une série à termes positifs  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est finie si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} < 1$  ; elle est infinie si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} > 1$ . En effet, si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} = q < 1$ , on a  $u_n \leq q'^n$ , quel que soit le nombre  $q'$  tel que  $q < q' < 1$  ; si au contraire,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} = q > 1$ , on a, pour tout  $q'$  tel que  $1 < q' < q$ ,  $u_n \geq q'^n > 1$  pour une infinité de valeurs de n, et par suite la somme de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  ne peut être finie.

Ce critère est surtout utile dans la théorie des séries entières, dont nous parlerons plus tard ; mais il ne donne aucun renseignement pour les séries  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  telles que

$\log u_n < n$  ; qu'on rencontre tout aussi fréquemment.

Application à l'étude de certaines intégrales. Dans ce qui précède, nous avons ramené l'étude des séries à termes positifs à celle des intégrales de fonctions positives ; mais dans certains cas, il peut au contraire être utile de ramener l'étude d'une intégrale à celle d'une série. Par exemple soit  $\varphi(x)$  une fonction positive et périodique de période  $a$  (continue et bornée par morceaux dans tout intervalle de longueur  $a$  , et d'intégrale finie dans un tel intervalle). Soit d'autre part  $f(x)$  une fonction positive, continue et bornée par morceaux dans un voisinage de  $+\infty$  . Proposons-nous de chercher si l'intégrale  $\int_b^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$  est finie ou infinie. On a

$$\int_b^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_b^{b+na} f(t)\varphi(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b+(n-1)a}^{b+na} f(t)\varphi(t)dt$$

donc on est ramené à l'étude de la série de terme général

$$u_n = \int_{b+(n-1)a}^{b+na} f(t)\varphi(t)dt$$

Or, si  $m_n$  et  $M_n$  sont la borne inférieure et la borne supérieure de  $f$  dans l'intervalle  $b+(n-1)a, b+na$  , on aura, en posant  $K = \int_b^{b+a} \varphi(t)dt$

$$K.m_n \leq u_n \leq K.M_n$$

relations qui permettront dans la plupart des cas, de voir si  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est finie ou non. Par exemple, si  $f$  est décroissante, on a  $m_n = M_{n+1}$  , donc la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  a une somme finie ou infinie en même temps que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  ; d'autre part, on a

$$a.M_{n+1} = a.m_n \leq \int_{b+(n-1)a}^{b+na} f(t)dt \leq a.M_n$$

ce qui montre encore que les intégrales  $\int_b^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$  et  $\int_b^{+\infty} f(t)dt$  sont finies ou infinies en même temps.

Evaluation des sommes partielles d'une série à termes positifs. La connais-

sance d'une partie principale du terme général  $u_n$  d'une série à termes positifs permet aussitôt, par application des critères logarithmiques, de voir si cette série est sommable ou non ; mais on peut en outre, comme nous allons le voir, en déduire une partie principale de la somme partielle  $s_n = \sum_{l=1}^n u_l$ , lorsque la somme de la série est infinie, et du reste  $r_n = \sum_{p=n}^{\infty} u_p$ , lorsque la série est sommable.

Tout d'abord, si  $u_n \sim f(n)$ , où  $f$  est une fonction (H), on a  $s_n \sim \sum_{l=1}^n f(l)$  (resp.  $r_n \sim \sum_{p=n}^{\infty} f(p)$ ) d'après le lemme 3 du § 1 du ch. IV appliqué aux fonctions gauches (ou droites) associées aux séries  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ . On est donc ramené à examiner le cas où  $u_n = f(n)$ ,  $f$  étant une fonction (H).

Proposition 1. Soit  $f$  une fonction (H) telle que la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ soit infinie (resp. finie) :}$$

1° Si  $f$  est d'ordre infini par rapport à  $e^x$ , on a

$$s_n = \sum_{l=1}^n f(l) \sim f(n) \quad (\text{resp. } r_n = \sum_{p=n}^{\infty} f(p) \sim f(n)).$$

2° Si  $f$  est d'ordre fini  $\alpha$  par rapport à  $e^x$ , on a

$$s_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_1^n f(t)dt \quad (\text{resp. } r_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} f(t)dt)$$

1° Si  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$  et si  $f$  est d'ordre infini par rapport à  $e^x$ ,  $f$  est croissante au voisinage de  $+\infty$ , donc

$$s_{n-1} = \int_1^n f_d(t)dt \leq \int_1^n f(t)dt \sim (f(n))^2 / f'(n)$$

d'après la prop.7 du § 1 du ch.IV. Mais comme  $f \ll f'$ , on a

$$s_{n-1} \ll f(n), \text{ d'où } s_n = f(n) + s_{n-1} \sim f(n).$$

Démonstration analogue si  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  est finie, en utilisant la fonction gauche associée à la série.

2° Soit  $f(x) = e^{ax}g(x)$ , où  $g$  est d'ordre 0 par rapport à  $e^x$ , et supposons d'abord que  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$ . Comparons  $f(n)$  à  $\int_{n-1}^n f(t)dt$ ; on a

$$\begin{aligned} f(n) - \int_{n-1}^n f(t)dt &= \int_{n-1}^n (e^{an}g(n) - e^{at}g(t))dt \\ &= g(n) \int_{n-1}^n (e^{an} - e^{at})dt + \int_{n-1}^n e^{at}(g(n) - g(t))dt \end{aligned}$$

Or  $g(n) - g(t) = (n-t)g'(z)$ , avec  $t < z < n$ , donc  $n-z \leq 1$ . D'après l'hypothèse sur  $g$ , on a  $g' \ll g$ , donc, si  $g$  n'est pas équivalente à une constante  $\neq 0$ , on a aussi  $g'' \ll g'$ , ce qui, d'après le lemme du § 3, montre que  $(n-t)g'(z) \ll g'(n) \ll g(n)$ , d'où

$$\int_{n-1}^n e^{at}(g(n) - g(t))dt \ll e^{an}g(n) = f(n)$$

et on aurait la même relation si  $g$  était équivalente à une constante, comme on le voit directement. On peut donc écrire

$$f(n) - \int_{n-1}^n f(t)dt = f(n) \left(1 - \frac{1 - e^{-a}}{a} + \varepsilon(n)\right) \quad \left(\frac{1 - e^{-a}}{a} = 1 \text{ si } a=0\right)$$

d'où

$$f(n) \sim \frac{a}{1 - e^{-a}} \int_{n-1}^n f(t)dt$$

et, d'après le lemme 3 du § 1 du ch.IV,

$$s_n \sim \frac{a}{1 - e^{-a}} \int_1^n f(t)dt$$

Raisonnement tout à fait analogue si  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  est finie.

Par application répétée des raisonnements précédents on peut non seulement avoir une partie principale, mais un développement asymptotique de  $s_n$  (resp.  $r_n$ ). Si  $f$  est d'ordre infini par rapport à  $e^x$ , on pourra en effet écrire, dans le cas où

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty, \text{ et pour toute valeur fixe de } p$$

$$s_n = f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(n-p) + R_p$$

avec  $f(n) \succ f(n-1) \succ f(n-2) \succ \dots \succ f(n-p) \succ R_p$

On pourra en outre développer  $f(n-1)$ ,  $f(n-2)$ , etc..., relativement à un ensemble de fonctions types  $\mathcal{T}$ , si elles ne font pas partie de cet ensemble.

Exemple. Soit  $u_n = n^n = e^{n \log n}$ , d'ordre infini par rapport à  $e^n$ . On a, d'après ce qui précède

$$s_n = n^n + (n-1)^{n-1} + \dots + (n-p)^{n-p} + R_p$$

Or, on a, d'après les procédés du § 3

$$(n-k) \log(n-k) = n \cdot \log n - k \cdot \log n - k + \frac{k^2}{2n} + \dots + \frac{k^r}{r(r-1)} \frac{1}{n^r} (1 + \xi(n))$$

ce qui permet d'avoir par exemple, comme développement à 4 termes de  $s_n$

$$s_n = n^n \left[ 1 + \frac{1}{e^n} + \left( \frac{1}{2e} + \frac{1}{e^2} \right) \frac{1}{n^2} + \left( \frac{7}{24e} + \frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^3} \right) \frac{1}{n^3} (1 + \epsilon_1(n)) \right]$$

← Si maintenant  $f$  est d'ordre  $\alpha$  par rapport à  $e^x$ , on a vu que

$$f(n) \sim \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_{n-1}^n f(t) dt$$

Comme on peut développer une primitive de  $f$ , on saura aussi développer  $\int_{n-1}^n f(t) dt$ , et par suite avoir une partie principale  $g(n)$  de la différence  $f(n) - \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \int_{n-1}^n f(t) dt$ ; une partie principale de  $\sum_{i=1}^n g(i)$  (en supposant  $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$  infinie), obtenue par application de la prop. 1, donnera donc un second terme d'un développement asymptotique de  $s_n$ . On détermine ainsi



de proche en proche les termes  $h_1, h_2, \dots, h_p$  du développement asymptotique de  $s_n$ , qui tendent vers  $+\infty$ , la différence  $s_n - (h_1 + h_2 + \dots + h_k)$  apparaissant toujours comme la somme partielle d'une série de somme infinie. Il se peut qu'on aboutisse ainsi à un terme  $h_p$  tel que  $s_n - (h_1 + h_2 + \dots + h_p)$  soit la somme partielle d'une série sommable. Si  $K$  est la somme de cette série, on en développera le reste suivant les mêmes principes, et on aura finalement un développement de la forme

$$s_n = h_1 + h_2 + \dots + h_p + K - h_{p+2} - \dots - h_q + R_q$$

les termes  $h_{p+2}, \dots, h_q$  tendant vers 0 (bien entendu, ces termes peuvent ne jamais se présenter, et il se peut aussi que  $K = 0$ ). Procédés tout à fait analogues lorsqu'il s'agit de développer le reste d'une série sommable.

Exemple. Soit  $u_n = n^\mu$ , avec  $\mu \geq -1$ . Supposons d'abord  $\mu > -1$ ; comme  $u_n$  est d'ordre 0 par rapport à  $e^n$ , on a

$$s_n = \sum_{p=1}^n p^\mu \sim \int_1^n t^\mu dt \sim n^{\mu+1} / (\mu+1)$$

puis

$$n^\mu - \int_{n-1}^n t^\mu dt = n^\mu - (n^{\mu+1} - (n-1)^{\mu+1}) / (\mu+1) \sim \mu n^{\mu-1} / 2$$

Si on suppose  $\mu > 0$ , on aura donc

$$s_n = n^{\mu+1} / (\mu+1) + \frac{1}{2} n^\mu + R_2$$

si au contraire  $-1 < \mu < 0$ , on a

$$s_n = n^{\mu+1} / (\mu+1) + K - \frac{1}{2} n^\mu + R_2, \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

On a en outre

$$n^\mu - (n^{\mu+1} - (n-1)^{\mu+1}) / (\mu+1) - \frac{1}{2} (n^\mu - (n-1)^\mu) \sim \frac{\mu(\mu-1)}{12} n^{\mu-2}$$

Donc, si  $\mu > 1$ , on aura

$$s_n = n^{\mu+1} / (\mu+1) + \frac{1}{2} n^\mu + \frac{\mu}{12} n^{\mu-1} (1 + \epsilon(n))$$

et on examinerait de même les cas où  $-1 < \mu < 1$ , et  $\mu$  non entier.

Le cas où  $\mu$  est entier se ramène à celui où  $\mu = -1$ .

On a alors

$$s_n = \sum_{p=1}^n 1/p \sim \int_1^n dt/t = \log n$$

puis

$$1/n - \int_{n-1}^n dt/t = 1/n + \log(1-1/n) \sim -1/2n^2$$

Il en résulte que l'expression  $s_n - \log n$  est équivalente à une constante  $\gamma$ ; cette constante joue un rôle important en Analyse, et se nomme constante d'Euler. Sa valeur approchée à  $1/10^9$  près par défaut est

$$0,577215664$$

Remarque. Dans le cas général où  $f$  est d'ordre fini par rapport à  $e^x$ , on pourrait, en suivant la voie indiquée ci-dessus, arriver à un développement asymptotique de  $s_n$ , où les termes successifs s'exprimeraient en fonction des dérivées de  $f$ . Dans le cas où  $f$  est d'ordre 0 par rapport à  $e^x$ , la formule à laquelle on parviendrait ainsi sera donnée dans une partie ultérieure de cet ouvrage, comme application des formules dites sommatoires.

Produits infinis. Nous considérerons surtout les produits infinis dont les termes (à partir d'un certain rang) sont supérieurs à 1, c'est-à-dire de la forme  $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$  avec  $u_n \geq 0$ ; on y ramène les produits dont tous les facteurs (à partir d'un certain rang) sont inférieurs à 1 en considérant les inverses de ces produits; nous signalerons comment se transforment pour ces produits les propositions les plus importantes relatives aux produits à termes supérieurs à 1.

On sait qu'on a, par définition

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$$

d'où résulte aussitôt que  $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$  ne peut être fini que si  $u_n$  tend vers 0 avec  $1/n$  ; comme en outre, lorsqu'on est dans ce cas, on a  $\log(1+u_n) \sim u_n$ , on a la proposition suivante :

Proposition 2. Pour que le produit  $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ , où  $u_n \geq 0$  à partir d'un certain rang, soit fini, il faut et il suffit que la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  soit finie.

La proposition correspondante pour les produits

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-u_n), \text{ où } 0 \leq u_n < 1 \text{ à partir d'un certain rang,}$$

est la suivante : pour que  $\prod_{n=1}^{\infty} (1-u_n)$  ne soit pas nul, il faut et il suffit que  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  soit finie.

L'évaluation asymptotique des produits partiels  $p_n = \prod_{i=1}^n (1+u_i)$  d'un produit infini  $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$  ( $u_n \geq 0$ ) se ramène à celle des sommes partielles de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$ , suivie d'une exponentiation (voir § 3).

Exemple : formule de Stirling. Cherchons une évaluation

asymptotique de  $n!$ , produit partiel du produit infini de terme général  $n$  ; on est ramené à l'évaluation de

$$s_n = \sum_{p=1}^n \log p.$$

D'après la prop. 1, comme  $\log x$  est d'ordre 0 par rapport à  $e^x$ , on a

$$s_n = \sum_{p=1}^n \log p \sim \int_1^n \log t \, dt \sim n \log n - n$$

puis

$$\begin{aligned} \log n - \int_{n-1}^n \log t \, dt &= \log n - (n \cdot \log n - (n-1) \log(n-1) - 1) \\ &= 1/2n + (1+e(n))/6 n^2 \end{aligned}$$

comme on le vérifie aisément, d'où

$$s_n - n \cdot \log n + n \sim \frac{1}{2} \log n$$

puis  $\log n - \int_{n-1}^n \log t \, dt - \frac{1}{2}(\log n - \log(n-1)) \ll 1/n^2$

d'où résulte que l'expression

$$\sum_{p=2}^n \log p - n \cdot \log n + n - \frac{1}{2} \log n$$

est équivalente à une constante K. Nous démontrerons plus

tard que cette constante est égale à  $\frac{1}{2} \log(2\pi)$ ; il en

résulte la formule de Stirling, d'une grande utilité en

Analyse

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Comme  $\log(n+a) = \log n + a/n - a^2/2n^2(1+e(n))$

on voit aussi, compte tenu de l'évaluation asymptotique

de  $\sum_{p=2}^n 1/p$ , que

$$\sum_{p=2}^n \log(p+a) = n \cdot \log n - n + (a+\frac{1}{2}) \log n + K(a)(1+\frac{\epsilon_a}{2}(n))$$

→ lie  $\epsilon_a$

où  $K(a)$  est une constante dépendant de  $a$ ,  $\epsilon_a(n)$  une fonction de  $n$  et  $a$  qui, pour chaque valeur fixe de  $a$ ,

tend vers 0 avec  $1/n$ ; on a donc

$$\prod_{p=2}^n (a+p) \sim e^{K(a)} n^{n+a+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

pour toute valeur fixe de  $a$ ; nous déterminerons plus tard l'expression de  $K(a)$ .

Application : critère de seconde espèce pour les séries à termes positifs.

On rencontre souvent, en pratique, des séries à termes positifs

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  pour lesquelles le rapport  $u_{n+1}/u_n$  a une expression simple en fonction de  $n$ , ou un développement asymptotique facile à

former. Si on pose  $u_{n+1}/u_n = v_{n+1}$ , et  $v_1 = u_1$ , on a  $u_n = \prod_{p=1}^n v_p$ ,

et pour avoir un développement de  $u_n$ , on est ramené à développer un produit partiel du produit infini  $\prod_{n=1}^{\infty} v_n$ .

Toutefois, lorsqu'il s'agit seulement de savoir si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  a une somme finie ou infinie, il est commode d'avoir des critères permettant de répondre à cette question d'après le seul aspect du rapport  $u_{n+1}/u_n$ . Un tel critère est le suivant (critère de Raabe) :

La somme d'une série à termes positifs  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est finie si ses termes vérifient la relation  $u_{n+1}/u_n \leq 1 - \alpha/n$  avec  $\alpha > 1$  à partir d'un certain rang ; elle est infinie si ses termes vérifient la relation  $u_{n+1}/u_n \geq 1 - 1/n$  à partir d'un certain rang.

En effet, si on a  $u_{n+1}/u_n \leq 1 - \alpha/n$  à partir d'un certain rang, on en tire  $u_n \leq p_n = \prod_{k=2}^n (1 - \alpha/k)$ . Or  $\log(1 - \alpha/n) = -\alpha/n - \alpha^2/2n^2 (1 + \epsilon(n))$ , d'où  $\log p_n = -\alpha \log n + K(1 + \epsilon_1(n))$ , et  $p_n \sim e^K/n^\alpha$  ; comme  $\alpha > 1$ , le critère logarithmique d'ordre 0 permet de conclure.

De même, si  $u_{n+1}/u_n \geq 1 - 1/n$  à partir d'un certain rang, on en déduit  $u_n \geq \prod_{k=2}^n (1 - 1/k) \sim e^K/n$ , d'après le même calcul, d'où la proposition.

On démontrerait de la même manière, en utilisant les critères logarithmiques d'ordre  $> 0$ , que la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est finie si on a  $u_{n+1}/u_n \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \log n} - \dots - \frac{1}{n \log n \cdot l_2 n \cdot \dots \cdot l_{p-1} n} - \frac{\alpha}{n \cdot \log n \cdot l_2 n \cdot \dots \cdot l_p n}$  à partir d'un certain rang, infinie si on a  $u_{n+1}/u_n \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \log n} - \dots - \frac{1}{n \log n \cdot l_2 n \cdot \dots \cdot l_p n}$  à partir d'un certain rang. (avec  $\alpha > 1$ )

Comme cas particulier du critère de Raabe, on voit que si on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup. (u_{n+1}/u_n) < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est finie ; elle est au contraire infinie si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf. (u_{n+1}/u_n) > 1$  (critère de D'Alembert).

Ces divers critères sont dits critères de seconde espèce (les critères logarithmiques, et plus généralement le critère de comparaison, étant dits de première espèce).

Exemples. Considérons la série hypergéométrique, de terme général

$$u_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1) \cdot \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des nombres réels quelconques, différents des entiers négatifs ; il est clair que  $u_n$  garde un signe constant à partir d'une certaine valeur de  $n$ . On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}/u_n &= \frac{(a+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = \left(1 + \frac{a+\beta}{n} + \frac{a\beta}{n^2}\right) \left(1 + \frac{\gamma+1}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right)^{-1} = \\ &= 1 + \frac{a+\beta-\gamma-1}{n} + \frac{a\beta-(a+\beta)(\gamma+1)+(\gamma^2+\gamma+1)}{n^2} (1+o(n)) \end{aligned}$$

Le critère de Raabe montre donc que la série a une somme finie si  $a+\beta < \gamma$ , infinie si  $a+\beta > \gamma$  ; dans le cas où  $a+\beta = \gamma$  la série a encore une somme infinie, comme le montre le critère logarithmique d'ordre 1.

Il est important d'observer que les critères de seconde espèce ne peuvent s'appliquer qu'à des séries dont le terme général se comporte de façon très régulière au voisinage de  $+\infty$  ; autrement dit, leur champ d'application est bien plus restreint que celui des critères de première espèce, et ce serait une maladresse de vouloir

les utiliser en dehors des cas spéciaux auxquels ils sont particulièrement adaptés. Par exemple, pour la série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  telle que  $u_{2p} = 1/2^p$ , et  $u_{2p+1} = 1/3^p$  ( $p=0,1,\dots$ ), on a

$$u_{2p+1}/u_{2p} = (2/3)^p, \quad u_{2p+2}/u_{2p+1} = 3(3/2)^p$$

le premier de ces rapport tend donc vers 0, le second vers  $+\infty$ , autrement dit  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}/u_n) = 0$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}/u_n) = +\infty$ ; aucun critère de seconde espèce n'est applicable, et cependant, comme  $u_n \leq 2^{-n/2}$ , la série a évidemment une somme finie.

Exercices. 1) Si une série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  à termes positifs a une somme finie, il en est de même de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ . Montrer que la réciproque est inexacte en général; elle est vraie si la suite  $(u_n)$  est décroissante.

2) Si la série à termes positifs  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  a une somme finie il en est de même de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}/n^{\alpha}$  pour  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

3) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$  ( $u_n \geq 0$ ),  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n/(1+u_n) = +\infty$ .

4) Soit  $(p_n)$  une suite croissante de nombres positifs, tendant vers  $+\infty$ :

a) Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1})/p_n$  a une somme infinie (théorème d'Abel-Dini).

b) Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1})/p_n^{\rho}$  a une somme finie, quel que soit  $\rho > 0$  (théorème de Pringsheim) (comparer à la série de terme général  $(1/p_{n-1}^{\rho} - 1/p_n^{\rho})$ ).

c) Si  $p_n/p_{n-1}$  tend vers 1, montrer que

$$\sum_{k=1}^n (p_k - p_{k-1})/p_k \sim \log p_n$$

$$\sum_{k=1}^n p_k (p_k - p_{k-1}) \sim \frac{1}{2} p_n^2 .$$

5) A toute série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  de somme finie on peut faire correspondre une série  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  de somme infinie, dont le terme général tend vers 0, de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf (v_n / u_n) = 0$$

6) Soit  $(a_n)$  une suite quelconque de nombres  $> 0$ . Si une série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est telle qu'on ait, à partir d'un certain rang

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} \geq \rho u_n$$

où  $\rho$  est un nombre fixe  $> 0$ , sa somme est finie (critère de Kummer).

7) Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de nombres positifs ; s'il existe un entier  $k$  tel que  $k \cdot u_{kn} \geq u_n$  quel que soit  $n$  à partir d'un certain rang, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  a une somme infinie.

-----