RÉDACTION N° 095

COTE : NBR 006

TITRE : IIème Partie (sic)
Théorie du Degré Topologique

Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki

NONBRE DE PAGES : 13

NOMBRE DE FEUILLES : 13

II$^{\text{ème}}$ PARTIE. THÉORIE DU DEGRÉ TOPOLOGIQUE.

Fonctions numériques d'une variable numérique.

Existence d'une racine quand la fonction change de signe dans un intervalle. Application : inversion des fonctions continues monotones : homéomorphies entre intervalles. Exemples (racine n-$^{\text{ième}}$ si elle n'a pas encore été faite ; en tout cas a^x , $\log_a x$: isomorphie des deux groupes, additif et multiplicatif, des nombres réels).

Connexion.

Première généralisation de ce qui précède : fonctions numériques dans un ensemble connexe (= non somme de deux ensembles fermés) (dans la topologie induite, en cas de sous-ensemble d'un espace et sans point commun) : existence d'un zéro de toute fonction qui change de signe : Notion de domaine (= ensemble ouvert connexe ; domaine fermé = domaine + frontière). Notion de courbe : deux points d'un domaine peuvent être reliés par une courbe. Exemples ; physiologiques et pathologiques, sur la notion de courbe : chemins polygonaux, arcs connexes et sommes de tels ; le cercle ; - courbe genre Peano.

Degré topologique.

En vue de la généralisation aux représentations de E^n dans E^n , on reprend le cas $n = 1$. Fonction continue sur un intervalle (a,b) : réalise une représentation du segment sur la droite, tout point du segment $(f(a), f(b))$ étant recouvert algèbriquement + 1 fois (ou resp.- 1 fois) et tout point extérieur recouvert 0 fois si la fonction est suffisamment régulière (stückweise linéaire, c'est-à-dire polygonale ; ou même stückweise monotone) ;

pour une fonction quelconque, on se sert d'une approximation polygonale. Représentation sur la droite d'un ensemble ouvert quelconque. Représentation d'un cercle sur la droite / sur un cercle : le degré est <u>constant</u> ; si le cercle (= ensemble des nombres réels x modulo 1) est représenté sur la droite (= ensemble des y) ou le cercle (= ensemble des y modulo 1) par $y = f(x)$, le degré est égal à $f(1) - f(0)$.

Pour l'extension à un domaine dans le plan ou dans E^n : il faut un analogue de l'approximation polygonale : ce sera l'approximation simpliciale (fonction stückweise linéaire).

Notion de simplexe S^n dans E^n ; interpolation linéaire d'une fonction donnée sur un S^n. Triangulation d'un ensemble ouvert : par les cubes d'un ε-réseau de l'espace contenus dans l'ensemble, et la subdivision des cubes en simplexes. Dans une telle triangulation, tout S^{n-1} est commun au plus à deux S^n. Orientation d'un simplexe par une orientation de l'espace ; orientation des simplexes frontières ; tout S^{n-1} dans une triangulation d'une portion de l'espace est frontière de deux S^n avec orientations opposées, ou d'un seul S^n.

Extension : on appellera <u>variété</u> V^n (terminologie à discuter) tout complexe connexe tel que tout simplexe S^{n-1} appartienne, soit à deux S^n avec orientations opposées, soit à un seul S^n : variétés plongées dans un E^{n+p}, variétés "abstraites" ; notion de frontière ; variétés closes (= pseudomultiplicités orientables dans la terminologie de Brouwer, Lefschetz et Hopf-Alexandroff). Exemples : triangulation de variétés connues (en les subdivisant en morceaux convexes, et par projection centrale : annoncer qu'on démontrera plus loin la triangulabilité de toute variété continument différentiable ? question à débattre suivant les variétés qu'on désire admettre comme champs d'intégration pour les intégrales de formes différentielles, et aussi selon qu'on définit celles-ci par triangulation ou par la mesure approximative). Subdivision (simpliciale) d'un simplexe, puis d'une variété.

Degré topologique local d'une représentation simpliciale d'une variété (dans E^n ; ou bien, dans une variété, en un point dont le voisinage est holomorphe à E_n ; cas où on fait la représentation sur une sphère, c'est-à-dire sur une frontière de simplexe). Théorème fondamental : le degré dans E^n = l'ordre de la frontière, défini comme degré de la représentation sur une sphère (ou une frontière de simplexe) par projection centrale (démonstration : il suffit de la donner pour un simplexe). Conséquence pour l'invariance : invariance par variation continue ; le degré est constant sur tout domaine connexe sans point commun avec la frontière ; possibilité de définir le degré pour une représentation continue d'une variété dans une variété, avec les mêmes théorèmes d'invariance ; extension à l'image continue d'une somme algèbrique de variétés (p. ex. de simplexes : complexe algèbrique ; notion de frontière ; notion de cycle). Cas des variétés closes. Cas de la représentation d'un ensemble ouvert de E^n, dans E^n.

Exemples et applications : théorème d'existence de Kronecker (il y a au moins une racine quand l'ordre de la frontière est $\neq 0$). Théorème de Poincaré-Bohl (v. séminaire Julia, exposé F (1936) par Weil, p. 24 et 23). Applications : théorème de d'Alembert, avec le nombre exact des racines ; autres applications ? (théorèmes de Hurwitz ?). Application aux champs de vecteurs (l'ordre prenant le nom de caractéristique) ; théorème du point fixe de Brouwer. Application aux singularités des champs de vecteurs : indice d'une singularité.

Calcul du degré : théorème de multiplication (cf. loc. cit., p. 20, 1°) ; degré d'une transformation localement topologique $= \pm 1$ (ibid., 2°). Invariance topologique du degré. Quand la transformation est localement topologique et les 2 variétés orientables, le degré (global) donne le nombre exact des racines.

Théorème de Jordan, méthode Leray (v. exposé C (1936), par Leray) : le nombre des domaines connexes en lesquels un ensemble fermé divise E^n est un invariant topologique intrinsèque de l'ensemble ; relations de Leray entre les degrés topologiques de la transformation. Cas d'une image homéomorphe de sphère : deux domaines, la frontière ayant par rapport aux points de l'un (extérieur) l'ordre 0 et de l'autre (intérieur) l'ordre $+1$ (pour une orientation convenable). Exemple : le cercle, avec interprétation de la notion d'ordre. Conséquence : invariance du domaine.

Extension aux espaces à une infinité de dimensions : notion d'espace de Banach. Théorème d'existence de Kronecker, pour une transformation $y = x + F(x)$, F étant complètement continue (i. e. transformant tout ensemble borné en un ensemble compact) ; le transformé d'un voisinage de l'origine recouvre tout un voisinage de l'origine. Applications, ici même ? (Ex : éq. intégrales, éq. différentielles, en admettant les notions nécessaires?)

Appendices 1) Notion générale de nombre d'intersection et coefficient d'enlacement dans E^n, avec les propriétés élémentaires.

2) Définition de la dimension des ensembles fermés bicompacts ; la dimension d'un simplexe de E^n est n.

Note importante. La question suivante est mise en concours.

On demande dedonner une définition du degré topologique, indépendante de la triangulation, qui satisfasse à la condition suivante :

Soit A^n un espace localement euclidien (tout point a un voisinage homéomorphe à E^n), connexe et orientable ; soit f une représentation de A^n dans l'espace euclidien E^n ; alors f possède un degré bien défini en tout point o tel que l'image inverse $\overset{-1}{f}(\overline{V})$ soit bicompacte dans A si V = V(o) est un voisinage de o suffisamment petit. Et naturellament le degré devra possèder les propriétés habituelles.

Le rapporteur suggère de chercher une définition par récurrence suivant n .

III^{è} PARTIE. Espaces de recouvrement et groupe de Poincaré.[1]

Retour sur les deux aspects de la notion de connexion. Ensemble connexe = ensemble non somme de deux ensembles (relativement) fermés sans point commun. Notion de connexité locale (tout voisinage de p contient un voisinage connexe). Tous les espaces qui seront considérés dans cette partie seront connexes, localement connexes, localement bicompacts. Théorème : si un tel espace est métrisable,

---

(1) avec la collaboration de H.C.

deux points quelconques peuvent être joints par un <u>chemin</u> (image homéomorphe d'un segment).

<u>Représentations localement homéomorphes</u>. Chaque fois qu'on aura une représentation f localement homéomorphe d'un espace B dans un espace A , on dira que B est <u>porté par</u> A , et qu'un point b de B est porté par le point a de A qui lui correspond. Exemples.

Dans le cas métrique, et sur un exemple, on étudiera l'image inverse, dans B, d'un chemin issu de a dans A : cette image inverse comprend, si le chemin est assez petit, un chamin et un seul issu de b ; quand le chemin n'est plus petit, <u>ou bien</u> il en est de même, ou bien ... on tombe dans un point frontière (TABOU : ne pas les nommer, en dépit de l'insistance suspecte de H.C.).

Enoncés généraux : B étant porté par A, et b par a, soit E un ensemble fermé, bicompact, connexe dans A ; alors : ou bien la composante connexe de $\overset{-1}{f}(E)$ qui contient b est bicompacte dans B ; ou bien on peut trouver un E' contenu dans E , fermé, connexe, contenant a, tel que la composante connexe de $\overset{-1}{f}(E')$ qui contient b ne soit pas bicompacte, et tel qu'il n'y ait pas de $E'' \subset E'$ jouissant des mêmes propriétés (bien entendu E' n'est pas unique en général). On pose alors la définition : B <u>est appelé un recouvrement de A si tout point de A possède un voisinage bicompact V tel que chaque composante connexe de l'image inverse de V soit bicompacte</u>.

Exemples : A étant un cercle, un plan pointé, un tore.

Théorèmes : dans un recouvrement de A, tout A est recouvert ; tout point a possède un voisinage qui est en correspondance homéomorphique avec chacune des composantes connexes de son image inverse.

Transitivité (tout recouvrement d'un recouvrement de A est un recouvrement de A). Des recouvrements de A (en nombre quelconque) ont un recouvrement commun.

Tout recouvrement B de A possède un recouvrement (et même un recouvrement le plus petit possible) C jouissant de la propriété suivante : si c et c' sont deux points de C, portés par un même point de A, il y a une homéomorphie de C en lui-même et une seule, qui a tout point fasse correspondre un point porté par le même point de A, et qui fasse correspondre c' à c. Le groupe de ces transformations est appelé le groupe de C par rapport à A ; il est proprement discontinu et sans point fixe (définition de ces termes). Réciproquement, tout groupe proprement discontinu sans point fixe d'un espace C en lui-même définit (par identification) un A dont C est recouvrement.

Existence du recouvrement universel U. Son groupe par rapport à A est le groupe de Poincaré de A. Espaces simplement connexes ; U est le seul recouvrement simplement connexe de A. Correspondance biunivoque entre les sous-groupes du groupe de Poincaré et les recouvrements de A, avec les compléments habituels (immédiat par ce qui précède).

Cas des espaces métriques. Groupe de Poincaré comme groupe des chemins modulo le groupe des chemins réductibles à zéro. Exemples : droite, cercle, plan, plan pointé, tore E^n , S^n , leurs recouvrements universels et tous les autres (discussion complète). Groupe du plan deux fois pointé (exemple de groupe non abélien).

<u>Principe de monodromie</u>. On suppose qu'à tout voisinage suffisamment petit sur l'espace A ait été attachée une classe de fonctions, de telle manière que si deux voisinages V_1, V_2 ont une intersection non vide, à une fonction f_1 de la classe de V_1 corresponde une fonction f_x et une seule de la classe de V_2 qui coïncide avec f_1 sur $V_1 \cap V_2$. Dans ces conditions, on considère sur le recouvrement universel U (et sur A lui-même s'il est simplement connexe) les fonctions qui, sur tout voisinage suffisamment petit W, sont égales à une fonction de la classe du voisinage V qui porte W. Le principe de monodromie s'énonce : il y a une fonction et une seule, de cette sorte, qui soit égale sur un voisinage donné à une fonction donnée de la classe correspondante. A chacune de ces fonctions on peut faire correspondre un recouvrement B de A bien déterminé, le plus petit sur lequel elle peut être définie (comme fonction uniforme, naturellement).

Si on suppose seulement qu'à tout f_1 de la classe de V_1 corresponde <u>au plus</u> une f_2 de la classe de V_2, alors toute f_1 donnée sur un voisinage permet seulement de définir, non plus un recouvrement de A , mais un espace porté par A ("domaine d'existence" !).

Exemple : <u>orientation</u> d'une transformation localement topologique d'un espace localement euclidien dans un espace analogue : l'orientation est une fonction définie localement, et égale à + 1 ou à -1 ; prolongée par continuité, elle est constante, donc elle est bien définie sur l'espace, ou sur un espace de recouvrement. Notion d'orientabilité. 2^{e} Exemple : interprétation de l'ordre d'un point par rapport à une courbe dans le plan.

Critères suffisants pour qu'un espace porté par A soit un recouvrement de A. Evidemment B, porté par A, sera un recouvrement de A si B est bicompact ; alors A est aussi bicompact. En particulier un B bicompact, porté par un A simplement connexe, est homéomorphe à A. (Exemple : il est impossible de faire porter S^n par E^n). Dans le cas des espaces métriques, si B porté par A n'est pas un recouvrement, il y a dans B au moins un chemin de détermination (chemin sur B rendu bicompact par l'adjonction d'un point à l'infini, qui aboutisse au point à l'infini, et dont l'image sur A aboutisse en un point bien déterminé, non à l'infini, de A). Exemple : si une transformation localement topologique de E^n dans E^n n'a pas de chemin de détermination, c'est une homéomorphie (on peut même affirmer qu'il y a un chemin de détermination dont l'image soit un segment de droite, d'où résulte un vieux théorème d'Hadamard. Cf. H. Cartan, Acta litt. ac. scient. Szeged. t. VI (1933), p. 85).

IV$^{\text{è}}$ PARTIE. Topologie combinatoire, plus particulièrement surfaces.

(Cette partie est traitée sommairement, de POSSEL devant fournir un rapport détaillé).

Retour sur la notion de simplexe et la triangulation des variétés. Définition d'un complexe ; cas des complexes à deux dimensions : condition pour qu'un complexe à deux dimensions (fini ou infini) soit localement euclidien. Démonstration de la triangulabilité des surfaces (= multiplicités à deux dimensions = espaces localement euclidiens à deux dimensions) ?

Détermination du groupe fondamental d'un complexe : on la ramène à un problème combinatoire, sur les complexes à deux dimensions. Cas du complexe fini : le groupe est définissable par un nombre fini de générateurs et de relations. Cas du complexe à une dimension ; application : Gruppenbild.

Groupe de Betti (combinatoire) à une dimension ; il est identique au groupe de Poincaré modulo le groupe des commutateurs.

Etude des surfaces : surfaces closes, leurs types ; détermination de leurs groupes de Poincaré et de Betti ; notion de genre. Surfaces ouvertes : le cercle est la seule surface ouverte simplement connexe (démonstration d'après Seifert-Threlfall, note (26), p. 320, ou toute autre : question mise au concours). Détermination du groupe de Poincaré et de Betti pour une surface close (sphère ou surface de genre p) une ou plusieurs fois pointée.

Appendice. Groupe de Betti pour une dimension quelconque ; définition, invariance topologique (pour les complexes finis) ; formule d'Euler-Poincaré, caractéristique d'un complexe. L'indice total d'un champ de vecteurs sur une multiplicité (triangulable) est égal à la caractéristique.

OBSERVATIONS CRITIQUES DE C. CHEVALLEY SUR LES Iè et IIè PARTIES DE LA TOPOLOGIA BOURBACHICA.

I. TOPOLOGIE GÉNÉRALE.

a) Il me paraît inutile de construire d'abord la notion de limite dans E^n pour les raisons suivantes : le lecteur est assez vite fatigué de tant de définitions différentes des ens. ouverts et fermés qui lui produisent un effet kaléïdoscopique - ayant déjà la topologie dans E^n , il ne se sent pas très attiré par les topologies plus générales qui viennent après - enfin, on parle surtout dans E^n de limites et de Bolzano-Weierstrass, qui disparaissent subrepticement en topo. géné. Et puis, un laïus scurrile au début de chaque très grande subdivision de Bourbaki me paraît largement suffisant en tant que scurrilité.

b) Faire les espaces topologiques généraux avant les espaces métriques, la notion de métrique m'apparaissant de plus en plus comme ridicule.

c) En topo. géné. prendre carrément une notion fondamentale et construire linéairement à partir d'elle. Le mieux est, je crois, de partir de (O). Repousser en appendice les autres points de départ possibles en les ramenant tous à celui qui a été choisi.

13

II. Théorie du degré topologique.

Pour introduire la notion d'approximation simpliciale, partir dans le cas de $n = 1$ de fonctions continument dérivables (par ex.), donc stückweise monotones, et montrer que le nombre de racines ne change pas par variation petite dans le champ de ces fonctions. Ceci laisse présager qu'il pourra se définir pour des fonctions quelconques.

Je crois que la chose essentielle pour les variétés est le caractère localement euclidien (pour les points du bord, voisinage : une demi-sphère). Les définir d'abord comme cela, puis dire qu'on a besoin de triangulation pour construire des approximations.

Le double sens du mot frontière en topologie me paraît bien gênant ; je crois qu'il faudrait le remplacer par un autre en topo. générale.
