RÉDACTION N° 093

COTE : NBR 004

TITRE : Topologie Générale
(Fascicule de Résultats)

Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki

NOMBRE DE PAGES : 128

NOMBRE DE FEUILLES : 128

NBR 004 2

93

TOPOLOGIE GENERALE (Fascicule de résultats)

Avis au lecteur

Le lecteur trouvera dans ce fascicule à la suite de l'introduction, les définitions et les principaux résultats qui sont démontrés dans la partie du traité (Livre III) consacrée à la Topologie générale. L'ordre suivi est à peu de chose près, celui suivi dans le traité. En particulier un paragraphe du fascicule correspond presque toujours à un paragraphe du traité dont le numéro est indiqué à côté du titre du paragraphe. On a aussi reproduit la numérotation du traité pour les théoremes. Les termes sont soulignés au moment où on les définit, sans qu'il soit alors nécessairement fait usage de locutions telles que "on appelle" , "on dit que" , etc..

La lecture de ce fascicule nécessite seulement en principe, la connaissance de la terminologie établie dans le fascicule de résultats de théorie des ensembles et à partir du Ch.III celle donnée dans l'algèbre Ch. I.

Dans l'introduction qui suit, destinée à donner quelque idée au lecteur non initié sur le développement de la topologie générale et des raisons qui ont fait introduire certaines notions très générales : filtres, espaces topologiques, espaces uniformes, on a procédé du particulier au général (contrairement à la marche suivie dans le traité et dans son résumé). Il en résulte que certaines définitions, sommairement données dans cette introduction ; ne sont pas identiques à celles données dans le résumé, mais sont naturellement équivalentes à ces dernières dans les cas particuliers dont il est d'abord question dans l'introduction.

Introduction

De l'espace numérique aux espaces fonctionnels. Les notions de limites, de continuité, de continuités uniformes relatives aux suites de nombres réels et aux fonctions à valeurs réelles d'une variable réelle se généralisent facilement comme on sait aux suites de points d'un espace numérique à un nombre quelconque de dimensions et aux fonctions dont la valeur et l'argument sont dans de tels espaces. On a basé d'abord cette généralisation sur la notion de distance euclidienne dans un tel espace $d(x,y) = \left(\sum_i (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$, où les x_i et y_i sont les coordonnées des points x et y. Rien n'est d'ailleurs changé à ces notions de limites et de continuité si on emploie au lieu de la distance euclidienne la "distance" $\sum_i |x_i - y_i|$ ou $\operatorname{Max}_i |x_i - y_i|$. Mais d'autres "convergences" et d'autres "continuités" peuvent s'exprimer par l'intermédiaire d'une fonction numérique de 2 variables parcourant l'ensemble des éléments étudiés. Par exemple considérons l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions continues à valeurs numériques définies sur l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant s$. Appelons distance de deux fonctions $f : x \to f(x)$ et $g : x \to g(x)$ la fonction $d(f,g)$ égale à la borne supérieure de $|f(x)-g(x)|$ pour $0 \leqslant x \leqslant s$. Si nous définissons la convergence d'une suite f_n d'élément de $\mathcal{C}$ vers un élément g de $\mathcal{C}$ par la condition $\lim d(f_n,g) = 0$ nous voyons qu'elle équivaut à la convergence uniforme des fonctions f_n vers la fonction g sur l'intervalle constant. Si la distance de deux fonctions f et g est suffisamment petite la valeur absolue du nombre $\int_0^1 (f(x)-g(x))dx$ est aussi petite qu'on le veut et il sera naturel de dire que la fonction $I(f) : f \to \int_0^1 f(x)dx$ définie sur $\mathcal{C}$ et à valeur réelle est continue et même uniformément continue (pour la distance utilisée sur $\mathcal{C}$).

NBR 004 4

Espaces métriques. Il y a là plus qu'une analogie commode qu'on peut donner aux terminologies de deux theories différentes. Définissons un espace métrique comme un ensemble E muni d'une fonction $d(x,y)$ de 2 variables parcourant E et à valeurs réelles $\geqslant 0$, assujettie aux conditions suivantes 1) $d(x,y)=0$ équivaut à $x=y$; 2) $d(x,y) = d(y,x)$; 3) $d(xy) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$ (inégalité du triangle). On peut sur de tels espaces définir des suites convergentes, des fonctions continues et uniformément continues d'une façon qui généralise immédiatement ces définitions relatives aux espaces numériques.

Variété de l'utilisation des théorèmes. Les théorèmes qu'on établiera seront applicables aussi bien aux espaces numériques qu'aux espaces "fonctionnels" tels que $\mathcal{C}$.

Ex.1. Théorème du prolongement des fonctions uniformém.continues. ~~Les théorèmes qu'on établira seront applicables aussi bien aux espaces numériques~~ Considérons par exemple le théorème qui s'énonce : Toute application uniformément continue d'une partie A d'un espace métrique E dans un espace métrique F "complet" (c'est-à-dire où toute suite satisfaisant au "critère de Cauchy" est convergente) peut être prolongée par continuité à toute l'adherence de A (c'est-à-dire à l'ensemble des points qui sont limités de points de A). On peut l'utiliser pour définir sur toute la droite numérique ou une partie convenable des espaces) des fonctions connues pour les valeurs rationnelles des variables comme les fonctions rationnelles ou la fonction a^x et les identités telles que $x+y = y+x$ ou $a^{x+y} = a^x a^y$ pour les fonctions prolongées donnent immédiatement des identités analogues pour les valeurs rationnelles des variables pour le principe de prolongement des identités (1) .

(1) Dans le traité on préfère d'ailleurs définir la fonction ~~expérim~~ exponentielle directement sur toute la droite numérique à partir du "théorème des groupes à un paramètre" .

Mais ce même théorème de prolongement peut être mis à la base d'une théorie de l'intégrale définie et des primitives (2). On définit d'abord l'intégrale sur des fonctions simples pour lesquelles les propriétés fondamentales de l'intégrale s'obtiennent presque trivialement (par exempl les fonctions "en escalier" qui sont construites par morceau et pour lesquelles on définira l'intégrale par une même forme). L'ensemble des fonctions simples est plongé dans un ensemble plus vaste de fonctions par exemple les fonctions bornées, avec la distance "de la convergence uniforme" et l'intégrale est prolongé par continuité à l'adhérence des fonctions simples (c.à-dire aux fonctions limites uniformes de fonctions simples) et les propriétés fondamentales de l'intégrale ainsi définie suivent aisément "par prolongement".

Ex 2 - Théorème du maximum et du minimum. Considérons encore le théorème du maximum et du minimum. Soit A une partie compacte d'un espace métrique, on appelle ainsi une partie A qui a le "propriété" de Bolzano-Weierstrass : de toute suite d'éléments pris dans A on peut extraire une suite convergente vers un de A . Dans l'espace numérique ce sont les ensembles bornés fermés, dans un espace métrique même "complet" la condition "borné fermé" est seulement necessaire). Une application continue ou même seulement semi-continue inférieurement de A dans la droite numérique a un maximum (resp. un maximum). Il sert aussi bien à l'étude des maxima et minima des fonctions numeriques d'une variéte numérique qu'a celle des minima des intégrales du calcul des variations qui sont en général semi-continues inférieurement.

Ex 3 - Théorème du point fixe. Citons un dernier exemple, le théorème du point fixe : soit $x \to f(x)$ une application d'une partie A d'un espace métrique complet E dans lui-même qui "diminue les distances"

(2) C'est ce que nous ferons dans le livre IV ... Dans le livre ... consacré a l'intégration, d'autres méthodes sont aussi employées pour définir l'intégrale.

($d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$, k étant un nombre fixe < 1). Alors si on prend un point a de A dont la suite de tous les itères $a_1 = f(a)$, $a_2 = f(a_1)$, etc., existe. (ce sera le cas si $A=E$ par ex.). Alors a_n converge vers la solution nécessairement unique de l'équation $x=f(x)$ ("point fixe" de la transformation). Ce théorème permet de démontrer l'existence de solutions d'équations numériques ($E = R$) mais aussi à établir des théorèmes généraux d'existence pour des équations différentielles et intégrales (E est un espace "fonctionnel").

Remarquons que dans les exemples cités (comme dans d'autres que l'on pourrait donner d'ailleurs) la démonstration du théorème utilisé, n'est pas plus difficile dans le cas général "espace métrique" que dans le cas "droite numérique" qui est démontré explicitement ou implicitement dans les cours de mathématiques spéciales.

<u>Insuffisance des espaces métriques</u> On voit donc pour un exposé d'ensemble des principaux résultats des mathématiques, l'intérêt de l'étude d'"espaces" généraux dont la théorie abrège, simplifie et ~~ordon~~ coordonne l'exposé des théories particulières. Mais les espaces métriques malgré leur importance, en particulier celle des espaces vectoriels normés (espaces métriques définis sur des ensembles où existe une addition et une multiplication scalaire "qui sont des opérations continues" et où il y a une théorie des séries à côté de la théorie des suites), ne suffisent pas aux besoins des mathématiques modernes. On pouvait déjà remarquer que dans ces espaces les notions de convergence et de continuité étaient définies à l'aide d'une notion, la distance, qui n'a pas de signification topologique intrinsèque, c'est à dire n'est pas invariante par les transformations biunivoque et bicontinue et qui peut être remplacée sans inconvénient par des distances "équivalentes".

Mais il y a plus : certaines formes de la notion de convergence apparaissant naturellement en analyse, comme la convergence simple des suites de fonctions, ne peuvent être définies à l'aide de la notion de distance (1).

<u>Notion de voisinage et de filtre.</u> Revenons aux espaces métriques. Appelons voisinage d'un point x d'un espace métrique toute partie V de l'espace qui contient en même temps que x tous les points suffisamment voisins de x (on peut associer à chaque voisinage V de x un nombre $\varepsilon > 0$ tel que si $d(y,x) < \varepsilon$ y est dans V). Alors l'ensemble $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x a les propriétés suivantes :

a) si $V \in \mathcal{V}_x$ V n'est pas vide ; $V \neq \emptyset$

b) si $V_1 \in \mathcal{V}_x$ et $V_2 \in \mathcal{V}_x$ il existe $V_3 \in \mathcal{V}_x$ tel que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$

c) si $V_1 \in \mathcal{V}_x$ et si $V_2 \supset V_1$, alors $V_2 \in \mathcal{V}_x$

d) si $V \in \mathcal{V}_x$ $x \in V$ (et entraîne évidemment a, mais il était commode pour la suite de)

e) si $V \in \mathcal{V}_x$ il existe un $V' \in \mathcal{V}_x$ tel que pour tout $y \in V'$ il y ait un $V' \in \mathcal{V}_y$ avec $V'' \subset V$.

f) si $x \neq y$ il existe $u \in \mathcal{V}_x$ et $v \in \mathcal{V}_y$ tel que $V_x \cap V_y$ sont sans point commun.

les trois premières conditions indiquent les propriétés de la famille $\mathcal{V}_n$ relativement à la propriété d'inclusion, sans référence et aucun point particulier de E, la condition d (qui ~~mxi~~ entraine évidemment a mais il nous était commode de suivre cet ordre) indique les relations de $\mathcal{V}_x$ et de x, e les relations des voisinages de x avec ceux des points suffisamment voisins de x ("les points suffisamment voisins des points suffisamment voisins de x sont arbitrairement voisins de x c'est une conséquence ici de l'inégalité du triangle) e) indique que les voisinages séparent les points. Nous appelerons <u>filtre</u> un ensemble de parties d'un ensemble quelconque E jouissant des propriétés a b c de $\mathcal{V}_x$, et <u>base de filtre</u> un ensemble de partie jouissant des propriétés a) b) de sorte que l'ensemble des parties de E contenant un ensemble d'une base de filtre sur E est un filtre sur E . Remarquons que les ensembles d'un filtre peuvent avoir leur intersection vide (exemple le filtre des complémentaires des parties finies d'un ensemble infini) des voisinages d'un point d'un espace métrique forment un filtre dont les ensembles contiennent x et qui sont assujettis à la condition e) on peut en outre remarquer que le filtre des voisinages d'un point dans un espace métrique admet une base dénombrable par exemple celle formée par les "boules ouvertes" de centre x et de rayon y_n (ensemble des y tels que $d(y,x) < y_n$) . si on connait les voisinages de chaque point on peut à partir de ceux-ci et sans plus faire intervenir la distance, définir dans l'espace les ouverts, les fermés, l'adhérence d'une partie, la convergence d'une suite la continuité d'une fonction. Par ex. un ouvert sera une partie A telle que tout $x \in A$ admette un voisinage contenu dans A , un fermé le complémentaire d'un ouvert, l'adhérence d'une partie A l'ensemble des x dont tous les voisinages rencontrent A . Une fonction $x \to f(x)$ sera contênue en x_0 si quelque soit le voisinage V de $f(x_0)$ il existe un voisinage u de x tel que $f(u) \subset V$, une suite a_n sera convergente vers a si tout voisinage de a contient les a_n à l'exception d'un nombre fini.

<u>Définition des espaces topologiques.</u> Appelons <u>espace topologique</u> un ensemble E à tout point duquel est attaché un filtre $\mathcal{V}_x$ jouissant des propriétés a b c d e et dont on appellera les éléments voisinages de x si en outre l'axiome f est satisfait nous dirons que l'espace topologique est <u>séparé</u> ou que c'est un <u>espace de Hausdorff</u>. On pourra sur de tels espaces définir comme nous venons de le faire sur les métriques,

les notions d'ouvert fermé adhérence convergence d'une suite, continuité d'une fonction et étudier leurs propriétés. Nous dirons qu'un tel espace est métrisable s'il est possible de former une métrique qui définisse précisément les voisinages considérés. Un espace topologique ne pourra être métrisable que si le filtre des voisinages de chaque point admet une base dénombrable (condition qui n'est pas suffisante d'ailleurs). On forme aisément et d'ailleurs on est amené à des exemples d'espaces topologiques qui ne satisfont point à cette condition et ne sont donc point métrisables. Ainsi considérons l'ensemble A des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, prenons comme base du filtre des voisinages de $f \in A$ les ensembles de fonctions suivantes : on prend n points arbitraires x_i en nombre fini sur $[0,1]$ à chacun d'un un nombre réel $a_i > 0$ arbitraire et on prend toutes les fonctions g' telles que $|f(x_i)-g(x_i)| < a_i$ on vérifie aisément que les conditions demandées sont satisfaites pour les filtres aussi associés à chaque point et on a ainsi un espace topologique. On sait que A est muni de la topologie de la convergence simple par ce que les propriétés $\lim f_n = f$ et $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ sont équivalentes.

<u>Insuffisance de la notion de limite de suite pour l'étude des espaces topologiques.</u>

Dans de tels espaces topologiques où les filtres des voisinages n'admettent point de bande nombrable (ni même, dans l'exemple ci-dessus) de base formée d'ensembles totalement ordonnés par inclusion) la notion de limite de suite n'est pas à même de tenir le rôle qu'elle avait dans les espaces métrisables, par ex. l'adhérence d'une partie A n'y coïncide pas nécessairement avec l'ensemble des limites des suites convergentes à éléments dans A , si on y définissait (comme il a été fait) les parties compactes comme celles à toute suite contient une sous-suite convergente vers un point de l'ensemble, on n'obtiendrait pas la "borne". Généralisation des parties compactes dans les espaces métriques, par exemple la compacté ne serait plus équivalente à la propriété de "Borel-Lebesgue" de tout recouvrement par des ensembles ouverts on peut fixer un recouvrement fermé d'un nombre fini de ces ouverts" .

<u>Notion de filtre convergent</u> C'est la notion de filtre convergent qui va tenir le rôle des suites convergentes.

Sur un ensemble E disons qu'un filtre A est plus fin qu'un filtre B si tout ensemble de B contient un ensemble de A , (si A est plus fin que B et B plus fin que A les 2 filtres sont identiques). Si E est muni d'une topologie nous dirons que <u>le filtre A sur E converge vers</u> $x \in E$ si le filtre A est plus fin que le filtre des voisinages de x . Si f est une fonction définie sur un ensemble E_0 et à valeurs dans E et A_0 un filtre sur E , f est dite converger vers $x \in E$ suivant le filtre A_0 si le filtre de E ayant pour base l'image $f(A_0)$ du filtre A_0 est plus fin que le filtre des voisinages de x . (la notion de convergence de suite rentre d'ailleurs comme cas particulier dans la notion de convergence de filtre. Une suite d'éléments de E est une application de l'ensemble N des entiers dans E . Elle est convergente si elle converge suivant le filtre défini sur N en prenant comme base les ensembles sections formées des $n \geqslant n_0$). Si E_0 est muni d'une topologie on dit que f(x) tend vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 quand l'image par f du filtre des voisinages de x_0 est plus fin que le filtre des voisinages de x_0. On voit que le rôle unificateur de cette notion de filtre est intéressante même dans les questions élémentaires puisqu'elle donne une même source aux symboles $\lim_{a_n \to} a_n$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ et permet de les étudier en même temps. Elle permet aussi d'exprimer la notion de limite d'une famille quelconque de (a_i)

d'éléments d'un espace topologique "quand ι tend vers l'infini" c'est la limite suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I. L'axiome de Hausdorf est une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité de la limite. Dans un espace de Hausdorf un filtre convergent ne peut avoir qu'un point limite. C'est donc seulement dans les espaces séparés que la notion de la limite sera d'un emploi commode. La notion très importante d'espace compact sera défini par la condition espace séparé et en tout filtre admet un filtre plus fin qui est convergent. Remarquons qu'on aurait pu mettre à la base de la théorie des espaces topologiques, les propriétés caractéristiques des ensembles ouverts (ou des ensembles fermés), on obtient une théorie absolument équivalente

<u>Différents espaces des espaces topol.</u> La définition que nous avons donnée d'un espace topologique est suffisamment large pour couvrir la plupart des besoins des mathématiques modernes, et même pratiquement tous les espaces introduits par l'analyse seront séparés ou interviendront par l'intermédiaire d'espaces séparés "associés" . En assujettissant les espaces topologiques à des conditions analogues à l'axiome de Hausdorf mais plus restrictives, on obtient les espaces réguliers où est valable le 1er théorème de prolongement par continuité. Ce prolongement par continuité d'une fonction continue s'il est possible est une fonction continue) les espaces complètement réguliers dont la topologie peut être obtenue comme borne supérieure de topologies définies par des écarts (quelques généralités) et où toute fonction semi-continue inférieurement trop supérieurement) est enveloppe supérieure des fonctions numériques dont la valeur est partout séparée (resp. moindre) que la fonction donnée. Les espaces normaux où à tout recouvrement fini on peut attacher une "partition de limite" remarquable. Chacune de ces catégories contient les suivantes et si l'espace admet une "base dénombrable"

NURBOY 12

toutes ces catégories à partir des réguliers se confondent et l'espace est métrisable. On trouvera dans le chapitre I les propriétés fondamentales ~~xx~~ des espaces topologiques, en particulier des espaces séparés et des espaces réguliers, l'étude des importantes notions de compacité et de connexion avec les théorèmes que l'image continue d'un connexe est un connexe, l'image continue d'un compact est un compact, théorème qui généralise le "théorème des valeurs intermédiaires" et le théorème du maximum et du minimum pour les fonctions à valeur et variable réelles, et la formation des nouveaux espaces à partir d'espaces donnés par le "produit d'espace" ou le "passage au quotient" d'un espace par rapport à une relation d'équivalence.

Structures uniformes mais à l'aide d'une structure topologique, on peut définir une famille d'ensembles contenant des ensembles "arbitrairement voisins d'un point x." mais pas une famille d'ensemble contenant des ensembles arbitrairement petits, c'est-à-dire s'il s'agit de filtres des filtres convergents vers le point x mais pas des filtres de Cauchy. On peut définir une application continue d'un espace topologique dans un autre mais pas une application uniformément continue, on ne peut pas définir un espace compact, toutes notions valables dans un espace métrique et qu'on savait aussi définir dans un "groupe topologique" les "translations" du groupe permettant de comparer les voisinages des différents points. La structure qui permet de retrouver ces deux ~~x~~ cas disparaitre comme cas particulier est celle de structure uniforme.

Revenons à un espace métrique, E l'ensemble des de points (x,y) dont la distance est inférieure à une $E > 0$ donné est une partie de l'ensemble produit $E \times E$ contenant sa diagonale (ensemble des dont les 2 coordonnées sont égales) et la famille de ces parties quand E parcourt l'ensemble des nombres > 0 est une base de filtre $\mathcal{U}$ qui définit un filtre sur $E \times E$ doué des propriétés suivantes :

1) tout ensemble du filtre contient la diagonale.

2) le filtre est "symétrique" (si $V \in \mathcal{U}$, $\overset{-1}{V} \in \mathcal{U}$, $\overset{-1}{V}$ désignant l'ensemble des (x,y) tels que $(y,x) \in V$).

3) tout $V \in \mathcal{U}$ contient un $W \in U$ tel que $W \circ W \subset V$ ($W \circ W$ étant l'ensemble des (x,y) tel qu'il existe un z avec $(x,z) \in W$ et $(y,z) \in W$). C'est une conséquence de l'inagalité du triangle .

Nous appelerons structure uniforme sur un ensemble E la structure définie par la donnée sur $E \times E$ d'un filtre (dit filtre des entourages) satisfaisant aux 3 conditions ci-dessus. Nous dirons que 2 points x,y de E sont voisins d'ordre V (V étant un entourage). Si $(x,y) \in V$, qu'un ensemble est petit d'ordre V si tous ses points sont voisins d'ordre V , et qu'une famille de parties contient des ensembles arbitrairement petits si quelque soit l'entourage $V \in U$, il y a dans la famille des ensembles petit d'ordre V . A une structure uniforme est attachée canoniquement une structure topologique celle où les voisinages du point x sont les ensembles V(x) formé des points y tels que $(x,y) \in V$. Un espace uniforme est un ensemble muni d'une structure uniforme et de la topologie associée. On voit aisément que dans de tels espaces on peut définir les notions de fonctions uniformément continues, d'espace complet. On montre que tout espace uniforme est susceptible d'être complété. On a le 2è théorème de prolongement. Toute application uniformément continue d'une partie A d'un espace uniforme dans un espace uniforme complet, peut être prolongé par continuité à l'adhérence de A . On appelle uniformisables, les espaces topologiques dont la topologie peut être définie par une structure uniforme par ex. les espaces topologiques dont la topologie peut être définie par une structure uniforme par ex. les espaces topologiques compacts ont la propriété remarquable d'admettre une et une seule structure uniforme définissant leur topologie Ce sont ces notions qui font l'objet du chapitre II. Un caractérisateur des espaces uniformes a donné qu'ultérieurement une fois acquise la notion de nombre réel.

Structures algèbriques topologiques. Considérons maintenant un ensemble muni d'une structure algèbrique et d'une topologie des rapports de ces deux structures donnent lieu des résultats importants si la topologie est "compatible" avec la structure algèbrique en ce sens que les lois de composition et les opérations fondamentales de cette structure sont continues pour la topologie. Par ex., une topologie est compatible avec une structure de groupe si $(x,y) \to x.y$ et $x \to x^{-1}$ sont des fonctions coordonnées. Alors à la topologie est associée une structure uniforme droite et une structure uniforme gauche, permettant de définir les groupes complets et l'éventuel complété d'un groupe. Les propriétés élémentaires de ces structures algèbrico-topologiques (groupes topologiques, anneaux topologiques, corps topologiques) font l'objet du chapitre III.

Nombres réels et complexes espaces numériques et projectifs. L'études des structures topologiques, des structures uniformes et de leurs rapports avec les structures algèbriques nous met à même de définir les nombres réels. Leur ensemble est un corps topologique qu'on obtient en complétant le groupe additif des nombres rationnels muni de la topologie et de la structure uniforme définie par les intervalles ouverts et en prolongeant les opérateurs xy et x^{-1}. Il est complet localement compact, connexe, etc.. et admet en outre une structure d'ordre total (prolongeant celle définie sur les rationnels). C'est donc une structure extrêmement réelle qui fait intervenir toutes les notions définies antérieurement. On a à la fois une application des théories précédentes, la fonction d'un "objet" mathématique de première importanc puisque la plus grande partie des mathématiques a pour objet l'étude des fonctions réelles d'une ou plusieurs variables et d'autre part du point de vue de l'économie de ce livre consacré à la topologie générale, un outil nécessaire pour l'étude plus poussée des espaces topologiques et uniformes. Avant d'y passer on étudie les groupes à un paramètre (groupes topologiques admettant un voisinage de l'élément neutre homéomorphe a un intervalle ~~xxxxxx~~ numérique (chapitre V) et on montre qu'un tel groupe, s'il est connexe, est toujours isomorphe (algèbriquement et topologiquement) au groupe additif des nombres réels, ou au groupe additif des nombres réels modulo un ("tore") ce qui permet de donner la définition la plus satisfaisante semble-t-il des fonctions exponentielles et logarithmiques. Ce sont les fonctions réalisant les isomorphismes du groupe additif des nombres réels et du groupe multiplicatif des nombres réels > 0 dont l'existence est animée par le théorème des groupes à un paramètre. Dans le chapitre VI on étudie les espaces numériques définis comme produit topologique d'un nombre fini d'espaces identiques à la droite numérique, et les espaces projectifs définis comme quotient topologique d'un espace numérique suivi de son origine pour la relation d'équivalence qui identifie les points alignés avec l'origine. Au chapitre VII on étudie les sous-groupes fermes en particulier discrets du groupe additif R^n On montre qu'un tel sous-groupe discret est engendré par $p \leq n$ vecteurs linéairement indépendants. D'où l'existence d'au plus n périodes linéairement distinctes, pour une fonction périodique de n variables reelles n'ayant pas de périodes arbitrairement petites (2 n pour une fonction de n variables complexes).

Les nombres complexes sont définis au chapitre VIII le théorème des groupes a un paramètre permet de définir a partir des fonctions trigonométriques d'arc dont la définition est purement algèbrique, les fonctions trigonomètriques des nombres. (sur l'isomorphisme du groupe multiplicatif des nombres complexes de module un avec le groupe des nombres réels modulo 1). On y étudie aussi sommairement les espaces numériques à complexes et les espaces projectifs complexes.

Les applications des nombres réels à la topologie générale (chap. IX) sont la définition des structures uniformes par des familles d'écarts et la caractérisation des espaces uniformisables par un axiome faisant intervenir les nombres réels. Les espaces séparés uniformisables ou ce qui revient au même satisfaisant cette axiome sont les espaces complètement réguliers. Puis vient l'étude des espaces métriques et métrisables puis l'étude des structures algèbriques-topologiques dont la topologie (compatible avec la structure algèbrique) est définie par une fonction numérique, distance glissante, valuation, norme (groupes et anneaux métriques, corps valués, espaces vectoriels et algèbres normés sur un corps valué). On arrive aux espaces normaux caractérisés par un axiome de "séparation" plus restrictif que celui des espaces complètement réguliers, puis aux espaces de Baire caractérisés par une propriété de nature toute différente qu'on peut énoncer ainsi le complémentaire d'une réunion dénombrable d'ensemble, dont l'extérieur est partout deux, et ~~kmmr~~ lui-même partout deux (donc non vide). On démontre le théorème de Baire que les espaces métriques compacts et les espaces localement compacts sont des espaces de Baire (il y en a d'autres). Ce théorème de Baire a des applications et important qui apparaitront dans des théorèmes ultérieurs.

<u>Topologies sur certains espaces fonctionnels.</u> Le dernier chapitre du Livre III est consacré à l'étude des structures topologiques et uniformes que les théories étudiées précédemment amènent à définir sur les ensembles, de fonctions à valeur dans un espace topologique ou uniforme l'ensemble que parcourt la variable étant lui aussi éventuellement muni d'une structure topologique ou uniforme. (<u>Structure de la convergence uniforme</u>, <u>de la convergence uniforme sur une famille d'ensemble</u>, <u>de la convergence compacte</u>, <u>de la convergence simple</u>). On étudie particulièrement le cas des fonctions continues et les conditions de compacités d'ensemble de fonctions continues pour ces structures uniformes. La propriété d'équicontinuité en est une condition nécessaire. Dans le cas où les fonctions sont des applications biunivoques d'un espace topologique sur lui-même elle forme un groupe et on étudie la compatibilité de ces différentes topologies de convergence avec les structures de groupe. Le chapitre se termine par quelques "théorèmes d'approximation" montrent que certaines parties des espaces fonctionnels sont partout deux dans ces espaces pour une certaine convergence. Principalement le théorème de Weierstrass qui dit que les polynomes à n variables sont partout deux pour la topologie de la convergence uniforme parmi les fonctions numériques coordonnées sur une partie compacte de R^n et de la généralisation due à Stone de ce théorème.

Commentaire au fascicule de résultats de Topologie générale.

On a essayé de donner dans cette rédaction un maximum de résultats. Si elle n'est pas vomie intégralement, il sera facile de voir ce que donneront de simples suppressions. On a résumé le traité en suivant son ordre à quelques exceptions près (par ex. on a traité les filtres en prolégomènes à la topologie). On n'a guère omis parmi les résultats démontrés dans le texte, que quelques lemmes techniques, quelques propriétés bien connues des fonctions élémentaires, et presque tout ce qui touchait les familles multipliables dans le cas non commutatif. Si l'on n'a pas résumé le Ch. X c'est que son texte doit subir, parait-il, des remaniements importants. On a presque toujours supprimé les exemples qui suivent les définitions. (sauf le cas où ils introduisent une propriété utile pour la suite) car ils entraînent des répétitions nombreuses et le lecteur n'a qu'à se référer aux espaces étudiés en détails ultérieurement, $\underline{R}^n$, $\underline{C}^n$, espaces fonctionnels etc.., et aux courts appendices où on résume les propriétés des p-adiques et des espaces $d(x,y) \leqslant \operatorname{Max}\ d(xz),d(yz)$. On a rassemblé tous les laïus heuristiques dans l'introduction, d'où il sera facile de les expulser en bloc suivant la manoeuvre bien connue. On a défini après les corps topologiques, les espaces vectoriels topologiques et les algèbres topologiques sur un corps topologiques quelconques. Cela évite des périphrases ultérieurement, et il est bien naturel de parler de tout cela avant de rencontrer les espaces vectoriels et algèbres normés sur un corps valué quelconque. (c'est sans doute l'introduction tardive de ces derniers dans le chap. IX qui exprime l'omission des premiers dans le Ch. III). En outre pour répondre à des questions de cobayes qui ont lu cette rédaction on a essayé d'expliquer brièvement pourquoi on ne définissait pas dans le cas général une structure uniforme qui tient, on a donné la définition d'une structure uniforme sur un espace homogène (qui figurait dans des rédactions antérieures du traité). D'autres interpolations plus minimes ont consisté à donner dans le fascicule quelques définitions ou propriétés qui ne figurent dans le traité qu'en exercice et qui ont paru utiles au lecteur. Elles se trouvent dans beaucoup de cas justifiées à   par le fait qu'on a été déjà amené à les introduire, quant à l'introduction, assez artificiellement dans des rédactions d'autres livres. Quant à l'introduction où l'on a rassemblé tous les laïus   , on l'a conçue comme destinée à un lecteur débutant, genre étudiant de licence ou professeur de lycée. Cette catégorie de lecteurs existe déjà effectivement pour le fascicule de résultats de théorie des ensembles. Ils sont séduits là par un formalisme qu'ils peuvent appliquer même à des questions élémentaires. Mais ils ont besoin qu'on leur justifie l'introduction de notions aussi générales que celles d'espaces topologiques, de filtres, d'espaces uniformes, et qu'on leur explique l'ordre adopté dans le livre de Topologie générale.

Espaces topologiques. (fascicule de résultats)

Préliminaire à la topologie : notion de filtre (cf. § 5, chap. I du traité)

Un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties d'un ensemble E est un filtre quand il possède les propriétés suivantes (axiomes des filtres) :

(F_I) . Tout ensemble contenant un ensemble de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

(F_{II}) . Toute intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

(F_{III}). La partie vide de E n'appartient pas à $\mathfrak{F}$.

E est alors un ensemble filtré par $\mathfrak{F}$. On voit que l'intersecton de deux éléments de $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, et que E appartient à $\mathfrak{F}$ comme intersection de la famille vide d'éléments de F. (l'ensemble de ces deux conditions est équivalent à la condition F_{III}). Un filtre est donc une partie non vide de $\mathfrak{P}(E)$.

Exemple de filtre. L'ensemble des complémentaires des parties finies sur un ensemble infini E. Si E est l'ensemble $\mathcal{N}$ des entiers positifs on obtient ainsi un filtre très important en Analyse que nous appellerons le filtre de Fréchet.

Si $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$ les filtres $\mathfrak{F}_1$ $\mathfrak{F}_2$ sont comparables : $\mathfrak{F}_1$ est plus fin que $\mathfrak{F}_2$ qui est moins fin que $\mathfrak{F}_1$ (strictement plus fin, resp. strictement moins fin, si en outre $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}_2$). La relation "plus fin que" définit une structure d'ordre sur l'ensemble Φ des filtres sur E. Toute famille de filtres $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota \in I}$ admet une borne inférieure $\mathfrak{F} = \bigcap_{\iota \in I} \mathfrak{F}_\iota$ dite filtre intersection des filtres $\mathfrak{F}_\iota$, mais pas nécessairement de borne supérieure. Φ a donc un plus petit élément, le filtre réduit à la seule partie E, mais pas de plus grand élément (si E a plus d'un élément). Etant donné un ensemble $\mathfrak{G}$ de parties de E, soit $\mathfrak{G}'$ l'ensemble des intersections finies d'ensembles de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}''$ l'ensemble des parties de E contenant un ensemble de G'.

Pour qu'il y ait un filtre contenant G il faut et il suffit que G' ne contienne pas la partie vide de E . Alors G" est un filtre : le **filtre engendré** par G . C'est le moins fin des filtres contenant G , et G est un **système de générateur** du filtre. Un ensemble de parties $\mathfrak{B}$ est une **base** d'un filtre $\mathfrak{F}$ si $\mathfrak{F}$ est l'ensemble de toutes les parties contenant un ensemble de $\mathfrak{F}$; pour cela est nécessaire et suffisant l'ensemble des deux propriétés suivantes :

(B_I) L'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{B}$ contient un ensemble de $\mathfrak{B}$

(B_{II}) $\mathfrak{B}$ n'est pas vide et la partie vide de E n'appartient pas à $\mathfrak{B}$

Exemples : Si $\mathfrak{A}$ est une partie de P(E) engendrant un filtre, l'ensemble des intersections finies des éléments de $\mathfrak{A}$ est une base de ce filtre. Sur un ordonné filtrant (Ens. R § 6) et note du bas de la p. 23, ch.III du traité), pour la relation $\geqslant$ les **sections** S_a , formées des $x \geqslant a$, forment une base de filtre qui engendre le **filtre des sections** de l'ordonné filtrant. Sur $\mathbb{N}$ considéré comme ordonné filtrant pour la relation $\geqslant$ on retrouve ainsi le filtre de Fréchet.

Le filtre de base $\mathfrak{B}$ sera plus fin que le filtre de base $\mathfrak{B}'$ si et seulement si tout ensemble de $\mathfrak{B}'$ contient un ensemble de $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ sera une base du filtre $\mathfrak{F}$ si et seulement si tout ensemble de $\mathfrak{F}$ contient un ensemble de $\mathfrak{B}$.

Pour qu'une famille $\mathfrak{F}_i$ de filtres admette une borne supérieure il faut et il suffit qu'il existe un filtre plus fin que tous les $\mathfrak{F}_i$ (c'est par exemple le cas si les éléments de tous les $\mathfrak{F}_i$ contiennent tous une même partie non vide de E), ou encore que la réunion des $\mathfrak{F}_i$ forme un système de générateurs d'un filtre (ce filtre est précisément la borne supérieure des $\mathfrak{F}_i$). L'ensemble Φ des filtres sur E est donc **inductif** (Ens. R , § 6).

Les ultrafiltres sont les éléments maximaux de l'ensemble Φ , c'est à dire des filtres tels qu'il n'y en ait pas de strictement plus fin. Tout filtre au moins admet un ultrafiltre plus fin que lui. Si $\mathfrak{F}$ est une famille de parties de E , qui contient ses intersections finies et qui, pour toute partie X de E , contient X ou $\complement X$, $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre. Exemple d'ultrafiltre : l'ensemble des parties de E contenant un élément a de E .

Si la trace $\mathfrak{F}_A$ sur une partie A d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur E ne contient pas la partie vide de A , $\mathfrak{F}_A$ est un filtre, le filtre induit par $\mathfrak{F}$ sur A . Alors si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre $\mathfrak{F}_{A}$, est un ultrafiltre. L'image d'une base de filtre (respectivement d'ultra filtre) par une application quelconque est une base de filtre (respectivement d'ultrafiltre). Le filtre ainsi obtenu à partir d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur E est le filtre image de $\mathfrak{F}$, par l'application f .

Le filtre élémentaire associé à une suite $(x_n)_{n \in N}$ est l'image par l'application $n \to x_n$ du filtre de Fréchet. Il a donc pour base les ensembles S_n formés des x_i d'indice $\geqslant n$.

Si un filtre $\mathfrak{F}$ a une base dénombrable il existe un filtre élémentaire plus fin que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}$ est le filtre intersection de tous les filtres élémentaires plus fins que $\mathfrak{F}$.

L'image réciproque d'une base de filtre $\mathfrak{B}'$ sur F par une application f de E dans F est une base de filtre sur E si $\mathfrak{B}'$ induit une base de filtre sur f(E). Le filtre ainsi défini est le filtre image réciproque de $\mathfrak{B}'$ par l'application f .

Étant donné un filtre $\mathfrak{F}_\iota$ sur chacun des ensembles d'une famille d'ensembles (F_ι) le produit des filtres $\mathfrak{F}_\iota$ qu'on note $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{F}_\iota$ sur $E = \prod_{\iota \in I} F_\iota$ est le filtre ayant pour base l'ensemble des parties de E de la forme $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ où $A_\iota = F_\iota$ sauf pour un nombre fini d'indices et où $A_2 \in \mathfrak{F}_\iota$ quelque soit $\iota \in I$. Notons que si E est un ensemble infini ; $\mathfrak{F}$, (resp. $\mathfrak{G}$) le filtre des complémentaires des parties finies de E (resp. de $E \times E$) $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ est strictement plus fin que $\mathfrak{G}$.

Chapitre I. Structures topologiques

Définition d'une topologie, ouverts, fermés, voisinages, adhérence (cf §1)

Un ensemble $\mathcal{O}$ de parties d'un ensemble E définit sur E une structure topologique, ou plus brièvement une topologie, s'il possède les deux propriétés suivantes (axiomes des structures topologiques) :

(O_I). Toute réunion d'ensembles de $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$.

(O_{II}). Toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$.

Remarquons que (O_I) implique que l'ensemble vide de E appartient à $\mathcal{O}$ (comme réunion de la famille vide d'ensembles de $\mathcal{O}$) et que (O_{II}) est équivalent à l'ensemble des deux propriétés : la réunion de deux ensembles de $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$ et l'ensemble E appartient à $\mathcal{O}$ (comme intersection de la famille vide).

Les ensemble de $\mathcal{O}$ sont les ouverts de la topologie et (O_I) et (O_{II}) s'appellent encore axiomes des ouverts (pour les distinguer d'autres systèmes d'axiomes permettant de définir autrement une topologie). L'ensemble E muni de la structure qu'on vient de définir est un espace topologique, E est le support de la structure topologique, les éléments de E en sont les points.

Un voisinage d'une partie A est un ensemble qui contient un ouvert contenant A, un voisinage d'un point est un voisinage de la partie réduite à ce point. Remarquons qu'un ouvert est voisinage de chacun de ses points et réciproquement. Soit $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Il possède les propriétés suivantes :

(V_I). Toute partie de E contenant un ensemble de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$

(V_{II}). Toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.

(V_{III}). x appartient à tout ensemble de $\mathcal{V}(x)$.

(V_{IV}). Si $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que, pour tout $y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$.

Les trois premiers axiomes expriment que pour chaque x $\mathcal{V}(x)$ est un filtre. On appelle système fondamental de voisinages de x toute base de ce filtre. Le quatrième axiome dit qu'"un voisinage de x est aussi voisinage de tous les points suffisamment voisins de x ". Ces propriétés caractérisent les voisinages, car : si à chaque point d'un ensemble E on fait correspondre une famille de parties $\mathcal{V}(x)$ satisfaisant à ces à ces 4 axiomes, il existe une structure topologique et une seule sur E, dans laquelle $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble les voisinages de x , pour tout $x \in E$. Autrement dit on peut définir une topologie par des voisinages satisfaisant aux axiomes des voisinages V_I V_{II} V_{III} V_{IV} , aussi bien que par les ouverts. On pourrait aussi la définir par ses ensembles fermés (complémentaires des ouverts) satisfaisant aux axiomes des fermés (duaux des axiomes des ouverts au sens des Ens. R §1).

(O'_I) . Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

(O'_{II}). Toute réunion finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

En particulier l'ensemble vide et l'espace entêer E sont fermés (donc à la fois ouverts et fermés).

Un point ayant un voisinage contenu dans la partie A de E est un point intérieur à A . L'ensemble des points intérieurs à A est l'intérieur de A , noté $\mathring{A}$. C'est un ouvert, contenu dans A , réunion de tous les ouverts contenus dans A , ou encore le plus grand ouvert contenu dans A . Un ouvert est identique à son intérieur et réciproquement. Un point ayant un voisinage ne rencontrant pas A est extérieur à A .

L'ensemble des points extérieurs à A est l'<u>extérieur</u> de A . C'est l'intérieur du complémentaire de A . Un point ayant un voisinage rencontrant A est <u>adhérent</u> à A . L'ensemble des points adhérents à A est l'<u>adhérence</u> de A , notée $\overline{A}$. C'est un fermé contenant A , intersection de tous les fermés contenant A , ou encore le plus petit fermé contenant A . On peut encore dire qu'un point x est adhérent à A s'il y a des points de A "aussi voisins qu'on veut" de x . Un fermé est identique à son adhérence, et réciproquement.

Un point non adhérent à A est extérieur à A , on a donc les formules (duales) : $\complement\overline{A} = \widehat{\complement A}^{\circ}$; $\complement\mathring{A} = \overline{\complement A}$. Et les relations des opérations $\cup$, $\cap$, avec les opérations intérieur et adhérence s'expriment par les formules (duales) :

$$\widehat{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad ; \quad \widehat{A \cup B}^{\circ} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

Un point dont un voisinage rencontre A et $\complement A$ est un point <u>frontière</u> de A . Il peut appartenir ou non à A . L'ensemble des points frontières de A est la <u>frontière</u> de A . C'est un ensemble fermé, intersection de $\overline{A}$ et $\overline{\complement A}$. Quelle que soit la partie A de E l'intérieur, l'extérieur et la frontière de A sont des ensembles sans point commun, et leur réunion est E .

S'il existe un voisinage de $x \in A$ qui ne contienne pas d'autre point de A que x , x est un point <u>isolé</u> de A . C'est nécessairement un point frontière. Un ensemble fermé sans point isolé est un ensemble <u>parfait</u>. Si tout voisinage de x contient au moins un point de A différent de x , x est un point d'<u>accumulation</u> de A , il n'appartient pas nécessairement à A . Si l'adhérence de A contient B , A est <u>dense</u> par rapport à B ; A est <u>partout dense</u> si son adhérence est l'espace E tout entier. Si un espace a une base dénombrable il contient un ensemble dénombrable partout dense, mais la réciproque n'est pas vraie.

Fonctions continues, limites (cf §4 et 6)

Une fonction f , définie sur un espace topologique et à valeur dans un espace topologique, est continue en x_0 si, quel que soit le voisinage V' de $f(x_0)$ il y a un voisinage V de x dont l'image par f est contenue dans V'. Ou encore que " f(x) est aussi voisin qu'on veut de $f(x_0)$ quand x est suffisamment voisin de x_0". Propriétés équivalentes : quel que soit le voisinage V' de $f(x_0)$ son image réciproque $\overset{-1}{f}(V')$ est un voisinage de x_0 ; quelle que soit la partie A adhérente à x_0 son image f(A) est adhérente à $f(x_0)$. Si elle n'est pas continue en x_0 , la fonction est discontinue en x_0 .

La fonction f est continue si elle est continue en chaque point. Propriétés équivalentes : l'image réciproque de tout ouvert (respectivement fermé) est un ouvert (respectivement fermé) (th. 2.4). Il ne faut pas croire que la continuité entraîne toujours que l'image directe d'un ouvert (respectivement fermé) est un ouvert (respectivement fermé). Toutefois cela aura lieu dans certains espaces (espaces compacts) comme on verra plus loin.

Soient E,F,G trois espaces topologiques, f une application de E dans F, g une application de F dans G ; si les deux applications f et g sont continues (respectivement continues en x_0 et en $f(x_0)$) l'application composée $g \circ f$ est continue (respectivement continue en x_0) (th. 1.4 et 3.4).

Un filtre $\mathfrak{F}$ (respectivement une base de filtre $\mathfrak{B}$) sur un espace topologique E est convergent vers un point $x \in E$, et x est son point limite ou simplement sa limite si $\mathfrak{F}$ (respectivement $\mathfrak{B}$) est plus fin que le filtre $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages de x . Propriété équivalente : tout voisinage de x contient un élément de $\mathfrak{F}$ (respectivement de $\mathfrak{B}$) ;

elle est d'ailleurs vraie dès qu'elle est vraie pour des voisinages de x formant un système fondamental.

<u>La notion de limite n'est d'un emploi commode que dans les espaces topologiques où un filtre ne peut avoir plus d'un point limite</u>, qui sont dits <u>espaces topologiques séparés</u> ou encore <u>espaces de Hausdorff</u>. Ils sont caractérisés par la propriété suivante (<u>axiome de Hausdorff</u>) :

(H). <u>Quels que soient x et y distincts il y a un voisinage de x et un voisinage de y sans point commun</u>.

(H) équivalent à (H'). <u>L'intersection des voisinages fermés d'un point quelconque se réduit à ce point</u>, et entraîne la propriété plus faible : <u>Tout ensemble réduit à un point est fermé</u>. Si pour tout couple de points distincts a,b d'un espace topologique E il existe une application continue de E dans un espace topologique séparé F tel que les images de a et b soient distinctes, E est séparé.

Un point est <u>adhérent à une base de filtre</u> $\mathfrak{B}$ s'il est adhérent à tous les ensembles de la base. Propriétés équivalentes : tout voisinage d'un système fondamental de x rencontre chacun des ensembles de $\mathfrak{B}$; il existe un filtre plus fin que le filtre engendré par $\mathfrak{B}$ qui converge vers x. L'<u>adhérence d'un filtre</u> est l'ensemble des points adhérents au filtre. C'est encore l'intersection des adhérences des ensembles du filtre. C'est un ensemble fermé. <u>Dans un espace séparé l'adhérence d'un filtre convergent se réduit à son point limite</u> (mais il ne faut pas croire qu'un filtre dont l'adhérence est formée d'un point soit nécessairement convergent).

Un point y d'un espace topologique F est <u>valeur limite</u> (ou simplement <u>limite</u>) d'une application f d'un ensemble E sur F suivant un filtre $\mathfrak{F}$ défini sur E si la base de filtre f($\mathfrak{F}$) sur F converge vers y.

Notation : $\lim_{\mathfrak{F}} f = y$ ou $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)=y$. Propriété équivalente : pour tout voisinage V de y il y a un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ tel que $f(X) \subset V$. Le point y est une valeur d'adhérence de f pour le filtre $\mathfrak{F}$ si y adhère à la base de filtre $f(\mathfrak{F})$. Propriété équivalente : quels que soient le voisinage V de y et l'ensemble X de $\mathfrak{F}$ il y a un $x \in X$ tel que $f(x) \in V$. L'ensemble de ces valeurs d'adhérence est fermé. Si l'espace F est séparé, la limite y si elle existe est nécessairement unique et l'adhérence se réduit alors à $\{y\}$.

Exemples. Soit $(x_n)_{n \in N}$ une suite de points d'un espace topologique séparé , on écrira $\lim_{n \to \infty} x_n = y$ pour lim. $x_n = y$ suivant le filtre de Fréchet sur $\mathcal{N}$, et on dira que y est la limite de la suite (x_n) (ou simplement la limite de x_n) quand n croît indéfiniment. De même y est valeur d'adhérence de la suite (x_n) si y adhère à l'image du filtre de Fréchet dans l'application $n \to x_n$. Il est équivalent de supposer que chaque voisinage de y contient tous les x_n à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, pour la limite (respectivement une infinité de x_n, par l'adhérence). Il importe de ne pas confondre l'adhérence de la suite (x_n) et l'adhérence de l'ensemble des x_n . L'adhérence de la suite est l'intersection des adhérences des ensembles sections de la suite.

Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de points de l'espace topologique séparé E , dont l'ensemble d'indice I est filtrant pour une relation d'ordre ; la limite de la famille x_ι suivant l'ordonné filtrant I est la limite de l'application $\iota \to x_\iota$ suivant le filtre des sections de coordonnée filtrant I .

Supposons que E soit un espace topologique séparé et que $\mathfrak{F}$ soit le filtre des voisinages $\mathcal{V}(x_0)$ du point x_0 de E . Alors on écrit $\lim_{x \to x_0} f(x)$ pour $\lim_{\mathcal{V}(x_0)} f(x)$. L'existence de cette limite équivaut à la continuité de f en x_0. Soit f une application d'un espace topologique E dans un espace topologique F l'<u>adhérence de f(x) pour x tendant vers x_0</u> est l'adhérence de f(x) suivant le filtre des voisinages de x_0. Si F est séparé et si f est continue en x_0, cette adhérence se réduit à un point.

<u>Dans la suite, chaque fois qu'il sera question de filtres convergents ou de limites, les espaces topologiques seront supposés séparés, sauf mention expresse du contraire.</u>

Soit f une application d'une partie E' d'un espace topologique E dans un espace topologique F , et soient A une partie de E' et a un point adhérent à A . On appelle <u>limite de f relativement à la partie A quand x tend vers a</u> la limite, si elle existe, de la restriction de f à A suivant la trace sur A du filtre des voisinages de a dans E' et on la note $\lim\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x)$ (ou simplement $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ si $A = E'$) ; elle appartient à $\overline{f(A)}$. Si A est un voisinage de a dans E' $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x)$ existent en même temps et ont même valeur. (la limite a "un caractère local").

<u>Comparaison et génération des topologies</u> (cf § 2 et 7)

Deux espaces topologiques E et E' sont <u>homéomorphes</u> si leurs structures topologiques sont isomorphes, c'est-à-dire s'il existe une application biunivoque de E sur E' qui transforme l'ensemble des ouverts de E en l'ensemble des ouverts de E'. Un tel isomorphisme est une <u>homéomorphie</u>. Il revient au même de supposer que l application "échange" les fermés, ou les voisinages des points homologues des deux espaces, ou encore que la correspondance est biunivoque et <u>bicontinue</u>, c'est-à-dire que l'application réciproque est, elle aussi continue (une application biunivoque et continue pouvant ne pas être bicontinue).

Soit Θ *l'ensemble des topologies sur un même support* E . On peut identifier chacune d'elles $\mathcal{T}$ canoniquement à une partie de $\mathfrak{P}(E)$, la famille $\mathcal{O}(\mathcal{T})$ des ouverts de la topologie $\mathcal{T}$, ou encore au point $\omega(\mathcal{T})$ correspondant de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$. Θ se confond alors avec l'ensemble des parties $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{P}(E)$ satisfaisant aux axiomes O_I et O_{II} . On définit canoniquement sur Θ une *structure d'ensemble ordonné* en ordonnant les $\mathcal{O}(\mathcal{T})$ dans $\mathfrak{P}(E)$ par inclusion. Deux topologies $\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_2$ sont *comparables* si $\mathcal{O}(\mathcal{T}_1) \supset \mathcal{O}(\mathcal{T}_2)$ ou si $\mathcal{O}(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{O}(\mathcal{T}_2)$. Dans le premier cas $\mathcal{T}_1$ est *plus fine* que $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_2$ *moins fine* que $\mathcal{T}_1$. Ce cas est caractérisé par l'une quelconque des propriétés suivantes : il y a *plus d'ouverts, plus de fermés, moins de filtres convergents ; l'adhérence d'une partie ou d'un filtre est plus petite, l'intérieur d'une partie arbitraire est plus grande, il y a plus d'applications continues de E dans un espace topologique arbitraire, moins d'applications continues d'un espace topologique arbitraire dans E pour la topologie* $\mathcal{T}_1$ *que pour la topologie moins fine* $\mathcal{T}_2$. Si $\mathcal{T}_1$ est plus fine (respectivement moins fine) que $\mathcal{T}_2$ sans lui être identique, elle est *strictement plus fine* (respectivement *strictement moins fine*) que $\mathcal{T}_2$.

Θ ainsi ordonné a un plus grand élément : la topologie *discrète* où toutes les parties sont ouvertes (et fermées), et un plus petit élément : la topologie où les seuls ouverts (et aussi les seuls fermés) sont l'espace entier et la partie vide. Une *famille quelconque* de topologies $\mathcal{T}_\iota$ $\iota \in I$ a une *borne inférieure* $\mathcal{T}'$, celle dont les ouverts sont les parties ouvertes pour tous les $\mathcal{T}_\iota$: la *topologie intersection* des topologies $\mathcal{T}_\iota$ $(\mathcal{O}(\mathcal{T}') = \bigcap_{\iota \in I} \mathcal{O}(\mathcal{T}_\iota))$ et une *borne supérieure* $\mathcal{T}''$ (la borne inférieure des topologies moins fines).

Remarquons qu'une topologie plus fine qu'une topologie séparée est nécessairement une topologie séparée.

Etant donnée une famille $\mathfrak{A}$ (arbitraire) de parties de E , il existe une topologie et une seule qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les ensembles de la famille sont ouverts; les parties forment un système de générateurs de $\mathcal{C}$. Si $\mathfrak{S}$ est un système de générateurs d'une topologie d'onnée $\mathcal{C}$, $\mathfrak{S}'$ l'ensemble des intersections finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$ (y compris E , intersection de la partie vide de $\mathfrak{S}$) alors l'ensemble $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ des ouverts de $\mathcal{C}$ est formé des réunions quelconques d'ensembles de $\mathfrak{S}$. Si tous les ouverts s'obtiennent déjà par réunion quelconque des ensembles de $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ est une base de la topologie $\mathcal{C}$. On dit encore que la famille est une base de l'espace (topologique). Critère pour qu'une famille d'ouverts soit une base de la topologie d'un espace donné : c'est qu'elle contienne un système fondamental de voisinages de chaque point. Si l'espace admet une base dénombrable, chaque point admet donc un système fondamental dénombrable de voisinages, mais la réciproque n'est évidemment pas vraie Critère pour qu'une famille $\mathfrak{B}$ de parties de E soit base d'une topologie convenable (nécessairement unique). C'est que la famille recouvre E et que si A et B appartiennent à $\mathfrak{B}$ et si x appartient à $A \cap B$ il y ait un élément C de $\mathfrak{B}$ contenant x et contenue dans $A \cap B$. En particulier si on prend comme système de générateurs les images réciproques des ouverts d'une famille (F_i) d'espaces topologiques, par des applications f_i de l'ensemble E dans les F_i, on a la moins fine des topologies sur E rendant les f_i continues. Quand il y a un seul F , c'est la topologie image réciproque de celle de F .

En sens inverse, étant donnée une famille de filtres sur l'ensemble E il existe une topologie (et une seule) qui est la plus fine des topologies sur E rendant ces filtres convergents. Cas particulier : la plus fine des topologies sur E rendant continue une famille donnée d'applications f_i d'espaces topologiques dans l'ensemble E .

Topologie induite. Prolongement par continuité.

Espaces réguliers (cf. § 3 et 6)

La topologie induite sur une partie A de E par une topologie sur E est celle dont les ouverts sont les traces des ouverts de E . C'est la moins fine des topologies sur A rendant continue l'application canonique de A dans E . Muni de cette topologie, A est un sous-espace de E . La propriété de transitivité de la topologie induite consiste en ceci que la topologie induite dans $B \subset A$ par la topologie induite par E dans A est la même que la topologie induite directement dans B . Remarquons qu'un sous-espace d'un espace séparé est un espace séparé et qu'un espace dont chaque point admet un voisinage fermé qui est un sous-espace séparé, est lui-même séparé.

Dans les questions où interviennent des éléments ou parties de A il faut distinguer soigneusement entre leurs propriétés en tant que points ou parties de l'espace A et leurs propriétés en tant que points ou parties de l'espace E . Notons que les ouverts (respectivement fermés) de A , qui sont les traces sur A des ouverts (fermés) de E ne sont pas en général ouverts (fermés) dans E . Ils le sont toujours si, et seulement si, A est lui-même ouvert (respectivement fermé) dans E . Les voisinages de $x \in A$ par rapport à A sont les traces sur A des voisinages de x par rapport à E . Ce sont eux-mêmes des voisinages de x dans E si, et seulement si, A est un voisinage de x dans E .

Une application de E dans F (espaces topologiques) est continue relativement à une partie A en un point x A si la restriction f_A de f à A est continue en x ; continue relativement à A si f_A est continue dans A . Remarquons qu'une fonction peut être continue relativement à A , A étant partout dense dans E , et cependant discontinues en tout point de E . Elle peut être continue (respectivement continue au point x) sur chacun des ensembles d'une famille d'ensembles recouvrant E (respectivement un voisinage de x) sans être continue (respectivement continue au point x) dans E . Toutefois la continuité (respectivement continuité au point x) s'ensuit bien si le recouvrement est fini.

Si l'application f est définie seulement sur une partie A de E , on la prolonge par continuité en $a \in CA \cap \bar{A}$ en lui donnant en a la valeur $\lim_{x \to a} f(x)$, si cette limite existe. La fonction ainsi prolongée en un point est continue en ce point. Si on la prolonge ainsi en tous les points où cela est possible, on est assuré (1^er^ théorème du prolongement par continuité (th. 1.6)) que la fonction prolongée (qui évidemment est uniquement déterminée) est continue pour les espaces qui satisfont non seulement à l'axiome de Hausdorff mais aussi à l'axiome suivant:

(O_{III}). L'ensemble des voisinages fermés d'un point est un système fondamental de voisinages de ce point.

Un espace topologique régulier est un espace topologique séparé satisfaisant à O_{III}. L'axiome des espaces séparés n'est pas une conséquence de (O_{III}) (il y a des espaces séparés non réguliers). Mais pour démontrer qu'un espace est régulier il suffit de démontrer qu'il satisfait à (O_{III}) et à un axiome plus faible que (H) par exemple à l'axiome : tout point est un ensemble fermé.

On remarquera que <u>tout sous-espace d'un espace régulier est régulier</u> et qu'un espace tel que tout point admette un voisinage <u>fermé</u> qui est un sous-espace régulier est un espace régulier. Une topologie <u>plus fine</u> qu'une topologie régulière <u>n'est pas nécessairement régulière</u>.

<u>Produit et somme d'espaces topologiques</u> (cf. § 8)

L'espace topologique <u>produit</u> des espaces E_ι $(\iota \in I)$ est l'ensemble produit $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ muni de la topologie la moins fine des topologies rendans toutes les fonctions projections $x \to pf_\iota(x)$ continues. Elle admet pour base les ensembles <u>élémentaires</u> πA_ι où tous les A_ι sont des ouverts de E_ι, et où pour seulement un nombre fini d'indices A_ι est différent de E_ι. Les ensembles élémentaires contenant x forment un système fondamental de voisinages de ce point. Le filtre des voisinages de x est identique au produit des filtres des voisinages de ses projections.

Il faut et il suffit pour qu'un filtre sur un espace produit soit convergent que tous les filtres projections sur les espaces facteurs soient convergents (th.1.8) ; pour qu'une application dans un espace produit soit continue, que toutes ses composantes soient continues. En particulier la fonction projection d'un point sur un "produit partiel" des espaces facteurs est continue. D'où <u>l'associativité du produit topologique</u>. La coupe (cf Ens. R) $A(x)$ d'un ensemble ouvert (resp. fermé) A du produit $E_1 \times E_2$ suivant un point quelconque $x \in E_1$ est un ouvert (resp. fermé) de E_2. <u>La projection d'un ouvert est un ouvert</u> (mais la projection d'un fermé n'est pas nécessairement un fermé) ; l'adhérence d'un produit est le produit des adhérences.

Soit $x \to f(x)$ une application d'un espace topologique E dans un espace topologique F et soit C l'"ensemble représentatif" dans $E_1 \times E_2$ de l'application (c.à.d. l'ensemble des (x,y) tels que $y=f(x)$), l'adhérence de f pour $x \to x_0$ est identique à la coupe suivant x_0 de l'adhérence $\overline{C}$ de C , en particulier si l'espace F est séparé et si cette coupe se réduit à un point f est continue en x_0 .

Propriété équivalente à l'axiome de Hausdorff : la "diagonale" de $E \times E$ est fermée. Un espace produit est séparé (respectivement régulier si les facteurs le sont.

Etant donnée une fonction d'une famille d'arguments x_ι , $\iota \in I$ variant respectivement dans un ensemble E_ι , et à valeur dans un ensemble F , on sait qu'on peut la considèrer comme fonction d'un seul argument variant dans l'ensemble produit $E = \prod_\iota E_\iota$. Si les E_ι et F sont munis de structures topologiques, on dit que la fonction est une fonction continue pour l'ensemble des valeurs $a=(a_\iota)$ (resp. continue) si elle est une application continue en a (resp. continue) de l'ensemble E muni de la topologie produit dans l'espace topologique F .

Théorème de la continuité partielle (th. 2.8). Si $(x,y) \to f(x,y)$ est application continue (respectivement continue en (a,b)) l'application $x \to f(x,y)$ est continue quel que soit y (respectivement continue en a pour $y=b$).

Soit $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ un filtre produit sur $E = E_1 \times E_2$ et f une application de E dans un espace régulier E'. Supposons que $\lim_{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2} f(x_1,x_2)$ existe et que $\lim_{\mathfrak{F}_2} f(x_1,x_2) = g(x_1)$ existe pour chaque valeur de x_1 , alors $\lim_{\mathfrak{F}_1} g(x_1)$ existe et est égale à $\lim_{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2} f(x_1,x_2)$. Si en même temps $\lim_{\mathfrak{F}_1} f(x_1,x_2)$ existe pour chaque x_2 on a avec les hypothèses faites la "formule d'interversion des limites" .

$$\lim_{\mathfrak{F}_1} \left(\lim_{\mathfrak{F}_2} f(x_1,x_2)\right) = \lim_{\mathfrak{F}_2} \left(\lim_{\mathfrak{F}_1} f(x_1,x_2)\right) = \lim_{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2} f(x_1,x_2)$$

 34

La somme topologique d'une famille d'espaces E_ι est l'ensemble somme des E_ι muni de la topologie engendrée par l'image canonique des ouverts des E_ι.

Espace quotient (cf. § 9 et rectifications au fasc.II)

L'espace (topologique) quotient d'un espace topologique E par une relation d'équivalence ω est l'ensemble quotient E/ω muni de la topologie quotient définie comme la topologie la plus fine rendant continue l'application canonique g de E dans E/ω. On dit encore que l'espace quotient est obtenu en identifiant les points équivalents. Les ouverts (respectivement fermés) de E/ω sont les images canoniques des ouverts (respectivement fermés) saturés (Ens. R §5) de E par rapport à ω. La relation d'équivalence est ouverte (respectivement fermée) si en saturant un ouvert (respectivement fermé) de E on obtient un ouvert (respectivement un fermé). Si ω est ouverte, les images canoniques de tous les ouverts de E sont des ouverts de E/ω. Exemple : la relation " x et y ont même première coordonnée dans un espace produit ".
Une application f de E/ω dans F définit canoniquement une application de E dans F, $f\circ g$, elles sont continues en même temps.

Transitivité du passage au quotient: ω_2 étant une équivalence entraîn par ω_1, l'application canonique de E/ω_2 sur $(E/\omega_1)/(\omega_2/\omega_1)$ (Ens. R § 5) est un homéomorphisme. Espace quotient d'un sous-espace : l'application canonique de A/ω_A (A partie de E, ω_A relation d'équivalence induite sur A) sur E/ω est continue. C'est un homéomorphisme sur la partie correspondante de E/ω si et seulement si tout ouvert (respectivement fermé) dans A saturé pour ω_A est la trace d'un ouvert (respectivement fermé) de E saturé par ω ; par exemple si A est un ouvert (ou un fermé) saturé de E. Produit d'espaces quotients : l'application canonique de

$(E_1 \times E_2)/(\omega_1 \times \omega_2)$ sur $(E_1/\omega_1) \times (E_2/\omega_2)$ est continue ; quand ω_1 et ω_2 sont des relations d'équivalence ouvertes c'est un homéomorphisme. Séparation d'un espace quotient E/ω : une condition nécessaire est que dans $E \times E$ l'ensemble défini par la relation ω soit fermé (donc les classes d'équivalences doivent être des ensembles fermés) ; cette condition est suffisante si la relation ω est ouverte, ou si l'espace est "compact" (voir définition infra). Ainsi soit E un espace séparé, A et B deux fermés de E sans point commun homéomorphes. L'espace obtenu en identifiant les points homologues de A et B dans un homéomorphisme déterminé est un espace séparé.

Soit E un espace topologique, E_ι un recouvrement de E, E^* l'espace somme topologique des E_ι, φ l'application canonique de E^* sur E, ω la relation d'équivalence $\varphi(x) = \varphi(y)$, φ induit une application biunivoque de l'espace quotient E/ω sur E. Si c'est un homéomorphisme la topologie de E est déterminée par la topologie des sous-espaces E_ι. Il n'en est pas en général ainsi mais c'est vrai dans les deux cas particuliers importants suivants : 1° quand les E_ι sont des ouverts, 2° quand les E_ι sont des fermés et que chaque voisinage d'un point x de E ne rencontre qu'un nombre fini de E_ι.

Espaces compact et localement compact (cf § 10)

Un espace compact est un espace séparé et satisfaisant à l'axiome suivant :

(C). Tout filtre sur E a une adhérence non vide.

Chacun des axiomes suivants lui est équivalent : (C'). Tout ultrafiltre sur E est convergent. (C"). Toute famille de fermés dont l'intersection est vide contient une sous-famille finie dont l'intersection est vide. (C"') (axiome de Borel-Lebesgue). Tout recouvrement ouvert (c'est-à-dire formé d'ensembles ouverts) de E contient un recouvrement fini de E. Pour qu'un filtre sur un compact soit convergent il faut et il suffit qu'il ait un seul point adhérent.

Une partie A est compacte si le sous-espace A est compact. Elle est nécessairement fermée si E est séparé. Si E est compact tout fermé est compact. Une partie est relativement compacte si son adhérence est compact. Donc toute partie d'un compact est relativement compacte. La réunion finie (respectivement l'intersection quelconque) de parties compactes est compacte, de parties relativement compactes est relativement compacte. Tout espace compact et par conséquent toute partie relativement compacte sont des espaces réguliers.

Une application continue d'un compact E dans un espace séparé E' est compacte (Th. 1.10). Alors l'image directe de tout fermé de E est un fermé de E', car ce dont des compacts. Mais l'image directe d'un ouvert n'est pas nécessairement un ouvert. Une application biunivoque et continue d'un compact dans un espace séparé est bicontinue (homéomorphisme). En particulier toute topologie séparée moins fine qu'une topologie compacte lui est identique (les topologies compactes sont des éléments minimaux dans l'ensemble ordonné des topologies séparées). Mais il ne faut pas croire que toute topologie séparée admette une topologie compacte moins fine qu'elle.

Théorème de Thychonoff (Th. 2.10). Pour qu'un produit d'espaces topologiques soit compact il faut et il suffit que chacun des facteurs soit compact.

Soit E un espace compact et ω une relation d'équivalence sur E ; si ω est ouverte, pour que l'espace quotient E/ω soit séparé il faut et il suffit que l'ensemble représentatif de ω dans $E \times E$ soit séparé ; si E/ω est séparé il est compact.

 37

Un espace **localement compact** est un espace séparé dont chaque point admet un voisinage compact ; il est régulier. Dans un localement compact tout ouvert (respectivement tout fermé) est un sous-espace localement compact. L'image continue d'un localement compact n'est pas toujours un localement compact, une application biunivoque et continue d'un localement compact sur un espace topologique n'est pas nécessairement un homéomorphisme. Pour qu'un produit d'espaces topologiques soit localement compact il faut et il suffit que tous les facteurs soient localement compacts et que les facteurs non compacts soient en nombre fini. **Théorème d'immersion d'Alexandroff.** A tout espace localement compact E on peut associer un compact E' et un homéomorphisme f de E dans E' tels que l'image de E dans E' ait un complémentaire réduit à un seul point ω. E' est défini à un homéomorphie près. (Th 3.10). On "identifiera" souvent E et f(E) et E' sera "l'espace compact obtenu en adjoignant à E le **point à l'infini** ω ".

Le filtre des voisinages de ω dans E' est défini par la propriété d'avoir pour trace sur E , le filtre des complémentaires des parties compactes de E . Pour que ce filtre admette une base dénombrable, il faut et il suffit que E soit réunion dénombrable de compacts, on dit alors que l'espace localement compact E est **dénombrable à l'infini**. Si un espace est **discret**, il est localement compact et ses parties complactes sont les parties finies. Si $(a_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de points d'un espace topologique (séparé) il y a identité entre les deux propriétés x est limite de a_ι suivant le filtre des complémentaires des parties finie sur I , et x est limite de a_ι quand ι tend vers le point à l'infini qu'on adjoint a I , considéré comme espace discret, pour le rendre compact. Quand l'ensemble d'indices est N on note ∞ ce point à l'infini, ce qui justifie la notation $\lim_{n \to \infty} a_n$.

 38

Espaces connexes (cf. § 11)

Un espace est connexe s'il n'a d'autres parties à la fois ouvertes et fermées que lui-même et sa partie vide ; ou encore s'il n'existe pas deux ouverts (respectivement deux fermés) non vides complémentaires. Une partie connexe est un sous-espace connexe. Si elle est ouverte c'est un domaine . Si A est connexe et $A \subset B \subset \bar{A}$, B est connexe. En particulier si A connexe est partout dense dans E , l'espace E est connexe. La réunion d'une famille de parties connexes dont l'intersection n'est pas vide est un connexe. Donc s'il existe une application continue d'un espace topologique E sur un espace discret comprenant plus d'un point, E n'est pas connexe et réciproquement. (Ce résultat sera souvent utilisé en prenant une application continue à valeurs entières). Pour qu'un produit d'espaces topologiques soit connexe il faut et il suffit que chaque facteur soit connexe. Tout espace quotient d'un connexe est connexe.

La relation : x et y appartiennent à une même partie connexe, est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un point est le plus grand connexe contenant le point ; on l'appelle la composante connexe du point. C'est un fermé, contenu dans l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés contenant le point, mais qui ne lui est pas nécessairement identique. S'il n'y a qu'une classe, l'espace est connexe. Si la composante connexe de chaque point est réduite à ce point, l'espace est totalement discontinu. Exemple : espaces discrets (mais il ne faut pas confondre les deux notions). Autre exemple : le quotient d'un espace topologique par la relation de tout à l'heure, qu'on peut énoncer : "x et y ont même composante connexe". Dans un espace produit la composante connexe est le produit des composantes connexes de ses projections.

Un espace topologique est localement connexe si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes ; alors la composante connexe de chaque point est à la fois ouverte et fermée, en particulier c'est un domaine. Pour qu'un espace produit soit localement connexe il faut et il suffit que tous les facteurs soient localement connexes, et que les facteurs non connexes soient en nombre fini.

Chapitre II. Structures uniformes.

Structure uniforme et topologie associée. Fonctions uniformément continues (cf § 1 et 2).

Une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur un ensemble E est définie par un filtre d'entourages $\mathcal{U}$ sur $E \times E$, c'est-à-dire un filtre ayant les propriétés suivantes (axiomes des entourages ou encore axiomes des structures uniformes).

(U_I). Tout entourage (élément du filtre des entourages) contient la diagonale Δ de $E \times E$.

(U_{II}). Le filtre des entourages est "symétrique" c'est-à-dire si V est un entourage, son "symétrique" noté $\overset{-1}{V}$ est aussi un entourage.

(U_{III}). Tout entourage V contient un entourage W tel que $W \circ W \subset V$.

(Pour les notions de composé $A \circ B$ de 2 parties A et B et de symétrique $\overset{-1}{A}$ d'une partie A dans un ensemble produit cf. Ens. R § 3. Nous écrirons $\overset{2}{A}$ pour $A \circ A$, $\overset{3}{A}$ pour $A \circ A \circ A$ etc..)

Disons que les points x et y de E sont voisins d'ordre A (A partie de $E \times E$) si $(x,y) \in A$. Si x et y sont voisins d'ordre A et y et z sont voisins d'ordre B alors x et z sont voisins d'ordre $A \circ B$. Les axiomes des entourages sont équivalents à l'ensemble des propriétés suivantes : les entourages sont un filtre $\mathcal{U}$ sur $E \times E$ tel que :

quels que soient $x \in E$ et $V \in \mathcal{U}$, x et x sont voisins d'ordre V

A tout entourage V il correspond un entourage V' tel que, si x et y sont voisins d'ordre V, y et x sont voisins d'ordre V'

quel que soit l'entourage V il existe un entourage $W \subset V$ tel que si x et y sont voisins d'ordre W ainsi que y et z, x et z sont voisins d'ordre V.

On appelle système fondamental d'entourages une base du filtre des entourages. Toute structure uniforme admet un système fondamental formé d'entourages symétriques.

La structure topologique déduite d'une structure uniforme estcelle où chaque voisinage de x est l'ensemble des y tels que x et y soient voisins d'ordre V pour un entourage V de la structure uniforme. Un espace uniforme est un ensemble muni d'une structure uniforme et de la topologie qu'on en déduit. Considérons sur $E \times E$ la topologie produit, les intérieurs (resp. les adhérences) des entourages forment un système fondamental d'entourages. Donc E vérifie l'axiome O_{III}.

Une structure uniforme est séparée si l'intersection des entourages est la diagonale de $E \times E$. Alors la topologie qu'on en déduit est séparée et réciproquement. De plus tout espace uniforme séparé est régulier. Pour chaque structure uniforme on définit canoniquement une "structure uniforme séparée associée". sur l'ensemble quotient de E par la relation d'équivalence : x et y sont voisins d'ordre V quel que soit V .

Une application d'un espace uniforme E dans un espace uniforme E' est uniformément continue si à tout entourage V' de E' correspond un entourage V de E tel que les images de deux points voisins d'ordre V soient voisines d'ordre V'. Une telle fonction est continue. Une application composée d'applications uniformément continues est uniformément continue.

Comparaison des stuctures uniformes (cf. § 2 et 5)

Une structure uniforme $\mathcal{U}_1$ sur E_1 et une structure uniforme $\mathcal{U}_2$ sur E_2 sont isomorphes s'il existe une application f de E_1 sur E_2 telle que son extension (f,f), application de $E_1 \times E_1$ sur $E_2 \times E_2$ transforme le filtre des entourages de $\mathcal{U}_1$ en le filtre des entourages de $\mathcal{U}_2$.

Propriété équivalente : l'application f et son application réciproque sont uniformément continues. Les espaces topologiques E_1, E_2 sont alors homéomorphes. La réciproque n'est pas vraie.

Dans ce qui suit $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont deux structures uniformes sur un même ensemble E, définies respectivement par les filtres d'entourages $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$.

Si le filtre $\mathfrak{U}_1$ est plus fin (respectivement strictement plus fin) que le filtre $\mathfrak{U}_2$, la structure uniforme $\mathcal{U}_1$ est plus fine (respectivement strictement plus fine) que la structure uniforme $\mathcal{U}_2$ (et $\mathcal{U}_2$ est moins fine (respectivement strictement moins fine) que $\mathcal{U}_1$) et $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont comparables. Plus la structure uniforme est fine, plus il y a d'applications uniformément continues de E dans un espace uniforme arbitraire F, et moins il y a d'applications uniformément continues d'un espace uniforme arbitraire F dans E. La topologie $\mathcal{T}_1$ déduite de $\mathcal{U}_1$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}_2$ déduite de $\mathcal{U}_2$. Elle peut être identique à $\mathcal{T}_2$, même si $\mathcal{U}_1$ est strictement plus fine que $\mathcal{U}_2$. L'ensemble U de toutes les structures uniformes sur E est ordonné par la relation : "plus fin que". Il a un plus grand élément : la structure uniforme discrète où $\mathfrak{U}$ est formé de tous les ensembles de $E \times E$ contenant Δ, et un plus petit élément, pour lequel $\mathfrak{U}$ se compose du seul ensemble $E \times E$. Les topologies associées sont respectivement la topologie séparée et la topologie minimale sur E. Toute structure uniforme plus fine qu'une structure uniforme séparée est elle-même séparée.

Une famille quelconque de structures uniformes $\mathcal{U}_\iota$ ($\iota \in I$) ($\mathfrak{U}_\iota$ étant le filtre des entourages de $\mathcal{U}_\iota$) admet une borne supérieure $\mathcal{U}'$ dont le filtre des entourages est engendré par la réunion des filtres $\mathcal{U}_i$ et une <u>borne inférieure</u> $\mathcal{U}''$ (le filtre des entourages de $\mathcal{U}''$ <u>n'est pas</u> le filtre intersection des filtres $\mathcal{U}_i$, car ce dernier ne satisfait pas en général à l'axiome $\mathcal{U}_{III}$).

L'image réciproque d'un filtre des entourages d'une structure uniforme est une base de filtre d'entourages et définit la <u>structure uniforme image réciproque</u> sur l'ensemble appliqué ; c'est la <u>moins fine</u> des structures uniformes rendant l'application uniformément continue. Si l'application considérée est l'application canonique d'une partie d'un ensemble muni d'une structure uniforme sur cet ensemble on a aussi la <u>structure uniforme induite</u> sur la partie. Elle est séparée si la première est séparée ; la topologie associée est la topologie induite sur la partie par la topologie associée à la structure uniforme donnée.

<u>Filtres de Cauchy</u> - <u>Espaces complets</u> - <u>Prolongement par continuité</u> - <u>Complétion</u> (cf. § 3).

V étant un entourage de la structure uniforme de E , une partie A de E est <u>petite d'ordre</u> V si tous ses points sont voisins d'ordre V . Si A et B sont petits d'ordre V et se rencontrent, A ∪ B est petit d'ordre $\overset{2}{V}$. Une famille $\mathfrak{F}$ de parties de E <u>contient des ensembles aussi petits qu'on veut</u> si quel que soit l'entourage V , $\mathfrak{F}$ contient au moins un ensemble petit d'ordre V . Un <u>filtre de Cauchy</u> (sur un espace uniforme) est un filtre contenant des ensembles aussi petits qu'on veut. Tout filtre convergent (sur un espace uniforme) est un filtre de Cauchy. La réciproque n'est pas vraie en général. Tout filtre plus fin qu'un filtre de Cauchy est un filtre de Cauchy. Un filtre qui est un filtre de Cauchy pour une structure uniforme et encore filtre de Cauchy pour une structure uniforme moins fine. L'image d'un filtre de Cauchy par une application uniformément continue est un filtre de Cauchy

Un espace uniforme séparé est complet si tout filtre de Cauchy est convergent. Dans un tel espace on pourra donc démontrer la convergence d'un filtre sans connaître sa limite, simplement en montrant qu'il est de Cauchy. Critère de Cauchy : Pour qu'une application dans un espace séparé complet soit convergente suivant un filtre $\mathfrak{F}$ il faut et il suffit que l'image de $\mathfrak{F}$ soit un filtre de Cauchy. Dans un espace séparé complet une partie fermée est complète. La réciproque est vraie. On a l'important théorème d'existence suivant :

Théorème de prolongement par continuité (Th. 1.3). Soit f une fonction définie sur une partie partout dense A d'un espace uniforme E , prenant ses valeurs dans un espace séparé et complet. Si f est uniformément continue on peut prolonger f par continuité dans E . La fonction prolongée (évidemment uniquement définie) est uniformément continue.

Enfin à tout espace uniforme on peut associer un espace complet, d'après le

Théorème de complétion (Th. 2.3). Etant donné un espace uniforme séparé E , il existe un espace séparé complet $\tilde{E}$, défini à une isomorphie près, tel que E soit isomorphe à un sous-espace partout dense de $\tilde{E}$; on l'appelle le complété de l'espace uniforme séparé E , et on identifie souvent E à $\tilde{E}$.

Remarque : la définition d'un espace complet et nombre de propriétés ci-dessus, en particulier l'existence d'un "complété" (mais non son unicité peuvent s'étendre à des espaces non séparés).

Espace uniformisable. Compacité, connexité et structure uniforme (cf. § 4)

Une structure uniforme sur un espace topologique E est compatible avec la topologie sur E si la topologie déduite sur E de la structure uniforme est identique à la topologie donnée sur E . Un espace topologique est <u>uniformisable</u> s'il existe une structure uniforme compatible avec sa topologie. La topologie associée à une structure uniforme étant nécessairement régulière, il y a des espaces topologiques non uniformisables. Nous verrons au ch.VII une caractérisation des uniformisables.

<u>(Th. 1.4)</u> <u>Il existe une structure uniforme et une seule compatible avec la topologie d'un espace compact. L'espace uniforme qu'elle définit est complet.</u> C'est toujours cette structure uniforme qu'on considérera lorsqu'il s'agira d'un espace compact.

<u>(Th. 2.4)</u> <u>Toute application continue d'un espace compact dans un espace uniforme est uniformément continue.</u>

<u>(Th. 3.4)</u> <u>Pour qu'un espace uniforme soit compact il faut et il suffit qu'il soit complet et que quel que soit l'entourage V il y ait un recouvrement fini de l'espace par des ensembles petits d'ordre</u> V . (recouvrement fini "arbitrairement fin"), ou encore qu'il soit complet et qu'à chaque entourage V on puisse faire correspondre un nombre fini de points x_i de E tels que les $V(x_i)$ recouvrent E .

Un espace uniforme séparé est <u>précompact</u> si son complété est compact Un espace précompact est donc caractérisé par l'existence de recouvrements finis arbitrairement fins, ou par l'existence pour tout filtre sur cet espace d'un filtre de Cauchy plus fin que lui.

Un espace uniforme localement compact n'est pas nécessairement complet on verra au Ch.IX qu'un espace topologique localement compact est uniformisable. Mais deux structures uniformes sur un tel espace, compatibles avec sa topologie ne sont pas nécessairement identiques.

Soit V un entourage d'un espace uniforme E , une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de E , dont deux éléments consécutifs sont voisins d'ordre V est une <u>V-chaine</u>, <u>joignant</u> x_1 et x_n qui en sont les <u>extrémité</u>

 46

Soit $A_{x,V,n}$ (resp. A_{xV}, resp. A_x) l'ensemble des points qui peut être joint à x par une V-chaine d'au plus n éléments (resp. par une V-chaine, resp. par une V chaine quelque soit l'entourage V). $A_{x,V} = \bigcup_n A_{x\,Vn}$, $A_x = \bigcap_V A_{x,V}$, la relation $y \in A_{x,V}$ (resp. $y \in A_x$) sont des relations d'équivalences dont les classes sont à la fois ouvertes et fermées. Si E est <u>compact</u>, A_x est identique à la composante connexe de x et à l'intersection des voisinages de x à la fois ouverts et fermés. Si E est localement compact et a un entourage W tel que W(x) soit compact quelque soit x , soit V un entourage tel que $\overset{2}{V} \subset W$ alors $A_{x,V,n}$ est compact pour tout n, donc A_{xV} (et en particulier E s'il est connexe) est réunion dénombrable de compact.

<u>Espace uniforme produit</u> (cf § 5)

Soit $(F_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espaces uniformes, E un ensemble, et pour chaque $\iota \in I$ une application f_ι de E dans F_ι . Parmi les structures uniformes sur E rendant toutes les f_ι uniformément continues il y en a une, $\mathcal{U}$, moins fine que toutes les autres. La topologie déduite de $\mathcal{U}$ est précisément la moins fine des topologies sur E rendant les f_ι continues. Pour qu'elle soit séparée il faut et il suffit que pour tout couple x,y $x \neq y$ il existe $\iota \in I$ tel que $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$. Si l'ensemble E est le produit des F_ι et si les f_ι sont les fonctions projections alors la structure uniforme ainsi définie est la <u>structure uniforme produit</u> des structures uniformes des espaces uniformes facteurs. La topologie déduite de la structure uniforme produit est identique à la topologie produit des topologies des facteurs. (Inversement dans le cas général la structure uniforme $\mathcal{U}$ peut être regardée comme l'image réciproque de la structure uniforme produit, par l'application $f = (f_\iota)$ du produit $\prod_\iota F_\iota$ dans E).

Pour qu'une application d'un espace uniforme dans un espace uniforme produit soit uniformément continue il faut et il suffit que chacune des applications composantes le soit.

Si une application du produit de 2 espaces uniformes dans un espace uniforme $(x,y) \rightarrow f(x,y)$ est uniformément continue, l'applicaton partielle $y \rightarrow f(x,y)$ obtenue en laissant x fixe est uniformément continue. Ce résultat se généralise à un produit quelconque d'espaces uniformes.

Pour qu'un filtre sur un produit d'espaces uniformes soit un filtre de Cauchy il faut et il suffit que sa projection sur chaque espace facteur soit un filtre de Cauchy. Donc pour qu'un produit d'espaces uniformes soit complet il faut et il suffit que chaque espace facteur soit complet. Le produit des complétés des espaces uniformes et séparés d'une famille donnée est isomorphe au complété de l'espace produit des espaces de la famille.

Considérons une relation d'équivalence sur un espace conforme E et l'ensemble des structures uniformes sur E/ω qui rendent uniformément continue l'application canonique φ de E sur E/ω . Cet ensemble n'est pas vide puisqu'il contient la structure uniforme minimale, il a donc une borne supérieure, mais en général celle-ci ne rend pas φ uniformément continue et n'est pas associée à la topologie quotient sur E/ω . C'est pourquoi <u>nous ne définissons pas dans le cas général de structure uniforme quotient</u> sur E/ω .

Chapitre III. Groupes topologiques (théorie élémentaire)

Topologie de groupes (cf. § 1)

Dans ce chapitre la loi de composition d'un groupe sera notée multiplicativement sauf dans les paragraphes correspondant aux groupes abéliens.

Un groupe topologique est un ensemble muni d'une structure de groupe et d'une structure topologique compatibles c'est-à-dire satisfaisant aux deux axiomes suivants (axiomes des groupes topologiques).

(GT_I). La loi de composition du groupe $(x,y) \to xy$ est une application continue (de $G \times G$ sur G).

(GT_{II}). La symétrie du groupe $x \to x^{-1}$ est une application continue (de G sur lui-même). Ces deux axiomes sont équivalents à l'axiome unique

(GT'_{II}). L'application $(x,y) \to xy^{-1}$ est une application continue.

Alors sont des homéomorphismes de G sur lui-même les translations à droite (respectivement à gauche) de G $x \to xa$ ($x \to ax$), les applications $x \to axb$, la symétrie du groupe.

Si A est une partie ouverte (respectivement fermée) de G, xA, Ax, A^{-1} sont des ouverts (respectivement fermés). Si A est ouvert et B quelconque, AB et BA sont ouverts. Par contre si A est fermé, AB ou BA ne sont pas nécessairement fermés, même si B est fermé. Si V est un voisinage de l'élément neutre e de G et A une partie non vide VA et AV sont des voisinages de A.

Si f et g sont deux applications d'un ensemble E dans G supposé séparé, $\mathfrak{F}$ un filtre sur E et si $\lim_{\mathfrak{F}} f$ et $\lim_{\mathfrak{F}} g$ existent, il en est de même de $\lim_{\mathfrak{F}} fg$ et de $\lim_{\mathfrak{F}} f^{-1}$ et on a : $\lim_{\mathfrak{F}} f^{-1} = (\lim_{\mathfrak{F}} f)^{-1}$, $\lim_{\mathfrak{F}} fg = (\lim_{\mathfrak{F}} f)(\lim_{\mathfrak{F}} g)$. Si E est muni d'une structure topologique est si f et g sont continues (G séparé ou non) fg et f^{-1} sont continues. Les applications continues de E dans G forment un sous-groupe du groupe G^E des applications de E dans G.

Soit $\mathcal{V}$ le filtre des voisinages de l'élément neutre e de G, a $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$a sont identiques au filtre des voisinages de a de sorte que la connaissance de $\mathcal{V}$ suffit pour définir la topologie de G.

Mais $\mathcal{V}$ n'est pas un filtre quelconque ; il satisfait aux propriétés suivantes :

(GV_I). Quel que soit $U \in \mathcal{V}$, il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $V.V \subset U$.

(GV_{II}). Quel que soit $U \in \mathcal{V}$, on a $U^{-1} \in \mathcal{V}$.

(GV_{III}). L'élément neutre e appartient à tout ensemble de $\mathcal{V}$.

(GV_{IV}). Quels que soient $a \in G$ et $U \in \mathcal{V}$, $aUa^{-1} \in \mathcal{V}$.

Réciproquement si $\mathcal{V}$ est un filtre sur G ayant ces 4 propriétés il définit uniquement une topologie compatible avec la structure de groupe de G, autrement dit une structure de groupe topologique.

Les voisinages symétriques (identiques à leur image par la symétrie $x \to x^{-1}$) de e forment un système fondamental de voisinages de e. Pour que G soit séparé, il faut et il suffit que l'ensemble réduit à l'élément neutre e soit fermé ou encore que l'intersection des voisinages de e se réduise à e.

Remarquons que si G est abélien la condition (GV_{IV}) est automatiquement vérifiée.

Un isomorphisme d'un groupe topologique sur un autre est une application biunivoque de l'un sur l'autre qui est à la fois un isomorphisme des structures de groupe et un isomorphisme des structures topologiques c'est-à-dire un homéomorphisme). Une application biunivoque f est un isomorphisme si et seulement si elle est bicontinue et $f(xy)=f(x)\ f(y)$

Exemple : $x \to axa^{-1}$ $(a \in G)$ est un isomorphisme de G sur G ou encore un automorphisme du groupe topologique G qu'on appelle automorphisme intérieur.

Un **isomorphisme local** f d'un groupe topologique sur un autre est un homéomorphisme d'un voisinage V du premier, G, sur un voisinage V' du second, G', tel que 1° $f(xy) = f(x)\,f(y)$ 2° $f^{-1}(x'y')=f^{-1}(x')f^{-1}(y')$ pour tous les couples x,y dans V tels que xy soit aussi dans V, et pour tous les couples x', y' dans V' tels que $x'y'$. Soit aussi dans V'. Alors G et G' sont **localement isomorphes** . Si $G=G'$ on a un **automorphisme local**. Deux groupes topologiques isomorphes sont évidemment localement isomorphes.

La restriction à un voisinage de l'élément neutre d'un isomorphisme local est un isomorphisme local. Quand la première condition : $f(xy) = f(x)\,f(y)$ est satisfaite, la 2è l'est sûrement pour une restriction convenable de f , autrement dit f est le prolongement d'un isomorphisme local. Remarquons qu'un isomorphisme local n'est pas toujours prolongeable en un isomorphisme.

Sous-groupes. Groupes quotients. Homomorphismes. Espaces homogènes. Groupes produits (cf § 2)

Sur un sous-groupe H d'un groupe topologique G la topologie induite est compatible avec la structure de groupe de H sur lequel est ainsi définie la structure de groupe topologique **induite** par celle de G .

L'adhérence d'un sous-groupe est un sous-groupe. Si le premier est distingué le second l'est aussi. Par exemple, l'adhérence de l'ensemble réduit à l'élément neutre est un sous-groupe distingué, réduit à l'élément neutre si G est séparé. Pour qu'un sous-groupe H soit fermé il faut et il suffit qu'il existe un ensemble ouvert U tel que $U\cap H = U\cap\overline{H} \neq \emptyset$. Si un sous-groupe H n'est pas fermé $\overline{H}\cap\complement H$ est partout dense dans H (tous ses points sont points frontière) .

Pour qu'un sous-groupe soit <u>discret</u> il faut et il suffit qu'il ait un point isolé. Tout sous-groupe discret est fermé. Pour qu'un sous-groupe soit <u>ouvert</u> il faut et il suffit qu'il ait un point intérieur. <u>Tout sous-groupe ouvert est fermé</u>. Tout groupe <u>connexe</u> est engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre. Un groupe engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre ne contient pas d'autre sous-groupe ouvert que lui-même, mais il n'est pas nécessairement connexe ; dans un tel groupe tout sous-groupe distingué fermé appartient au centre (qui dans tout groupe séparé est un sous-groupe distingué fermé). Si un groupe est connexe et localement compact il est dénombrable à l'infini. La composante connexe de l'élément neutre est un sous-groupe distingué fermé K. La composante connexe d'un point x est $Kx = xK$. Si H est un sous-groupe partout dense de G , H' un sous-groupe distingué de H , l'adhérence $\bar{H}'$ de H' dans G est un sous groupe distingué de G ; si H est engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans H , G est engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans G .

Si H est un sous-groupe distingué de G on sait que l'ensemble quotient G/H par la relation d'équivalence $x^{-1}y \in H$ (ou ce qui revient au même $yx^{-1} \in H$) admet une structure de groupe (groupe quotient) quand on prend comme composée de 2 classes $\dot{x} = x.H$ et $\dot{y} = y.H$ la classe $xy.H$. Si G est un groupe topologique la topologie quotient sur G/H est compatible avec sa structure de groupe et G/H est ainsi muni d'une structure de groupe topologique. C'est le <u>groupe topologique quotient</u> G/H , ou simplement le groupe quotient G/H . Comme on sait que l'application canonique d'un espace dans l'espace quotient est continue l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert. Dans les groupes topologiques on a en outre l'importante propriété suivante :

(Th.1.2) L'image d'un ouvert dans G par l'application canonique de G sur un groupe quotient est un ouvert.

Corollaire. L'image canonique d'un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans G est un système fondamental de voisinages de l'élément neutre du groupe quotient.

(Th.2.2) Pour qu'un groupe quotient G/H d'un groupe topologique soit séparé, il faut et il suffit que le sous groupe distingué H soit fermé dans G .

Si G est non séparé et si N est l'adhérence de l'élément neutre G/N est donc séparé, c'est le groupe séparé associé à G .

Si le sous-groupe distingué H de G n'est pas fermé, le groupe séparé associé à G/H est isomorphe à $G/\overline{H}$.

Si H est un sous groupe distingué discret de G , G/H est localement isomorphe à G . On démontrera dans un autre livre que réciproquement: si G_1, G_2 sont deux groupes topologiques connexes localement isomorphes, il existe un groupe L (localement isomorphe à G_1 et G_2) ayant des sous-groupes distingués discrets H_1 et H_2 tels que G_1 et G_2 soient respectivement isomorphes à L/H_1 et L/H_2 . Si H est un sous groupe distingué ouvert de G , G/H est discret. Si G est compact (resp. localement compact) et H un sous groupe distingué fermé G/H est compact (resp. localement compact).

Transitivité des groupes quotients. Si H et K sont deux sous groupes distingués de G , tels que $H \subset K$, les groupes topologiques G/K et (G/H)/(K/H) sont isomorphes.

Sous groupes d'un groupe quotient : Soient A un sous groupe du groupe topologique G , H un sous groupe distingué de G . L'image canonique $\varphi(A)$ de A dans G/H est un groupe topologique isomorphe à AH/H . Par contre $A/(A\cap H)$ et AH/H ne sont pas en général isomorphes.

Pour qu'une représentation f d'un groupe topologique G dans un autre G' soit continue il faut et il suffit qu'elle soit continue en e (élément neutre de G). La représentation f définit une représentation biunivoque continue $\dot{f}$ de G/H sur G', où $H = \overset{-1}{f}(e')$ (e' élément neutre de G') est un sous-groupe distingué de G . Mais en général $\dot{f}$ n'est pas bicontinue c'est-à-dire n'est pas un isomorphisme du groupe topologique G/H sur le sous groupe f(G) de G' . Quand cette condition est remplie on dit que f est un homomorphisme du groupe topologique G dans le groupe topologique G' .

(N-B. Ne pas confondre homomorphisme avec homéomorphisme).

(Th. 3.2) f étant une représentation continue de G dans G', une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un homomorphisme est que l'image par f de tout ouvert de G soit un ouvert de G'.

Condition équivalente : que l'image de tout voisinage de l'élément neutre de G soit un voisinage de l'élément neutre de G'.

Corollaire : toute représentation continue d'un groupe compact dans un groupe séparé est un homomorphisme.

Si H est un sous groupe quelconque d'un groupe G on sait (Alg. Ch. I) ~~qu'on note encor~~ qu'on note encore G/H l'ensemble quotient de G par la relation d'équivalence $x^{-1}y \in H$ (qui n'est plus équivalente à $yx^{-1} \in H$ si H n'est pas distingué), et qu'on peut définir sur G/H une loi de composition externe dont le domaine d'opérateurs est G , en faisant correspondre à $s \in G$ et à $\dot{x} = xH \in G/H$ la classe $s\dot{x} = sxH$. G/H muni de cette loi externe est appelé l'espace homogène G/H . Si G est un groupe topologique la topologie quotient sur l'ensemble quotient G/H est telle que l'application $(s,\dot{x}) \to s\dot{x}$ de $G \times (G/H)$ dans G/H ,est continue.

L'ensemble G/H muni de cette loi externe et de la topologie quotient est l'espace homogène quotient du groupe topologique G par le sous groupe H

L'image canonique d'un ouvert de G dans l'espace homogène G/H est un ouvert de G/H . Pour que l'espace homogène G/H soit séparé (et alors il est régulier) il faut et il suffit que H soit un sous groupe fermé de G . Si H est ouvert l'espace homogène est discret.

Produit de groupes topologiques : c'est le groupe produit muni de la topologie produit qui est bien compatible avec la structure de groupe. Si G_1 et G_2 sont des groupes topologiques ayant respectivement H_1 et H_2 comme sous groupes distingués, l'application canonique du groupe topologique $(G_1/H_1)\times(G_2/H_2)$ sur le groupe topologique $(G_1\times G_2)/(H_1\times H_2)$ est un isomorphisme.

Structures uniformes de groupes (cf § 3)

Dans un groupe topologique la structure uniforme droite (respectivement gauche) est définie par le système fondamental d'entourages formé des ensembles V_d resp. V_s des couples x,y de points tels que $y\,x^{-1}\in V$ (respectivement $x^{-1}y\in V$) V parcourant le filtre des voisinages de l'élément neutre du groupe. Les espaces uniformes ainsi obtenus se notent G_d et G_s . A toute proposition sur la topologie d'un espace uniforme correspond une proposition sur la topologie d'un groupe à l'aide des formules $V_d(x) = V.x$, $V_d(A)=V.A$, $V_s(x)=x.V$, $V_s(A) = A.V$. G_d et G_s sont évidemment confondus si le groupe est abélien et s'il est compact. S'ils coïncident pour des groupes ils coïncident pour leurs sous groupes et leurs groupes produits. Les translations à droite et à gauche sont des automorphismes de la structure uniforme droite (respectivement gauche) et la symétrie $x \to x^{-1}$ est un isomorphisme de la structur uniforme droite sur la structure uniforme gauche. Les automorphismes intérieurs $x \to axa^{-1}$ de G sont à la fois des isomorphismes de la structure de groupe et de chacune des structures uniformes. Il n'est pas vrai en général que $(x,y) \to xy$ soit une application uniformément continue de $G_d \times G_d$ dans G_d, ni que $x \to x^{-1}$ soit une application uniformément continue de G_d dans G_d. Mais chacune de ces deux propriétés caractérise les groupes dont les deux structures uniformes sont identiques, autre condition nécessaire et suffisante pour que G_d et G_s coïncident c'est qu'à tout voisinage V de e corresponde un voisinage W de e tel que quelque soit $x \in G$, on ait $xWx^{-1} \subset V$.

Toute représentation continue d'un groupe topologique dans un autre est uniformément continue quand on munit les deux groupes de leurs structures uniformes droites (ou gauches).

Les structures uniformes induites sur un sous-groupe ou sur un groupe produit par les structures uniformes droites (respectivement gauches) sur les groupes donnés sont identiques aux structures uniformes droites (respectivement gauches) sur le sous groupe ou le groupe produit.
La structure uniforme droite sur un groupe quotient G/H peut être définie en prenant pour système fondamental d'entourages l'ensemble des paires de classes $(\dot{x},\dot{y})$ telles que $\dot{y}\dot{x}^{-1} \in \varphi(V)$, V parcourant les voisinages de l'élément neutre de G et φ étant l'application canonique de G sur G/H. Donc φ est uniformément continue.

Un groupe G est <u>complet</u> si G_d et G_s sont tous les deux des espaces topologiques complets. Il suffit pour cela qu'un des deux le soit.
Exemple : <u>tout groupe localement compact est complet</u>.

<u>Théorème de complétion des groupes topologiques</u> (Th. 1.3 et 2.3)

Pour qu'un groupe topologique séparé G soit isomorphe à un sous groupe partout dense d'un groupe topologique complet $\widehat{G}$ il faut et il suffit que l'image par la symétrie $x \to x^{-1}$ d'un filtre de Cauchy pour la structure uniforme droite de G soit encore un filtre de Cauchy pour cette structure. Le groupe complet $\widehat{G}$, qu'on appelle le groupe complété de G, est alors unique à une isomorphie près. En particulier tout groupe abélien séparé et plus généralement tout groupe séparé dont les deux structures uniformes sont identiques, peut être ainsi complété. La condition du théorème de complétion est vérifiée si la symétrie est uniformément continue au voisinage de e ou G_d. Il en résulte qu'un groupe séparé admettant un voisinage symétrique de l'origine précompact dans G_d admet un complété localement compact.

Un sous groupe fermé d'un groupe complet est complet, un produit de groupes complets est complet. On ignore si un groupe quotient séparé d'un groupe complet est toujours complet, mais on le démontre au chap.IX. si le groupe complet est métrisable. C'est aussi vrai si le groupe est localement compact car le groupe quotient est aussi localement compact. On peut aussi définir canoniquement une structure uniforme sur un espace homogène G/H, en faisant correspondre à tout voisinage V de l'élément neutre dans G, l'ensemble des couples $(\dot{x},\dot{y})$ de points de G/H tels que $\dot{y} \in V.\dot{x}$. L'application canonique de G muni de sa structure uniforme gauche dans G/H muni de la structure uniforme définie ci-dessus est uniformément continue. Cette structure uniforme est compatible avec la topologie quotient sur G/H. L'application $\dot{x} \to a\dot{x}$ (a fixe dans G) est uniformément continue, $(\dot{x},a) \to a\dot{x}$ n'est pas en général uniformément continue de $G_s \times G/H$ dans G/H mais il en est ~~xxxxx~~ ainsi si $G_s = G_d$.

Si G est complet et H fermé on peut assurer que G/H est complet dans les mêmes conditions que pour les groupes quotients : G métrisable. Si on complète l'espace uniforme G/H et si on prolonge par continuité les opérateurs de G sur cet espace on a bien un groupe d'opérateurs continu sur l'espace complété mais il n'agit plus en général transitivement sur l'espace qui n'est plus un espace homogène.

Soit $\hat{G}$ ce complété et G s'il existe, $\hat{H}$ l'adhérence de H dans $\hat{G}$, si $\hat{G}/\hat{H}$ est complet alors G/H peut être considéré comme sous espace partout dense d'un espace homogène qui est un espace complet et dont le groupe (qui est complet) contient le groupe du premier (qui y est partout dense).

<u>Sommes infinies dans les groupes abéliens</u> (cf § 4)

Dans ce paragraphe il ne sera question que de <u>groupes abéliens topologiques séparés</u> dont la loi de composition est notée additivement en général. Soit $(x_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de points d'un tel groupe G et $\mathfrak{F}(I)$ l'ensemble des parties finies J de I . $\mathfrak{F}(I)$ est un ensemble filtrant pour la relation d'ordre $\subset$. Soit S_J la somme des x_ι tels que $\iota \in J$. La famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ est <u>sommable</u> si l'application $J \to S_J$ a une limite suivant le filtre Φ des sections de l'ensemble filtrant $\mathfrak{F}(I)$ des parties finies de I , ordonné par inclusion. Cette limite est la <u>somme</u> de la famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ et se note $\sum_{\iota\in I} x_\iota$ (ou simplement $\sum_\iota x_\iota$ et même $\sum x_\iota$ quand aucune confusion n'est à craindre). Définition équivalente : la famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ est sommable et a pour somme S si, pour tout voisinage V de l'origine dans G il existe une partie finie J_0 de I telle que pour toute partie finie $J \supset J_0$ on ait $S_J \in S + V$. (Si G est noté multiplicativement, la famille sera dite <u>multipliable</u> si l'application $J \to p_J = \prod_{\iota\in J} x_\iota$ a une limite suivant Φ : le <u>produit</u> de la famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ qu'on notera $\prod_{\iota\in I} x_\iota$).

On remarquera : 1) que si I est fini la définition redonne la somme ordinaire d'une famille finie, définie en Algèbre. 2) que la définition d'une famille sommable ne fait intervenir aucune notion d'ordre sur l'ensemble des indices. 3) que la définition s'étend immédiatement à une famille de points d'un espace topologique séparé dans lequel on a défini une loi de composition associative et commutative.

Critère de Cauchy (Th 1.4). Pour qu'une famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ soit sommable il faut que pour tout voisinage V de l'origine il existe une partie finie J_0 de I telle que pour toute partie finie K de I ne rencontrant pas J_0 on ait $\sum_{\iota \in K} x_\iota \in V$. Cette condition nécessaire est aussi suffisante lorsque le groupe est complet.

Corollaire 1. Si la famille (x_ι) est sommable, tout voisinage de l'origine contient tous les x_ι à l'exception d'une sous famille finie. En d'autres termes on a $\lim . x_\iota = 0$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I . Cette condition nécessaire n'est pas en général suffisante.

Corollaire 2. Si la famille (x_ι) est sommable et si l'élément neutre de G admet un système fondamental dénombrable de voisinages, l'ensemble des indices ι tels que $x_\iota \neq 0$ est dénombralbe.

Théorème de l'associativité de la somme. (Th 2.4). Dans un groupe complet toute sous-famille sommable est sommable, et si $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une partition de l'ensemble d'indices I , la famille des $s_\lambda = \sum_{\iota \in I_\lambda} x_\iota$ est sommable et sa somme est égale à celle de la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$, c'est-à-dire :

$$(1) \quad \sum_{\iota \in \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda} x_\iota = \sum_{\lambda \in L} \Big(\sum_{\iota \in I_\lambda} x_\iota \Big) .$$

En particulier si $I = L \times M$ la famille "double" $(x_{\lambda\mu})_{(\lambda\mu) \in L \times M}$ est sommable et on a la formule d'échange des signes de sommation :

$$(2) \quad \sum_{(\lambda,\mu) \in L \times M} x_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda \in L} \Big(\sum_{\mu \in M} x_{\lambda\mu} \Big) = \sum_{\mu \in M} \Big(\sum_{\lambda \in L} x_{\lambda\mu} \Big)$$

Remarque : le dernier membre de la formule (1) peut avoir un sens sans que le premier en ait un ; de même dans (2) le premier membre peut ne pas avoir de sens et les deux derniers en avoir sans que les éléments qu'ils représentent soient égaux.

Dans un produit de groupes pour qu'une famille soit sommable il faut et il suffit que chacune des familles projections le soit. L'image d'une famille sommable par une représentation continue f (d'un groupe abélien séparé dans un autre) est une famille sommable et on a : $\sum f(x_\iota) = f(\sum x_\iota)$

Si x_ι, y_ι sont deux familles sommables au même ensemble d'indices, les familles $\sum(-x_\iota)$, $\sum n\, x_\iota$ $(n \in \mathbb{Z})$, $\sum(x_\iota + y_\iota)$ sont sommables et on a $\sum(-x_\iota) = -\sum x_\iota$; $\sum n\, x_\iota = n \sum x_\iota$; $\sum(x_\iota + y_\iota) = \sum x_\iota + \sum y_\iota$

Séries (cf § 4)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points (d'un groupe abélien topologique séparé noté additivement). Posons $S_n = \sum_{p=0}^{n} x_p$. On appelle série définie par la suite (x_n) (ou simplement série (x_n)) le couple des suites (x_n) et (S_n) ainsi associées. La série (x_n) est convergente si la suite (S_n) est convergente. La limite de cette suite est la somme de la série et se note $\mathop{S}_{n=0}^{\infty} x_n$. (On dit quelquefois par abus de langage "la série $\mathop{S}_{n=0}^{\infty} x_n$", ou encore "la série $x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$" quand la série (x_n) est convergente). Ces notions s'étendent immédiatement au cas d'une famille dénombrable de points $(x_\iota)_{\iota \in I}$ lorsque I est bien ordonné ou lorsqu'il existe, ce qui revient au même, une application biunivoque de $\mathbb{N}$ sur I. Si I est une partie (infinie) de $\mathbb{N}$ cet ordre sera sauf mention du contraire l'ordre induit dans I par l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$.

Critère de Cauchy. Une condition nécessaire pour la convergence de la série (x_n) est que pour tout voisinage V de l'origine il existe un entier n_0 tel que pour tout couple d'entiers $n \geqslant n_0$ $p > 0$ on ait $\sum_{i=n}^{n+p} x_i \in V$. Cette condition est aussi suffisante si G est complet.

Si les séries (x_n), (y_n) sont convergentes les séries $(-x_n)$ et $(x_n + y_n)$ le sont aussi, et on a : $\mathop{S}_{n=0}^{\infty} (-x_n) = - \mathop{S}_{n=0}^{\infty} x_n$; $\mathop{S}_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \mathop{S}_{n=0}^{\infty} x_n + \mathop{S}_{n=0}^{\infty} y_n$.

Si on modifie arbitrairement un nombre fini de termes dans une série convergente on obtient encore une série convergente. Par exemple en remplaçant les termes d'indice $< m \in N$ par zéro on obtient une série convergente dont la somme notée $\mathop{S}_{n=m}^{\infty} x_n$ s'appelle le reste de la série.

Soit (k_n) une suite strictement croissante d'entiers $\geqslant 0$; si la série (x_n) est convergente, et si on pose $u_n = \sum_{p=k_{n-1}}^{p=k_n} x_p$, la série (u_n) est convergente et on a $\mathop{S}_{n=0}^{\infty} u_n = \mathop{S}_{n=0}^{\infty} x_n$ (associativité restreinte des séries).

Si la famille (x_n) est sommable, la série (x_n) est convergente ainsi que les séries $(x_{\sigma(n)})$, en désignant par $\sigma(n)$ une permutation quelconque de N, et on a $\sum_{n \in N} x_n = \mathop{S}_{n=0}^{\infty} x_n = \mathop{S}_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. La réciproque est inexacte et la famille des termes d'une série convergente x_n peut ne pas être sommable ; la série $x_{\sigma(n)}$ peut ne pas être convergente ou converger vers une autre somme que (x_n), toutefois si $\sigma(n)-n$ est bornée $(x_{\sigma(n)})$ converge vers la même somme que (x_n).

On dit qu'une série (x_n) est commutativement convergente si pour toute permutation σ de N la série $(x_{\sigma(n)})$ est convergente. Une condition nécessaire et suffisante de convergence commutative est que la famille (x_n) soit sommable. Toutes les séries $(x_{\sigma(n)})$ ont alors même somme.

Les développements précédents se généralisent dans une certaine mesure au cas où la loi de composition n'est pas commutative (familles multipliables et produits infinis dans les groupes non commutatifs). Pour ~~km~~ définir les familles multipliables on est obligé cette fois de supposer que l'ensemble des indices est totalement ordonné, le produit de la famille étant défini à l'aide de tous les produits des familles finies d'éléments, prises avec l'ordre induit. On a des résultats plus simples quand l'ensemble d'indices est N (suites multipliables), cas qui n'est pas équivalent au cas général même si l'élément neutre admet un système fondamental dénombrable de voisinages. Le produit infini se définit seulement pour les suites comme dans le cas commutatif. Nous ne dirons rien de plus sur ces questions, qu'on trouvera étudiées dans l'appendice au chap.IX du traité, dans le cas des suites multipliables et produits infinies sur une "algèbre normée".

Anneaux et corps topologiques (cf. §5)

Une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble A est compatible avec une structure d'anneau sur A, et A muni de ces 2 structures est un anneau topologique, si $\mathcal{T}$ est compatible avec la structure de groupe additif sur A et si l'application $(x,y) \to x.y$ est continue (autrement dit si les trois applications $(x,y) \to x+y$, $x \to -x$, et $(x,y) \to xy$ sont continues).

Soit $\mathcal{V}$ un filtre sur A engendrant une opologie de groupe sur le groupe additif A , pour quelle soit compatible avec la structure d'anneau il faut et il suffit que 1° quelque soit $x \in A$ et $V \in \mathcal{V}$ il existe $W \in \mathcal{V}$ tels que $xW \subset V$ et $Wx \subset V$, 2° quelque soit $V \in \mathcal{V}$ il existe $W \in \mathcal{V}$ tel que $W.W \subset V$.

Dans un espace topologique toute homothétie à droite $x \to xa$ (ou à gauche $x \to ax$) est continue. (Elle n'est un homéomorphisme que si a est inversible). S'il y a des éléments inversibles, l'application $x \to x^{-1}$ du groupe multiplicatif I des éléments inversibles de A sur lui-même n'est pas nécessairement continue, ou, ce qui revient au même, la structure topologique induite sur I n'est pas toujours compatible avec sa structure de groupe.

Soient f et g deux applications d'un ensemble E dans A ; supposons E muni d'une structure topologique, f et g continues en x_0 ; alors f+g, -f, f.g sont continues en x_0. Donc les applications continues de E dans A forment un sous-anneau de l'anneau de toutes les applications de E dans A. Si A est commutatif toute fonction polynôme à n variables à coefficients dans A est une application continue de A^n dans A. Supposons E filtré par un filtre $\mathfrak{F}$ et A séparé. Si $\lim_{\mathfrak{F}} f$ et $\lim_{\mathfrak{F}} g$ existent, il en est de même de $\lim_{\mathfrak{F}} (-f)$ $\lim_{\mathfrak{F}} (f+g)$ $\lim_{\mathfrak{F}} (fg)$ et on a

$$\lim_{\mathfrak{F}}(f+g) = \lim_{\mathfrak{F}} f + \lim_{\mathfrak{F}} g \ ; \ \lim_{\mathfrak{F}}(-f) = -\lim_{\mathfrak{F}} f \ ; \ \lim_{\mathfrak{F}}(fg) = \lim_{\mathfrak{F}} f . \lim_{\mathfrak{F}} g$$

Sur un sous anneau les structures induites d'anneau et d'espace topologique sont compatibles et définissent une structure <u>induite</u> d'anneau topologique. Si K est un sous anneau (respectivement un idéal à droite, à gauche, bilatère) de A (ou plus généralement d'un sous anneau partout dense de A) l'adhérence de K dans A est un sous anneau (respectivement un idéal à droite, à gauche, bilatère). Si H est un idéal bilatère la topologie quotient de celle de A par la relation d'équivalence $x-y \in H$ est compatible avec la structure algèbrique de l'anneau quotient ; elles définissent l'<u>anneau topologique quotient</u> A/H. Sur l'ensemble produit d'une famille d'anneaux la topologie produit et la structure d'anneau produit sont compatibles et définissent une

une structure d'anneau topologique produit. Pour que A/H soit séparé il faut et il suffit que H soit fermé. En particulier si A n'est pas séparé, l'adhérence N de l'élément neutre dans A étant un idéal bilatère fermé, l'anneau quotient A/N est l'anneau séparé associé a A .

Quand on parle de la structure uniforme d'un anneau topologique il s'agit toujours sauf mention expresse du contraire de la structure uniforme de son groupe additif. En particulier un anneau est complet si son groupe additif est complet. Il est toujours possible de compléter un anneau topologique séparé, c'est-à-dire de le considérer comme sous-anneau partout dense d'un anneau complet (qui est commutatif si l'anneau initial l'est). En effet on peut complèter son groupe additif (cf § précédent) et la possibilité de prolonger le produit résulte du théorème plus général suivant :

(Th. 1.5) Soient E,F,G trois groupes abéliens séparés et complets. A un sous-groupe partout dense de E, B un sous groupe partout dense de F . Si f est une application bilinéaire continue de $A\times B$ dans G , f peut être prolongé par continuité en une application bilinéaire continue de $E\times F$ dans G .

Un corps topologique est un ensemble K muni d'une structure de corps et d'une topologie compatible avec sa structure d'anneau et telle que la topologie qu'elle induit dans l'ensemble K^* des éléments $\neq 0$ de K soit compatible avec la structure de groupe multiplicatif de K (autrement dit $x+y$, $x-y$, xy et x^{-1} sont des applications continues)

Une structure de corps et une topologie sur un ensemble K satisfaisant aux conditions ci-dessus sont compatibles.

Si $a\neq 0$ les homothéties $x\to ax$ et $x\to xa$ sont des automorphismes du groupe additif de K . Si V est un voisinage de zéro dans K , il en est de même de aV et Va, quel que soit $a \neq 0$.

Soient E un espace topologique, f une application de E dans K ; si f est continue en un point x_0 et $f(x_0) \neq 0$, f^{-1} est continue en x_0. Si K est commutatif toute fonction rationnelle de n variables à coefficients dans K est continue en tout point de K^n où son dénominateur n'est pas nul. Si f est une application de l'ensemble E filtré par le filtre $\mathfrak{F}$ dans K supposé séparé et si $\lim_{\mathfrak{F}} f$ existe et n'est pas nulle, $\lim_{\mathfrak{F}} f^{-1}$ existe et égale $(\lim_{\mathfrak{F}} f)^{-1}$.

Si H est un sous corps de K la topologie induite dans H est compatible avec sa structure de corps et on a ainsi une structure de corps topologique <u>induite</u>. En outre $\bar{H}$ est un sous corps de K. Un produit de corps n'est pas un corps et sur un produit de corps topologiques est définie seulement une structure d'anneau topologique.

Dans un corps topologique K il y a lieu de considérer <u>la structure uniforme additive</u> (celle du groupe additif K) et <u>les structures uniformes multiplicatives droite et gauche</u> (celles du groupe multiplicatif K^*). La structure uniforme induite sur K^* par la structure uniforme additive est en général <u>distincte</u> des structures multiplicatives. D'après les résultats sur la complétion des anneaux topologiques, tout corps topologique séparé K peut être considéré comme sous anneau partout dense d'un anneau topologique séparé complet $\hat{K}$, défini à une isomorphie près. Pour que l'<u>anneau complété de K soit un corps topologique</u> il faut et il suffit qu'un filtre de Cauchy de K (pour la structure additive) auquel zéro n'est pas adhérent ait pour image par l'application $x \to x^{-1}$ un filtre de Cauchy. Même quand l'anneau complété est un corps, rien n'assure que les structures multiplicatives soient complètes. Toutefois il en sera ainsi, quand K est localement précompact et quand K est commutatif. Si pour la structure additive le corps commutatif K est séparé et complet, il en est de même de K^* pour la structure multiplicative.

Un corps topologique est nécessairement ou connexe ou totalement discontinu. Un corps topologique localement compact admet un système fondamental dénombrable de voisinage de l'élément neutre. Les seuls corps topologiques compacts sont les corps finis avec la topologie discrète.

Espace vectoriel topologique sur un corps topologique.

Soit E un corps vectoriel à gauche sur un corps topologique K (dans la suite on ne répètera plus "à gauche", et on omettra les développements analogues pour les espaces vectoriels à droite sur K). Une topologie sur E est compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur K , et avec la topologie de corps de K , (ou par abus de langage compatible avec sa structure vectorielle sur K), et E muni de cette topologie est un espace vectoriel topologique~~ment~~ sur K , si la topologie sur E est compatible avec la structure de groupe additif de E , et l'application $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $K \times E$ dans E est continue.

Une topologie compatible avec la structure vectorielle de E sur K l'est aussi avec la structure vectorielle de E sur un sous corps de K

Deux espaces vectoriels topologiques sur le même corps K sont isomorphes s'il existe une isomorphie de la structure vectorielle par rapport à K de l'un d'eux sur celle de l'autre (c'est à dire une application linéaire homogène biunivoque de l'un sur l'autre) qui soit un homéomorphisme pour leur topologie.

La ~~topologie~~ structure uniforme d'un espace vectoriel topologique est celle de son groupe additif.

La topologie d'un espace vectoriel topologique E sur un corps K est compatible avec la structure vectorielle par rapport à K d'un sous espace vectoriel de E et définit sur celle-ci sa structure vectorielle topologique induite. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous espace vectoriel. Sur l'espace vectoriel produit d'une famille d'espaces vectorielles topologiques sur un même corps topologique la topologie produit est compatible avec la structure vectorielle et définit l'espace vectoriel topologique produit. Si L est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel topologique E la topologie quotient sur E/L est compatible avec sa structure vectorielle quotient et définit l'espace vectoriel topologique quotient E/L . Pour que E/L soit séparé il faut et il suffit que L soit fermé.

Soit A une algèbre sur un corps topologique K , une topologie sur A est compatible avec la structure d'espace vectoriel et l'algèbre munie de cette topologie est une algèbre topologique sur K . Si la topologie est compatible avec la structure vectorielle de A par rapport à K et si en outre le produit $(x,y) \to x.y$ est une application continue de $A \times A$ dans A .

Deux algèbres topologiques sur un même corps topologique sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'algèbre de l'une sur l'autre qui soit en même temps un homéomorphisme.

On définit canoniquement sur une sous algèbre, sur un algèbre produit, sur une algèbre quotient par un idéal bilatère, une structure d'algèbre topologique. L'adhérence d'une sous algèbre (resp. d'un idéal bilatère) est une sous-algèbre (resp. un idéal bilatère). Pour qu'une algèbre quotient soit séparé il faut et il suffit que l'idéal bilatère qui la définit soit fermé. Supposons que l'algèbre A ait un élément unité, la topologie induite par celle de A sur le groupe multiplicatif G des éléments inversibles, n'est pas en général compatible avec la structure de groupe de G .

 67

Appendice : Structures topologiques définies à l'aide d'une famille de sous-groupes.

Soit une famille $\mathfrak{F}$ de sous groupes d'un groupe G . G l'ensemble des groupes aHa^{-1} où a parcourt G et H parcourt F , $\mathfrak{B}$ l'ensemble des intersections finies des sous groupes de la famille F , $\mathfrak{B}$ est une base de filtre définissant une topologie de groupe sur G . En particulier si G est abélien $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ une famille quelconque de sous groupe engendre un tel filtre. Pour que la topologie ainsi définie soit séparée il faut et il suffit que l'intersection de tous les sous groupes appartenant à G se réduise à l'élément neutre e . Pour qu'elle soit discrète il faut et il suffit que $\{e\}$ soit intersection finie d'un certain nombre d'éléments de $\mathfrak{G}$. Dans tous les cas les sous groupes sont à la fois ouverts et fermés et le groupe topologique est totalement discontinu.

Supposons maintenant que le groupe soit le groupe additif d'un anneau et les sous groupes donnés des idéaux bilatères. La topologie qu'ils définissent est compatible avec la structure d'anneau. On a donc ainsi un anneau topologique totalement discontinu. Par exemple : si A est un anneau de Dedekind (anneau d'intégrité ayant un élément unité et dans lequel tout idéal $\neq 0$ se décompose d'une manière unique en produit de puissances d'idéaux premiers, si la famille d'idéaux définissant la structure uniforme est formée d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ et de ses puissances et $A_{\mathfrak{p}}$ le complété de A c'est un anneau d'intégrité dont le corps des quotients $K_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à l'extérieur $\mathfrak{p}$-adique du corps des quotients K de A , définie en algèbre. Si $A = Z$, $K = Q$, un idéal premier de Z est principal et est engendré par un nombre premier p ; on note Z_p le complété de A et Q_p le corps des quotients de A_p c'est le corps des nombres p-adiques. On obtient sur le corps des quotients $K_{\mathfrak{p}}$ une topologie compatible avec sa structure de corps et que prolonge celle de A_p en identifiant K_p avec le quotient de $A_p \times A_p^{\times}$ par la relation $xy'-yx' = 0$ ($A_p^{\times}$ désignant l'ensemble des éléments $\neq 0$ dans A_p).

Chapitre IV - Nombres réels

Nombres réels (droite numérique) (cf § 1 et 2).

On a défini en algèbre (Alg. Ch.I) la relation d'ordre total $x \leqslant y$ dans l'ensemble Q des nombres rationnels. Elle est compatible avec la structure de groupe additif de Q (l'ordre est invariant par translation).

La droite rationnelle est l'espace topologique obtenu en munissant l'ensemble Q des rationnels de la topologie de groupe dont un système fondamental de voisinages est formé par les intervalles ouverts ~~syst~~ symétriques $]-a, +a[$ $(a > 0)$. Q muni de cette structure de groupe topologique est le groupe additif de la droite rationnelle. Soit R le groupe complété de Q. Ses éléments sont les nombres réels. R en tant qu'espace topologique est la droite numérique ; en tant que groupe topologique c'est le groupe additif de la droite numérique.

On identifie en général Q avec le sous groupe partout dense de R auquel il est isomorphe. Alors tout nombre réel qui n'est pas rationnel est irrationnel. L'ensemble des irrationnels est non vide (cf § 3) et partout dense.

La relation $y-x \in R_+ = \overline{Q}_+$, où Q_+ est l'ensemble des rationnels $\geqslant 0$ est une relation d'ordre total qui prolonge la relation d'ordre sur Q et qui est compatible avec la structure de groupe additif de R. Elle laisse invariante la longueur $|b-a|$ de tout intervalle d'extrémités a et b. Pour la structure uniforme additive de R les fonctions $x^+ = \text{Max}(x,o)$, $x^- = \text{Max}(-x,o)$, $|x| = \text{Max}(x,-x)$ (valeur absolue), les fonctions $\text{Max}(x,y)$ $\text{Min}(x,y)$ sont uniformément continues

Elles sont respectivement identiques aux prolongements par continuité des fonctions analogues définies pour les rationnels et on a toujours $|x+y| \leqslant |x| + |y|$; $\big||x| - |y|\big| \leqslant |y-x|$.

(Th. 1.2) (Axiome d'Archimède) Quels que soient les nombres réels $x > 0$ et $y > 0$ il existe un entier $n > 0$ tel que $y < nx$.

(Th. 2.2) Pour qu'une partie de la droite numérique soit compacte il faut et il suffit qu'elle soit bornée fermée.

Corollaires. Dans $\mathbb{R}$, relativement compact équivaut à borné. La droite numérique est localement compacte.

(Th. 3.2) Toute partie majorée (respectivement minorée) et non vide de la droite numérique a une borne supérieure (respectivement inférieure

Pour qu'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ soit un intervalle il faut et il suffit que quels que soient a et b de A avec $a < b$, $[a,b]$ soit dans A .

(Th. 4.2). Pour qu'une partie A de $\mathbb{R}$ soit connexe il faut et il suffit que A soit un intervalle.

Corollaires. La droite numérique est un espace connexe et localement connexe. Les seules parties compactes et connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles bornés fermés. Tout ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts sans point commun deux à deux.

(Th. 5.2). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; pour qu'une application f de I dans $\mathbb{R}$ soit un homéomorphisme de I dans f(I) il faut et il suffit que f soit strictement monotone et continue dans I . Alors f(I) est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le corps des nombres réels (cf § 3)

La topologie de la droite rationnelle $\mathbb{Q}$ est compatible non seulement avec la structure de groupe additif de $\mathbb{Q}$ mais aussi avec sa structure de corps. On peut prolonger par continuité la fonction xy à toutes les valeurs réelles des variables, et $\frac{1}{x}$ à toutes les valeurs $\neq 0$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ une structure de corps compatible avec la topologie de $\mathbb{R}$; le corps topologique ainsi obtenu est le corps des nombres réels. Comme dans le corps des rationnels, on a dans le corps des réels la "règle des signes" classique pour le produit, la propriété qu'une somme de carrés ne peut être nulle que si les nombres élevés au carré le sont, et la relation $|xy| = |x|.|y|$. Si $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels $\neq 0$, il a une structure de groupe multiplicatif isomorphe au produit du sous groupe $\mathbb{R}_+^*$ de réels > 0, et du groupe multiplicatif à deux éléments $V_0 = \{-1, +1\}$.

L'application $x \to x^n$ $x \geqslant 0$ (n entier > 0) est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On désigne par $x^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{x}$ la valeur (pour $x \geqslant 0$) de l'application réciproque ; c'est la "puissance $1/n$, ou racine $n^{\text{ième}}$" de x et on a $(xy)^{1/n} = x^{1/n} y^{1/n}$.

La droite numérique achevée (cf. § 4)

La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux nouveaux éléments notés $+\infty$ et $-\infty$, muni de la structure d'ordre qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, obtenue en posant $+\infty \geqslant \overline{\mathbb{R}}$ et $-\infty \leqslant \overline{\mathbb{R}}$, et de la topologie engendrée par les intervalles ouverts sur $\overline{\mathbb{R}}$.

La droite numérique achevée est compacte. Toutes ses parties non vides ont une borne inférieure et une borne supérieure. Ses parties connexes sont les intervalles. Elle est connexe et localement connexe.

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ se prolongent partiellement par continuité à $\overline{\mathbb{R}}$ suivant les formules

$$x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty \qquad \text{pour } x \neq -\infty$$

$$x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty \qquad \text{pour } x \neq +\infty$$

$$x.(+\infty)=(+\infty).x=\begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\text{si } x>0 \\ \text{si } x<0\end{matrix}$$

$$x.(-\infty)=(-\infty).x=\begin{matrix}-\infty \\ +\infty\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\text{si } x>0 \\ \text{si } x<0\end{matrix}$$

Fonctions numériques (cf § 5)

Les applications d'un ensemble E dans la droite numérique $\mathbb{R}$ sont appelées les fonctions numériques (ou fonctions réelles) définies dans E . Par abus de langage nous appellerons encore ainsi, dans ce paragraphe et le suivant, les applications dans la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, les applications dans $\mathbb{R}$ étant les fonctions numériques finies . Soit A une partie non vide de E la borne supérieure (resp. inférieure) de f sur A est la borne supérieure (resp. inférieure) dans $\overline{\mathbb{R}}$ de f(A), on la note $\sup_{x\in A} f(x)$ (resp. $\inf_{x\in A} f(x)$). On a $\inf_{x\in A} (f(x)) = -\sup_{x\in A} (-f(x))$. Le nombre $a = \sup_{x\in A} f(x)$ est caractérisé par l'ensemble des deux propriétés suivantes : $f(x) \leqslant a$ quelque soit $x \in A$ et quelque soit $b>a$; il existe un $x \in A$ tel que $f(x) \geqslant b$. Une fonction numérique f est majorée si $\sup_{x\in E} f(x) < +\infty$, minorée si $\operatorname{Inf.}_{x\in E} f(x) > -\infty$, bornée si elle est majorée et minorée. Une fonction bornée est finie mais la réciproque n'est pas vraie.

Si $\lim_{\mathfrak{F}} f$ et $\lim_{\mathfrak{F}} g$ existent avec $\lim_{\mathfrak{F}} f > \lim_{\mathfrak{F}} g$ pour un filtre $\mathfrak{F}$ sur E , il existe un ensemble $A \in \mathfrak{F}$ tel que pour tout x de A $f(x) > g(x)$.

Principe de prolongement des inégalités (Th. 1.5). Si $\lim_{\mathfrak{F}} f$ et $\lim_{\mathfrak{F}} g$ existent et si $f(x) \leqslant g(x)$ quelque soit $x \in E$ on a $\lim_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim_{\mathfrak{F}} g$.

Mais il ne faut pas croire que de $f(x) \leq g(x)$ quelque soit $x \in E$ on puisse déduire $\lim_{\mathfrak{F}} f < \lim_{\mathfrak{F}} g$.

Théorème de la limite monotone (Th. 2.5) - Soient E un ensemble ordonné pour une relation notée $x \leq y$, A une partie de E filtrante (à droite) pour la relation d'ordre ; toute fonction numérique monotone définie dans A possède une limite suivant le filtre des sections de A ; si elle est croissante (respectivement décroissante) cette limite est égale à $\sup_{x \in A} f(x)$ (resp. $\inf_{x \in A} f(x)$).

Il en résulte que pour qu'une fonction numérique croissante (respectivement décroissante) définie dans une partie filtrante A d'un ensemble ordonné ait une limite finie suivant A, il faut et il suffit qu'elle soit majorée (respectivement minorée) dans A. En particulier : toute monotone de nombres réels a une limite dans $\overline{R}$.

La limite à droite (resp. limite à gauche) en a d'une fonction numérique d'une variable réelle (c'est-à-dire définie sur une partie E de $\overline{R}$) est sa limite (si elle existe) suivant la trace du filtre des voisinages de a dans E sur $]a, +\infty[$ (respectivement $[-\infty, a[$). On les note $\lim_{x \to a, x > a} f(x)$ ou $f(a+)$; $\lim_{x \to a, x < a} f(x)$ ou $f(a_-)$. Une fonction monotone a en tout point une limite à droite et une limite à gauche

L'enveloppe supérieure (respectivement l'enveloppe inférieure) d'une famille de fonctions numériques f_{ι} $_{\iota \in I}$ définies sur un même ensemble E est la fonction notée $\sup_{\iota \in I} f_{\iota}$ ou $\mathrm{Sup}_{\iota} f_{\iota}$ (resp. $\inf_{\iota \in I} f_{\iota}$ ou $\inf_{\iota} f_{\iota}$), dont la valeur en x est $\mathrm{Sup}_{\iota} f_{\iota}(x)$ (resp. $\inf_{\iota} f_{\iota}(x)$).

Une famille $(f_{\iota})_{\iota \in I}$ de fonctions numériques est dite uniformément majorée (respectivement uniformément minorée) si son enveloppe supérieure est majorée (respectivement son enveloppe inférieure est minorée c'est à dire s'il existe $a < +\infty$ (respectivement $a > -\infty$) tel que $f_{\iota}(x) < a$ (respectivement $f_{\iota}(x) > a$) quels que soient $x \in E$ et $\iota \in I$.

La limite supérieure d'une fonction numérique suivant un filtre $\mathfrak{G}$ est la limite de la fonction numérique $X \to \operatorname{Sup}_{x \in X} f(x)$ suivant $\mathfrak{G}$ considéré comme ensemble filtrant pour la relation $\supset$. On la note $\lim.\operatorname{Sup}_{\mathfrak{G}} f$ ou $\lim.\operatorname{Sup}_{\mathfrak{G}} f(x)$; elle est égale à la borne supérieure de l'adhérence de f suivant $\mathfrak{G}$. Définition et propriété analogues pour la limite inférieure. Si on considère la fonction numérique $n \to u_n$ $n \in \mathbb{N}$ et si $\mathfrak{G}$ est le filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$, ces limites s'appellent la limite supérieure et la limite inférieure de la suite u_n et se notent $\lim_{n \to \infty} \operatorname{Sup} u_n$ (resp. $\lim_{n \to \infty} \inf u_n$).

Supposons E muni d'une structure d'espace topologique et soit f une application d'une partie E' de E dans $\bar{R}$, A une partie de E telle que $A \cap E' \neq \emptyset$ et a un point adhérent à $A \cap E'$, la limite supérieure (resp. inférieure) de f lorsque x tend vers a, en restant dans A, est la limite supérieure (resp. inférieure) de la restriction de f à $A \cap E'$ suivant la trace sur $A \cap E'$ du filtre des voisinages de a dans E et se note $\lim_{x \to a} \sup_{x \in A} f(x)$ (resp. $\lim_{x \to a} \inf_{x \in A} f(x)$) ou simplement $\lim_{x \to A} \sup f(x)$ (resp. $\lim_{x \to a} \inf f(x)$) si $A \supset E'$. Soit V un voisinage de a on a $\lim_{x \to a,\, x \in A \cap V} \sup f(x) = \lim_{x \to a} \sup_{x \in A} f(x)$ (la limite supérieure "a un caractère local", il en est de même pour la limite inférieure).

On appelle oscillation d'une fonction numérique définie sur E relativement à une partie A de E et on note $\omega(f,A)$ la différence $\operatorname{Sup}_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$ si elle existe, ce qui est le cas si f n'est pas constamment égale à $+\infty$ (resp. $a -\infty$) sur A. C'est alors un nombre $\geqslant 0$ qui n'est nul que si f est constante sur A, et si $B < A$, $\omega(f,A) \leqslant \omega f(A)$. Supposons que f ne soit pas constamment égal à $+\infty$ (resp $a -\infty$) sur E et que E soit muni d'une structure topologique, on appelle oscillation de la fonction numérique f au point $a \in E$

la borne inférieure des nombres $\omega(f,V)$ quand V parcourt l'ensemble des voisinages de a . On la note $\omega(f,a)$ et on a $\omega(f,a) = \limsup_{x\to a} f(x) - \liminf_{x\to a} f(x)$ c'est un nombre $\geqslant 0$, la propriété $\omega(f,a)=0$ équivaut à la continuité de f en a .

Sur l'ensemble $\overline{R}^E$ des applications d'un ensemble E dans $\overline{R}$, la relation "f(x) g(x) quelque soit $x \in E$ " est une relation d'ordre qu'on note $f > g$. Toute famille f_ι d'éléments de $\overline{R}^E$ admet une borne supérieure (resp. inférieure) c'est l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) des fonctions f_ι , en particulier $\overline{R}^E$ est réticulé. Si on munit $\overline{R}^E$ de la topologie produit de ses facteurs (tous identiques à $\overline{R}$) on a $\sup_{\iota\in I} f_\iota = \lim_{H\in\mathfrak{F}(I)} (\sup_{\iota\in H} f_\iota)$, en désignant par $\mathfrak{F}(I)$ l'ensemble filtrant des parties finies de I .

L'ensemble R^E des fonctions numériques bornées définies sur E a une structure d'anneau, définie canoniquement à partir de la structure d'anneau de R (f+g désignant l'application $x \to f(x)+g(x)$, fg l'application $x \to f(x)\,g(x)$; f étant inversible si f(x) n'est jamais nul $1/f$ désigne l'application $x \to 1/f(x)$). Les opérations algèbriques sur les fonctions numériques bornées se prolongent aux fonctions numériques non bornées quand ces opérations sont définies pour toutes les valeurs des fonctions numériques considérées. Les relations entre les opérations algèbriques sur R ou $\overline{R}$ et la relation d'ordre, et les notions de borne supérieure ou inférieure et de limite ont pour conséquence un grand nombre de relations, analogues dans R^E et $\overline{R}^E$ telles que

$$\operatorname{Sup}\,(f(x)+g(x)) \leqslant \operatorname{Sup} f(x) + \sup g(x)$$

$$\lim.\operatorname{Sup}\,(f+g) \leqslant \lim\sup.f + \lim.\sup.g$$

qu'on établira aisément quand il en sera besoin, et dont les principales figurent explicitement dans le traité.

Fonctions numériques continues et semi-continues (cf. §6)

En dehors des propriétés générales des fonctions continues à valeurs dans un espace topologique quelconque, les fonctions numériques continues possèdent les deux propriétés fondamentales suivantes :

Théorème de Weierstrass (Th. 1.6). Si f est une fonction numérique définie et continue sur un espace topologique compact E, il existe au moins un point a tel que $f(a) = \operatorname{Sup}_{x\in E} f(x)$ et au moins un point b tel que $f(b) = \operatorname{Inf}_{x\in E} f(x)$. Autrement dit une fonction numérique continue sur un compact y atteint ses bornes. En particulier si elle est finie elle est bornée.

Théorème de Bolzano (Th. 2.6). Si f est une fonction numérique définie et continue sur un espace connexe E, a et b deux points de E et α un nombre réel appartenant à l'intervalle fermé de bornes $f(a)$, $f(b)$, il existe au moins un point $x\in E$ tel que $f(x) = \alpha$. Autrement dit, une fonction numérique continue sur un espace connexe ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Cette propriété n'est d'ailleurs nullement caractéristique des fonctions continues.

Une fonction numérique f définie sur un espace topologique E est semi continue inférieurement (resp. semi continue supérieurement) en un point $a\in E$ si, quel que soit $h < f(a)$ (resp. $k > f(a)$) il existe un voisinage V de a tel que $f(x) > h$ (respectivement $f(x) < k$) pour tout x dans V. Propriété équivalente : $\lim\inf_{x\to a} f(x) \geqslant f(a)$ (respectivement $\lim.\operatorname{Sup}_{x\to a} f(x) \leqslant f(a)$). f est semi continue supérieurement sur E (respectivement semi-continue inférieurement sur E) si elle l'est en tout point de E. Pour que f soit continue en a (respectivement sur E) il faut et il suffit qu'elle soit à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement en a (respectivement sur E).

Exemples. L'oscillation d'une fonction numérique en un point défini une fonction $x \to \omega(f,x)$ qui est semi continue inférieurement.

La fonction caractéristique d'un ouvert (respectivement fermé) est semi continue inférieurement (respectivement supérieurement) et réciproquement.

(Th. 3.6) Une fonction numérique semi continue supérieurement (resp. inférieurement) définie sur un compact atteint sa borne supérieure (resp. inférieure) (ou encore a un maximum (resp. un minimum)).

On obtient encore une fonction semi continue inférieurement en a (resp. sur E) en partant de fonctions semi continues inférieurement en a (resp. sur E) quand on prend la somme, le produit (s'ils sont définis) de 2 fonctions, l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions, l'enveloppe inférieure d'une famille finie de fonctions (Th. 4.6). Naturellement ces énoncés sont encore valables en y permutant les expressions : semi-continue inférieurement et semi continue supérieurement ; inférieure et supérieure.

En particulier l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) d'une famille de fonctions continues est semi continue inférieurement (resp. supérieurem.)

Pour une fonction numérique quelconque f définie sur une partie partout dense A d'un espace topologique E , si on pose $g(x) = \liminf_{y \to x} f(y)$ (respectivement $h(x) = \limsup_{y \to x} f(y)$) g est semi continue inférieurement (respectivement h est semi continue supérieurement) dans E . Si f est semi continue inférieurement (respectivement supérieurement) g (respectivement h) est un prolongement de f ("prolongement des fonctions semi-continues").

Sommes et produits infinis de nombres réels (cf § 7)

Comme tout point de $\overline{R}$ admet un système fondamental dénombrable de voisinages, une famille (x_ι) de nombres réels ne peut être sommable dans $\overline{R}$ que si l'ensemble des ι tels que $x_\iota \neq 0$ est dénombrable. On peut donc se ramener à l'étude des familles sommables dénombrables. Néanmoins, en vue de certaines applications, nous ne ferons aucune hypothèse sur la puissance de l'ensemble des indices.

(Th. 1.7). Pour qu'une famille (x_ι) de nombres réels finis $\geqslant 0$ soit sommable dans $\overline{R}$ il faut et il suffit que l'ensemble des sommes partielles finies soit majoré dans $\overline{R}$. La borne supérieure de cet ensemble est alors la somme de la famille (x_ι).

Principe de comparaison (Th. 2.7) Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ et $(y_\iota)_{\iota \in I}$ deux familles de nombres réels $\geqslant 0$ tels que $x_\iota \leqslant y_\iota$ quel que soit ι. Si (y_ι) est sommable dans $\overline{R}$ il en est de même de (x_ι) et $\sum_\iota x_\iota \leqslant \sum_\iota y_\iota$; si en outre pour au moins un indice $\varkappa$, $x_\varkappa < y_\varkappa$ on a $\sum_\iota x_\iota < \sum_\iota y_\iota$.

Si les x_ι réels finis ne sont plus supposés $\geqslant 0$, l'étude de la sommabilité dans $\overline{R}$ de la famille (x_ι) se ramène à celle d'une famille de nombres $\geqslant 0$: celle des $(|x_\iota|)$; en effet :

(Th. 3.7). Pour qu'une famille (x_ι) de nombres réels finis soit sommable dans $\overline{R}$ il faut et il suffit que la famille $(|x_\iota|)$ des valeurs absolues des x_ι soit sommable dans $\overline{R}$.

(Il est aussi nécessaire et suffisant que la famille des sommes partielles finies soit bornée).

Si les familles $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$, $(y_\mu)_{\mu \in M}$ de nombres réels finis sont sommables dans $\overline{R}$ il en est de même de la famille $(x_\lambda y_\mu)_{\lambda\mu \in LM}$ et on a $\sum_{\lambda\mu} x_\lambda y_\mu = (\sum_\lambda x_\lambda)(\sum_\mu y_\mu)$.

Dans le groupe multiplicatif R^* des nombres réels finis et $\neq 0$ une famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ ne peut être multipliable que si $\lim x_\iota = 1$

 78

suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I en particulier il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'indices tels que $x_\iota < 0$. Nous pouvons donc nous borner aux familles (x_ι) dont tous les éléments sont strictement positifs ; il est alors commode de poser $x_\iota = 1 + u_\iota$, où les u_ι sont soumis aux conditions $-1 < u_\iota < +\infty$ quel que soit ι. Comme tout point de R^* a un système fondamental dénombrable de voisinages, l'ensemble des ι tels que $u_\iota \neq 0$ est dénombrable si la famille $(1+u_\iota)$ est multipliable dans R^*.

(Th. 4.7) Pour que la famille $(1+u_\iota)$ soit multipliable dans R^* il faut et il suffit que la famille (u_ι) soit sommable dans R.

La démonstration de cette propriété à cet endroit du traité n'utilise pas la fonction logarithme qui n'est définie que plus tard.

Si nous nous plaçons maintenant dans $\overline{R}$, nous avons les résultats suivants : Toute famille (x_ι) de nombres réels positifs est sommable dans $\overline{R}$. Toute famille de nombres réels $\geqslant 1$ (respectivement $\in [0,1]$) est multipliable dans $\overline{R}$.

On dira simplement qu'une série de nombres réels finis est convergente quand elle est convergente dans R. Elle est dite absolument convergente quand la série des valeurs absolues est convergente. Pour qu'elle soit commutativement convergente il faut et il suffit qu'elle soit absolument convergente. Une série peut être convergente sans être absolument convergente, donc sans être commutativement convergente. Exemple : série alternée $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geqslant 0$; une condition suffisante de convergence est que la suite (v_n) soit décroissante et ait pour limite zéro.

On dira simplement qu'un produit infini de nombres réels $1+u_n$ est convergent s'il converge dans R^*. Il est dit absolument convergent si le produit de terme général $1+|u_n|$ est convergent.

Pour qu'il soit commutativement convergent il faut et il suffit qu'il soit absolument convergent, ou encore que la série (u_n) soit absolument convergente. Il peut être convergent sans être absolument convergent, donc sans être commutativement convergent. Remarquons en outre que la convergence de la série (u_n) n'est pas nécessaire ni suffisante pour la convergence du produit de terme général $1+u_n$.

Développements usuels des nombres réels- Puissance de $\mathbb{R}$ (cf § 8)

Etant donné un nombre réel $\varepsilon > 0$, on dit qu'un nombre réel r est une *valeur approchée à ε près* d'un nombre réel x si $|x-r| \leqslant \varepsilon$. r est une *valeur approchée par défaut* si $r \leqslant x$, *une valeur approchée par excès* si $r \geqslant x$. Si A est partout dense dans $\mathbb{R}$, A contient des valeurs approchées à ε près de tout nombre réel, ε étant arbitrairement petit. Si (ε_n) est une suite strictement décroissante de nombres > 0 tendant vers zéro et si r_n est une valeur approchée de x à ε_n près, alors $\lim r_n = x$. Souvent on astreindra r_n à une condition qui le définisse uniquement, alors on aura associé à tout nombre réel une suite (r_n) de valeurs approchées qu'on appelle *le développement de x suivant la loi donnée*. On donne encore ce nom à la série associée $\sum_0^\infty (r_{n+1}-r_n)$ qui converge vers x. Par exemple soit A un sous groupe partout dense de $\mathbb{R}$, $\varepsilon_n \in A$; il existe un entier p_n et un seul tel que $p_n \varepsilon_n \leqslant x < (p_n + 1)\varepsilon_n$; chacune des suites uniquement déterminées $(p_n \varepsilon_n)$ et $((p_{n+1})\varepsilon_n)$ converge vers x.

Bornons-nous au cas où $A = \mathbb{Q}$ $\varepsilon_n = \frac{1}{d_n}$ les d_n étant une suite strictement croissante d'entiers tels que $d_0 = 1$ $d_n \equiv 0 \pmod{d_{n-1}}$. Le développement correspondant "par défaut" $r_n = \frac{p_n}{d_n}$ d'un nombre x permet d'écrire x sous la forme $x = p_0 + \sum_{n=1}^\infty \frac{u_n}{d_n}$, où les u_n sont définis par les relations $p_n = \frac{d_n}{d_{n-1}} p_{n-1} + u_n$ $0 \leqslant u_n < \frac{d_n}{d_{n-1}}$ $u_n \in \mathbb{N}$

Si on prend $d_n = a^n$ $a \in N$. on obtient le développement en base a . $x = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n/a^n$; alors tous les u_n appartiennent à l'ensemble fini $[0,a-1] \subset N$. Dans les calculs numériques on utilise souvent $a=10$ (développements décimaux) et dans les recherches théoriques les développements en base 2 (dyadiques) ou en base 3 (triadiques) . Le développement est dit limité si $u_n=0$ pour $n \geqslant n_0$ convenable ; illimité dans le cas contraire.

Considérons réciproquement l'ensemble $\mathcal{X}$ des séries convergentes $p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n/a^n$ où $p_0 \in Z$ et $u_n \in [0,a-1] \subset N$. L'application de $\mathcal{X}$ dans R qui à chaque série fait correspondre sa somme est une application de $\mathcal{X}$ sur R . Mais elle n'est pas biunivoque.

Appelons développement impropre en base a de x toute série de cet ensemble qui converge vers x et qui n'est pas le développement en base a défini précédemment (qu'on qualifie alors quelquefois de développement propre). Un nombre réel dont le développement (propre) est illimité n'admet pas de développement impropre ; dans le cas contraire il admet un développement impropre et un seul (nécessairement illimité) qui est égal à $\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n/a^n + (u_{n_0}-1)/a^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (a-1)/a^n$ (on a écrit n_0 pour p_0 et n_0 représente le plus grand indice pour lequel u_n n'est pas nul dans le développement propre). On a des considérations analogues pour les développements associés à une suite d'entiers a_n comme plus haut.

La connaissance des développements propres de 2 nombres x et y permet de déterminer l'ordre de x et y car il est le même que celui des deux premiers termes distincts de leurs développements. (ordre lexicographique des développements).

L'existence des développements impropres n'est pas un accident, car ils apparaissent dans toute espèce de développements ayant cette propriété relative à l'ordre. En effet soient E un ensemble totalement ordonné (fini ou infini) et S l'ensemble des suites à éléments dans E, ordonné lexicographiquement. Une application de $\mathbb{R}$ ou plus généralement d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans S, biunivoque et monotone, ne peut être une application sur S.

La représentation des nombres réels par de tels développements permet de déterminer la puissance de $\mathbb{R}$.

Théorème de Cantor (Th 1.8). L'ensemble des nombres réels est équipotent à l'ensemble des parties d'un ensemble infini, dénombrable (et par conséquent a une puissance strictement supérieure à la puissance d'un ensemble dénombrable).

La puissance de $\mathbb{R}$ s'appelle quelquefois la puissance du continu.

Chapitre V. Groupes à un paramètre.

Sous groupes et groupes quotients de $\mathbb{R}$ (cf § 1)

Tout sous groupe fermé du groupe additif $\mathbb{R}$, distinct de $\mathbb{R}$ et de $\{0\}$ est un sous groupe discret de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a > 0$ (autrement dit est formé des multiples entiers d'un même nombre). Tout groupe quotient séparé de $\mathbb{R}$ non réduit à l'élément neutre est de la forme $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ $(a \geqslant 0)$; s'il est distinct de $\mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ il est isomorphe au groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qu'on note $\mathbb{T}$. En tant qu'espace topologique (et par abus de langage en tant que groupe topologique) on appelle $\mathbb{T}$ le tore à une dimension $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ est appelé le groupe additif des nombres réels modulo a. La relation $x \equiv y$ (mod. $a\mathbb{Z}$) s'écrit encore $x \equiv y$ (mod a) ou $x \equiv y$ (a). Quand a est entier elle induit sur $\mathbb{R}$ la relation qu'on appelle congruence modulo a en algèbre (Alg. Ch.I). Nous verrons que l'espace topologique $\mathbb{T}$ est isomorphe au cercle $x^2+y^2=1$. $\mathbb{T}^2$ est isomorphe au tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$, d'où la dénomination

Le tore $\mathbb{T}$ est homéomorphe à l'espace quotient d'un intervalle fermé $[a,b]$ $(a<b)$ de $\mathbb{R}$ obtenu en identifiant ses extrémités. Il est compact, connexe, et localement connexe. On identifie parfois $\mathbb{T}$ avec $[a,b]$, le plus souvent $[0,1]$, muni de la topologie convenable (qui est bien entendu distincte de celle induite par $\mathbb{R}$).

Toute représentation continue du groupe topologique $\mathbb{R}$ dans lui-même est de la forme $x \to ax$ où $a \in \mathbb{R}$; c'est un automorphisme de $\mathbb{R}$ si $a \neq 0$. Par conséquent si G est un groupe topologique isomorphe à $\mathbb{R}$, il existe une représentation continue et une seule f_a de $\mathbb{R}$ dans G telle que $f_a(1)=a$, cette représentation est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur G, si a est distinct de l'élément neutre de G. En général un isomorphisme local d'un groupe topologique G à un groupe topologique G' ne peut pas se prolonger en une représentation (continue ou non) de G dans G'. Mais c'est toujours possible pour $G' = \mathbb{R}$, et <u>tout groupe connexe localement isomorphe à</u> $\mathbb{R}$ <u>est isomorphe à</u> $\mathbb{R}$ <u>ou à</u> $\mathbb{T}$.

<u>Mesure des grandeurs</u> (cf § 2) <u>Caractérisation topologique de</u> $\mathbb{R}$ <u>et</u> $\mathbb{T}$ (cf § 4)

A quelles conditions doit satisfaire une loi de composition interne et une relation d'ordre total sur un ensemble E pour que E soit isomorphe à une partie de $\mathbb{R}$ munie de la structure induite par l'addition et la relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$, et puisse donc servir à la "mesure des grandeurs " ?

Soit E un ensemble totalement ordonné possédant un plus petit élément ω ; soit I une partie de E telle que $\omega \in I$ et que les relations $x \in I$, $y \leqslant x$ entraînent $y \in I$; soit $(x,y) \longrightarrow xy$ une loi de composition sur E définie pour $x \in I$ $y \in I$. Supposons les axiomes suivants satisfaits :

(GR_I). ω est élément neutre ($\omega x = x\omega = x$ pour tout $x \in I$) et la loi de composition est associative (au sens suivant : chaque fois que $x \in I$, $y \in I$, $z \in I$, $xy \in I$ et $yz \in I$, alors $x(yz)=(xy)z$).

(GR_{II}) La relation $x < y$ entre éléments de I entraîne, pour tout $z \in I$ les relations $xz < yz$ et $zx < zy$.

(GR_{III}) L'ensemble des éléments $> \omega$ de I n'est pas vide et n'a pas de plus petit élément, et quels que soient les éléments x, y de I tels que $x < y$ il existe $z > \omega$ tel que $xz \leqslant y$.

(GR_{IV}) (axiome d'Archimède) Quels que soient $x \in I$, $y \in I$ tels que $x > \omega$ il existe un entier $n > 0$ tel que x^n soit défini et que $x^n > y$.

<u>Alors il existe une application f strictement croissante de I dans l'ensemble</u> $\mathbb{R}_+$ <u>des nombres réels</u> > 0 <u>telle que</u> $f(xy) = f(x) + f(y)$

chaque fois que $x \in I$ $y \in I$ $xy \in I$; en outre l'image $f(I)$ de I est dense par rapport à l'intervalle $[0, f(b)]$ de $\mathbb{R}$, b désignant un élément quelconque de I .

Remarquons que la loi de composition $(x,y) \to xy$ n'a pas été supposée commutative a priori, mais qu'elle l'est en conséquence des axiomes

Si en outre sont satisfaits les axiomes :

($GR_{III}a$) L'ensemble des éléments $> \omega$ de I n'est pas vide et n'a pas de plus petit élément, et quels que soient x et y dans I tels que $x < y$ il existe z dans I tel que $xz = y$ ("soustraction" des grandeurs)

(GR_{IVa}) Toute suite croissante d'éléments de I , majorée par un élément de I, admet une borne supérieure dans I .

Alors l'image $f(I)$ est en outre un intervalle de $\mathbb{R}$.

(Remarquons que si on postule GR_I, GR_{II}, GR_{IIIa} et GR_{IVa} , alors GR_{III} (trivialement) et aussi GR_{IV}, l'axiome d'Archimède, sont satisfaits).

Une des propriétés démontrées dans ce paragraphe permet d'établir une caractérisation purement topologique de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{T}$ parmi les groupes topologiques.

(Th. 1 et 2). Un groupe topologique G qui a un voisinage de l'élément neutre homéomorphe à un intervalle ouvert est localement isomorphe à Si G est connexe il est alors isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{T}$ (et par suite abélien).

Pour savoir alors auquel il est isomorphe il suffira de savoir s'il est compact (alors il est isomorphe à $\mathbb{T}$) ou non (alors il est isomorphe à $\mathbb{R}$). En particulier tout groupe topologique homéomorphe à $\mathbb{R}$ lui est aussi isomorphe.

Exponentielles et logarithmes (cf. § 4)

Les résultats précédents montrenr que le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels >0 est isomorphe au groupe additif des nombres réels (Th.1.4).

Donc, $a > o$ étant donné, il existe une représentation continue et une seule f_a de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que l'image de 1 soit a ; on la note a^x. On appelle ces applications les fonctions exponentielles. On a $1^x=1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $a \neq 1$ a^x est un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$; l'isomorphisme réciproque se note $\log_a x$ et s'appelle le logarithme de base a . De la définition ci-dessus de ces fonctions résultant immédiatement des identités bien connues telles que $a^{x+y} = a^x a^y$; $\log_a(xy)=\log_a x + \log_a y$, etc..

Toute représentation continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même est de la forme $x \to x^{\alpha}$.

Les fonctions exponentielles a^x pour $a \neq 1$ et les fonctions logarithmiques $\log_a x$ sont strictement monotones ; a^x et $\log_a x$ sont croissantes pour $a > 1$, décroissantes pour $0 < a < 1$. On peut les prolonger par continuité à $\overline{\mathbb{R}}$.

L'isomorphie des groupes topologiques $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ montre que pour qu'une famille (x_ι) de nombres réels finis et >0 soit multipliable il faut et il suffit que la famille $(\log_a x_\iota)$ soit sommable (a étant un nombre arbitraire >0 et $\neq 1$) et en outre $\prod x_\iota = a^{\sum_\iota \log_a x_\iota}$

De même pour qu'un produit infini $(1+u_n)$ de nombres réels finis et >0 soit convergent il faut et il suffit que la série $(\log a\,(1+u_n))$ soit convergente et on a $\prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n) = a^{\sum_{n=0}^{\infty} \log_a (1+u_n)}$. Nous verrons ultérieurement que les propriétés différentielles des logarithmes permettent aisément de retrouver les résultats donnés antérieurement sur les familles multipliables et les produits infinis convergents de nombres réels finis et >0

Chapitre VI. Espaces numériques et espaces projectifs.

L'espace numérique R^n (cf. § 1)

L'espace numérique à n dimensions R^n (droite numérique pour n=1, plan numérique pour n=2) est l'espace topologique produit de n espaces identiques à la droite numérique. (R^0 se réduit à un point ; pour $n > 0$ R^n a la puissance du continu). Les points de R^n à coordonnées rationnelles forment un ensemble dénombrable partout dense.

Un pavé ouvert (respectivement pavé fermé) de R^n est une partie de R^n qui est le produit de n intervalles ouverts (respectivement fermés) de R. Les pavés ouverts forment une base de la topologie de R^n. Ceux qui contiennent le point x forment un système fondamental de voisinages de x. Il en est de même des pavés fermés de R^n dont x est un point intérieur. Les pavés ouverts de R^n sont homéomorphes à R^n.

Un cube est un pavé dont les intervalles facteurs sont bornés et de longueurs égales (pour n=2 on dit un carré) ; la longueur commune est le côté du cube. Les cubes ouverts $K_n = \prod_{i=1}^{n} \left] x_i - \frac{1}{m}, x_i + \frac{1}{m} \right[$ forment, quand m parcourt l'ensemble des entiers positifs (ou une suite d'entiers > 0 croissant indéfiniment) un système fondamental dénombrable de voisinages de $X = (x_i)$. L'ensemble de ces cubes pris pour tous les points de R^n à coordonnées rationnelles forme une base dénombrable des ouverts de R^n.

R^n est un espace connexe et localement connexe ; les composantes connexes d'un ouvert non vide de R^n sont des domaines ; leur ensemble est dénombrable. R^n est localement compact, non compact pour $n \neq 0$. Pour qu'une partie de R^n soit relativement compacte (respectivement compacte) il faut et il suffit qu'elle soit bornée (respectivement bornée fermée).

Le groupe additif de l'espace numérique à n dimensions, qu'on note encore R^n est l'espace numérique muni de la structure de groupe topologique produit. Si $\mathcal{X} = (x_i)$ et $\mathcal{Y} = (y_i)$ on note additivement leur composé $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = (x_i + y_i)$, le groupe étant abélien. Sa structure uniforme de groupe abélien topologique admet le système fondamental dénombrable d'entourages constitué par les ensembles V_p des couples $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de points de $\mathbb{R}^n$ tels que $\operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i - y_i | \leqslant 1/p$, p entier > 0. Avec cette structure uniforme $\mathbb{R}^n$ est un <u>espace uniforme complet</u>.

Le groupe additif (au sens algèbrique) $\mathbb{R}^n$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ quand on prend pour loi externe $t(x_i) = (tx_i)$ $t \in \mathbb{R}$.

La topologie produit sur $\mathbb{R}^n$ est compatible avec sa structure vectorielle sur $\mathbb{R}$ on a aussi un espace vectoriel topologique qu'on appelle simplement l'<u>espace vectoriel</u> $\mathbb{R}^n$.

Si f est une application linéaire affine (resp. homogène) de R^n dans R^m c'est une application uniformément continue de R^n sur la variété linéaire affine (resp. homogène) $V=f(R^n)$. Si f est biunivoque (ou ce qui revient au même si la dimension p de V est égal à n) f est un homéomorphisme. Si en outre f est homogène c'est un isomorphisme de la structure vectorielle topologique de R^n sur celle induite pour R^m sur V.

Toute variété linéaire affine V à p dimensions de R^n (p entier > 0 et $\leqslant n$) est homéomorphe à R^n et si V est homogène sa structure vectorielle topologique induite est isomorphe à celle de R^n. C'est un sous ensemble <u>fermé</u> de R^n quand $p < n$ son complémentaire est partout deux dans R^n (généralisation si $f(x_1, \dots, x_n)$ est un polynome a coefficients réels, non identiquement nul, l'ensemble des points de R^n (satisfaisant à l'équation algebrique $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ " est un fermé dont le complémentaire est partout deux). Si $p = n-1$ (hyperplan) son complémentaire a deux composantes connexes les <u>demi plans ouverts</u> définis par l'hyperplan ce sont des ouverts. Leurs adhérences sont les demi plans fermés définis par l'hyperplan. Si $p < n-1$ son complémentaire est connexe.

NBR 004 88

Supposons toujours f biunivoque, si $n=1$ l'image de l'intervalle $[0,1]$, resp. $]0,1[$, resp. $[0,+\infty[$, resp. $]0,+\infty[$ de R est un <u>segment fermé</u>, resp. <u>segment ouvert</u>, resp. <u>demi droite fermée</u>, resp. <u>demi droite ouverte</u> de R^m. Un segment fermé est un ensemble compact, une demi droite fermée un ensemble fermé, mais un segment ouvert et une demi droite ouverte ne sont pas des espaces ouverts si $m > 1$. Les extrémités des segments sont $f(0)$ et $f(1)$, l'origine des demi droites est $f(0)$. La donnée de ses extrémités définit un segment ouvert (resp. fermé). La donné de son origine et de la droite qui la porte défini 2 demi droites ouvertes (resp. fermées). Si $n=m$ l'image du pavé f ouvert P défini par $|y_i P| =]0,1[$ resp. du pavé fermé $\bar{P}$ défini par $|y_i(P)| = [-1,+1]$ est un <u>parallelotope ouvert</u> resp. <u>fermé</u>. Le <u>centre</u> des parallelotopes est $f(0)$ qui sont dites <u>construit sur les vecteurs</u> $f(e_i)$ en désignant par e_i les éléments de la base canonique de R^n. Un parallelotope fermé (resp. ouvert) est un voisinage compact (resp. ouvert) de son centre. La donnée d'un point et d'un système de n vecteurs linéairement indépendants de R^n détermine uniquement le parallelotope fermé (resp. ouvert) ayant pour centre le point et construit sur le n vecteurs.

Si E est un <u>espace vectoriel</u> à n dimensions sur $\mathbb{R}$, toute base a_i définit une application linéaire biunivoque de $\mathbb{R}^n$ sur E $(x_i) \longrightarrow \sum x_i a_i$. Si on transporte sur E la topologie de $\mathbb{R}^n$, E se trouve muni d'une topologie compatible avec sa structure de groupe additif et pour laquelle la loi de composition externe est fonction continue des 2 variables. On démontre que cette topologie est indépendante de la base choisie (Elle peut être définie sans utiliser une base: on verra ultérieurement que c'est la seule topologie séparée sur E telle que $x - y$ et tx soient continues). C'est toujours d'elle qu'il s'agira quand on considérera une topologie sur E.

Si A est une algèbre de rang fini n sur $\mathbb{R}$, la topologie précédente sur A (considérée comme espace vectoriel à n dimensions) est aussi compatible avec sa structure d'anneau. Cela résulte de la propriété suivante : E, F, G étant 3 espaces vectoriels à un nombre fini de dimensions sur $\mathbb{R}$, toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Exemple : considérons l'anneau $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices à m lignes et n colonnes à éléments dans $\mathbb{R}$. C'est un espace à mn dimensions sur $\mathbb{R}$. Avec la topologie induite par $\mathbb{R}$ le produit XY de deux matrices $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ est une fonction continue de (X, Y). En particulier la topologie de l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est compatible avec sa structure d'anneau. En outre dans $\mathcal{M}_n(R)$ le groupe multiplicatif $\mathbb{L}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ensemble ouvert partout dense et la topologie induite sur cet ensemble est compatible avec sa structure de groupe. Remarquons qu'alors les deux structures uniformes, sur le groupe topologique $\mathbb{L}_n(\mathbb{R})$ sont distinctes.

Distance euclidienne ; boules et sphères (cf § 2)

Conformément aux définitions générales données en algèbre (Alg. ch. IX) on appelle distance euclidienne de deux points $x = (x_i)$ $y = (y_i)$ de $\mathbb{R}^n$ le nombre $d(x, y) = \left[\sum (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$. Rappelons-en les principales propriétés : $d(x, y) = 0$ équivaut à $x = y$. $d(y, x) = d(x, y)$, $d(tx, ty) = |t|\, d(x, y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$. Enfin on a l'inégalité triangulaire $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$ quels que soient x, y, z, dans $\mathbb{R}^n$. Il en résulte $d(x, y) \geqslant$ $\geqslant |d(x, z) - d(y, z)|$ et $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \leqslant d(x, y) \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$.

La distance $d(0, X)$ de X à l'origine se note $d(X)$ et s'appelle <u>norme euclidienne</u> de X, ou encore norme de X quand aucune confusion n'est à craindre et se note $\|X\|$; alors $d(X, Y) = \|X - Y\|$.

Le produit scalaire des vecteurs X, Y est $\langle X, Y \rangle = \sum x_i y_i$. Ces vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Deux variétés linéaires sont orthogonales si chaque vecteur de l'une est orthogonal à chaque vecteur de l'autre.

Les déplacements euclidiens sont les permutations de $\mathbb{R}^n$ qui laissent invariante la distance de deux points quelconques. Ce sont nécessairement des transformations linéaires affines. Celles qui sont homogènes et qui par conséquent laissent l'origine invariante sont les transformations orthogonales. Elles laissent invariante la norme de chaque point et le produit scalaire de deux vecteurs.

Nous allons indiquer ici quelques rapports de ces notions avec la topologie et la structure uniforme de $\mathbb{R}^n$. Remarquons d'abord que $d(X, Y)$ et $\|X\|$ sont des fonctions uniformément continues ; d'autre part que pour qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ soit borné il faut et il suffit que $\sup_{X \in A} \|X\| < +\infty$.

La <u>boule euclidienne fermée</u> (respectivement <u>ouverte</u>) à n dimensions de centre $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^n$, tels que $d(X_0, X) \leq r$ (respectivement $d(X_0, X) < r$). La <u>sphère euclidienne</u> à n-1 dimensions de cercle X_0 et de rayon r est l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $d(X_0, X) = r$. On dit <u>disque</u> et <u>cercle</u> pour boule à deux dimensions et sphère à une dimension. Pour un même nombre de dimensions les boules ouvertes (respectivement fermées) sont homéomorphes ; de même les sphères. Les boules ouvertes (ou fermées) de centre X_0 et de rayon $1/p$ forment un système fondamental de voisinages de X_0 quand p parcourt une suite d'entiers > 0

croissant indéfiniment. Une boule ouverte (respectivement fermée) est un ensemble ouvert (respectivement compact). L'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon ; la première est l'intérieur de la seconde. Une sphère est un ensemble compact, frontière des boules ouverte et fermée de même centre et même rayon. Toute boule ouverte est homéomorphe à l'espace numérique du même nombre de dimensions. L'espace $\mathcal{R}_n^* = \complement \{0\}$ dans $\mathcal{R}^n$ est homéomorphe au produit de la sphère S_{n-1} a n-1 dimensions par $\mathcal{R}$. La sphère S_{n-1} est homéomorphe à l'espace quotient de $\mathcal{R}_n^*$ par la relation d'équivalence dont les classes sont les demi droites ouvertes d'origine 0. Pour $n > 1$ S_{n-1} est homéomorphe à l'espace obtenu en rendant compact R^{n-1} par l'adjonction d'un point à l'infini, donc encore au quotient de la boule fermée à n-1 dimension S_{n-1} obtenu en identifiant tous les points de sa frontière S_{n-2}. En particulier S_1 est homéomorphe au tore $\mathcal{T}$. Pour $n > 1$ S_{n-1} est connexe et localement connexe et si on la considère comme espace topologique chacun de ses points admet un voisinage homéomorphe à $\mathcal{R}^{n-1}$.

Un <u>hémisphère</u> fermé (respectivement ouvert) de S_{n-1} est l'intersection de S_{n-1} avec un demi espace fermé (respectivement ouvert) déterminé par un plan diamétral de B_n ; il est homéomorphe à la boule fermée (respectivement ouverte) à n-1 dimensions.

Pour la démonstration des propriétés précédentes et d'autres analogues il est commode d'utiliser ces transformations telles que la <u>projection centrale</u> et la <u>projection stéréographique</u>. (cf. Algèbre)

<u>Espaces projectifs réels</u> (cf. § 3)

On définit en algèbre sur un corps K un espace projectif à gauche $P_n(K)$ comme quotient de K^{n+1} privé de l'origine, par la relation d'équivalence dont les classes sont les droites qui passent par l'origine.

On peut aussi identifier K^n à une partie de $\mathbb{P}_n(K)$, dont le complémentaire est l'hyperplan de l'infini, de façon que les variétés linéaires projectives de $\mathbb{P}_n(K)$ (images canoniques des sous-espaces vectoriels de K^{n+1} par la relation d'équivalence) aient pour trace sur K^n des variétés linéaires de K^n, et sur l'hyperplan à l'infini les variétés à l'infini de ces variétés linéaires.

Si K est le corps des réels la structure topologique de $\mathbb{R}^{n+1}$ définit par passage au quotient une structure topologique sur $\mathbb{P}_n(R)$ qui en fait un espace séparé, compact, connexe et localement connexe dont chaque point admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Cet espace est appelé <u>espace projectif réel</u> à n dimensions. Il est homéomorphe à la sphère S_n dont on identifie les points diamétralement opposés, et encore à la boule B_n dans laquelle on a identifié les points diamétralement opposés de S_{n-1}. Pour n=1 $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, appelé <u>droite projective réelle</u> est encore homéomorphe à S_1 et à $\mathbb{T}$ et aussi à l'espace $\tilde{\mathbb{R}}$ obtenu en "compactifiant $\mathbb{R}$" par l'adjonction d'un point à l'infini qu'on note " ∞ " sans signe (ne pas confondre avec la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$) (Par contre, pour $n > 1$ $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à S_n ni à $\mathbb{T}^n$). Pour n=2 $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ s'appelle <u>plan projectif réel</u>.

Les variétés linéaires projectives à p dimensions ($p \leqslant n$) de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sont homéomorphes à $\mathbb{P}_p(\mathbb{R})$. Dans leur étude on utilise le fait que les transformations linéaires projectives entre espaces projectifs réels $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ (images canoniques des transformations linéaires homogènes des espaces vectoriels $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{m+1}$ correspondants) sont continues, et en outre bicontinues si elles sont biunivoques L'adhérence dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ d'une variété linéaire de $\mathbb{R}^n$ et la variété projective engendrée (au sens de l'algèbre) par cette variété linéaire sont identiques.

Etant donnée une fonction numérique finie définie sur une partie E de $\mathbb{R}^n$ on peut la considérer comme une application d'une partie de $P_n(\mathbb{R})$ dans $P_1(\mathbb{R}) = \tilde{\mathbb{R}}$, et la prolonger alors par continuité en tous les points de l'adhérence de E dans $P_n(\mathbb{R})$. Dans le cas où la fonction est une fonction rationnelle d'une variable le prolongement s'obtient en donnant la valeur ∞ à la fonction aux points où le dénominateur s'annule, et il est identique à celui défini en algèbre (Alg. Ch.). La fonction homographique $\frac{ax+b}{cx+d}$ ainsi prolongée définit un homéomorphisme de $\tilde{\mathbb{R}}$. (Par contre il n'est pas toujours possible de prolonger par continuité une fonction rationnelle de $n \geqslant 2$ variables en tout point de $P_n(\mathbb{R})$, ni de $(\tilde{\mathbb{R}})^n$.

On définit en algèbre l'espace $P_{np}(K)$ des variétés linéaires projectives de $P_n(K)$, qu'on identifie avec le quotient de l'espace $L_{n+1,p+1}(K)$ des systèmes libres de p+1 points, ou encore de l'espace des matrices à p+1 lignes et n+1 colonnes, de rang p+1, par une relation d'équivalence convenable. On peut faire correspondre à une telle matrice un point de $P_h(K)$ ayant pour coordonnées homogènes (coordonnées plückériennes de la variété) les $h = \binom{p+1}{n+1}$ déterminants des matrices carrées de dimension p+1 que contient la matrice, correspondance qui est compatible avec la relation d'équivalence. Alors l'ensemble quotient est appelé la grassmannienne $G_{np}(K)$.

Si K est le corps topologique $\mathbb{R}$, les espaces numériques utilisés ont une structure topologique et on a par passage au quotient des structures topologiques (homéomorphes) sur $P_{np}(\mathbb{R})$ et $G_{np}(\mathbb{R})$, qu'on appelle alors respectivement l'<u>espace des variétés linéaires projectives réelles</u> de dimension p dans $P_n(\mathbb{R})$ et la <u>grassmannienne réelle</u> d'indices n et p. $P_{np}(\mathbb{R})$ est un espace séparé compact, connexe et localement connexe dont chaque point admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^{(p+1)(n-p)}$. $P_{np}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $P_{n,n-p-1}(\mathbb{R})$.

Chapitre VIII. Les groupes additifs $\mathbb{R}^n$

Sous-groupes et groupes quotients de $\mathbb{R}^n$ (cf § 1)

(Th. 1.1) Tout sous groupe discret G de $\mathbb{R}^n$ de rang p est engendré par un système libre de p points. Donc p est nécessairement $\leqslant n$ et G comme groupe topologique est isomorphe à $\mathbb{Z}^p$).

Dans les recherches préliminaires à la démonstration de cet important théorème on obtient cette proposition due à Kronecker : $\theta_1 \ldots \theta_n$ étant n nombres réels, pour que le système d'équations $|q\,\theta_i - p_i| \leqslant \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ait une solution en entiers p_i et q, quel que soit ε donné, avec $q\,\theta_i - p_i \neq 0$ pour au moins un i, il faut et il suffit que l'un au moins des θ soit irrationnel.

(Th. 2.1) Soit G un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^n$ de rang $r(G)$, $0 \leqslant r \leqslant n$ (c'est à dire contenant r vecteurs linéairement indépendants).
Il existe un plus grand sous espace vectoriel $V \subset G$ tel que pour tout sous espace vectoriel W supplémentaire de V, $W \cap G$ soit discret et G soit somme directe de V et de $W \cap G$. Notons $d(G)$ la dimension de W (dimension de G). G comme groupe topologique est donc isomorphe à $\mathbb{R}^{d(G)} \times \mathbb{Z}^{r(G)-d(G)}$.

Disons que deux points x, y de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux modulo 1 si $\langle x, y \rangle$ est entier, et que deux parties A, B de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonales modulo 1 si pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, x et y sont orthogonaux modulo 1. Soit G^* l'ensemble des points orthogonaux modulo 1 à un sous groupe G de $\mathbb{R}^n$. C'est un sous groupe de $\mathbb{R}^n$ qu'on appellera le sous groupe associé à G. Quel que soit le sous groupe G de $\mathbb{R}^n$ son sous groupe associé G^* est fermé et on a $(\overline{G})^* = G^*$ et $(G^*)^* = \overline{G}$. On a $r(G^*) = n - d(G)$ et $d(G^*) = n - r(G)$.

Un corollaire des propriétés précédentes est qu'<u>une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point X soit adhérent à un sous groupe G de $\mathbb{R}^n$ est que X soit orthogonal modulo 1 à l'ensemble des points</u> orthogonaux modulo 1 à G, proposition due substantiellement à Kronecker qui l'a énoncée pour un groupe $H = H(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ engendré par les n vecteurs d'une base canonique de $\mathbb{R}^n$ et par un nombre quelconque de vecteurs $\mathfrak{a}_i = (a_{ij})$ $1 \leqslant i \leqslant m$ $1 \leqslant j \leqslant n$, donnons-en seulement le cas particulier suivant pour que ce groupe H soit partout dense dans $\mathbb{R}^n$ il faut et il suffit que toute forme linéaire à coefficients entiers en $(x_1, \ldots, x_n)$ prenant des valeurs entières sur chacun des points $\mathfrak{a}_i =$) soit identiquement nul. Prenons j=1 on voit que les points tels que $H(\mathfrak{a})$ soit partout dense dans $\mathbb{R}^n$, sont partout denses dans $\mathbb{R}^n$ et qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le sous groupe $H(a)$ de $\mathbb{R}$ formés des nombres de la forme $p+aq$ p et q étant entiers, soit partout dense est que a soit un nombre irrationnel.

Du critère il résulte que si G_1 et G_2 sont deux sous groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ $(G_1+G_2)^* = G_1^* \cap G_2^*$, $(G_1 \cap G_2)^* = \overline{G_1^* + G_2^*}$.

Des propositions générales du Ch.III et des propriétés ci dessus il résulte que tout groupe quotient séparé de $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à un groupe produit $\mathbb{R}^h \times \mathbb{T}^k$ $(0 \leqslant h+k \leqslant n)$. L'espace produit $\mathbb{T}^n$, et par abus de langage le groupe topologique $\mathbb{T}^n$, est appelé <u>tore à n dimensions</u>. C'est un espace compact, connexe et localement connexe. Le groupe topologique $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, donc $\mathbb{T}^n$ et par conséquent $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ sont localement isomorphes à $\mathbb{R}^n$.

Tout sous groupe fermé de $\mathbb{T}^n$ est isomorphe à un groupe de la forme $\mathbb{T}^h \times F$ $(0 \leq h \leq n)$ où F est un groupe abélien fini tel que le plus petit nombre de groupes cycliques dont F est somme directe soit $\leq n-h$. En particulier tout sous groupe discret de $\mathbb{T}^n$ est un groupe abélien fini ; tout sous groupe fermé de $\mathbb{T}$ non identique à $\mathbb{T}$ est un groupe cyclique fini. Tout sous groupe quotient séparé de $\mathbb{T}^n$ est isomorphe à un groupe $\mathbb{T}^k$ $(0 \leq k \leq n)$. En particulier tout sous groupe quotient séparé de $\mathbb{T}$ non ~~sépar~~ réduit à l'élément neutre est isomorphe à $\mathbb{T}$. Plus généralement tout sous groupe fermé et tout groupe quotient séparé d'un groupe de la forme $R^p \times T^q \times Z^r \times F$ (F groupe abélien fini) est un groupe de la même forme.

On identifie souvent $\mathbb{T}^n$ avec l'espace quotient du cube $\mathcal{C}$ $0 \leq x_i \leq 1$ par la relation d'équivalence $x_i \equiv y_i$ modulo 1 (cube $\mathcal{C}$ dont on a "identifié les faces opposées"). Alors les résultats de Kronecker se traduisent comme suit : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point engendre un sous groupe discret de $\mathbb{T}^n$ est que ses coordonnées soient rationnelles. Si les coordonnées du point ne satisfont modulo 1 à aucune combinaison linéaire à coefficients entiers le point engendre un sous groupe partout dense de $\mathbb{T}^n$. Plus généralement une partie A de $\mathbb{T}^n$ engendre un sous groupe de $\mathbb{T}^n$ qui est partout dense dans la partie de $\mathbb{T}^n$ définie par l'ensemble des équations linéaires homogènes à coefficients entiers auxquelles satisfont simultanément modulo 1 tous les points de A .

Une fonction f définie dans $\mathbb{R}^n$ est dite <u>périodique</u> s'il existe $a \in R^n$ $a \neq 0$ tel que $f(x + a) = f(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors tout point a de $\mathbb{R}^n$ ayant cette propriété pour f est appelé une <u>période</u> de f . Les périodes d'une fonction périodique forment donc un sous groupe G de $\mathbb{R}^n$ non réduit à l'élément neutre. Lorsque f est une

une application périodique <u>continue</u> de $\mathbb{R}^n$ dans un espace topologique séparé alors le <u>groupe des périodes est un sous groupe fermé de</u> $\mathbb{R}^n$. Si V est le plus grand sous espace vectoriel contenu dans G alors f est constante sur chaque classe de $\mathbb{R}^n$ mod V. Donc f est déterminée par l'étude de ses valeurs sur un sous espace vectoriel W supplémentaire de V donc par l'étude des fonctions dont le groupe G des périodes est discret. Dans ce cas si ce groupe est de rang q on dit que f est <u>q-fois périodique</u> et tout système libre de q points ~~[illegible]~~ engendrant G est un <u>système principal de périodes</u> de f .

<u>Représentations continues de $\mathbb{R}^n$ et de ses groupes quotients</u> (cf §2)

Les applications linéaires et homogènes de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ sont évidemment des représentations continues de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$; ce sont les seules.

Une application continue f du voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ dans un groupe topologique G telle que $f(x+y)=f(x).f(y)$ pour tout couple x, y de points de V admet un prolongement et un seul en une représentation continue de $\mathbb{R}^n$ dans G . (Nous verrons plus tard que cette propriété de $\mathbb{R}^n$ s'étend à une catégorie générale de groupes topologiques : les groupes "simplement connexes"). En particulier un isomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ à G se prolonge uniquement en un homomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur un sous groupe ouvert de G .

<u>(Th. 1.2)</u>. <u>Tout groupe connexe G , localement isomorphe à</u> $\mathbb{R}^n$ <u>est isomorphe à un groupe</u> $\mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^{n-p}$ $(0 \leq p \leq n)$.

Toute représentation continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{T}^n$ s'obtient en composant une application linéaire homogène de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ avec l'application canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{T}^n$ identifié à $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Ce résultat est encore valable pour tout groupe quotient séparé $\mathbb{R}^n/H$ de $\mathbb{R}^n$, où H est un sous groupe fermé. Conséquences : la seule application continue de $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est l'application identiquement nulle. Tout isomorphisme de $\mathbb{T}^n$ dans lui-même est un automorphisme de $\mathbb{T}^n$ qui s'obtient par passage au quotient à partir d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même telle que sa restriction à $\mathbb{Z}^n$ soit un automorphisme de ce groupe. En particulier les seuls isomorphismes de $\mathbb{T}$ dans lui-même sont l'application identique et la symétrie $x \longrightarrow -x$.

<u>Sommes infinies dans les groupes</u> $\mathbb{R}^n$ (cf. § 3)

Une famille (x_ι) $\iota \in I$ de $\mathbb{R}^n$ ne peut être sommable que si l'ensemble des indices ι tels que $x_\iota \neq 0$ est dénombrable. On pourrait donc se ramener au cas où I est dénombrable.

<u>(Th. 1.3)</u> <u>Pour qu'une famille</u> (x_ι) <u>de points de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>soit sommable il faut et il suffit que la famille</u> $(\|x_\iota\|)$ <u>des normes euclidiennes des</u> x_ι <u>soit sommable dans</u> $\mathbb{R}$.

Une série de points de $\mathbb{R}^n$ est <u>absolument convergente</u> si la série des normes euclidiennes de ses termes est convergente. <u>Cette propriété est une condition nécessaire et suffisante pour que la série soit commutativement convergente.</u>

Chapitre VIII - Nombres complexes

Nombres complexes et quaternions (cf. § 1)

Les résultats démontrés en algèbre (Alg. Ch) sur les corps ordonnés (dont $\mathbb{R}$ est un cas particulier) permettent de montrer que le corps des nombres complexes $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ une racine du polynôme irréductible x^2+1 est algèbriquement fermé (théorème de d'Alembert-Gauss). On pourrait le démontrer dans le cadre de ce chapitre sans utiliser les résultats sur les corps ordonnés, et on en trouvera encore une démonstration dans le livre du traité consacré a la topologie algèbrique comme application de la notice de degré topologique. $\mathbb{C}$ est à une isomorphie près la seule extension algèbrique de $\mathbb{R}$ distincte de $\mathbb{R}$ ~~distincte de~~ et il n'existe pas de sous corps compris entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ distinct de ceux-ci.

Les éléments de $\mathbb{C}$ ou nombres complexes sont de la forme $Z = x + iy$; on note $x = \mathcal{R}(Z)$ $y = \mathcal{J}(Z)$, $\mathbb{R}$ étant identifié au sous corps de $\mathbb{C}$ formé par les nombres complexes tels que $\mathcal{J}(Z)=0$. Le seul automorphisme de $\mathbb{C}$ est l'application $Z \to \overline{Z} = x-iy$ (conjugué de Z). La norme algèbrique de Z est le nombre réel $Z\overline{Z} > 0$, $\sqrt{Z\overline{Z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ est appelé valeur absolue de Z . Elle est la norme euclidienne du point de $\mathbb{R}^2$ correspondant à Z quand on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'application $(x,y) \to Z = x+iy$. Cette identification définit sur $\mathbb{C}$ une topologie compatible avec sa structure de corps, et par conséquent une structure de corps topologique $Z \to \overline{Z}$ est un automorphisme de cette structure c'est le seul. Avec la topologie induite, les nombres complexes $\neq 0$ forment un groupe topologique : le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Il est isomorphe au produit $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{U}$ où $\mathbb{U}$ désigne le sous-groupe compact de $\mathbb{C}$ des nombres complexes de norme égale à 1 .

Les résultats sur les corps ordonnés montrent encore qu'il y a un seul corps non commutatif de rang fini sur $\mathbb{R}$ (à une isomorphie près) le corps des quaternions K sur $\mathbb{R}$, qui est l'algèbre de rang 4 sur $\mathbb{R}$ dont la table de multiplication est $i^2=j^2=k^2=-1$; $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$. On identifie K à $\mathbb{R}^4$, les vecteurs de la base canonique $1,i,j,k$, de K étant identifiés aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En transportant à K la topologie de $\mathbb{R}^4$ on obtient sur K une structure de corps topologique (non commutatif). Les quaternions $a+bi$ (a et $b \in \mathbb{R}$) forment un sous corps de K isomorphe à $\mathbb{C}$ auquel on l'identifie souvent (mais on pourrait évidemment remplacer i par j ou k). Nous avons ainsi un troisième exemple de corps topologique localement compact et connexe, les deux premiers étant $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. On peut démontrer qu'il n'y en a pas d'autre et que par conséquent $\mathbb{R}^n$ n'admet une structure de corps compatible avec sa topologie que pour $n=1,2$ et 4.

Rappelons que la norme algèbrique d'un quaternion $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ est le nombre $N(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (c'est le carré de la norme euclidienne de x) et on a $N(xy) = N(x)N(y)$. La topologie de K induit sur le groupe multiplicatif K^* des quaternions $\neq 0$ une structure de groupe topologique. Il est isomorphe au produit du sous groupe $\mathbb{R}_+^*$ et du sous groupe compact des quaternions de norme 1, représentés par les points de la sphère de centre origine et de rayon un dans $\mathbb{R}^4$ (on notera ce sous groupe S_3). On voit que S_n admet une structure de groupe compatible avec sa topologie pour $n=1$ et 4. On verra plus tard que ce sont les seules valeurs de n pour lesquelles cela est possible.

Mesure des angles. Fonctions trigonomètriques (cf §2)

(Th. 1.2) Le groupe topologique (multiplicatif) $\mathbb{U}$ des nombres complexes de valeur absolue 1 est isomorphe au groupe topologique (additif) des nombres réels modulo 1 . Le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes $\neq 0$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Cette isomorphie entraîne l'existence des racines de toute équation binôme $Z^m = a$ dans $\mathbb{C}$ (indépendamment du Th.1, et permet de démontrer directement ce théorème).

Il n'existe que deux isomorphismes distincts de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{T}$. L'image de i est dans l'un la classe modulo 1 de 1/4, dans l'autre celle de -1/4 . Nous désignerons par $e(x)$ l'homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ qui par passage au groupe quotient $\mathbb{T}$ engendre le premier de ces isomorphismes. On a donc identiquement $|e(x)| = 1$ $e(x+y) = e(x)e(y)$ $e(-x) = 1/e(x) = \bar{e}(x)$ et $e(x)$ est une fonction périodique de période principale 1 , $e(x+n) = e(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Le corps $\mathbb{R}$ étant ordonné on a pu (Alg. Ch.IX) y définir les demi droites et par conséquent l'angle $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ de deux demi-droites Δ_1 et Δ_2 comme la classe à laquelle appartient ce couple pour la relation d'équivalence : "il existe une similitude directe qui transforme Δ_1 en Δ'_1, Δ_2 en Δ'_2 " . L'ensemble A des angles de demi droites est muni d'une structure de groupe abélien noté additivement définie par $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) + (\widehat{\Delta_2, \Delta_3}) = (\widehat{\Delta_1, \Delta_3})$. En particulier $(\widehat{\Delta_1, \Delta_1}) = 0$ $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = -(\widehat{\Delta_2, \Delta_1})$. L'angle plat ϖ est la solution $\neq 0$ de l'équation $2\theta = 0$ dans A .

Pour tout nombre complexe Z on appelle amplitude et on note Am(Z) l'angle que fait la demi droite d'origine O passant par Z avec la demi droite des nombres réels $\geqslant 0$. L'application $Z \to \mathrm{Am}(Z)$ est une représentation du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sur le groupe additif A .

L'angle $\delta = Am(i)$ s'appelle **angle droit positif** ; c'est l'une des deux solutions dans le groupe A de l'équation $2\theta = \varpi$, l'autre étant $-\delta = \delta + \varpi$. Restreinte à $\mathcal{U}$,cette application est un isomorphisme de la structure de groupe de $\mathcal{U}$ sur celle de A ; elle permet de définir par transport une structure de groupe topologique sur A . Soit $\theta \to f(\theta)$ l'isomorphisme réciproque de A à $\mathcal{U}$. Par diffnition (Alg.Ch.IX) $\mathcal{R}(f(\theta))$ est le cosinus de θ et se note $\cos.\theta$; $\mathcal{J}(f(\theta))$ est le sinus de θ et se note $\sin \theta$. De leur définition il résulte immédiatement un certain nombre de formules importantes tells que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\cos(\theta+\theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'$ etc... Par définition la tangente de θ notée $\operatorname{tg} \theta$ est définie pour $\cos \theta \neq 0$ par $\operatorname{tg} \theta = \sin \theta/\cos \theta$; la cotangente de θ , notée $\operatorname{cotg} \theta$ est égale à $\cos \theta/\sin \theta$ pour $\sin \theta \neq 0$. On peut prolonger par continuité tg et Cotg dans $\tilde{R}$ en prenant : $\operatorname{tg}(\bar{\varpi}) = \operatorname{Cotg}(0) = \infty$; alors on a toujours $\operatorname{Cotg} \theta = 1/\operatorname{tog} \theta$.

Les fonctions $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\operatorname{tg} \theta$, $\operatorname{cotg} \theta$ qu'on vient de définir sur A s'appellent fonctions trigonomètriques d'angles. Il ne faut pas les confondre avec les fonctions trigonomètriques de nombres qu'on va bientôt définir.

Le groupe topologique des angles de demi droites étant isomorphe à $\mathcal{U}$ est isomorphe au tore $\mathcal{T}$. Donc tout homomorphisme de $\mathcal{R}$ sur A est de la forme $x \longrightarrow \vartheta(x/a)$ en posant $\vartheta(x) = Am(e(x))$, a étant un nombre positif arbitraire. Il correspond ainsi à tout angle de demi droites, θ , une classe de nombres réels modulo a qu'on appelle mesure de θ relativement à la base a . Par abus de langage tout nombre réel de cette classe est encore appelé une mesure de θ ; celle de ces mesures comprise dans l'intervalle $[0,a[$ étant la mesure principale. Une fois choisie la mesure, on dit parfois un angle de demi droites pour parler d'une mesure de cet angle, abus de langage qui n'a pas d'inconvénient si la base a reste fixe et si on se souvient que deux nombres réels congrus mod a correspondent au même angle de demi droites.

Si l'on compose les fonctions trigonométriques d'angles de demi droites $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\mathrm{tg}\,\theta$, $\mathrm{cotg}\,\theta$ définies sur A, avec l'homomorphisme $x \to \vartheta(x/a)$ de $\mathbb{R}$ sur A, les fonctions $\sin\vartheta(x/a)$, $\cos\vartheta(x/a)$, $\mathrm{tg}\,\vartheta(x/a)$, $\mathrm{cotg}\,\vartheta(x/a)$ ainsi obtenues s'appellent resp. le sinus, cosinus, tangente, cotangente du nombre réel x, relatif à la base a et se notent $\sin_a(x)$, $\cos_a(x)$, $\mathrm{tg}_a(x)$, $\mathrm{cotg}_a(x)$. On les appelle fonctions trigonométriques de nombres. Ce sont des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$; elles admettent a comme période ; le sinus et le cosinus (resp. la tangente et la cotangente) ont pour période principale a (resp. a/2).

Les identités sur les fonctions trigonométriques d'angles donnent des identités sur les fonctions trigonométriques de nombres. La variation des fonctions trigonométriques de nombres s'étudie aisément.

Etant données deux demi droites Δ_1, Δ_2 distinctes et de même origine P, la réunion de toutes les demi droites Δ d'origine P telles que les mesures principales y de $(\widehat{\Delta_1, \Delta})$ et x de $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ satisfassent à l'inégalité $0 \leq y \leq x$ s'appelle le secteur angulaire défini par Δ_1 et Δ_2. C'est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$; l'angle $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ de mesure x s'appelle l'ouverture du secteur. Un secteur est dit saillant si $x < a/2$, plat (ou demi plan fermé) si $x = a/2$, rentrant si $x > a/2$. Un secteur saillant est dit aigu si $x < a/4$, droit ou quadrant si $x = a/4$, obtus si $x > a/4$. La bissectrice du secteur est la demi droite Δ faisant avec Δ_1 un angle $y = x/2$.

On a aussi défini en algèbre la notion d'angle d'un couple (ordonné) de deux droites, $(\widehat{D_1, D_2})$ dans un espace à deux dimensions sur un corps de caractéristique $\neq 2$. C'est la classe du couple D_1, D_2 pour la relation d'équivalence sur les couples de droites non isotropes :

"il existe une même similitude directe qui transforme D_1 en D'_1 , D_2 en D'_2 " . L'angle d'un couple de droites de $\mathbb{R}^2$ est donc toujours défini car $\mathbb{R}^2$ ne contient pas de droites isotropes, -1 n'étant pas un carré dans $\mathbb{R}$. L'ensemble A_o des angles de droites est muni d'une structure de groupe abélien noté additivement, définie par $\widehat{(D_1,D_3)}=\widehat{(D_1,D_2)}+\widehat{(D_2,D_3)}$

Si à un angle de demi droites on fait correspondre l'angle des droites qui les portent (prises dans le même ordre), on définit un homomorphisme de A sur A_o. A_o est isomorphe au groupe quotient de A par le sous groupe $\{0, \varpi\}$. D'où la possibilité d'obtenir par transport une structure de groupe topologique sur A_o, et de définir la mesure d'un angle de droites relativement à une base. En analyse on utilise en général la mesure de base $a=2\pi$ qu'on peut définir par la condition (qu'on montrera réalisable) $\lim_{x \to 0} \frac{e(x/a)-1}{x} = i$. Alors par l'abus de langage déjà signalé, les angles étant identifiés avec leur mesure, on appelle quelquefois les angles de demi droites angles à $2k\pi$ près, les angles de droites angles à $k\pi$ près (k étant supposé entier rationnel).

Sommes et produits infinis de nombres complexes (cf. § 2)

Le groupe additif de $\mathbb{C}$ étant identique au groupe additif $\mathbb{R}^2$ la théorie des familles sommables et des séries dans $\mathbb{C}$ rentre dans l'étude générale faite pour $\mathbb{R}^n$. (Th. 1-2). Pour qu'une famille $(1+u_n)$ soit multipliable dans $\mathbb{C}$ il faut et il suffit que la famille $(|u_n|)$ soit sommable ; on le démontre à cette place dans le traité sans utiliser la fonction logarithme complexe non encore définie. Un produit infini de nombres complexes, de facteur général $1+u_n$ est dit absolument convergent si le produit de facteur général $1+|u_n|$ est convergent (ou, ce qui revient au même si la série $(|u_n|)$ est convergente). Cette propriété est une condition nécessaire et suffisante de convergence commutative.

Espaces numériques et espaces projectifs complexes (cf § 3)

La structure de corps de $\mathbb{C}$ définit dans $\mathbb{C}^n$ une structure d'espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$: espace numérique complexe à n dimensions (droite complexe pour n=1 , plan complexe pour n=2). De même elle définit une structure d'algèbre topologique sur $\mathbb{C}$ dans une algèbre de rang fini sur $\mathbb{C}$, une topologie dans l'espace projectif $P_n(\mathbb{C})$ (espace projectif complexe à n dimensions ; droite projective complexe pour n=1 , plan projectif complexe pour n=2), et aussi dans la grassmannienne $G_{np}(\mathbb{C})$ l'espace $P_{np}(\mathbb{C})$ des variétés linéaires projectives à p dimensions de $P_n(\mathbb{C})$. Ces structures donnent lieu à des notions et à des théorèmes tout à fait analogues à ceux valables pour les structures de même espèce définies à partir de $\mathbb{R}$.

Ainsi $\mathbb{C}^n$ est localement compact, connexe et localement connexe. $P_n(\mathbb{C})$ est compact, convexe et localement connexe, homéomorphe au quotient de la sphère S_{2n+1} (considérée comme plongée dans $\mathbb{C}^*_{n+1}$ identifié à $\mathbb{R}^*_{2n+2}$) par la relation d'équivalence induite sur elle par $\Delta_n(\mathbb{C})$ (les classes d'équivalence sont cette fois des ensembles homéomorphes à S_1). $P_1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à S_1 et à l'espace $\tilde{\mathbb{C}}$ obtenue en compactifiant $\mathbb{C}$ par adjonction d'un point à l'infini qu'on note ∞ . $P_{np}(\mathbb{C})$ est compact, connexe et localement connexe.

$\mathbb{C}^n$ peut être identifié avec $\mathbb{R}^{2n}$, il admet donc aussi une structure d'espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, de dimension 2n . On qualifiera de complexes les êtres (droite, plan, hyperplan, variété linéaire, application linéaire) définis à l'aide de la structure vectorielle complexe, pour les distinguer de ceux définies à l'aide de la structure vectorielle réelle sous jacente, qu'on qualifiera de réels. A toute application linéaire complexe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$

est une application linéaire réelle. Mais la réciproque est fausse, par exemple $z \rightarrow \bar{z}$ est une application linéaire réelle de $\mathbb{C}$ dans lui-même et non une application complexe.

$\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ peut être identifié avec la partie de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ formée des points admettant un système de coordonnées homogènes réelles. Les variétés linéaires projectives de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, sauf celles réduites à un point, ne sont jamais des variétés linéaires projectives de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

Des considérations analogues sont encore valables dans une large mesure pour les espaces K^n, $\mathbb{P}_n(K)$, $\mathbb{P}_{np}(K)$, $G_{np}(K)$ construits en prenant pour K le corps $\mathbb{K}$ des <u>quaternions</u>, et certaines s'étendent même en prenant des corps topologiques plus généraux.

Chapitre IX - Utilisation des nombres réels en topologie. Génération d'une structure uniforme par une famille d'écarts. Espaces uniformisables (cf. § 1).

Un <u>écart</u> sur un ensemble E est une application f de $E \times E$ dans l'intervalle $[0,+\infty]$ de la droite numérique achevée $\overline{R}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $f(x,x) = 0$ quel que soit $x \in E$

b) $f(x,y)=f(y,x)$ quels que soient $x \in E$ et $y \in E$.

c) $f(x,y) \leqslant f(x,z)+f(z,y)$ quels que soient $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$ (inégalité du triangle).

Une conséquence de c) est $|f(x,z)-f(y,z)| \leqslant f(x,y)$

Si f est un écart sur E il en est de même de af, quel que soit $a > 0$.

Si (f_ι) est une famille d'écarts $\sum_\iota f_\iota$ est un écart, de même $\operatorname{Sup}_\iota f_\iota(x,y)$, l'enveloppe supérieure de la famille, est un écart.

La <u>structure uniforme définie par un écart</u> f est celle qui admet comme système fondamental d'entourages la famille des ensembles $\overset{-1}{f}([0,a])$, où a parcourt l'ensemble des nombres réels > 0. Deux écarts sont <u>équivalents</u> s'ils définissent la même structure uniforme. Remarquons que si φ est une permutation de $[0,+\infty]$ telle que 1°) $\varphi(0)=0$ et φ est continue au point 0 ; 2°) φ est croissante dans $[0,+\infty]$ et strictement croissante dans un voisinage de 0 ; 3°) quels que soient $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ on a $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u)+\varphi(v)$; alors si f est un écart $\varphi \circ f$ est un écart équivalent à f. Par exemple $\operatorname{Inf}(f(x,y),1)$ est un écart équivalent à f, donc tout écart est équivalent à un écart fini. Les structures uniformes définies par deux écarts non équivalents peuvent avoir même topologie associée.

 108

La <u>structure uniforme définie par une famille</u> (f_ι) <u>d'écarts</u> est la borne supérieure des structures uniformes définies par les écarts de la famille. Deux familles d'écarts sont <u>équivalentes</u> si elles définissent la même structure uniforme.

Si la borne supérieure d'un nombre <u>fini</u> d'écarts appartenant à la famille appartient encore à la famille, celle-ci est dite <u>saturée</u> . Toute famille d'écarts est équivalente à une famille d'écarts saturée, qu'on obtient en adjoignant à la famille les bornes supérieures dont il vient d'être question. Une famille finie d'écarts est équivalente à la famille formée du seul écart : la borne supérieure des écarts de la famille.

Pour la structure uniforme $\mathcal{U}$ définie par les f_ι , les f_ι sont uniformément continues. C'est la moins fine des structures uniformes ayant cette propriété. Si $\mathcal{U}$ est définie par un seul écart f une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{U}$ soit séparée est que $f(x,y)=0$ soit équivalent à $x=y$; si $\mathcal{U}$ est définie par la famille (f_ι) c'est que si $x\neq y$ il y ait un ι tel que $f_\iota(x,y)\neq 0$; on dit alors que la famille d'écarts est <u>séparante</u> . Si on complète E pour la structure uniforme $\mathcal{U}$ supposée séparée les f_ι se prolongent par continuité au complété et les prolongements sont des écarts qui définissent la structure uniforme du complété.

Etant donné un entourage U d'une structure uniforme $\mathcal{U}$ on peut former une suite U_n telle que $U_0=U$, $\overset{3}{U}_{n+1}\subset U_n$. On a ainsi une famille fondamentale <u>dénombrable</u> d'entourages qui définissent une structure uniforme $\mathcal{U}_n$ moins fine que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$ est la borne supérieure des $\mathcal{U}_n$ quand U parcourt $\mathcal{U}$. <u>Toute structure uniforme admettant système fondamental dénombrable de voisinages peut être définie par un écart.</u> Donc (<u>théorème de Auttenden</u>) 1.1). <u>Toute structure uniforme peut être définie par une famille d'écarts</u>.

Soit une famille (f_i) d'applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$, les fonctions $|f_i(x)-f_i(y)|$ sont des écarts sur E et la structure uniforme qu'ils définissent est la moins fine des structures uniformes sur E rendant les f_i uniformément continus. Soit E un espace topologique, $\mathcal{U}^x$ la structure uniforme définie par les écarts $|f_i(x)-f_i(y)|$ f_i parcourant l'ensemble des applications continues de E dans $[0,1]$.

L'axiome O_{IV} (strictement plus fort que O_{III}).

O_{IV} quelque soit le point $x_0 \in E$ et le visinage V de x_0 il existe une application continue de E dans $[0,1]$ nulle en x_0 et égale à 1 sur $\complement V$, est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{U}^x$ soit compatible avec la topologie de E et pour que E soit uniformisable (Th. 2.1). Supposons E séparé, le complété $\tilde{E}$ de E pour $\mathcal{U}^x$ est compact (c'est même en un sens facile à préciser la "plus grande extension compacte de E. Appelons complètement régulier un espace séparé qui satisfait O_{IV} (ou ce qui revient au même séparé et uniformisable). Il est régulier mais la réciproque est fausse.

(Th. 3 et 4.1). Pour qu'un espace soit complètement régulier il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un sous-espace d'un espace compact, et même plus particulièrement a un sous espace du cube K^I, où K est l'intervalle compact $[0,1]$ et I un ensemble d'indice de puissance convenable.

Soit E un espace complètement régulier, la famille de tous les écarts sur E, continus sur $E \times E$ définit sur E une structure uniforme qui est la plus fine de toutes les structures uniformes compatible~~aux~~ avec la topologie de E. Elle est caractérisée par la propriété de rendre uniformément continues toutes les applications de E sur un espace uniforme arbitraire.

Th. 5.1 . Pour qu'une fonction numérique définie sur un espace topologique E et semi continues supérieurement (resp. inférieurement) sur E soit l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble des fonctions continues sur E est $\leqslant f$ (resp. $\geqslant f$) il faut et il suffit que E soit uniformisable.

Espaces métriques ; espaces métrisables (cf. § 2)

Une distance sur un ensemble E est un écart fini et séparant. On espace espace métrique un ensemble muni de la structure définie par la donnée d'une distance ; en particulier il a une structure uniforme et une structure topologique.

Une isomètrie ou application isométrique d'un espace métrique E sur un espace métrique E' est un isomorphisme de leurs structures métriques, c'est-à-dire une application biunivoque de E sur E' conservant les distances. C'est évidemment un isomorphisme des structures uniformes et topologiques sous-jacentes ; la réciproque est fausse.

Par analogie avec le cas de la distance euclidienne on appelle boule ouverte (resp. boule fermée, resp. sphère) de centre x et de rayon $a > 0$ l'ensemble des points d'un espace métrique dont la distance à x est $< a$ (resp. $\leqslant a$, resp. $= a$). Les boules ouvertes (resp. fermées) sont des ensembles ouverts (resp. fermés), les sphères sont des ensembles fermés. Les sphères et boules d'un espace métrique peuvent jouir de propriétés très différentes de celles des ensembles de même nom dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple deux boules ouvertes (resp. fermées) de même centre et de rayons différents peuvent être identiques (ainsi dans l'espace métrique réduit à un point). Mais ce n'est plus possible si au lieu du rayon on a considéré le "rayon propre" : borne supérieure de la distance d'un point de la boule au centre.

La distance $d(x,y)$ est une fonction uniformément continue de (x,y) sur $E \times E$.

La distance de deux parties A et B est le nombre $\delta(A,B) = \operatorname{Inf}_{x \in A, y \in B} d(x,y)$. La distance d'un point x à une partie A est le nombre $\delta(x,A) = \delta(\{x\},A) = \operatorname{Inf}_{y \in A} d(x,y)$. $x \in \overline{A}$ équivaut à $\delta(x,A)=0$, mais on peut avoir $\delta(A,B)=0$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. $\delta(x,A)$ est une fonction uniformément continue de x.

Le diamètre d'une partie non vide A est $\delta(A) = \operatorname{Sup}_{x \in A, y \in A} d(x,y)$. La notion d'ensemble petit d'ordre V_a pour une structure uniforme (cf Ch.II § 3) coïncide ici avec la notion d'ensemble de diamètre $\leq a$. Un ensemble est borné si son diamètre est fini ; condition équivalente : sa distance à un point arbitraire est finie. Toute partie précompact est bornée.

L'oscillation d'une fonction f définie sur un ensemble P et prenant ses valeurs dans un espace métrique E est $\delta(f(P))$. Si en outre P est une partie d'un espace topologique l'oscillation de f au point $x \in \overline{P}$ est le nombre $\omega(x ; f) = \operatorname{Inf} \delta(f(V \cap P))$, V parcourant les voisinages de x. C'est une fonction de x semi-continue supérieurement. Pour que la limite de f en x existe il faut et il suffit que son oscillation en ce point soit nulle. Pour les fonctions numériques finies ces définitions coïncident avec celles données au Ch. IV.

La distance sur un espace métrique peut être prolongée par continuité en une distance sur l'espace complété pour la structure uniforme sous-jacente à la métrique et cette distance prolongée est compatible avec la structure uniforme de l'espace complété.

Une métrique sur un ensemble E est compatible avec une structure uniforme (resp. une topologie) si elle définit sur E cette structure uniforme (resp. cette topologie). Une structure uniforme (resp. une une topologie) est métrisable s'il existe une métrique compatible avec cette structure uniforme (resp. cette topologie). <u>Th.(1.2). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure uniforme soit métrisable est qu'elle soit séparée et qu'elle admette un système fondamental d'entourages dénombrable</u>. Conséquence : une structure uniforme séparée définie par une famille dénombrable d'écarts est métrisable. <u>Remarque</u> : il peut exister des structures uniformes non métrisables compatibles avec la topologie d'un espace métrisable.

Une partie A d'un espace métrisable E est métrisable. (si $f(x,y)$ est une distance sur E la restriction de f à A est une distance sur A et définit la métrique <u>induite</u>, qui est compatible avec la structure uniforme et la topologie induites). Un produit fini ou infini dénombrable $\prod E_i$ d'espaces métrisables est métrisable. (si les f_i sont des distances sur les E_i, dans le cas fini $\operatorname{Max} f_i(x_i, y_i)$ ou $\sum f_i(x_i,y_i)$ ou $\left[\sum f_i(x_i,y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ sont des métriques (équivalentes) sur $\prod E_i$ compatibles avec la topologie et la structure uniforme produits ; dans le cas infini, on peut prendre $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f_i(x_i, y_i)$. Le produit d'une infinité non dénombrable d'espaces topologiques dont aucun n'est réduit à un point ne peut être métrisable, sa structure uniforme (resp. topologique) produit est strictement moins fine que les structures uniformes correspondantes définies par l'écart séparant $\operatorname{Sup}_i f_i(xy)$. Un espace quotient séparé d'un espace métrisable E n'est pas nécessairement métrisable, mais c'est vrai si E est compact.

Si un espace topologique admet une base dénombrable, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit métrisable est qu'il soit régulier. Si un espace est compact, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit métrisable est qu'il admette une base dénombrable. Un espace localement compact peut être métrisable sans admettre de base dénombrable. Notons que pour que la topologie d'un espace métrisable admette une base dénombrable il faut et il suffit qu'il contienne un ensemble dénombrable partout dense.

On ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante simple. Pour qu'un espace topologique soit métrisable, il est évidemment nécessaire qu'il ait les propriétés topologiques suivantes des espaces métriques : que sa topologie soit complètement régulière, que chaque point admette un système fondamental dénombrable de voisinages, et de plus que tout fermé (resp. ouvert) soit intersection (resp. réunion) d'une famille dénombrable de fermés (resp. ouverts). La dernière propriété entraîne d'ailleurs la précédente, mais la réciproque n'est pas vraie, et l'ensemble de ces 3 propriétés n'est pas une condition suffisante pour que l'espace soit métrisable.

Dans un espace topologique où chaque point admet un système fondamental dénombrable de voisinages, l'ensemble des filtres convergents est déterminé par l'ensemble des suites convergentes, car tout filtre convergent est plus fin qu'un filtre à base dénombrable (le filtre des voisinages des points limites) et tout filtre à base dénombrable est l'intersection des filtres élémentaires plus fins que lui. D'où la possibilité de substituer l'emploi des suites à celui des filtres dans ces espaces, en particulier dans les espaces métriques.

Dans un espace métrisable E, pour qu'un point x soit adhérent à une partie non vide A de E, il faut et il suffit qu'il existe une suite de points de A qui converge vers x. Pour qu'un espace métrique soit complet il faut et il suffit que toute suite de Cauchy soit convergente. Pour qu'un espace métrique E soit précompact, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de E par des ensembles de diamètre $\leqslant \varepsilon$. (Si on ajoute l'hypothèse que l'espace est complet, on obtient un critère de compacité pour un espace métrique).

Corollaire : un espace métrique précompact admet une base dénombrable. D'où le critère topologique de compacité applicable aux espaces métrisables : toute suite a au moins une valeur d'adhérence. Remarquons que cette propriété ne résulte pas de la seule existence d'une base dénombrable pour chaque filtre de voisinages.

Appendice : propriété des espaces métriques où la distance satisfait à l'inégalité du triangle "renforcée" : $d(x,y) \leqslant \mathrm{Max}(d(x,z)\ d(y,z))$.

Dans un tel espace E $d(x,y) \neq d(y,z)$ entraîne $d(xy)=\mathrm{Max}(d(xz),d(y,z))$ ("Tous les triangles sont isocèles"). En particulier si $x \neq z$, pour tout point y suffisamment voisin de x on a $d(yz) = d(xz)$. Soit $V_r(x)$ est la boule ouverte de rayon r et de centre x, c'est un ensemble à la fois ouvert et fermé. L'espace est donc totalement discontinu. Pour tout $y \in V_r(x)$ on a $V_r(y)=V_r(x)$. (La boule ouverte est identique à son adhérence et tout point de cette boule "peut être pris comme centre" de cette boule). La boule fermée $W_r(x)$ de rayon r et de contre x, est un ensemble à la fois ouvert et fermé (La boule fermée est donc identique à son intérieur). Si deux boules ont un point commun l'une d'elles est contenue dans l'autre. Les boules ouvertes distinctes de rayon r et dont le centre est contenu dans une boule fermée donnée de rayon $r' \geqslant r$ forment une partition de cette boule fermée. Signalons encore que pour qu'une suite soit une suite de Cauchy dans E il faut et il suffit que $d(x_n, x_{n+1})$ tende vers zéro avec $1/n$, et d'autre part que si E est compact l'ensemble des valeurs prises par $d(x_o,x)$, x_o fixe, x parcourant E est une partie dénombrable de $[0,+\infty[$ dont tous les points sont isolés à l'exception éventuelle de l'origine.

L'espace métrique discret dont tous les points sont à distance égale les uns des autres est un exemple trivial de tels espaces. Mais on peut en former qui n'ont aucun point isolé, exemple le sous espace de R formé de tous les points de l'intervalle $[0\ 1]$ représentés par les développements triadiques $\sum_{0}^{\infty} a_n/3^n$ $a_n \neq 1$ quel que soit n (ensemble triadique de Cantor), autres exemples, la droite rationnelle Q ou la droite p-adique Q_p avec la métrique Q_p (cf Ch.IX). Tout espace métrique compact sans points isolés et satisfaisant à l'inégalité du triangle "renforcée" est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor et toute partie dénombrable partout dense d'un tel espace est homéomorphe à la droite rationnelle, propriétés qui s'étendent d'ailleurs à tous les espaces métrisables compact sans points isolés et totalement discontinus. Un tel espace est donc homéomorphe à son "carré" $E \times E$.

Groupes et anneaux métriques (cf. § 3)

Un écart f sur un groupe topologique G noté multiplicativement est glissant à gauche (resp. à droite) si quels que soient x,y,z dans G on a $f(zx, zy) = f(x,y)$ (resp. $f(xz, yz) = f(x,y)$).

Sur tout groupe topologique G on peut former une famille d'écarts glissants à gauche (resp. à droite) qui définissent une structure uniforme gauche (resp. droite) de G . (ils peuvent être supposés glissant des 2 côtés si les structures uniformes à droite et à gauche sont confondues). Si on la prolonge au complété $\widehat{G}$ de G , supposé séparé, si ce complété existe, elle est encore glissante et définit la structure uniforme de $\widehat{G}$.

Pour que la topologie d'un groupe G soit métrisable il faut & il suffit que G soit séparé et que l'élément neutre possède un système fondamental dénombrable de voisinages. Alors la structure uniforme gauche (resp. droite) de G peut être définie par une distance glissante à gauche (resp. à droite). On dit alors que le groupe est métrisable.

Si G est un groupe métrisable, tout groupe quotient séparé G/H de G est métrisable. Si en outre G est complet, G/H est complet.

Une valeur absolue ou valuation multiplicative sur un corps K est une application $x \to |x|$ de K dans $\mathbb{R}_+$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $|x| = 0$ est équivalent à $x = 0$

b) $|xy| = |x| . |y|$ quels que soient x et y

c) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ quels que soient x et y .

K a alors une structure de corps valué . Alors $d(x,y) = |x-y|$ est une distance glissante sur le corps K et la valeur absolue est une représentation du groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ dans K dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$. La distance $|x-y|$ est compatible avec la structure de corps de K qui est donc un corps topologique. Deux valuations sont équivalentes si elles définissent sur le corps la même structure uniforme et par conséquent la même structure de corps topologique ; exemple : une valuation quelconque $|x|$ et la valuation $|x|^\alpha$ $0 < \alpha < 1$.

Les valeurs absolues déjà définies sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et K rentrent dans la définition générale. Sur un corps quelconque K , si on pose $|0| = 0$ et $|x| = 1$ pour tout $x \neq 0$ on obtient une valuation dite impropre qui définit sur K la topologie discrète. Une valuation non impropre est dite propre . Sur un corps à un nombre fini d'éléments la seule valuation est la valuation impropre. Sur le corps des rationnels on démontre (théorème d'Artin) que toute valuation propre est de la forme $|x|^\alpha$, où $|x|$ est la valeur absolue ordinaire, et α un nombre $\leqslant 1$ et > 0, ou bien de la forme $|p|^{v_p(x)}$ où p est un nombre premier qui caractérise la valuation et $v_p(x)$ l'exposant > 0 , < 0 ou $= 0$ avec lequel p figure dans la représentation réduite de x comme produit de puissances de nombres premiers. Dans le premier cas la valuation donne à $\mathbb{Q}$ la structure uniforme et topologique de la droite rationnelle, dans le second cas celle de la droite rationnelle p-adique.

Un corps valué est archimédien si l'ensemble des $|n\,a|$ où n parcourt $\mathbb{Z}$ n'est pas borné quel que soit le choix de $a \neq 0$, ce qui implique que le corps a sa caractéristique non nulle, non archimédien dans le cas contraire. Pour une valuation non archimédienne deux éléments permutables satisfont à "l'inégalité du triangle renforcée" : $|x+y| \leqslant \max(|x|,|y|)$.

L'anneau complété $\hat{K}$ d'un corps valué par une valeur absolue $|x|$ est un corps, le corps complété du corps valué, et la fonction $|x|$ se prolonge par continuité en une valeur absolue sur $\hat{K}$ qui définit la structure uniforme et la topologie de $\hat{K}$. De ce point de vue le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue ordinaire est la droite numérique, pour la valeur absolue p-adique le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$. Un corps valué archimédien complet est isomorphe au corps des réels, au corps des complexes ou au corps des quaternions sur les réels (Théorème d'Ostrowsky). Dans un corps valué complet non archimédien de caractéristique $\neq 0$, l'adhérence K de son sous corps premier est isomorphe à $\mathbb{Q}_p$ pour un choix convenable de p, mais il se peut que le corps donné soit une extension transcendante de K.

Etant donné un espace vectoriel E (à gauche par exemple) sur un corps K valué par une valuation propre notée $|x|$, on appelle norme sur E une application $x \longrightarrow p(x)$ de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que

a) $p(x)=0$ équivaut à $x = 0$

b) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ quels que soient x et y dans E

c) $p(tx) = |t|\,p(x)$ quels que soient $t \in K$ et $x \in E$.

Muni de cette norme E est un <u>espace normé</u> sur le corps valué K .
Exemple : la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ en fait un espace normé.
La distance $d(x, y) = p(x - y)$ est une distance glissante sur le groupe abélien additif E , elle y définit une structure uniforme compatible avec la structure d'espace vectoriel, et fait de celui-ci un espace vectoriel topologique sur K .

Deux normes sur un espace vectoriel E par rapport à un <u>même</u> corps valué K sont <u>équivalentes</u> si elles définissent la même topologie (donc la même structure uniforme) sur E . (Sur un même corps K considéré comme espace vectoriel par rapport à lui-même deux valuations équivalentes sont deux normes définissant la même topologie sur K mais ne sont pas deux normes équivalentes). Pour que deux normes $p(x)$, $q(x)$ soient équivalentes il faut et il suffit qu'il existe deux nombres $a>0$ et $b>0$ tels que pour tout $x \in E$ on ait $ap(x) \leq q(x) \leqslant bp(x)$. Ainsi $(\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, Sup $|x_i|$ et Max$|x_i|$ sont trois normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Quand on utilise une seule norme sur un espace vectoriel on la désigne souvent par $\| x \|$.

Si on complète un espace normé (ce qui implique qu'on complète le corps des scalaires) et si on prolonge par continuité la norme on a une structure d'espace normé complété.

Sur l'espace vectoriel quotient E/H d'un espace vectoriel normé E par un sous espace vectoriel fermé H la norme $\| \dot{x} \| = \operatorname{Inf}_{x \in \dot{x}} \| x \|$ définit la topologie quotient de E par H .

Soit (E_ι) une famille d'espaces normés par rapport à un même corps valué K , dont aucun n'est réduit à l'origine ; la structure d'espace vectoriel produit par rapport au corps topologique K sur $\prod E_\iota$ est compatible avec une norme par rapport à la valuation sur K si et seulement si l'ensemble d'indices I est dénombrable. Si I est fini

 119

on peut prendre pour norme $\operatorname{Max} \|x_i\|$ (ou $\sum \|x_i\|$ ou $(\sum \|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$ qui lui sont équivalentes). Si I est dénombrable, on peut l'identifier à $\mathbb{N}$ et prendre pour norme $\sum \|x_n\| 2^{-n}$.

(Th. 1.3) Pour qu'une fonction multilinéaire $f(x_1, x_n)$ (variables et valeur étant dans des espaces normés par rapport à un même corps valué K) soit continue il faut et il suffit qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que l'on ait, quels que soient $x_1 \dots x_n$

$$\|f(x_1, \dots x_n)\| \leq a \ \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

Une famille de points d'un espace normé est dite absolument sommable si la famille des normes des points est sommable dans $\mathbb{R}$. Une série est dite absolument convergente si la série des normes est convergente dans $\mathbb{R}$. Dans un espace normé complet toute famille absolument sommable est sommable ; toute série absolument convergente est convergente et même commutativement convergente. Les réciproques sont inexactes en général. Pour qu'elles soient valables, il faut et il suffit que l'espace ait la propriété suivante : il existe un $a > 0$ tel que pour toute famille finie $(x_i)_{i \in J}$ de points de l'espace on ait $\sum_{i \in I} \|x_i\| \leq a \sup_{J \subset I} \|\sum_{i \in J} x_i\|$.

Soit A une algèbre sur un corps valué commutatif K dont la valuation notée $|x|$ est propre. On dit qu'une norme $p(x)$ sur A (A étant considéré comme espace vectoriel sur K) est compatible avec la structure d'algèbre, qui prend alors le nom d'algèbre normée si la topologie définie sur A par la norme est compatible avec la structure d'anneau de A.

Exemples : sur l'anneau des matrices carrées d'ordre n $\mathcal{M}_n(K)$ sur un corps valué K dont la valuation est propre, la norme $\|x\| = \sup_{ij} |x_{ij}|$; sur l'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des applications bornées d'un ensemble E dans K la norme $p(f) = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Dans une algèbre normée on a $p(x \cdot y) \leqslant ap(x)\,p(y)$ a étant une constante > 0 convenable, donc en prenant la nouvelle norme $\|x\| = ap(x)$ équivalente à la première on a $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

L'algèbre topologique quotient par un idéal bilatère fermé devient une algèbre normée pour la norme $\|\dot{x}\| = \operatorname{Inf}_{x \in \dot{x}} |x|$. L'algèbre topologique produit d'un nombre fini d'algèbres normées admet pour norme $\|x\| = \sup_{i \in I} \|x_i\|$.

Toute algèbre normée séparée se prolonge (uniquement) en une algèbre normée complète sur le corps valué complété.

Dans le reste du paragraphe nous supposons que l'algèbre a un élément unité e ; alors l'application $t \to te$ est un isomorphisme de la structure de corps topologique de K sur un sous-corps de l'algèbre ; on a nécessairement $\|e\| \geqslant 1$ (si $\|e\| = 1$, $\|te\| = |t|$ et on peut identifier sans inconvénient K à Ke)

Le groupe des éléments inversibles de A a sa structure de groupe compatible avec la topologie induite par celle de A . On utilise pour le démontrer la propriété : x inversible et $\|x - e\| < 1$ entraîne $\sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n$ est convergente, et on a $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n$; et réciproquement si cette série converge et si x est inversible, la somme de la série est x^{-1}. On a ici un exemple d'emploi des "séries de puissances" dans une algèbre . Leur théorie, principalement dans le corps des réels ou des complexes, sera développée dans le livre X consacré aux fonctions analytiques.

Si l'algèbre normée A est en outre complète le groupe G de ses éléments inversibles est un ensemble ouvert dans A et G est un groupe complet (pour chacune de ses structures uniformes). En particulier dans un corps valué complet le groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ est un groupe complet.

Appendice : Propriétés des corps p-adiques (cf Ch.III § 5, exerc. 22 à 35, Ch.VI exerc.16, Appendice Ch.IX).

Le corps des nombres p-adique Q_p muni de sa valeur absolue que nous noterons $|x|_p$ jouit des propriétés signalées plus haut pour les espaces métriques où est satisfaite l'inégalité triangulaire "renforcée" ; en particulier il est totalement discontinu. Le résultat relatif aux suites se traduit ici en terme de séries sous la forme suivante : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de nombres p-adiques converge et que la valeur absolue du terme général tende vers zéro. En outre toute série convergente est commutativement convergente.

D'autre part Q_p est localement compact et toute partie bornée y est relativement compact. L'ensemble Z_p des entiers p-adiques (qui sont définis par la condition $|x|_p \leqslant 1$) est un sous groupe compact du groupe additif Q_p et Z est partout dense dans Z_p. L'ensemble des unités p-adiques (définies par $|x| = 1$) est un sous-groupe compact du groupe multiplicatif Q_p^* des p-adiques $\neq 0$. L'ensemble des entiers p-adiques tels que $|x|_p < 1$ est un idéal (maximal) de Z_p que nous noterons π et qui est l'idéal principal de Z_p engendré par p. Tout idéal de Z_p, et tout sous groupe compact du groupe additif Q_p est une puissance de π. Le groupe additif quotient π^m/π^n est isomorphe à $Z/(p^{m-n})$.

Tout nombre p-adiques x peut être mis d'une et d'une seule manière sous la forme $x = p^h \times \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ où k est un entier > 0 et où les a_n sont pris parmi les nombres entiers $0, 1, \ldots, p-1$. Si $x \in Z$ h est $\geqslant 0$ et la série a un nombre fini de termes non nuls, si $x \in Q$ la suite des a_n est "périodique" ; les réciproques sont vraies.

Le corps Q_p n'est pas algèbriquement fermé. Sa ~~xxxxxx~~ valuation se prolonge d'une et d'une seule manière à ses extensions algèbriques (si ξ satisfait à une équation irréductible $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ à coefficients dans Q_p et irréductible dans Q_n, il faut prendre $|\xi|_p = |a_n|_p^{\frac{1}{n}}$), les extensions algèbriques finies de Q_p sont encore localement compactes, toute partie bornée y est relativement compacte, et ils jouissent de propriétés analogues à celle de Q_p. L'extension algèbriquement fermée minimale de Q_p est une extension infinie, qui en tant qu'espace normé n'est pas complet. Si on la complète on a encore une extension algèbriquement fermée de Q_p, qui n'est plus minimale et qui n'est pas localement compacte. On voit qu'il n'y a rien d'analogue au passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C} = R(i)$, Q_p n'est pas un corps (totalement) ordonné et d'ailleurs pour un choix convenable de p, le polynome x^2+1 n'est pas irréductible dans Q_p (le polynome $x^{p-1}-1$ se décompose totalement dans Q_p). Plus généralement il y a une infinité de polynomes à coefficients rationnels irréductible dans Q qui sont réductibles dans Q_p. Par exemple pour que x^2-a se décompose dans Q_p il suffit que $|-a|_p < 1$.

Beaucoup de théories qu'on développe pour les corps des réels ou des complexes ont un développement "analogue ou plutôt apparenté dans Q_p et dans ses extensions algèbriques. Par exemple on peut définir des fonctions exponentielles logarithmiques, trigonomètriques dont l'argument et la valeur sont des nombres de Q_p et qui jouissent des mêmes propriétés formelles que celle définie avec les nombres réels. Mais on n'a pas à sa disposition un théoreme aussi fort que celui des "groupes à un paramètre" et ces fonctions p-adiques ne sont associées qu'à des isomorphismes de sous-groupes de ceux des groupes additifs ou multiplicatifs qu'on considère dans la théorie pour les nombres réels.

De même on peut considérer "l'espace p-adique" à n dimensions $(Q_n)^n$ avec la norme $\|x\| = \max|x_i|_p$. Il est totalement discontinu ; localement compact, toute partie bornée y est relativement compacte. Dans l'étude de ses sous groupes fermés et des théorèmes "d'approximation diaphantiennes" on utilise une notion "d'orthogonale modulo Z_p" $\langle u\, x\rangle \equiv 0 \pmod{Z_p}$ (et de groupe,"associés p-adiquement" analogue a celle utilisée dans R^n).

La topologie de Q_p^n, par passage au quotient définit une topologie sur $P_n(Q_p)$, l'<u>espace projectif p-adique à n dimensions</u> qui est alors compact. Remarquons qu'une propriété du type tout point de $P_n(Q_p)$ admet un voisinage homéomorphe à un voisinage de l'origine dans Q_p^n perd tout intérêt du fait que Q_p^n et Q_p^m admettent des voisinages de l'origine homéomorphe pour m et n quelconques (ce qui n'a pas lieu pour R^n et R^m comme nous le verrons plus tard). Ce seront des isomorphismes locaux pour des structures plus riches que la structure topologique qui seront significatifs.

<u>Espaces normaux</u> (cf § 4)

Un espace topologique E est <u>normal</u> s'il est séparé et s'il vérifie en outre l'axiome

(OV). <u>Quels que soient les ensembles fermés sans point commun A et B dans E , il existe une application continue de E dans $[0,1]$ égale à zéro sur A et à 1 sur B</u> .

Un espace normal est en particulier un espace complétement régulier mais la réciproque n'est pas vraie. On peut former un axiome équivalent à (O_V) et ne faisant pas intervenir R comme ensemble auxiliaire :

(O'_V) Quels que soient les ensembles fermés sans point commun A et B dans E il existe deux ensembles ouverts sans point commun U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

On peut encore l'exprimer sous la forme suivante :

(O''_V) Quels que soient l'ensemble fermé A et le voisinage ouvert V de A, il existe un voisinage ouvert W de A tel que $\overline{W} \subset V$.

Tout espace compact est normal. Un espace localement compact est "localement normal" c'est-à-dire admet un voisinage qui est un sous-espace normal, mais n'est pas nécessairement normal ; on est assuré qu'il est normal s'il est "dénombrable à l'infini" c'est-à-dire s'il est réunion dénombrable d'ensembles compacts.

Un espace métrisable est normal. Mais la condition de normalité, même jointe aux conditions nécessaires indiquées au § 2, ne constitue pas un système de conditions suffisantes pour qu'un espace topologique soit métrisable.

Toute partie fermée d'un espace normal est un sous espace normal mais ce n'est pas vrai d'une partie quelconque. Enfin le produit de deux espaces normaux n'est pas toujours normal.

Th. d'Urysohn (4). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace E soit normal est que quels que soient l'ensemble fermé A de E et la fonction numérique f (finie ou non) définie et continue dans A, il existe un prolongement de la fonction à l'espace tout entier qui soit une application continue de E dans $\overline{R}$ (si f est finie, on peut supposer le prolongement fini).

Soit (A_i) un recouvrement ouvert fini d'un ensemble fermé F d'un espace normal ; il existe un recouvrement ouvert fini (B_i) de F tel que $\overline{B}_i \subset A_i$.

Appelons partition continue de l'unité sur un espace topologique E toute famille finie de fonctions continues définies sur E et dont la somme est partout égale à 1 . Quel que soit le recouvrement ouvert fini (A_i) d'une partie fermée P d'un espace topologique normal, il existe une famille finie de fonctions numériques continues sur E (f_i), telles que $f_i(x)=0$ en dehors de A_i et que la restriction des f_i à P forme une partition continue de l'unité sur P .

Un espace est complètement normal si tous ses sous espaces sont normaux. Propriété caractéristique : si A et B sont deux parties telles que $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ il existe deux ouverts U et V tels que $U \supset A$, $V \supset B$, $U \cap V = \emptyset$.

Toute partie d'un espace complètement normal est complètement normale. Tout espace régulier ayant une base dénombrable, ou ce qui revient au même tout espace métrisable ayant une base dénombrable est complètement normal.

Appendice : Définition d'une structure uniforme par une famille de recouvrement. Etant donné un ensemble E , $R = (A_j)$ un recouvrement de E. Associons leur l'ensemble $U_R = \bigcup_j A_j \times A_j$ dans ExE . Si R est une partition de E . L'R constitue un système fondamental d'entourage d'une structure uniforme sur E , qui n'est séparée que si chaque classe se réduit à un élément. Soit $\mathcal{R}_\iota$ une famille de recouvrement de E , $\mathcal{U}_\iota$ les ensembles de E x E associés et ces recouvrements. Si les u forment un système fondamental d'entourage a une structure uniforme sur E on dit que la famille est uniformisante. Toute structure uniforme peut être définie à l'aide d'une famille uniformisante de recouvrements ouverts (resp.fermés)

Etant donné un espace topologique séparé E pour que la famille des recouvrements ouverts soit une famille uniformisante de recouvrements il faut que l'espace soit normal et s'il en est ainsi cette "structure uniforme des recouvrements ouverts finis" est compatible avec la

 126

la topologie de E , elle est identique à la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues toutes les applications continues de E dans $[0,1]$, considérée au § 1 .

Espaces de Baire (cf. §5)

Une partie A d'un espace topologique E est un ensemble rare si l'extérieur de A est partout dense. Il est équivalent de dire que l'adhérence de A n'a pas de point intérieur (ou qu'elle ne contient aucun ouvert non vide). Exemples : la partie vide ; toute partie réduite à un point non isolé ; la frontière d'un ensemble fermé ; dans $\mathbb{R}^n$ toute variété linéaire à $p < n$ dimensions.

Pour que A soit rare, il faut et il suffit que $\bar{A}$ le soit. Toute partie d'un ensemble rare est rare. Tout point d'un ensemble rare est point frontière de l'ensemble, inversement tout ensemble fermé contenu dans sa frontière est rare. La réunion d'un nombre fini d'ensembles rares est rare.

Une partie B est dite rare relativement à une partie $A \supset B$ si elle est rare dans le sous espace A ; si A est un ouvert elle est encore rare dans E .

On appelle ensemble maigre la réunion dénombrable d'ensembles rares. Un ensemble maigre peut être partout dense et même identique à l'espace tout entier (exemple : si E est dénombrable sans point isolé). Un ensemble est maigre relativement à un ensemble A qui le contient s'il est maigre dans le sous espace A (si A est ouvert, il est encore maigre dans E).

Un espace topologique E est inépuisable s'il n'est pas maigre dans lui-même (autrement dit s'il n'est pas réunion dénombrable d'ensembles rares dans E). Propriété équivalente : toute famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses a une intersection non vide. Dans un espace

~~métrix~~ inépuisable, tout ensemble non maigre (en particulier le complémentaire d'un ensemble maigre) est un sous espace inépuisable. Par contre un sous espace inépuisable A de E peut être un ensemble maigre dans E et même rare dans E . Exemple : une variété linéaire à p n dimensions dans $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'un espace topologique est un <u>espace de Baire</u> si tout ouvert est un sous espace inépuisable. Propriétés équivalentes : toute famille dénombrable d'ouverts a une intersection partout dense ; ou encore : tout ensemble maigre a un intérieur vide, autrement dit le complémentaire d'un ensemble maigre est partout dense.

Tout sous-espace ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire. Tout point d'un espace de Baire admet un système fondamental de voisinages formé de sous espaces de Baire, et réciproquement si tout point d'un espace topologique E possède un voisinage qui soit un sous-espace de Baire, E est un espace de Baire. Dans un espace de Baire le complémentaire d'un ensemble maigre est un sous-espace de Baire.

<u>Théorème de Baire (1.5)</u>. <u>Tout espace localement compact est un espace de Baire</u>. <u>Tout espace topologique homéomorphe à un espace métrique complet est un espace de Baire</u>.

Remarquons qu'il existe des espaces de Baire ne rentrant dans aucune des catégories précédentes, en particulier des espaces de Baire qui ne sont ni métrisables, ni localement compacts ; qu'il existe des espaces de Baire métrisables, tel qu'aucune métrique compatible avec leur topologie n'en fasse des espaces métriques complets.

<u>Th. (2.5)</u>. <u>Soient E un espace inépuisable, (f_ι) une famille de fonctions numériques continues définies dans E</u> , <u>telles que pour tout</u> $x \in E$ $\operatorname{Sup}_\iota f_\iota(x) < +\infty$. <u>Il existe alors une partie ouverte non vide A de E dans laquelle la famille (f_ι) est uniformément majorée</u>.

- - - - - - - - - - - - - - -