RÉDACTION N° 094

COTE : **NBR 005**

TITRE : **PROJET WEIL POUR LE DÉBUT DU CHAP. IV DES « FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE »**

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 7

NOMBRE DE FEUILLES : 7

PROJET WEIL

POUR LE DEBUT DU CHAP. IV

DES "FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE"

Soit E un ensemble, filtré par un filtre $\mathfrak{F}$; dans ce chapitre, nous considèrerons des fonctions dont l'ensemble de définition est une partie de E appartenant à $\mathfrak{F}$ (dépendant de la fonction considérée), et qui prennent leurs valeurs, soit dans $\mathbf{R}$, soit, plus généralement, dans un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$.

Dans les applications, E sera le plus souvent une partie d'un espace numérique $\mathbf{R}^n$, ou de la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$, et $\mathfrak{F}$ la trace sur E du filtre des voisinages d'un point adhérent à E , ou encore le filtre formé des complémentaires des ensembles relativement compacts dans E ("voisinages du point à l'infini").

Soit F un ensemble quelconque ; considérons l'ensemble $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$ des fonctions à valeurs dans F , dont chacune a pour ensemble de définition une partie X de E appartenant à $\mathfrak{F}$. Si f et g sont deux telles fonctions, définies respectivement dans $X \in \mathfrak{F}$ et $Y \in \mathfrak{F}$, la relation "il existe une partie Z de $X \cap Y$, appartenant à $\mathfrak{F}$, et telle que $f=g$ dans Z " (ou la relation équivalente "l'ensemble des $t \in X \cap Y$ tels que $f(t)=g(t)$ appartient au filtre $\mathfrak{F}$ ") constitue, comme on le voit immédiatement en appliquant la définition des filtres, une <u>relation d'équivalence</u> dans $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$, que nous noterons $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$. L'étude qui va suivre se rapporte aux classes d'équivalence par rapport à $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$, c'est-à-dire aux éléments de l'ensemble quotient $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F}) = \mathcal{H}(F, \mathfrak{F})/\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$; toutes les relations entre fonctions, qui vont être définies, seront (comme on le démontrera, ou comme il résultera d'une manière évidente de leur définition) <u>compatibles</u> avec la relation $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$, 3

nous désignerons par $\tilde{f}$ sa classe modulo $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$ c'est-à-dire l'ensemble des fonctions qui coïncident avec f sur un ensemble de $\mathfrak{F}$.

Ce qu'on appelle "comparaison" relativement au filtre $\mathfrak{F}$, des fonctions numériques, ou des fonctions à valeurs dans un espace normé sur le corps $\mathbb{R}$, définies sur des ensembles appartenant à $\mathfrak{F}$, repose sur la considération d'un certain nombre de groupes ou monoïdes, que nous allons maintenant définir.

1° Si F est un groupe abélien additif (en particulier un espace normé sur $\mathbb{R}$), la relation "il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $h(t)=f(t)+g(t)$ pour $t \in X$ " est évidemment compatible (en f,g,h) avec la relation $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$; par passage aux quotients, on en déduit une loi de composition $(\tilde{f},\tilde{g}) \to \widetilde{f+g}$ sur l'ensemble $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$ et on vérifie aussitôt que cette loi définit sur cet ensemble une structure de <u>groupe additif</u> ; l'élément 0 est la classe des fonctions nulles dans un ensemble de $\mathfrak{F}$. Si F est un <u>anneau</u>, on définit de la même manière une seconde loi de composition $(\tilde{f},\tilde{g}) \to \widetilde{fg}$, et l'ensemble $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$, muni de ces deux lois, est un anneau, dont l'élément $\tilde{1}$ est la classe des fonctions égales à l'élément unité de F dans un ensemble de $\mathfrak{F}$. Pour qu'une classe f soit <u>inversible</u> dans l'anneau $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$, il faut et il suffit qu'il existe $f \in \tilde{f}$ telle que f(t) soit inversible dans un ensemble de $\mathfrak{F}$; en particulier, si F est égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$, pour que $\tilde{f}$ soit inversible, il faut et il suffit qu'il existe $f \in \tilde{f}$ telle que $f(t) \neq 0$ dans un ensemble de $\mathfrak{F}$ (auquel cas <u>toutes</u> les fonctions de $\tilde{f}$ ont cette propriété).

<u>Remarque</u>.- Si, pour tout couple (f,g) de fonctions de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$, on désigne par f+g la fonction égale à f(t)+g(t) dans l'ensemble (appartenant à $\mathfrak{F}$) où f et g sont toutes deux définies, la loi de composition $(f,g) \to f+g$ <u>n'est pas</u> une loi de groupe, car si f n'est pas définie dans E tout entier, il n'existe pas de fonction $g \in \mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$ telle que $f-g = 0$.

 4

2° Si $F = \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\mathcal{H}_0(\mathbb{R}_+^*, \mathfrak{F})$ est, d'après ce qui précède, un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de $\mathcal{H}_0(\mathbb{R}, \mathfrak{F})$, sous-groupe que nous noterons Γ. Dans Γ, il y a lieu de distinguer les sous-groupes suivantes : a) le groupe Γ_1 des classes de fonctions qui tendent vers la limite 1 suivant le filtre $\mathfrak{F}$; b) le groupe Γ_c des classes des constantes > 0 dans E (groupe isomorphe à $\mathbb{R}_+^*$). Comme $\Gamma_1 \cap \Gamma_c$ se réduit à l'élément neutre de Γ, le groupe $\Gamma_1 \cdot \Gamma_c$ est produit direct de Γ_1 et Γ_c : c'est le groupe des classes de fonctions tendant vers une limite finie et strictement positive, suivant le filtre $\mathfrak{F}$.

3° Supposons que F soit un espace normé sur $\mathbb{R}$; la relation "il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $h(t)=f(t)\,g(t)$ pour $t \in X$" entre deux fonctions g, h de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$ et une fonction f de $\mathcal{H}(\mathbb{R}, \mathfrak{F})$, est compatible (en f, g, h) avec $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$, et on en déduit donc une loi de composition externe $(\tilde{f}, \tilde{g}) \to \tilde{f}\tilde{g}$ sur $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$, ayant l'anneau $\mathcal{H}_0(\mathbb{R}, \mathfrak{F})$ comme ensemble d'opérateurs ; on vérifie aussitôt que cette loi et l'addition définissent sur $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$ une structure de module par rapport a l'anneau $\mathcal{H}_0(\mathbb{R}, \mathfrak{F})$. On distingue dans $\mathcal{H}_0(F, \mathfrak{F})$ les sous-groupes additifs suivants : a) le groupe $\mathcal{O}_F$ des classes $\tilde{g}$ telles que pour toute fonction g de la classe $\tilde{g}$, il existe un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ dans lequel $\|g\|$ soit bornée ;
b) le sous-groupe o_F de $\mathcal{O}_F$ formé des classes $\tilde{g}$ des fonctions g qui tendent vers 0 suivant le filtre $\mathfrak{F}$. En particulier, pour $F = \mathbb{R}$, on définit ainsi des groupes $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ et $o_{\mathbb{R}}$ de classes de fonctions numériques. De plus, il est clair que $\Gamma \cap \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ est un monoïde multiplicatif, et les éléments de ce monoïde dont l'inverse appartient aussi à ce monoïde forment un sous-groupe multiplicatif Γ_b de Γ, qui contient évidemment Γ_1 et Γ_c ;

pour que $\tilde{f} \in \Gamma_b$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ et deux nombres a,b tels que $0 < a < b$, et que l'on ait $a \leqslant f(t) \leqslant b$ dans X . Enfin, pour qu'une fonction f soit telle que $\tilde{f} \in \Gamma_1$, il faut et il suffit que $\tilde{f} - \tilde{1} \in \sigma_{R}$; et pour que $\tilde{f} \in \Gamma_1 \cdot \Gamma_c$ il faut et il suffit qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $\tilde{f} - \tilde{a} \in \sigma_{R}$.

<u>Par abus de langage</u> et pour simplifier les notations, on parlera désormais de fonctions (de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$) au lieu de classes de fonctions modulo $\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}$, étant entendu que l'on ne distinguera pas entre deux fonctions d'une même classe (c'est-à-dire égales dans un ensemble de $\mathfrak{F}$). On introduit alors les notations suivantes :

Soient g , h deux fonctions à valeurs dans un espace normé F sur R : a) s'il existe une fonction $f \in \Gamma_1$ et un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ tels que $h(t)=f(t)g(t)$ dans X , on écrira $h \sim g$; b) s'il existe $f \in \Gamma_b$ et $X \in \mathfrak{F}$ tels que $h(t)=f(t)g(t)$ dans X , on écrira $h \asymp g$; du fait que Γ_1 et Γ_b sont des sous-groupes de Γ résulte que ces relations sont des relations d'équivalence entre éléments de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$; en particulier, si f et g appartiennent à Γ , les relations $f \sim g$, $f \asymp g$ signifient respectivement que f et g appartiennent à une même classe dans Γ , modulo Γ_1 et modulo Γ_b ; autrement dit, $f \sim g$ signifie que $\lim_{\mathfrak{F}} (f/g)=1$, et $f \asymp g$ signifie qu'il existe $X \in \mathfrak{F}$ dans lequel f/g et g/f sont bornées.

D'autre part, soit g une fonction de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$, et f une fonction de Γ ; on écrira $g \preccurlyeq f$ si $g/f \in \mathcal{O}_F$, c'est-à-dire s'il existe $X \in \mathfrak{F}$ dans lequel $\|g\|/f$ soit bornée, et $g \prec f$ si $g/f \in o_F$, c'est-à-dire si $\lim_{\mathfrak{F}} (g/f) = 0$. De plus, on convient, dans le cours d'une démonstration ou dans l'énoncé d'un théorème, de noter éventuellement par $O_1(f)$, $O_2(f)$, etc., des fonctions ayant toutes la propriété d'être $\preccurlyeq f$, et par $o_1(f)$, $o_2(f)$, etc., des fonctions ayant toutes la propriété d'être $\prec f$; chaque fois que cette notation apparaîtra, il sera entendu (sans qu'il soit nécessaire de mentionner explicitement ce fait) que les fonctions notées $O_i(f)$, $o_j(f)$ pour toutes les valeurs des indices i,j apparaissant dans le théorème ou la démonstration, sont $\preccurlyeq f$ resp. $\prec f$.

Les auteurs qui emploient cette notation se dispensent souvent, par abus de langage, d'y introduire un indice attaché aux lettres O,o ; cet abus de langage, qui peut conduire à de sérieuses erreurs, sera toujours évité dans la suite de ce Traité (sauf lorsqu'on n'a affaire qu'à une seule fonction ayant la propriété en question, auquel cas il n'est naturellement pas besoin d'un indice) .

Il est immédiat, à partir des définitions, que toute combinaison linéaire, à coefficients constants, de fonctions $g \in \mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$ satisfaisant à la condition $g \preccurlyeq f$ (resp. $g \prec f$), satisfait encore à la même condition. Autrement dit, pour tout $f \in \Gamma$, chacune des conditions $g \preccurlyeq f$, $g \prec f$ détermine un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$, considéré comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

On peut donc écrire dans une démonstration

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i O_i(f) = O_{n+1}(f) \quad ; \text{ et } \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i o_i(f) = o_{n+1}(f) .$$

Soient maintenant f et g deux fonctions de Γ . Alors, on considérera les relations $f \succcurlyeq g$, $f \succ g$ comme respectivement équivalentes à $g \preccurlyeq f$, $g \prec f$. Il est clair que "$f \preccurlyeq g$ et $f \succcurlyeq g$" est équivalente à $f \asymp g$; il en résulte (Ens. Chap.IV, § 1) que par que par passage au quotient, la relation $f \preccurlyeq g$ définit sur le groupe multiplicatif Γ/Γ_b une structure de <u>groupe ordonné</u>. (mais non totalement ordonné, en général). Considérons de même la relation "f/g a suivant le filtre $\mathfrak{F}$, une limite $\geqslant 0$", c'est-à-dire "$f \prec g$, ou il existe une constante $a > 0$ telle que $f \sim ag$" ; cette relation définit, par passage aux quotients, une structure de groupe ordonné sur le groupe $\Gamma/(\Gamma_1 . \Gamma_c)$. Enfin, on observera que, f et g étant toujours dans Γ, les relations $f \sim g$ et $f-g \prec g$ (celle-ci pouvant aussi s'écrire, d'après les conventions indiquées ci-dessus, $f=g+o(g)$) sont équivalentes.

Soient f et g deux fonctions de Γ, h une fonction de $\mathcal{H}(F, \mathfrak{F})$. Il est immédiat que, si $f \preccurlyeq g$, la relation $h \preccurlyeq f$ entraîne $h \preccurlyeq g$ et que $h \prec f$ entraîne de même $h \prec g$. Comme on a évidemment $f \preccurlyeq f+g$, $g \preccurlyeq f+g$, on voit aussi que si $u \preccurlyeq f$, $v \preccurlyeq g$, on a $u+v \preccurlyeq f+g$ et de même que, si $u \prec f$, $v \prec g$, on a $u+v \prec f+g$.
