COTE : BKI 02-4.7

LIVRE II
ALGEBRE
CHAPITRE IX (ETAT 1)
GEOMETRIES ELEMENTAIRES

Rédaction n° 091

Nombre de pages : 123

Nombre de feuilles : 123

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Algèbre Chap IX Etat 1
[illegible]
Géométrie élémentaire

91

A 91

LIVRE II

ALGÈBRE

CHAPITRE IX (Etat 1)

GÉOMÉTRIES ÉLÉMENTAIRES

Sommaire

§ 1.: Géomètrie projective. La notion de géomètrie élémentaire. Espaces projectifs. Coordonnées homogènes et repères projectifs. Transformations projectives. Groupes projectifs. Dualité projective. Semi-projectivités ; semi-dualités. Invariants projectifs. Rapport anharmonique. Espaces de variétés linéaires projectives. Grassmaniennes.

§ 2 : Géomètrie affine . Le groupe affine. Homothéties et translations. Identifications de l'espace affine et d'un espace vectoriel. Repères affines. Coordonnées barycentriques. Applications linéaires affines. Projections. Droite affine et droite projective ; prolongement des fonctions rationnelles. Géomètrie affine sur un corps ordonné. Orientation de l'espace. Secteurs angulaires.

§ 3 : Géomètrie euclidienne et géomètrie hermitienne. Groupe des similitudes. Groupe des déplacements. Variétés linéaires dans un espace euclidien. Sphères dans un espace euclidien. Espaces euclidiens parfaits. Géomètrie hermitienne. Géomètrie euclidienne à 2 dimensions. Angles de droites. Tangente d'un angle de droites. Angles de droites orientées. Bissectrices. Angles de demi-droites. Secteurs angulaires et arcs. Angles dans les espaces euclidiens parfaits. Géomètrie hermitienne à 2 dimensions. Géomètrie euclidienne à 4 dimensions : I. Cas où $\nu=2$. Géomètrie euclidienne à 4 dimension

- Suite -

II. Cas où $\nu = 1$. Géomètrie euclidienne à 4 dimensions. III. Cas où $\nu = 0$. Géomètrie euclidienne à 3 dimensions : I. Cas où $\nu = 1$. Géomètrie euclidienne à 3 dimensions : II. Cas où $\nu = 0$. Géomètrie non-euclidienne.

<u>Appendice</u> : Le théorème fondamental de la géomètrie projective.

Application : géomètrie euclidienne à 6 dimensions lorsque $\nu = 3$.

ALGÈBRE

CHAPITRE IX (État 1)

GÉOMÈTRIES ÉLÉMENTAIRES

----

§ 1. Géomètrie projective.

La notion de géomètrie élémentaire. On groupe sous le nom de géomètries élémentaires les théories de certaines structures d'espace homogène (chap.I, § 7, n°6) satisfaisant à des conditions que nous allons préciser.

Le groupe d'opérateurs G d'un tel espace E est appelé le groupe fondamental de la géomètrie élémentaire considérée ; le sous-groupe H_a de G laissant invariant un élément $a \in E$ est dit groupe de stabilité de a ; on sait que l'espace homogène E est isomorphe à l'espace homogène G/H_a pour tout $a \in E$ (chap.I, § 7, th.2). On suppose toujours que l'intersection de tous les H_a est réduite à l'élément neutre de G , autrement dit que G peut être identifié à sa réalisation transitive formée des permutations que ses éléments produisent dans E .

On dit que deux géomètries élémentaires sont apparentées lorsque les groupes fondamentaux de ces deux géomètries sont isomorphes. Signalons un procédé général de formation de géomètries apparentées à une géomètrie donnée, sur l'espace homogène E , ayant G comme groupe fondamental. Soit F un ensemble de l'échelle d'ensembles ayant pour base E et un certain nombre d'ensembles auxiliaires (ayant plus d'un élément) ; on suppose que F n'appartient pas à l'échelle ayant pour base les seuls ensembles auxiliaires. Dans ces conditions, la représentation canonique (chap.I, § 7, n°3) de G dans $\mathfrak{S}_F$

est un <u>isomorphisme</u> de G sur un groupe G_F de transformations de F . Soit alors A une classe d'intransitivité de G_F ; comme G_F opère transitivement dans A , il définit sur A une structure d'<u>espace homogène</u>, et par suite une géomètrie élémentaire <u>apparentée</u> à la géomètrie donnée, pourvu que la seule transformation de G_F laissant invariants tous les éléments de A soit la transformation identique. On notera qu'on sera toujours assuré que cette dernière condition est remplie si G est un groupe <u>simple</u>.

On dit qu'une géomètrie élémentaire $\mathcal{G}'$ est <u>subordonnée</u> à une géomètrie élémentaire $\mathcal{G}$ (ou est une <u>sous-géomètrie</u> de $\mathcal{G}$) si le groupe fondamental de $\mathcal{G}'$ est isomorphe à un <u>sous-groupe</u> de celui de $\mathcal{G}$ (on peut donc dire de deux géomètries apparentées que chacune d'elles est subordonnée à l'autre). Soit H un sous-groupe de G , A une classe d'intransitivité de H dans E ; si la seule transformation de H laissant invariants tous les éléments de A est la transformation identique, H définira sur A une géomètrie $\mathcal{G}'$ subordonnée à $\mathcal{G}$, dont H sera le groupe fondamental. Par exemple, on peut prendre pour H le sous-groupe de G <u>laissant invariante une partie</u> F de E ; si la condition précédente est vérifiée, on dira que la géomètrie $\mathcal{G}'$ définie de cette manière a pour <u>absolu</u> l'ensemble F . On peut aussi prendre pour H le sous-groupe de G formé des transformations <u>permutables</u> avec toutes les transformations d'une partie donnée de G .

Ces notions étant définies, nous pouvons maintenant préciser que nous entendrons par géomètries élémentaires les théories dites géomètries projectives des structures d'une certaine espèce d'espace homogène qui va être définie dans ce § , les <u>espaces projectifs</u>, et toutes les géomètries <u>subordonnées</u> aux géomètries projectives.

La plupart des théorèmes d'une géomètrie élémentaire expriment des <u>identités entre covariants du groupe fondamental</u>.

* Exemple. En géomètrie euclidienne plane (cf. § 3), la hauteur issue d'un sommet d'un triangle est un covariant des trois sommets ; le théorème exprimant que les hauteurs d'un triangle sont concourantes exprime une identité entre 3 covariants de trois points. *

Espaces projectifs. Soit K un corps (commutatif ou non), E un espace vectoriel à gauche de dimension finie n sur K . Désignons par E' le complémentaire de $\{0\}$ dans E . Dans l'espace vectoriel E , deux droites distinctes Ka, Kb n'ont en commun que l'élément 0 ; les complémentaires de $\{0\}$ par rapport à ces deux droites respectivement n'ont donc aucun point commun. Les complémentaires de $\{0\}$ par rapport à toutes les droites de E , ou, comme nous dirons, les droites privées de 0 , forment donc une partition de l'ensemble E' , et définissent par suite dans E' une relation d'équivalence $\Delta(E)$. Il est clair que la relation $\Delta(E)$ peut aussi se définir comme la relation entre deux points x,y distincts de 0 : "il existe $\lambda \in K$ non nul, tel que $y = \lambda x$ ".

Nous dirons provisoirement que l'ensemble quotient $E'/\Delta(E)$ est l'espace projectif (gauche) associé à E ; cette définition sera complétée un peu plus loin, car ce que nous appellerons en réalité espace projectif sera l'ensemble précédent muni d'une structure d'espace homogène qui sera définie ci-dessous. L'espace projectif associé à E sera noté P(E) si $E = K^n$ nous écrirons $P_{n-1}(K)$ au lieu de P(E). C'est donc un ensemble en correspondance biunivoque avec l'ensemble de toutes les droites de l'espace vectoriel E .

On dit que l'espace projectif P(E) est un espace projectif de dimension (projective) n-1 .

Soit V un sous-espace vectoriel de E, de dimension $p \leqslant n$; soit V' le complémentaire de 0 par rapport à V. La relation d'équivalence induite sur V' par $\Delta(E)$ n'est autre que $\Delta(V)$; comme V' est une réunion de classes d'équivalence mod. $\Delta(E)$, l'ensemble quotient $P(V) = V'/\Delta(V)$ peut être identifié à l'image de V' dans $P(E)$ par l'application canonique de E' sur $P(E)$; on dit que cette dernière est une <u>variété linéaire projective</u> de dimension $p-1$ de l'espace projectif $P(E)$. Une variété linéaire projective de dimension 0 (resp. $1, 2, n-2$) sera dite <u>point</u> (resp. <u>droite projective</u>, <u>plan projectif</u>, <u>hyperplan projectif</u>) dans $P(E)$. L'ensemble vide dans $P(E)$ est une variété linéaire projective de dimension -1.

Toute intersection de variétés linéaires projectives est une variété linéaire projective, comme il résulte aussitôt des définitions précédentes.

Par définition, la <u>somme</u> d'une famille variétés linéaires projectives (V_ι) est la plus petite variété linéaire projective contenant la réunion des V_ι ; si V'_ι est le sous-espace vectoriel de E tel que $P(V'_\iota) = V_\iota$, la somme des V_ι n'est autre que $P(\sum_\iota V'_\iota)$; aussi la désigne-t-on encore par $\sum_\iota V_\iota$.

En particulier, la variété linéaire projective <u>engendrée</u> par une famille (x_ι) de points de $P(E)$, c'est-à-dire la plus petite variété linéaire projective contenant tous les x_ι, est l'image canonique du sous-espace vectoriel de E (privé de 0) engendré par la famille (x'_ι), x'_ι désignant un point quelconque de E dont l'image canonique est x_ι. On dira que la famille (x_ι) est une famille (projectivement) <u>libre</u> si aucun des x_ι n'appartient à la variété linéaire projective engendrée par les $x_\varkappa$ d'indice $\neq \iota$; il revient au même de dire que les x_ι sont les images canoniques d'une famille (x'_ι) libre dans l'espace vectoriel E.

Les propositions relatives aux familles libres et aux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie se traduisent en les suivantes :

Proposition 1.- *Dans un espace projectif de dimension* n , *toute partie libre a au plus* $n+1$ *éléments* ; *si une partie libre a* p *éléments, la variété linéaire projective qu'elle engendre est de dimension* $p-1$.

Proposition 2.- *Si une partie* A *d'un espace projectif* P *de dimension* n *engendre une variété linéaire projective* V *de dimension* p , *et si* L *est une partie libre de* $n+1$ *points de* P , *il existe une partie libre* B *de* $p+1$ *éléments de* A *engendrant* V , *et une partie* C *de* $n-p$ *éléments de* L *telle que* $B \cup C$ *soit une partie libre de* $n+1$ *points de* P . *En particulier, pour toute variété linéaire projective* V *de dimension* p , *il existe une variété linéaire projective* W *de dimension* $n-p-1$ *qui ne rencontre pas* W (autrement dit, telle que $V+W = P$).

Proposition 3.- *Soient* V,W *deux variétés linéaires projectives de dimensions* p *et* q . *Si* $V \cap W$ *est de dimension* r , $V+W$ *de dimension* s , *on a*

$$r+s = p+q \quad . \tag{1}$$

Cordonnées homogènes et repères projectifs. Soit $P(E)$ l'espace projectif de dimension n associé à un espace vectoriel E de dimension $n+1$; soit (e'_i) $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ une base de E . Soit x un point de $P(E)$; si x' et x'' sont deux points de E dont l'image canonique est x , il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $x'' = \lambda x'$; par suite si $x' = \sum_{i=1}^{n+1} \xi'_i e'_i$ et $x'' = \sum_{i=1}^{n+1} \xi''_i e'_i$, on a $\xi''_i = \lambda \xi'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$. On dit que les coordonnées $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{n+1}$ d'un quelconque des points x' de E dont x est l'image canonique, forment un système de *coordonnées homogènes* de x par rapport à la base (e'_i) de E ; les coordonnées homogènes de x

relatives à une base (e'_i) ne sont donc définies qu'à un facteur scalaire $\neq 0$ (à gauche) près.

Toute variété linéaire projective de dimension p dans P(E) peut être définie comme l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes satisfont à n-p équations linéaires $u'_i(x')=0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-p)$, où les u'_i sont n-p formes linéairement indépendantes (<u>système d'équations</u> de la variété).

Les variétés projectives engendrées par $p \leqslant n$ des points e_i, images canoniques des e'_i, sont dites <u>variétés coordonnées</u> de dimension p-1 (pour la base (e'_i) ; pour qu'un point x appartienne à une telle variété, il faut et il suffit que n-p de ses coordonnées homogènes soient nulles.

Si a_j $(1 \leqslant j \leqslant q \leqslant n)$ sont q points de P(E) formant un système libre, et si $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est un système de coordonnées homogènes de a_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ par rapport à la base (e'_i), la matrice $\underline{A}=(\alpha_{ij})$ à n+1 lignes et q colonnes est appelée une matrice du système libre (a_j) par rapport à la base (e'_i) ; chacune des colonnes de cette matrice n'est définie qu'à un facteur près à gauche. Pour qu'une matrice à n+1 lignes et q colonnes soit matrice d'un système libre, il faut et il suffit qu'elle soit de rang q .

Supposons donné dans P(E) le système libre $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ formé des images canoniques des e'_i ; chacun des e'_i n'est alors déterminé qu'à un facteur scalaire (non nul) près, à gauche ; si $e'_i = \mu_i e''_i$ et si $(\xi'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est un système de coordonnées homogènes d'un point x de P(E) par rapport à (e'_i), $(\xi'_i \mu_i)$ sera un système de coordonnées homogènes de x par rapport à (e''_i). Donnons-nous un point e_{n+2} de P(E) formant un système libre avec n quelconques des points e_i $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$, autrement dit, n'appartenant à aucune variété coordonnée ; si nous imposons à la base $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ correspondant à $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ la condition qu'un système de coordonnées homogènes de e_{n+2} soit la suite $(1,1,\dots,1)$, les e'_i sont déterminés à un facteur scalaire près (à gauche), le <u>même</u> pour chaque indice. Il en résulte que si x est un point quelconque de E , $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ un système de coordonnées homogènes par rapport à une base (e'_i) de E ayant pour image canonique (e_i) et satisfaisant à la condition précédente, tout autre système de coordonnées homogènes de x par rapport à une autre base (e''_i) satisfaisant aux mêmes conditions, sera de la forme $(\lambda\xi_1\mu,\lambda\xi_2\mu,\dots,\lambda\xi_n\mu)$, où λ et μ sont deux scalaires quelconques $\neq 0$.

On dit qu'une famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n+2}$ de $n+2$ points de $P(E)$ telle que $n+1$ quelconques d'entre eux forment un système libre, est un <u>repère projectif</u>. Lorsque K est <u>commutatif</u>, on voit donc que la donnée d'un repère projectif détermine, pour tout $x\in P(E)$, les systèmes de coordonnées homogènes de x par rapport à une base de E ayant $n+1$ des points de (e_i) comme image canonique, et telle que le $(n+2)$-ème point du repère ait un système de coordonnées homogènes toutes égales à 1 .

Soit K_1 un surcorps du corps K , E_1 l'espace vectoriel de dimension $n+1$ sur K_1 obtenu par <u>extension</u> à K_1 du corps des scalaires de E (chap.III, § 2). Toute droite Ka dans E engendre dans E_1 une droite K_1a, et deux droites distinctes dans E engendrent deux droites distinctes dans E_1 ; il existe donc une application canonique biunivoque de l'ensemble des droites de E dans l'ensemble des droites de E_1 : en d'autres termes, il existe une application canonique biunivoque de $P(E)$ dans $P(E_1)$, au moyen de laquelle on peut identifier l'espace projectif $P(E)$ à une partie de $P(E_1)$. Si $(a'_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E par rapport à K , c'est aussi une base de E_1 par rapport à K_1 : les points de $P(E)$

peuvent donc se caractériser comme les points de $P(E_1)$ ayant un système de coordonnées homogènes (par rapport à (a'_i)) formé d'éléments de K. Toute variété linéaire projective de dimension p dans P(E) engendre dans $P(E_1)$ une variété linéaire projective de même dimension, définie par les <u>mêmes</u> équations par rapport à la base (a'_i).

<u>Transformations projectives</u>. <u>Groupes projectifs</u>. Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K, P(E) et P(F) les espaces projectifs respectifs qui leur correspondent. Soit u' un <u>isomorphisme</u> de E dans F ; comme u'(0)=0, u' est une application biunivoque du complémentaire E' de 0 dans E dans le complémentaire F' de 0 dans F ; en outre, il est clair que u' (restreint à E') est <u>compatible</u> avec les relations d'équivalence $\Delta(E)$ et $\Delta(F)$; donc (<u>Ens</u>. R, § 5, n°8), on déduit de u', par passage aux quotients, une application biunivoque u de P(E) dans P(F) ; on dit qu'une telle application est une <u>transformation projective</u> ou une <u>projectivité</u>. Elle transforme toute variété linéaire projective dans P(E) en une variété linéaire projective de même dimension dans P(F). Si v' est de même un isomorphisme de F dans un espace vectoriel G sur K, et v la transformation projective de P(F) dans P(G) qui lui correspond, à l'isomorphisme $v' \circ u'$ de E dans G correspond la transformation projective $v \circ u$ de P(E) dans P(G). En particulier, si u' applique E sur F et si w' est l'isomorphisme de F sur E, réciproque de u', la transformation projective w de P(F) sur P(E) qui lui correspond, est réciproque de u.

Aux <u>automorphismes</u> u' de l'espace vectoriel E correspondent les transformations projectives u de P(E) sur lui-même ; elles forment un <u>groupe</u>, qu'on appelle <u>groupe projectif à n+1 variables</u> sur K et qu'on note $\mathbf{PL}_{n+1}(K)$; l'application $u' \to u$ est une <u>représentation</u>

du groupe linéaire $GL_{n+1}(K)$ sur le groupe projectif $PL_{n+1}(K)$. Les automorphismes u' de E qui correspondent à l'application identique de P(E) sont telles qu'elles laissent invariant tout sous-espace vectoriel de E ; en prenant dans E une base quelconque, on voit aussitôt que si $n > 0$, u' est nécessairement une homothétie centrale $x \to \gamma x$ de E, où $\gamma \neq 0$ appartient au centre de K. Donc :

Proposition 4.- *Si $n > 0$, le groupe projectif $PL_{n+1}(K)$ est isomorphe au groupe quotient $GL_{n+1}(K)/H_{n+1}(K)$ du groupe linéaire $GL_{n+1}(K)$ par le sous-groupe distingué $H_{n+1}(K)$ des homothéties centrales dans E.*

Corollaire. *Le centre du groupe projectif $PL_{n+1}(K)$ est réduit à l'élément neutre.*

En effet, un élément u du centre de $PL_{n+1}(K)$ correspond à un automorphisme u' de E tel que $u'v' = \varphi(v')v'u'$ pour tout automorphisme v', $\varphi(v')$ étant un élément du centre de K. Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une base quelconque de E, et posons $u'(a_1) = \gamma_1 a_1 + \sum_{i \geqslant 2} \gamma_{1i} a_i$. Pour tout indice $i \geqslant 2$, considérons l'automorphisme v_i' tel que $v_i'(a_j) = a_j$ pour $j \neq i$, $v_i'(a_i) = a_i + a_1$, et écrivons que $u'(v_i'(a_1)) = \rho v_i'(u'(a_1))$, ρ dans le centre de K ; il vient $\rho\gamma_{1j} = \gamma_{1j}$ pour tout $j \geqslant 2$, et $\rho\gamma_1 = \gamma_1 + \gamma_{1i}$; si on avait $\rho \neq 1$, on en tirerait $\gamma_{1j} = 0$ pour tout $j \geqslant 2$, puis $\gamma_1 = 0$, et finalement $u'(a_1) = 0$, ce qui est absurde ; il faut donc $\rho = 1$, d'où $\gamma_{1i} = 0$; on a donc $u'(a_1) = \gamma_1 a_1$, et comme a_1 est quelconque dans E, on en tire que u'(x') est colinéaire à x' pour tout $x' \neq 0$ dans E, ce qui entraîne que u est la transformation identique.

Soit $(e_i')_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une base quelconque de E. Si u est une transformation projective de P(E), u' un quelconque des automorphismes de E qui correspond à u, on dit que la matrice $\underline{U}$ de u', rapporté à la base

(e'_i) est <u>une matrice</u> de la transformation projective u , lorsqu'on rapporte cette dernière à la base (e'_i) de E . D'après la prop.4, toute autre matrice de u (rapportée à la même base) est de la forme $\gamma \underline{U}$, où γ est un élément $\neq 0$ du <u>centre</u> de K .

<u>Proposition 5</u> . <u>Pour tout couple</u> $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$, $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$ <u>de repères projectifs dans</u> P(E), <u>il existe une transformation projective</u> u <u>de</u> P(E) <u>telle que</u> $u(a_i)=b_i$ <u>pour</u> $1 \leqslant i \leqslant n+2$. <u>Si</u> K <u>est commutatif, cette transformation est unique</u>.

En effet, soit (a'_i) (resp. (b'_i)) une famille d'éléments de E telle que l'image de a'_i (resp. b'_i) soit a_i (resp. b_i) pour $1 \leqslant i \leqslant n+2$; les familles $(a'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ et $(b'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ sont des bases de E , et on peut toujours supposer que $a'_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} a'_i$ et $b'_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} b'_i$. Il existe alors un automorphisme u' de E tel que $u'(a'_i)=b'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$, et on déduit de ces relations qu'on a aussi $u'(a'_{n+2}) = b'_{n+2}$; donc la transformation projective u correspondant à u' répond bien à la question. Inversement, si v est une transformation projective telle que $v(a_i)=b_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+2$, v' un automorphisme de E correspondant à v , on doit avoir pour $1 \leqslant i \leqslant n+2$, $v'(a'_i)= \lambda_i b'_i$, ce qui implique nécessairement que tous les λ_i sont égaux à un même élément λ de K . On en déduit que si K est commutatif, v=u , en vertu de la prop.4 .

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> V_1 <u>et</u> V_2 <u>sont deux variétés linéaires projectives de même dimension dans</u> P(E), <u>il existe une transformation projective</u> u <u>de</u> P(E) <u>telle que</u> $u(V_1)=V_2$.

Il résulte en particulier de ce corollaire que le groupe $PL_{n+1}(K)$ des transformations projectives de P(E) est un groupe <u>transitif</u> de transformations de cet ensemble, et par suite définit sur P(E) une structure d'espace homogène (chap.I, § 7,n°6). Nous pouvons maintenant compléter la définition des espaces projectifs, en disant que l'espace projectif P(E) sera par définition l'ensemble P(E) muni de la structure d'espace homogène définie par le groupe des transformations projectives de P(E).

Soit V une variété linéaire projective quelconque dans P(E), de dimension p ; les restrictions à V des transformations du groupe projectif $\mathbb{P}L_{n+1}(K)$ qui laissent invariante V forment un groupe isomorphe au groupe projectif $\mathbb{P}L_{p+1}(K)$, et qui opère transitivement dans V (chap.II, § 2,prop.3). On peut donc considérer V muni de la structure définie par ce groupe comme un espace projectif de dimension p , au sens qui vient d'être défini.

Soient maintenant E et F deux espaces vectoriels sur K , de dimension finie et soit u' une application linéaire de E dans F, telle que $V' = \overset{-1}{u'}(0) \neq \{0\}$; u' , restreinte au complémentaire W' de V' dans E , applique cet ensemble dans le complémentaire F' de 0 dans F , et est compatible avec les relations $\Delta(E)$ et $\Delta(F)$; par passage aux quotients, on en déduit donc une application u du complémentaire W dans P(E) de la variété linéaire projective V image de V' dans l'espace projectif P(F) ; par abus de langage on dit que u est une projectivité impropre de P(E) dans P(F) ; l'image par u d'une variété linéaire projective U de P(E), ne rencontrant pas V , est une variété linéaire projective de P(E), de même dimension que u ; si au contraire U contient V , l'image par u du complémentaire de U par rapport à V est une variété linéaire projective de P(F), de dimension dim U-dim V-1 . L'image réciproque par u d'une variété linéaire projective T dans P(F) est le complémentaire de V par rapport à une variété linéaire projective contenant V , de dimension $\dim T + \dim V+1$. On définit comme plus haut une <u>matrice</u> de u par rapport à des bases données de E et F .

Un exemple important de transformations projectives impropres est donné par les <u>projections</u>. Soient V et W deux variétés linéaires projectives dans P(E), telles que $V+W = P(E)$ et $V \cap W = \emptyset$, de dimensions respectives p et n-p-1 . Pour tout point $x \notin V$, $V+\{x\}$ est une variété linéaire projective de dimension p+1, qui rencontre donc W en un seul point u(x) ; on vérifie aussitôt que u est une transformation projective impropre, dite <u>projection sur</u> W de $\complement V$, à partir de V . Lorsque V est réduite à un point a (p=0), on dit que u est une <u>projection centrale</u>, de <u>point de vue</u> a , sur l'hyperplan projectif W .

<u>Dualité projective</u>. L'espace vectoriel E^*, dual de E , est un espace vectoriel <u>à droite</u> sur K , de dimension n+1 égale à celle de E . L'espace projectif <u>droit</u> $P(E^*)$ associé à E^* , de dimension n , est appelé l'espace projectif <u>dual</u> de P(E) ; comme inversement E est identifié au dual de E^* , P(E) est identifié à l'espace projectif dual de $P(E^*)$.

A un point u de $P(E^*)$ correspondent dans E^* les multiples scalaires à droite d'une même forme linéaire u' sur E , qui s'annulent donc toutes dans le même hyperplan H' de E ; à ce dernier correspond un hyperplan projectif H de P(E). Inversement, toutes les formes linéaires u' sur E pour lesquelles $\overset{-1}{u'}(0)$ est le même hyperplan H' de E sont multiples scalaires à droite d'une même forme linéaire, donc il leur correspond dans $P(E^*)$ un même point ; en d'autres termes, il y a correspondance biunivoque entre $P(E^*)$ et l'<u>ensemble des hyperplans projectifs</u> de P(E) . Toute équation $u'(x')=0$ de l'hyperplan H' de E est encore dite par définition une <u>équation</u> de l'hyperplan projectif H correspondant ; c'est donc une relation de la forme

$\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \alpha_i = 0$ entre les coordonnées homogènes ξ_i d'un point de H , où les coefficients α_i ne sont pas tous nuls ; réciproquement toute équation de cette forme définit un hyperplan projectif H , et les α_i ne sont autres que les coordonnées homogènes du point de $P(E^*)$ qui correspond à H (relativement à la base duale de celle par rapport à laquelle on prend les coordonnées homogènes d'un point de $P(E)$) ; on dit encore que ce sont les <u>coordonnées homogènes de l'hyperplan projectif</u> H .

Plus généralement, soit V une variété linéaire projective de dimension $p<n$ dans $P(E)$, et soit V' le sous-espace vectoriel de E , de dimension $p+1$, qui lui correspond. L'ensemble des formes linéaires sur E qui s'annulent dans V' est un sous-espace vectoriel $\widetilde{V'}$ de E^* , dit orthogonal à V' (chap.II, § 4), de dimension $n+1-(p+1) = n-p$; il lui correspond dans $P(E^*)$ une variété linéaire projective $\widetilde{V}$ de dimension $n-p-1$, que nous appellerons encore la variété linéaire projective <u>orthogonale</u> à V . Il résulte de l'étude de la dualité dans les espaces vectoriels, faite au chap.II, § 4, que V est, réciproquement, la variété linéaire projective orthogonale à $\widetilde{V}$ (quand on identifie E avec le dual de E^*) ; si W est une autre variété linéaire projective dans $P(E)$, la variété linéaire projective orthogonale à $V+W$ est $\widetilde{V} \cap \widetilde{W}$, la variété linéaire projective orthogonale à $V \cap W$ est $\widetilde{V}+\widetilde{W}$. Ces propriétés de l'application biunivoque $V \to \widetilde{V}$ de l'ensemble des variétés linéaires projectives de $P(E)$ sur l'ensemble des variétés linéaires projectives de $P(E^*)$ permettent d'associer à toute relation vraie R entre variétés linéaires projectives d'un espace projectif de dimension n sur un corps quelconque, une autre relation vraie R', dite <u>duale</u> de la première, obtenue en appliquant la relation R aux variétés linéaires projectives de $P(E^*)$, et traduisant cette relation en une relation entre les variétés linéaires projectives de $P(E)$ qui leur sont respectivement orthogonales.

Supposons maintenant que K soit un corps commutatif. Alors une transformation projective u de $P(E)$ en $P(E^*)$ est dite dualité (projective) ; elle provient par passage aux quotients d'une dualité u' (définie à un facteur scalaire près) de E sur E^*. Si on compose l'application $V \to \widetilde{V}$ de $P(E^*)$ sur $P(E)$ (qui fait correspondre à toute variété linéaire projective de $P(E^*)$ la variété orthogonale de $P(E)$) et l'extension de u à l'ensemble des variétés linéaires projectives de $P(E)$, on obtient une application v de cet ensemble sur lui-même, qui à une variété linéaire de dimension p fait correspondre une variété linéaire de dimension $n-p-1$, de sorte qu'à la somme (resp. l'intersection) de deux variétés linéaires corresponde l'intersection (resp. la somme) des variétés linéaires correspondantes.

On dit qu'un point $y \in P(E)$ est conjugué du point $x \in P(E)$ relativement à la dualité u, si, pour deux points quelconques x', y' de E correspondant respectivement à x et y, y' est conjugué de x' (chap. VIII, §1) relativement à la dualité u' ; il revient au même de dire que y appartient à l'hyperplan $v(x)$ correspondant à x ; cet hyperplan est donc l'ensemble des conjugués de x. De même, pour une variété linéaire quelconque V de $P(E)$, $v(V)$ n'est autre que l'ensemble des points qui sont conjugués de tous les points de V. De façon générale, si $W_1 \subset V$, $W_2 \subset v(V)$ tout point de W_2 est conjugué de tout point de W_1. La variété linéaire $v(V)$ est appelée la variété totalement conjuguée (ou simplement conjuguée) de V pour la dualité u. On sait que la relation "x et y sont conjugués" n'est symétrique que lorsque la forme bilinéaire $\langle x', u'(y')\rangle$ est symétrique ou antisymétrique (chap. VIII, §1, prop. 1).

D'une façon générale, si $f(x',y')$ est une forme bilinéaire symétrique dans $E \times E$ (K étant supposé de caractéristique $\neq 2$), la relation $f(x',x')=0$ entraîne $f(\lambda x', \lambda x')=0$ quel que soit $\lambda \in K$; l'ensemble des points $x' \in E$ tels que $f(x',x')=0$ est donc réunion de droites (les droites isotropes de f), et par suite a une image canonique Q dans P(E) , qu'on appelle <u>quadrique</u> (ou encore <u>conique</u> si n=2) ; la relation $f(x',x')=0$, ou toute relation $\mu f(x',x')=0$ ($\mu \in K$, $\mu \neq 0$) est appelée une <u>équation</u> de Q . La quadrique Q est réduite à l'ensemble vide si l'indice ν de la forme quadratique $f(x',x')=$ est 0 ; si $\nu > 0$, la dimension maxima des variétés linéaires projectives contenues dans Q est égale à $\nu - 1$ (images des sous-espaces totalement isotropes pour la forme f). La quadrique Q est dite <u>dégénérée</u> si le rang de f est $< n+1$. L'intersection d'une quadrique et d'une variété linéaire projective est une quadrique dans cette dernière variété.

Toute dualité u telle que la forme bilinéaire $\langle x', u'(y') \rangle$ soit symétrique et d'indice $\nu > 0$ correspond à une quadrique non vide et non dégénérée Q dans P(E) : Q est l'ensemble des points qui sont contenus dans leur hyperplan conjugué. On dit encore que deux variétés conjuguées dans P(E) (pour la dualité u) sont <u>conjuguées par rapport à</u> Q, et que deux variétés totalement conjuguées sont <u>polaires</u> l'une de l'autre par rapport à Q : l'hyperplan polaire d'un point x de Q est appelé hyperplan <u>tangent</u> à Q au point x ; toute variété linéaire projective contenant un point x de Q et contenue dans l'hyperplan tangent en x est dite <u>tangente</u> à Q en ce point ; sa variété polaire est tangente à Q au même point.

Les droites tangentes à Q peuvent encore être caractérisées comme les droites rencontrant Q en un seul point ou contenues dans Q ; en effet, si x est un point de Q, tout point d'une droite passant par x et $y \neq x$ est l'image canonique d'un point $z' = \lambda x' + \mu y'$, avec les notations habituelles ; en écrivant que z' satisfait à l'équation $f(z',z')=0$ de Q, il vient, puisque $f(x',x')=0$ par hypothèse, $2\lambda\mu f(x',y')+\mu^2 f(y',y')=0$; pour que $\mu=0$ soit la seule solution de cette équation ou que l'équation soit identiquement nulle, il faut et il suffit que $f(x',y')=0$, ce qui démontre notre assertion.

Remarque.- Si l'indice ν de f est 0, il existe un surcorps quadratique K_1 de K tel que, dans l'espace E_1 obtenu par extension à K_1 du corps des scalaires, la forme f prolongée ait un indice $\nu_1 > 0$ (cf.chap.VIII). L'espace projectif P(E) peut être considéré comme plongé dans l'espace projectif $P(E_1)$, et dans ce dernier, la quadrique Q_1 correspondant à f n'est pas vide ; il est clair alors que l'hyperplan conjugué d'un point quelconque de P(E) est la trace sur P(E) de l'hyperplan polaire de ce point par rapport à Q_1.

Lorsque la dualité u est telle que la forme $\langle x',u'(y')\rangle$ soit alternée (ce qui suppose la dimension n de P(E) impaire), tout point de P(E) est son propre conjugué, ou, ce qui revient au même, est contenu dans l'hyperplan conjugué. On dit que les droites de P(E) images canoniques des sous-espaces totalement isotropes de dimension 2 dans E forment un complexe linéaire Γ ; l'hyperplan conjugué d'un point $x \in P(E)$ est évidemment la réunion des droites du complexe Γ qui contiennent x. On dit encore que deux variétés linéaires totalement conjuguées dans P(E) (pour la dualité u) sont polaires l'une de l'autre par rapport au complexe Γ.

<u>Semi-projectivité</u> ; <u>semi-dualités</u>. Soient K_1, K_2 deux corps <u>isomorphes</u>, σ un isomorphisme de K_1 sur K_2, E_1 (resp. E_2) un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur K_1 (resp. K_2). Si u' est un <u>di-isomorphisme</u> de E_1 sur E_2, relatif à l'isomorphisme σ, il est clair que u' (restreint à E_1') est encore compatible avec les relations d'équivalence $\Delta(E_1)$ et $\Delta(E_2)$, et on en déduit donc, par passage aux quotients, une application biunivoque u de $P(E_1)$ sur $P(E_2)$; on dit que u est une <u>semi-projectivité</u> de $P(E_1)$ sur $P(E_2)$ relative à l'isomorphisme σ ; il est clair que l'application réciproque de u est une semi-projectivité relative à l'isomorphisme σ^{-1} réciproque de σ. De même, si K_3 est un troisième corps isomorphe à K_1, E_3 un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur K_3, v une semi-projectivité de $P(E_2)$ sur $P(E_3)$, relative à l'isomorphisme τ de K_2 sur K_3, $v \circ u$ est une semi-projectivité de $P(E_1)$ sur $P(E_3)$ relative à l'isomorphisme $\tau \circ \sigma$.

Une semi-projectivité de $P(E_1)$ sur $P(E_2)$ transforme un système libre en système libre, et un repère projectif en repère projectif ; si $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$ est un repère projectif dans $P(E_1)$, (ξ_i) un système de coordonnées projectives d'un point $x \in P(E_1)$ par rapport à ce repère, (ξ_i^σ) sera un système de coordonnées projectives de $u(x)$ par rapport au repère projectif formé des $u(a_i)$.

Une semi-projectivité transforme évidemment toute variété linéaire projective de $P(E_1)$ en une variété linéaire projective de $P(E_2)$ de même dimension ; inversement, on peut démontrer (voir Appendice) que pour $n \geqslant 2$ toute application biunivoque de $P(E_1)$ sur $P(E_2)$ ayant cette propriété est une semi-projectivité ; d'où le nom de <u>collinéations</u> qu'on donne aussi aux semi-projectivités.

Supposons en particulier que l'opposé K^o de K soit un corps isomorphe à K (ce qui a évidemment toujours lieu pour K commutatif). Alors, comme le dual $P(E^*)$ de $P(E)$ peut être considéré comme espace projectif gauche sur le corps K^o, il existe des semi-projectivités de $P(E)$ sur $P(E^*)$; une telle projectivité, relative à un isomorphisme σ de K sur K^o, est dite semi-dualité de $P(E)$ sur $P(E^*)$; lorsque K est commutatif, une dualité n'est donc autre qu'une semi-dualité relative à l'isomorphisme identique de K sur $K^o=K$.

Pour toute semi-projectivité u de $P(E_1)$ sur $P(E_2)$ relative à l'isomorphisme σ, si v' et u' sont deux di-isomorphismes de E_1 sur E_2 correspondant à u, $v'^{-1}\circ u'$ est un automorphisme de E_1 qui laisse invariants tout sous-espace vectoriel de E_1, donc est une homothétie centrale ; autrement dit, on a $v'=u'\gamma = \gamma^{\sigma}u'$, où γ appartient au centre de K_1. On en déduit que les contragrédients $\check{v}'$ et $\check{u}'$, qui sont des di-isomorphismes de E_1^* sur E_2^* relatives au même isomorphisme σ que u, sont telles que $\check{v}'=\check{u}'\gamma^{-1} =(\gamma^{-1})^{\sigma}\check{u}'$; ils donnent donc naissance à la même semi-projectivité de $P(E_1^*)$ sur $P(E_2^*)$ relative à l'isomorphisme σ ; on dira que cette semi-projectivité est la contragrédiente de u et on la notera encore $\check{u}$; il est clair que la contragrédiente de $\check{u}$ est de nouveau u. En particulier, si u est une semi-dualité de $P(E)$ sur $P(E^*)$ relative à l'isomorphisme σ de K sur K^o, la contragrédiente u est une semi-dualité de $P(E^*)$ sur $P(E)$, relative au même isomorphisme (considéré comme isomorphisme de K^o sur K).

Désignons par E_o un ensemble somme (Ens. R, §4, n°5) de $P(E)$ et de son dual $P(E^*)$; pour toute semi-projectivit[illegible] u de $P(E)$ sur lui-même, relative à un automorphisme σ de K, $\check{u}$ est une semi-projectivité de $P(E^*)$ sur lui-même relative à σ ; on définit donc une application biunivoque u_0 de E_0 sur lui-même en prenant $u_0=u$ dans $P(E)$ et $u_0=\check{u}$ dans $P(E^*)$. La même définition donne encore une application biunivoque de E_0 sur lui-même lorsque u est une semi-dualité de $P(E)$ sur $P(E\ )$ (u_0 transformant cette fois $P(E)$ en $P(E^*)$ et $P(E^*)$ en $P(E)$). Par abus de langage, on dit encore que u_0 est une <u>collinéation</u> dans le premier cas, et dans le second on l'appelle <u>corrélation</u>. Avec ces définitions, il est clair que le composé de deux collinéations est une collinéation, le composé de deux corrélations une collinéation, le composé d'une collinéation et d'une corrélation (ou vice-versa) une corrélation. L'ensemble de toutes les collinéations et corrélations de E_0 forme donc un <u>groupe</u> qu'on appelle <u>groupe des collinéations et corrélations</u> de $P(E)$, et qu'on note $\mathcal{C}_{n+1}(K)$; l'ensemble des collinéations est un sous-groupe distingué de $\mathcal{C}_{n+1}(K)$, isomorphe au groupe de ses restrictions à $P(E)$ (collinéations proprement dites) et qu'on note $\mathcal{CL}_{n+1}(K)$; enfin, les projectivités de $P(E)$ sur lui-même forment un sous-groupe distingué de $\mathcal{C}_{n+1}(K)$, contenu dans $\mathcal{CL}_{n+1}(K)$, et qu'on peut identifier à $\mathcal{PL}_{n+1}(K)$. Lorsque K est commutatif, on notera que les projectivités <u>et les dualités</u> définissent aussi un sous-groupe distingué de $\mathcal{C}_{n+1}(K)$.

<u>Invariants projectifs</u>. <u>Rapport anharmonique</u>. Soit $P(E)$ un espace projectif de dimension n sur un corps K . Pour toute projectivité u de $P(E)$, l'application $(x_1,x_2,\dots,x_r) \to (u(x_1),u(x_2),\dots,u(x_r))$ est par définition l'<u>extension</u> de u à l'ensemble $(P(E))^r$. Nous allons nous borner dans ce n°, à l'étude des <u>invariants</u> du groupe projectif $\mathcal{PL}_{n+1}(K)$ considéré comme groupe d'opérateurs de $(P(E))^r$; de façon précise (chap. I, §7, n°4),

nous nous proposons de rechercher les applications f de $(P(E))^r$ dans K, telles que, pour toute projectivité u de $P(E)$ sur lui-même, on ait identiquement

(1) $$f(u(x_1),u(x_2),\ldots,u(x_r)) = f(x_1,x_2,\ldots,x_r)$$

dans $(P(E))^r$; une telle fonction sera dite un <u>invariant projectif</u> des r <u>points génériques</u> $x_1,x_2,\ldots,x_r$ de $P(E)$.

Désignons par φ l'application canonique de l'espace vectoriel E (privé de 0) sur $P(E)$, et soit u' un automorphisme de E correspondant à la projectivité u de $P(E)$; pour tout $x'\in E$ tel que $x=\varphi(x')$, on a $u(x)=\varphi(u'(x'))$; quels que soient donc x'_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ dans E $(x'_i\neq 0)$ et quel que soit l'automorphisme u' de E, on doit avoir

(2) $$f(\varphi(u'(x'_1)),\ldots,\varphi(u'(x'_r))) = f(\varphi(x'_1),\ldots,\varphi(x'_r))$$

autrement dit, la fonction $g=f\circ\varphi$ est un <u>invariant absolu</u> des r vecteurs x'_i pour le groupe linéaire $\mathbf{GL}_{n+1}(K)$; il est clair en outre qu'on a identiquement

(3) $$g(\lambda_1 x'_1,\lambda_2 x'_2,\ldots,\lambda_r x'_r) = g(x'_1,x'_2,\ldots,x'_r)$$

où les λ_i sont $\neq 0$ et arbitraires dans K. Réciproquement, supposons qu'un invariant absolu g de r vecteurs x'_i pour le groupe $\mathbf{GL}_{n+1}(K)$ satisfasse à l'identité (3) ; on peut alors écrire

$g(x'_1,\ldots,x'_r) = f(\varphi(x'_1),\ldots,\varphi(x'_r))$, f étant une application de $(P(E))^r$ dans K, et la relation (2) est alors équivalente à (1), ce qui prouve que f est un invariant projectif des r points x_i de $P(E)$ $(1\leqslant i\leqslant r)$. Nous dirons que l'invariant absolu g pour le groupe $\mathbf{GL}_{n+1}(K)$ est <u>associé</u> à l'invariant projectif f, qu'il détermine sans ambiguité.

On va se limiter au cas où K est un corps <u>commutatif</u> de caractéristique 0 (donc infini), et où l'invariant g associé à f est <u>de type rationnel</u> (c'est-à-dire fonction rationnelle des composantes des r vecteurs x'_i, cf. chap. VII, § 9) ; on notera que nous étendons ainsi un peu la définition primitive d'un invariant projectif puisque g n'est pas définie en général pour toutes les valeurs des x'_i (ni par suite f pour toutes les valeurs des x_i). On peut alors supposer que g est mis sous la forme p/q , où p et q sont des polynomes (par rapport aux composantes des x'_i) <u>invariants relatifs</u> des r vecteurs x'_i pour le groupe $GL_{n+1}(K)$ (cf.chap.VII, §9,prop.1). La condition (3) montre en outre (comme K est infini) que p et q doivent être <u>homogènes et de même degré par rapport aux composantes de chacun des r vecteurs</u> x'_i séparément.

D'après la prop.5, il est immédiat que tout invariant projectif f de n+2 points, associé à un invariant g de type rationnel, est <u>constant</u>, puisqu'il prend par hypothèse la même valeur pour deux repères projectifs quelconques (principe de polongement des identités algèbriques). Nous allons déterminer les invariants projectifs f les plus simples de n+3 points, c'est-à-dire ceux pour lesquels p et q ont <u>le plus petit poids</u> possible ; ce poids est nécessairement $\geqslant 2$ car un invariant relatif de poids 1 homogène par rapport à chacun des x'_i est nécessairement (chap.VII, §9,prop.2) un invariant <u>multilinéaire</u> de la forme $[x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_{n+1}}]$, et le quotient de deux tels invariants ne peut satisfaire à (3) que si c'est une <u>constante</u>.

Un invariant (polynôme) de poids 2 provient nécessairement d'une somme d'invariants multilinéaires irréductibles de poids 2 , donc de la forme

$$[x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_{n+1}}]\ [x'_{i_{n+2}} \dots x'_{i_{2n+2}}]$$

dans lesquels on a identifié certains des x'_i de manière à n'avoir plus que n+3 arguments ; si on veut que le <u>degré</u> par rapport aux x'_i soit <u>le plus petit</u> possible, il faut identifier n-1 couples de vecteurs, ce qui donne des invariants irréductibles nuls ou obtenus par permutation des arguments à partir de l'invariant

$$(4) \qquad [x'_1 x'_2 \dots x'_{n-1} x'_n x'_{n+1}]\,[x'_1 x'_2 \dots x'_{n-1} x'_{n+2} x'_{n+3}]$$

qui est du second degré par rapport aux x'_i d'indice $i \leqslant n-1$, et linéaire par rapport à x'_n, x'_{n+1}, x'_{n+2} et x'_{n+3} . Toute autre invariant irréductible de mêmes degrés par rapport aux x'_i se déduit de l'invariant (4) en permutant entre eux, d'une part les x'_i d'indice $\leqslant n-1$, et en permutant entre eux les x'_i d'indice $\geqslant n$; en particulier, on obtient ainsi l'<u>invariant projectif</u> non constant de $n+3$ points x_i $(1 \leqslant i \leqslant n+3)$:

$$(5) \qquad \frac{[x'_1 \dots x'_{n-1} x'_n x'_{n+1}]\,[x'_1 \dots x'_{n-1} x'_{n+2} x'_{n+3}]}{[x'_1 \dots x'_{n-1} x'_n x'_{n+2}]\,[x'_1 \dots x'_{n-1} x'_{n+1} x'_{n+3}]}$$

Le cas le plus intéressant est celui de la <u>droite projective</u> $(n=1)$; changeant les notations l'invariant (5) donne alors un invariant projectif de quatre points x,y,z,t de la droite projective, qu'on note (x,z,y,t) et qu'on appelle le <u>rapport anharmonique</u> des quatre points x,z,y,t dans cet ordre ; si $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2),(t_1,t_2)$ sont des systèmes de coordonnées homogènes de x,y,z,t , on a donc

$$(6) \qquad (x,z,y,t) = \frac{(x_1y_2-x_2y_1)(z_1t_2-z_2t_1)}{(x_1z_2-x_2z_1)(y_1t_2-y_2t_1)}$$

et en particulier, si aucun des points x,y,z,t n'est identique à $(1,0)$, on peut prendre $x_2=y_2=z_2=t_2=1$, et le rapport anharmonique prend la forme plus simple $\frac{(x_1-y_1)(z_1-t_1)}{(x_1-z_1)(y_1-t_1)}$. Il n'est défini que lorsque $x \neq z$ et $y \neq t$; on a $(x,y,z,t)=1/(x,z,y,t)$, $(t,z,y,x)=1/(x,z,y,t)$; d'autre part, en raison de l'identité

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(d-b)+(a-d)(b-c) = 0$$

on a les identités

$$(6) \qquad (x,z,t,y) = 1-(x,z,y,t)$$

$$(z,x,y,t) = (x,z,t,y) = 1-(x,z,y,t) \tag{7}$$

et par combinaison de ces identités, on tire enfin

$$(y,z,x,t)=1/(y,x,z,t)=1/(1-(x,y,z,t))=(x,z,y,t)/((x,z,y,t)-1)$$

$$(x,t,y,z)=1-(x,t,z,y)=1-1/(x,z,t,y)=(x,z,y,t)/((x,z,y,t)-1)$$

ce qui montre qu'une transposition quelconque des quatre lettres x,y,z,t dans le rapport anharmonique $r=(x,z,y,t)$ ne peut transformer r qu'en l'une des valeurs $1/r$, $1-r$ et $r/(r-1)$; on en conclut aisément que les 24 permutations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ sur les quatre lettres x,y,z,t ne peuvent transformer r qu'en les trois valeurs précédentes et en $1-1/r$ et $1/(1-r)$.

Soit maintenant D une droite projective dans un espace projectif $P(E)$ sur un corps commutatif K ; il existe donc une transformation projective u de D sur la droite projective $P(K^2)$; si x_1,x_2,x_3,x_4 sont quatre points quelconques de D , on appelle rapport anharmonique de ces quatre points (dans cet ordre), et on note encore (x_1,x_2,x_3,x_4) le rapport anharmonique $(u(x_1),u(x_2),u(x_3),u(x_4))$; cette définition ne dépend pas de la transformation projective u considérée, car si v en est une autre, vu^{-1} est une transformation projective de la droite $P(K^2)$, qui laisse donc invariant tout rapport anharmonique. Cette définition montre aussitôt que, si w est une transformation projective de $P(E)$ sur un espace projectif $P(F)$, le rapport anharmonique $(w(x_1),w(x_2),w(x_3),w(x_4))$ des quatre points $w(x_i)$ sur la droite projective $w(D)$, est égal à (x_1,x_2,x_3,x_4) .

Considérons maintenant dans l'espace projectif $P(E^*)$ dual de $P(E)$ quatre points u_1,u_2,u_3,u_4 sur une même droite projective D' ; il leur correspond canoniquement quatre hyperplans projectifs H_1,H_2,H_3,H_4

contenant la variété projective V de dimension n-2 qui correspond canoniquement à D' ; par définition, le <u>rapport anharmonique</u> (H_1,H_2,H_3,H_4) de ces quatre hyperplans (dans cet ordre) est le rapport anharmonique (u_1,u_2,u_3,u_4).

<u>Proposition 6.- Pour toute droite projective</u> D <u>dans</u> P(E), <u>ne rencontrant pas</u> V , <u>le rapport anharmonique</u> (x_1,x_2,x_3,x_4) <u>des points</u> x_i <u>où</u> D <u>rencontre les hyperplans</u> H_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$ <u>est égal à</u> (H_1,H_2,H_3,H_4).

En effet, prenons dans E une base (e_i) dont les n-1 premiers vecteurs forment une base du sous-espace dont V est l'image canonique les deux derniers une base du sous-espace dont D est l'image canonique ; supposons que x_i soit l'image du point $\alpha_i e_n+\beta_i e_{n+1}$; H_i a donc pour équation $\beta_i\,\xi_n-\alpha_i\,\xi_{n+1}=0$, autrement dit ses n-1 premières coordonnées homogènes sont nulles, les deux dernières étant β_i et $-\alpha_i$. Tout revient alors à voir que le rapport anharmonique des quatre points de $P(K^2)$ dont les coordonnées homogènes sont (α_i,β_i) est égal à celui des quatre points dont les coordonnées homogènes sont $(\beta_i,-\alpha_i)$, ce qui est immédiat, puisque l'application $(\xi,\eta)\rightarrow(\eta,-\xi)$ est une application linéaire biunivoque de K^2 sur lui-même.

La notion de rapport anharmonique de quatre hyperplans permet d'exprimer l'invariant projectif (5) de n+3 points sous forme d'un tel rapport : en effet, si on désigne par H_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$ l'hyperplan projectif passant par les n-1 points $x_1,x_2,\dots,x_{n-1}$ et par x_{n+i-1} on vérifie sans peine que l'expression (5) est égale au rapport anharmonique (H_1,H_2,H_3,H_4) de ces hyperplans : il suffit de prendre comme base dans E les n+1 vecteurs x'_i $(1\leqslant i\leqslant n+1)$; si on pose $x'_{n+2}=y+\alpha x'_n+\beta x'_{n+1}$, $x'_{n+3}=z+\gamma x'_n+\delta x'_{n+1}$, où y et z sont combinaisons linéaires des x'_i d'indice $\leqslant n-1$, l'expression (5) est égale à à $(\alpha\delta-\beta\gamma)/(-\beta\gamma)$, et les deux dernières coordonnées homogènes de H_1, H_2, H_3, H_4 sont respectivement $(0,1), (1,0), (\beta,-\alpha)$ et $(\delta,-\gamma)$.

Remarques.- 1) La définition des rapports anharmoniques et leurs propriétés précédentes sont évidemment valables pour tout corps commutatif K (de caractéristique quelconque).

2) Le calcul précédent montre que par rapport à un repère projectif donné, les rapports des coordonnées homogènes d'un point à l'une d'elles (supposée $\neq 0$) peuvent s'exprimer comme rapports anharmoniques de quatre hyperplans contenant tous les quatre n-1 des points du repère, et passant respectivement par les 3 points restants du repère et par le point donné.

Etant donnés quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 sur une droite D , tels que x_1, x_2, x_3 soient distincts, on dit que x_4 est conjugué harmonique de x_3 par rapport à x_1 et x_2 si on a $(x_1, x_3, x_4, x_2) = -1$; il résulte des relations entre les différents rapports anharmoniques de 4 points que x_4 est aussi conjugué harmonique de x_3 par rapport à x_2 et x_1 , x_3 conjugué harmonique de x_4 par rapport à x_1 et x_2 (ou x_2 et x_1) ; en outre, si K n'est pas de caractéristique 2 , on a $x_4 \neq x_3$ et x_1 est conjugué harmonique de x_2 par rapport à x_3 et x_4 .

Proposition 7.- Soit K un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, P(E) un espace projectif de dimension n sur K , Q une quadrique non vide et non dégénérée dans P(E). Si x,y sont deux points conjugués par rapport à Q , non contenus dans Q et tels que la droite joignant x et y rencontre Q en deux points z,t , z et t sont conjugués harmoniques par rapport à x et y .

En effet, soit $f(z',z')=0$ une équation de Q ; avec les notations habituelles, on peut écrire $z' = \lambda x' + \mu y'$, $t' = \lambda' x' + \mu' y'$, et on a $f(z',z')=0$, $f(t',t')=0$; comme $f(x',y')=f(y',x')=0$ par hypothèse, on voit que λ/μ et λ'/μ' sont racines (distinctes) de l'équation $\rho^2 f(x',x')+f(y',y')=0$, où le coefficient de ρ^2 n'est pas nul par hypothèse ; on a donc $\lambda'/\mu' = -\lambda/\mu$, d'où aussitôt la proposition.

La quadrique Q ne peut être contenue dans une variété linéaire projective de dimension $< n$, car si $x \in Q$, il existe un point de Q distinct de x sur toute droite passant par x et non tangente à Q en ce point. On déduit de cette remarque que, pour toute point z de P(E), il existe n droites passant par z , dont la somme est P(E), et dont chacune rencontre Q ; sur chacune de ces droites il y a un point et un seul conjugué de z , identique au conjugué harmonique de z par rapport aux deux points d'intersection de la droite avec Q , si ces points sont distincts, et à l'unique point d'intersection de la droite considérée avec Q , si cette droite est tangente à Q . Les n points ainsi obtenus forment évidemment un système libre, et par suite engendrent l'hyperplan polaire de z par rapport à Q . En d'autres termes on voit que dans le cas envisagé, la donnée de Q dans P(E) détermine complètement la dualité u

Espaces de variétés linéaires projectives. Grassmanniennes. Etant donné un corps K (commutatif ou non) et l'espace projectif $P_n(K)$, nous désignerons par $P_{n,p}(K)$ l'ensemble des variétés linéaires projectives de dimension p dans $P_n(K)$, pour tout nombre p tel que $0 \leqslant p \leqslant n-1$; l'ensemble $P_{n,0}(K)$ est donc identique à $P_n(K)$. Le groupe projectif $PL_{n+1}(K)$ opère transitivement dans $P_{n,p}(K)$ (cor. de la prop.5).

En outre, si une transformation projective de $P_n(K)$ laisse invariantes toutes les variétés linéaires projectives de dimension p, elle laisse invariante tout point de $P_n(K)$, puisqu'un tel point est intersection de p+1 variétés linéaires projectives de dimension p ; la transformation en question est donc la transformation identique. Le groupe $\mathbb{P}\mathbb{L}_{n+1}(K)$ définit donc sur chacun des ensembles $P_{n,p}(K)$ une géomètrie <u>apparentée</u> à la géomètrie projective de $P_n(K)$.

On peut aussi définir $P_{n,p}(K)$ comme ensemble quotient, de la manière suivante : désignons par $L_{p+1,n+1}(K)$ l'ensemble des systèmes libres $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p+1}$ de p+1 vecteurs de K^{n+1}, qu'on peut identifier à l'ensemble des matrices $\underline{X}$ sur K, à n+1 lignes et p+1 colonnes, de rang p+1. A tout élément de $L_{p+1,n+1}(K)$ correspond le sous-espace vectoriel de dimension p+1 qu'il engendre, et par suite la variété linéaire projective correspondante de dimension p dans $P_n(K)$; pour que deux éléments (x_k), (y_k) de $L_{p+1,n+1}(K)$ correspondent à la même variété linéaire projective, il faut et il suffit, si $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ sont les matrices auxquelles sont identifiés ces éléments, qu'il existe une matrice carrée inversible $\underline{T}$ d'ordre p+1 telle que $\underline{Y} = \underline{X}.\underline{T}$ (matrice de passage de la base (x_k) à la base (y_k)). On peut donc identifier $P_{n,p}(K)$ à l'ensemble quotient de l'ensemble $L_{p+1,n+1}(K)$ par la relation d'équivalence $\Delta_{n,p}(K)$: "il existe une matrice carrée inversible $\underline{T}$ d'ordre p+1 telle que $\underline{Y} = \underline{XT}$ ".

L'application $V \to \tilde{V}$ est une application biunivoque de $P_{n,p}(K)$ sur $P_{n,n-p-1}(K^0)$ (puisque le dual E^* de $E=K^{n+1}$ peut être considéré comme espace vectoriel à gauche de dimension n+1 sur le corps K^0 opposé à K).

Considérons maintenant le cas où K est <u>commutatif</u>. On sait alors qu'à tout $(p+1)$-vecteur décomposable sur $E=K^{n+1}$ correspond le sous-espace vectoriel de E qu'il définit, et que deux $(p+1)$-vecteurs décomposables ne peuvent définir le même espace que s'ils ne diffèrent que par un facteur scalaire (chap.III, §7,cor.2 de la prop.3). Si on identifie l'ensemble $\bigwedge^{p+1} E$ des $(p+1)$-vecteurs sur E à l'espace vectoriel K^h, où $h=\binom{n+1}{p+1}$, on voit qu'il existe une correspondance biunivoque canonique entre $P_{n,p}(K)$ et l'image canonique dans l'espace projectif $P_{h-1}(K)$ de l'ensemble des $(p+1)$-vecteurs décomposables dans $\bigwedge^{p+1} E$; on note cette image $G_{n,p}(K)$, et on l'appelle la <u>grassmannienne</u> d'indices n,p sur le corps K .

Si φ est un isomorphisme canonique de $\bigwedge^{p+1} E$ sur $\bigwedge^{n-p} E^*$ (chap.III, §8,n°5), on sait (loc.cit.prop.7) que pour tout $(p+1)$-vecteur décomposable z , $\varphi(z)$ est un $(n-p)$-vecteur décomposable sur E^*; par passage aux quotients, φ donne donc une transformation projective de l'espace projectif $P(\bigwedge^{p+1} E)$ sur $P(\bigwedge^{n-p} E^*)$, qui applique la grassmannienne $G_{n,p}(K)$ sur $G_{n,n-p-1}(K)$.

De façon précise, soit (e_i) la base canonique de $K^{n+1}=E$, (e_H) la base de $\bigwedge^{p+1} E$ qui lui correspond, et que nous identifierons avec la base canonique de K^h en rangeant les parties H de p+1 éléments de $[1,n+1]$ dans un certain ordre. Soit $(e'_{H'})$ la base dans $\bigwedge^{n-p} E^*$ correspondant à (e_i) et identifions chaque $e'_{H'}$ au même élément de K^h que e_H . Alors comme $\varphi(e_H)=\rho_{H',H}e'_{H'}$, la transformation projective de $P_{h-1}(K)$ sur lui-même qui transforme $G_{n,p}(K)$ en $G_{n,n-p-1}(K)$ fait correspondre au point de coordonnées homogènes (ξ_H) le point de coordonnées homogènes $(\rho_{H',H}\,\xi_{H'})$.

Un cas particulier important est la grassmannienne $G_{3,1}(K)$, qui est une <u>quadrique</u> dans $P_5(K)$, car la condition pour qu'un bivecteur z dans K^4 soit décomposable (c'est-à-dire de rang 2 (chap. VII)) est que $z \wedge z = 0$, équation qui s'écrit en coordonnées grassmanniennes

$$\xi_{01}\xi_{23} - \xi_{02}\xi_{13} + \xi_{03}\xi_{12} = 0$$

On notera que la forme quadratique $z \wedge z$ est d'indice 3.

<u>Exercices</u>.- 1) Soit K un corps fini à q éléments, E un espace vectoriel de dimension n sur K.

a) Montrer que l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes sur K qui sont de rang m est un ensemble à

$$(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{m-1})$$

éléments (évaluer le nombre de vecteurs de E qui forment avec r vecteurs donnés un système libre de r+1 vecteurs).

b) Déduire de a) que l'ensemble $P_{n,p}(K)$ a un nombre d'éléments égal à

$$\frac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\ldots(q^{n+1}-q^p)}{(q^{p+1}-1)(q^{p+1}-q)\ldots(q^{p+1}-q^p)}$$

c) Déduire de a) que le groupe projectif $\mathbb{P}\mathbb{L}_n(K)$ a un nombre d'éléments égal à

$$(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-2})q^{n-1}\ .$$

2) Montrer que, si K est un corps fini de caractéristique $\neq 2$, à q éléments, le nombre de points d'une quadrique non dégénérée Q dans P(E) (E espace vectoriel de dimension n sur K) est $(q^{n-1}-1)/(q-1)$ si n est impair, et

$$\frac{q^{n-1}-1}{q-1} + \nu q^{\frac{n}{2}-1}$$

avec $\nu = \pm 1$, si n est pair (cf. chap. V, § , exerc.).

3) Montrer qu'un complexe linéaire dans $P_n(K)$ (K commutatif) est identique à l'intersection de la grassmannienne $G_{n,1}(K)$ et d'un hyperplan dans l'espace $P_{h-1}(K)$.

4) Soient K un corps commutatif, p,q,n trois nombres tels que $0 \leq q \leq p < n$; on pose $h=\binom{n+1}{p+1}$, $k=\binom{n-q}{p-q}$. Pour toute variété linéaire projective V de dimension q dans $P_n(K)$, montrer qu'il existe une projectivité de $P_{k-1}(K)$ sur une variété linéaire projective contenue dans $P_{h-1}(K)$, telle que l'image de la grassmannienne $G_{n-q-1,p-q-1}(K)$ par cette projectivité soit identique à la partie de la grassmannienne $G_{n,p}(K)$ formée des variétés linéaires projectives de dimension p qui contiennent V . En déduire que $G_{n,p}(K)$ contient des variétés linéaires projectives de dimension $n-p$. Transformer ces propositions par dualité.

5) Pour que l'intersection d'une quadrique non dégénérée Q et d'une variété linéaire projective V soit une quadrique dégénérée il faut et il suffit que V soit tangente à Q .

6) Soit Q une quadrique non dégénérée dans P(E), d'équation $f(x',x')=0$; montrer que, dans $P(E^*)$, les hyperplans tangents à Q forment une quadrique non dégénérée $\tilde{Q}$, dont l'équation est $g(y',y')=0$, où g est la forme <u>adjointe</u> de f . En identifiant P(E) au dual de $P(E^*)$, montrer que les points de Q sont identiques aux hyperplans tangents à $\tilde{Q}$.

7) Dans un plan projectif (sur un corps commutatif K), soient a,b,c,d quatre points formant un repère projectif ; soient e,f,g les points d'intersection des droites ab et cd , ac et bd , ad et bc ; soit h le point d'intersection de ef et bc ; montrer que g et h sont conjugués harmoniques par rapport à b et c ("théorème du quadrilatère complet"). Cas où K est de caractéristique 2 .

8) Dans un plan projectif $P(E)$ sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$, soit C une conique non dégénérée, a et b deux points distincts de C. A toute droite D passant par a, on fait correspondre la droite D' qui joint b et le second point d'intersection x de D et C si $x \neq a$ et $x \neq b$, la droite ab si $x=a$ (cas où D est tangente à C), la tangente à C en b si $x=b$. Montrer que l'application $D \longrightarrow D'$ est une projectivité de la variété linéaire projective (dans $P(E^*)$) des droites passant par a, sur la variété linéaire projective des droites passant par b, de sorte que la transformée de ab soit distincte de ab. Réciproque. Transformer cette proposition par dualité. Etendre la proposition et sa réciproque au cas où C est dégénérée en deux droites distinctes (K étant cette fois un corps commutatif quelconque), a et b deux points situés tous
Transformer cette proposition par dualité.

9) Dans un plan projectif $P(E)$ sur un corps quelconque K (commutatif ou non), soient D, D' deux droites distinctes, a, b deux points de D distincts de l'intersection de D et D'. A toute droite V passant par a, on fait correspondre la droite V' qui joint b et le point d'intersection de V et D'. Montrer que l'application $V \longrightarrow V'$ est une projectivité de la variété linéaire des droites passant par a sur la variété linéaire des droites passant par b, de sorte que la transformée de ab par cette projectivité soit identique à ab. Montrer que la réciproque est vraie si K est commutatif mais non dans le cas contraire. Transformer par dualité.

10) Dans les mêmes hypothèses que dans l'exerc. 8, soient a, b, c, d quatre points distincts sur C ; si x et y sont deux points quelconques de C, montrer que le rapport anharmonique des droites xa, xb, xc, xd

est égal à celui des droites ya, yb, yc, yd (en convenant que si par exemple x est confondu avec a, xa doit être remplacé par la tangente à C en a). Le rapport anharmonique ainsi défini est dit rapport anharmonique des quatre points a,b,c,d sur C . Transformer par dualité ; montrer que le rapport anharmonique de 4 points distincts de C est égal au rapport anharmonique de leurs tangentes (considèrer la polarité par rapport à C) .

11) Dans les mêmes hypothèses que dans l'exerc.8, soient a,b,a',b' quatre points de C tels que $a\neq b$, $a'\neq b'$, $a\neq a'$, $b\neq b'$. Soit c' un point de C , distinct de a et b , et soit c un point de C distinct de a' et b' ; montrer que les points d'intersection de ac et a'c' , bc et b'c' , ab' et ba' , sont en ligne droite ("théorème de Pascal"; faire varier c sur C et utiliser l'exerc.8) (on convient naturellement que lorsque par exemple a et c sont confondus, la droite ac est remplacée par la tangente à C au point a). Transformer par duálité.

12) Soit P(E) un plan projectif sur un corps commutatif K quelconque ayant au moins 3 éléments ; soient D,D' deux droites distinctes dans P(E), a,c',b trois points de D , a',b',c trois points de D' , ces 6 points étant distincts deux à deux et distincts du point d'intersection de D et D' . Montrer que les points d'intersection de ac et a'c', bc et b'c', ab' et ba', sont en ligne droite ("théorème de Pappus" ; même méthode que dans l'exerc.11). Transformer par dualité.

13) Soit P(E) un plan projectif sur un corps K quelconque (commutatif ou non) ayant au moins 3 éléments ; soient s,a,b,c,a',b',c' sept points de P(E) tels que s,a,b,c et s,a',b',c' forment deux repères projectifs, et que les droites sa, sb, sc passent respectivement par a', b', c'. Montrer que les points d'intersection

de ab et a'b', bc et b'c', ca et c'a' , sont en ligne droite ("théorème de Desargues" ; considérer P(E) comme contenu dans un espace projectif à 3 dimensions, et les points s,a,b,c,a',b',c' comme projections sur P(E) de points de cet espace). Montrer que par transformation par dualité, on obtient la réciproque du théorème.

14) Soit P(E) un espace projectif à 3 dimensions sur un corps commutatif K, D,D' deux droites sans point commun dans P(E) , a,b,c' trois points distincts sur D , a',b',c trois points distincts sur D' . Pour tout point x de P(E), non situé sur une des 6 droites ac, a'c', bc, b'c', ab', ba', montrer que les trois droites passant par x et s'appuyant respectivement sur ac et a'c' , bc et b'c', ab' et ba', sont dans un même plan (utiliser l'exerc.12 quand K a au moins 3 éléments). Transformer par dualité.

15) Soit K un corps commutatif de caractéristique =2 . Pour que deux au moins des rapports anharmoniques de 4 éléments distincts de K soient égaux, il faut et il suffit que les valeurs distinctes de ces rapports soient -1, $\frac{1}{2}$ et 2 , ou soient les racines de l'équation $X^2-X+1=0$ (ce second cas étant aussi possible lorsque K est de caractéristique 2).

§ 2. Géomètrie affine.

<u>Le groupe affine</u>. Soit P(E) un espace projectif (gauche) de dimension (projective) n sur un corps K (commutatif ou non), et soit H_∞ un <u>hyperplan projectif</u> dans P(E) ; on dit que le sous-groupe du groupe projectif $\mathbf{PL}_{n+1}(K)$ formé des transformations projectives qui

laissent *invariant* l'hyperplan H_∞ , est le *groupe affine* à n variables correspondant à l'hyperplan H_∞ . Il est clair que dans $\mathbb{PL}_{n+1}(K)$, deux groupes affines correspondant à deux hyperplans distincts sont *conjugués* puisqu'il existe toujours une transformation projective transformant un hyperplan en un autre. Nous supposerons dans ce qui suit qu'on a fixé l'hyperplan H_∞ , et désignerons par $\mathcal{A}_n(K)$ le groupe affine correspondant.

Toute transformation de $\mathcal{A}_n(K)$ laisse aussi invariant le *complémentaire* F de H_∞ dans P(E) ; montrons que $\mathcal{A}_n(K)$ opère *transitivement* dans F . En effet, si x et y sont deux points distincts de F , et a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n points de H_∞ formant un système (projectivement) libre, les n+1 points $x, a_1, \ldots, a_n$ (resp. $y, a_1, \ldots, a_n$) forment un système libre, donc il existe une transformation projective u telle que u(x)=y et u(x)=y et $u(a_i)=a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; u laisse invariant H_∞ (et même tous les points de H_∞), donc appartient à $\mathcal{A}_n(K)$. D'autre part, la seule transformation du groupe $\mathcal{A}_n(K)$ qui laisse invariant chaque point de F est la transformation identique, car une telle transformation laisse invariant toute droite non contenue dans H_∞ , et par suite son point d'intersection avec H_∞ ; elle laisse donc invariants tous les points de H_∞ , et par suite tous les points de P(E). Le groupe $\mathcal{A}_n(K)$ définit donc sur F une *géomètrie subordonnée* à la géomètrie projective, qu'on appelle *géomètrie affine* ; l'espace F , muni de cette géomètrie, est appelé *espace affine à n dimensions* ; les transformations du groupe $\mathcal{A}_n(K)$ (considéré comme opérant sur F) sont appelées *transformations affines* ou *affinités*. Nous dirons pour abréger que H_∞ est l'*hyperplan à l'infini*.

Toute variété linéaire projective de $P(E)$ contenue dans H_∞ est dite "à l'infini". Si une variété linéaire projective V_0 de dimension p dans $P(E)$ a une trace V non vide sur F (c'est-à-dire n'est pas à l'infini), nous dirons que cette trace est une <u>variété linéaire affine</u> de dimension p de l'espace affine F.

Remarquons maintenant que dans F il existe toujours des systèmes (projectivement) libres de $n+1$ points : en effet, soit a_0 un point de F, et c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ un système libre de n points de H ; sur chacune des droites joignant a_0 et l'un des c_i, il existe un point a_i distinct de a_0 et de c_i, et il est clair que les $n+1$ points a_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ répondent à la question.

On déduit de cette remarque que dans V il existe un système libre de $p+1$ points, qui, dans $P(E)$, engendre donc V_0 ; autrement dit, pour toute variété linéaire affine V de dimension p dans F, il existe une variété linéaire projective V_0 et <u>une seule</u> de dimension p dont la trace sur F soit égale à V ; V_0 est la variété linéaire projective <u>engendrée</u> par V ; puisque V_0 est réunion de V et de la variété linéaire projective $V_0 \cap H_\infty$ de dimension $p-1$, on dira aussi que V_0 est la variété linéaire projective obtenue en <u>complétant</u> V par adjonction de sa "variété à l'infini" $V_0 \cap H_\infty$.

Toute intersection de variétés linéaires affines est évidemment la trace sur F de l'intersection des variétés linéaires projectives qu'elles engendrent ; elle est donc vide ou identique à une variété linéaire affine. La <u>somme</u> d'une famille de variétés linéaires affines (V_ι) est par définition la plus petite variété linéaire affine contenant la réunion des V_ι ; soit $\overline{V}_\iota$ la variété linéaire projective engendrée par V_ι ;

il résulte aussitôt de ce qui précède que la somme des V_i n'est autre que la trace sur F de $\sum_i \overline{V}_i$; on la note encore $\sum_i V_i$.

Prenons dans E une base $(a'_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que les n vecteurs a'_i d'indice $i \geqslant 1$ forment une base de l'hyperplan H'_∞ de E dont H_∞ est l'image canonique. Alors les variétés projectives de dimension $p \leqslant n-1$ contenues dans H_∞ correspondent aux éléments de l'ensemble $P_{n,p}(K)$ qui sont des classes de matrices à p+1 colonnes et n+1 lignes dont la ligne d'indice 0 est nulle ; lorsque K est commutatif, on peut encore dire que ce sont les variétés dont les coordonnées grassmanniennes ξ_H telles que $0 \in H$ sont nulles. On peut donc identifier les variétés linéaires affines aux éléments de $P_{n,p}(K)$ qui sont les classes des matrices dont la ligne d'indice 0 n'est pas nulle, ou encore, lorsque K est commutatif, aux variétés linéaires projectives dont au moins une coordonnée grassmannienne ξ_H telle que $0 \in H$, n'est pas nulle.

Les seules variétés linéaires affines qui soient identiques à la variété linéaire projective qu'elles engendrent sont les points de F . Pour qu'un ensemble de points de F soit (affinement) libre, c'est-à-dire qu'aucun d'eux n'appartienne à la variété linéaire affine engendrée par les autres, il faut et il suffit qu'il soit projectivement libre. Les prop.1 et 2 du § 1 sont alors encore vraies quand on y remplace partout "projectif" par "affine" .

Soient V et W deux variétés linéaires affines de dimensions p,q , et soient $\overline{V}$ et $\overline{W}$ les variétés linéaires projectives qu'elles engendrent ; V+W engendre $\overline{V}+\overline{W}$ qui a donc même dimension s , et on a $s=p+q-r$, où r est la dimension de $\overline{V} \cap \overline{W}$. Si $\overline{V} \cap \overline{W}$ n'est pas à l'infini, elle a pour trace sur F l'intersection $V \cap W$, donc $V \cap W$ est de dimension r .

On dit que deux variétés linéaires affines V, W sont <u>parallèles</u> si la variété à l'infini de l'une est <u>contenue</u> dans celle de l'autre. Lorsqu'il en est ainsi, et que par exemple la variété $\overline{W} \cap H_\infty$ est contenue dans $\overline{V} \cap H_\infty$, ou bien W est contenue dans V ou bien $\overline{V} \cap \overline{W} = \overline{W} \cap H_\infty$. En effet, la dimension de $(\overline{V} \cap H_\infty) \cap (\overline{W} \cap H_\infty)$ est par hypothèse $q-1$; si $\overline{V} \cap \overline{W}$ n'était pas à l'infini, elle serait de dimension q , égale à celle de $\overline{W}$, ce qui entraîne $\overline{W} \subset \overline{V}$ et par suite $W \subset V$. Si on n'a pas $W \subset V$, on a $\dim(V+W) = \dim V + 1$, car si $x \in W$, $\overline{W}$ est engendrée par x et $\overline{W} \cap H_\infty$, d'où $V+W = V+x$.

On notera que deux variétés linéaires affines <u>non parallèles</u> V, W , peuvent être telles que $\overline{V} \cap \overline{W}$ ne soit pas vide et soit à l'infini : par exemple, si $P(E)$ est de dimension 4 , il suffit de considérer dans $P(E)$ deux droites D, D' non dans un même plan et non à l'infini, et de prendre pour $\overline{V}$ et $\overline{W}$ les plans engendrés respectivement par un même point à l'infini a (non situé sur D ni sur D') et par D et D' .

Soit V une variété linéaire affine quelconque dans F , de dimension p ; les <u>restrictions</u> à V des transformations du groupe $\mathcal{A}_n(K)$ qui laissent <u>invariante</u> V forment un groupe isomorphe au groupe affine $\mathcal{A}_p(K)$, et qui opère transitivement dans V (chap. II, § 2, prop. 3) ; on peut donc considérer V , muni de la structure définie par ce groupe, comme un <u>espace affine</u> de dimension p .

<u>Homothéties et translations</u>. Nous allons étudier, dans le groupe affine $\mathcal{A}_n(K)$, le sous-groupe (évidemment <u>distingué</u>) J_n des affinités qui <u>laissent invariant tout point de l'hyperplan à l'infini</u> (ou, ce qui revient au même, qui transforment toute variété linéaire affine en une variété <u>parallèle</u>). Nous sommes ramenés à chercher, dans le groupe

linéaire $GL_{n+1}(K)$ les transformations u' qui laissent invariante chaque droite de l'hyperplan H'_∞ de l'espace vectoriel E dont H_∞ est l'image canonique. La restriction à H'_∞ d'une telle transformation est nécessairement une homothétie centrale (dans H'_∞, cf. § 1) ; donc, en multipliant au besoin u' par un facteur du centre de K, ce qui ne modifie pas l'affinité u image de u', on peut supposer que u' laisse <u>invariant</u> chaque <u>point</u> de H'_∞. Nous allons chercher si l'affinité u correspondant à u' laisse des points de F <u>invariants</u>. Pour celan soit $(a'_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une base de E, dont les n vecteurs a'_i d'indice $\geqslant 1$ sont dans H'_∞ ; on a par hypothèse

(1) $$u'(a'_i) = a'_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

(2) $$u'(a'_0) = \lambda a'_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a'_i \qquad \lambda \neq 0$$

Il faut chercher s'il existe un point $x' = \xi a'_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i a'_i \neq 0$ avec $\xi \neq 0$ et un élément $\rho\neq 0$ de K tels que $u'(x')=\rho x'$, ce qui donne les conditions

$$\xi\lambda = \rho\xi$$

$$(\rho-1)\xi_i = \xi\lambda_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

Si $\lambda\neq 1$, on tire de là $\rho=\xi\lambda\xi^{-1}$, d'où $\rho\neq 1$, puis $\xi_i=\xi(\lambda-1)^{-1}\lambda_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$; si au contraire $\lambda=1$, on a $\rho=1$ puisque $\xi\neq 0$ par hypothèse, et les équations (2) n'ont alors de solution que si $\lambda_i=0$ pour $1\leqslant i\leqslant n$, c'est-à-dire si u' est la transformation identique. Donc :

<u>Proposition 1</u>. <u>Toute affinité qui laisse invariants les points de l'hyperplan à l'infini et qui n'est pas la transformation identique laisse invariant au plus un point de l'espace affine</u>.

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, nous appellerons <u>homothéties</u> les affinités du groupe J_n qui laissent invariant un point (appelé centre de l'homothétie), <u>translations</u> celles qui n'en laissent aucun ;

par abus de langage, la transformation identique sera considérée à la fois comme une homothétie et une translation (impropres). La transformation linéaire u' bien déterminée qui correspond à une translation u sera appelée une <u>transvection</u>.

Soit u une translation, et posons $b' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a'_i$; c'est un vecteur appartenant à H'_∞ et il y a une correspondance biunivoque (déterminée par le choix de a'_0) entre les translations u et les vecteurs de H'_∞ ; on peut d'ailleurs écrire, pour $x = \xi a'_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i a'_i$, $u'(x') = x' + \xi b'$, ou encore, en désignant par f la forme linéaire sur E qui s'annule dans H'_∞ et est égale à 1 au point a'_0

(3) $$u'(x') = x' + f(x')b' .$$

On notera que si K est commutatif, le <u>déterminant</u> d'une transvection est égal à 1 .

Si v est une seconde translation, correspondant au vecteur $c' \in H'_\infty$ et si on pose $w = v \circ u$, on a

$$w'(x') = v'(u'(x')) = u'(x') + f(u'(x'))c' = x' + f(x')b' + f(x')c' + f(x')f(b')c'$$

et comme $f(b')=0$ par hypothèse, $w'(x') = x' + f(x')(b'+c')$. Autrement dit, les transformations forment un <u>sous-groupe abélien</u> T_n <u>de</u> J_n <u>isomorphe au groupe additif</u> K^n . En outre, T_n est <u>distingué</u> dans le groupe affine, comme il résulte aussitôt de la définition d'une translation.

<u>Identifications de l'espace affine et d'un espace vectoriel</u>. L'ensemble F peut être identifié à l'ensemble des droites de l'espace vectoriel E non contenues dans H'_∞ . Chacune de ces droites rencontre donc l'ensemble $a'_0 + H'_\infty$ en un seul point, et réciproquement ; F est donc en correspondance biunivoque avec cet ensemble, auquel nous allons l'<u>identifier</u> (cette identification ne dépendant naturellement que de la <u>classe</u> modulo H'_∞ du point a'_0 dans le groupe additif E).

Cela revient à identifier un point $x \in F$ avec celui des points x' de la droite de E qui lui correspond dont la coordonnée d'indice 0 (par rapport à (a'_i)) est 1 . Il résulte alors de la formule (3) que le transformé $u(x)$ de x par une translation u correspondant au vecteur b' (ou, comme on dira encore, une translation <u>de vecteur</u> b') n'est autre que le point $x+b'$; autrement dit, la restriction de la transvection u' à l'ensemble $a'_0+H'_\infty$ est identique à la restriction à cet ensemble de la translation $x' \to x'+b'$ dans le groupe additif E , ce qui justifie la terminologie introduite.

Ceci prouve aussitôt que si x et y sont deux points quelconques de F, il existe <u>une translation et une seule</u> t telle que $y= t(x)$; on dit que t est <u>le vecteur d'origine x et d'extrémité</u> y , et on pose $y=x+t$ et $t=y-x$; si l'ensemble T_n des translations (ou vecteurs) est identifié comme ci-dessus à H'_∞ , t est identifié au vecteur b' , et le point $x+t$ au point $x+b'$; on a $x+(t+u)=(x+t)+u$, en notant additivement le groupe T_n . Si x,y,x_1,y_1 sont quatre points de F tels que $y-x=y_1-x_1$, on dit que les vecteurs d'origine x (resp. x_1) et d'extrémité y (resp. y_1) sont <u>équipollents</u> ; on a alors, comme il résulte de l'identification précédente, $x_1-x = y_1-y$, autrement dit, les vecteurs d'origine x (resp. y) et d'extrémité x_1 (resp. y_1) sont équipollents, on dit que x,y,x_1,y_1 sont les <u>sommets d'un parallélogramme</u>

A l'aide de la correspondance biunivoque entre T_n et H'_∞ , on peut <u>transporter</u> à T_n la structure d'<u>espace vectoriel</u> (sur K) de H' ; mais ici, si K <u>n'est pas commutatif</u>, cette structure <u>dépend du point</u> a'_0 choisi (ou plutôt de sa classe mod.H'_∞). En effet, si on remplace a'_0 par $\rho a'_0$, la forme linéaire f_1 qui s'annule dans H'_∞ et est égale à 1 au point $\rho a'_0$ est égale à $f\rho^{-1}$, donc la formule (3) s'écrit

$u'(x')=x'+f_1(x')\rho b'$: le vecteur qui correspond à la transvection u' (ou à la translation u) est donc devenu $\rho b'$; si, dans l'identification faite à partir de a'_0 , v était la translation correspondant au vecteur $\lambda b'$, dans l'identification faite à partir de $\rho a'_0$, v correspondra au vecteur $\rho\lambda b'=(\rho\lambda\rho^{-1})\rho b'$, et non au vecteur $\lambda\rho b'$ si K n'est pas commutatif. On ne peut donc définir la translation λt que par rapport à une identification donnée, sauf lorsque K est commutatif, ou λ dans le centre de K .

Lorsque K est commutatif, l'application $x \to x-a_0$ est une application biunivoque de F sur l'espace vectoriel T_n des translations ; si on identifie F à T_n au moyen de cette application, on dit qu'on a identifié l'espace affine F à l'espace vectoriel T_n par choix d'une origine a_0 .

Par l'identification $x \to x-a_0$, les translations dans F deviennent les translations dans le groupe additif T_n , les variétés linéaires affines passant par a_0 sont identifiées aux sous-espaces vectoriels de T_n de même dimension : en effet, en identifiant T_n à H'_∞ , si V est un sous-espace vectoriel de E , de dimension $p+1$, non contenu dans H'_∞ , l'intersection de V et de $a'_0+H'_\infty$ se déduit de $V\cap H'_\infty$ par la translation $x'\to x'+a'_0$.

On est ainsi conduit, dans un espace vectoriel G de dimension n , à appeler variétés linéaires affines de dimension p les transformés par les translations de G des sous-espaces vectoriels de G de dimension p ; ces derniers sont alors les variétés linéaires affines de dimension p passant par 0 ; on les appelle encore variétés linéaires homogènes (en particulier droite homogène, plan homogène, hyperplan homogène pour $p=1,2$ ou $n-1$). Deux variétés linéaires V,W dans G

telle qu'une translation transforme l'une en une variété linéaire contenue dans l'autre, seront encore dites parallèles. En particulier, toute variété linéaire affine V est parallèle à une variété linéaire homogène V_0 de même dimension, et à une seule. Si V est une droite, tout vecteur $a \neq 0$ engendrant la droite V_0 est appelé vecteur directeur de V , et ses composantes sur une base de G les paramètres directeurs de V par rapport à cette base. Avec cette convention, on peut donc dire que, dans ce qui précède, on a identifié F d'abord à l'hyperplan affine $a_0'+H'_\infty$ dans E , puis (par choix d'une origine) à l'hyperplan homogène H'_∞ lui-même.

Soient x_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ des points quelconques de F , λ_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ p éléments de K tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 0$; nous écrirons que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = 0$ lorsque, pour un point $a_0 \in F$, on a $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (x_k - a_0) = 0$ dans l'espace vectoriel T_n . En vertu de la condition $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 0$, cette définition ne dépend pas du point a_0 choisi comme origine, car si on remplace a_0 par $b_0 = a_0 + t$, on a $x_k - b_0 = (x_k - a_0) - t$, d'où $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (x_k - b_0) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (x_k - a_0) + (\sum_{k=1}^{p} \lambda_k) t = 0$. Il résulte immédiatement de cette définition que pour tout $\rho \in K$, on a aussi $\sum_{k=1}^{p} \rho \lambda_k x_k = 0$, et que si μ_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont p éléments de K satisfaisant aussi à $\sum_{k=1}^{p} \mu_k = 0$ et tels que $\sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k = 0$, on a aussi $\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + \mu_k) x_k = 0$.

Proposition 2. Pour que p points x_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ de l'espace affine F soient linéairement dépendants, il faut et il suffit qu'il existe p éléments non tous nuls λ_k de K $(1 \leqslant k \leqslant p)$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 0$ et $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = 0$.

En effet, choisissons pour origine x_1 ; pour que les p points x_k soient dépendants, il faut et il suffit par définition qu'ils appartiennent à une variété linéaire affine de dimension p-2 , qui, après choix de l'origine, devient un sous-espace vectoriel de dimension p-2 ;

il faut et il suffit donc que les p-1 vecteurs $x_k - x_1$ $(2 \leqslant k \leqslant p)$ soient linéairement dépendants, c'est-à-dire qu'il existe p-2 éléments λ_k de K , non tous nuls, et satisfaisant à $\sum_{k=2}^{p} \lambda_k(x_k - x_1) = 0$, d'où la proposition.

Considérons maintenant une affinité u du groupe J_n qui laisse invariant un point a_o de F ; si on prend pour a'_o un point de E dont a_o est l'image canonique, les λ_i sont nuls dans (2), donc si $x' = a'_o + \sum_{i=1}^{n} \xi_i a'_i$ est un point de F (identifié à l'hyperplan $a'_o + H'_\infty$ dans E), on a $u'(x) = \lambda a'_o + \sum_{i=1}^{n} \xi_i a'_i$, et par suite $u(x) = a'_o + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{-1} \xi_i a'_i$, ce qu'on peut encore écrire $u(x) - a_o = \lambda^{-1}(x - a_o)$. L'affinité u est bien identifiée à une <u>homothétie</u> dans l'espace vectoriel T_n lorsqu'on identifie F à T_n par $x \to x - a_o$.

Tout ce qui précède est encore valable lorsque K est non commutatif, à condition de se souvenir que la structure d'espace vectoriel de T_n dépend de l'hyperplan $a'_o + H'_\infty$ choisi dans E .

<u>Repères affines</u>. <u>Coordonnées barycentriques</u>. Soit $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une suite de p points quelconques de F , x un point de F tel que pour une origine a_o de F , on ait $x - a_o = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k(x_k - a_o)$ <u>avec</u> $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$; cette relation équivaut par définition à $x - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = 0$ et ne dépend donc pas de a_o ; on convient d'écrire $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$. Il résulte aussitôt de cette définition que si $x_k = \sum_{h=1}^{q} \rho_{kh} y_h$, avec $\sum_{h=1}^{q} \rho_{kh} = 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on a aussi $x = \sum_{h=1}^{q} \mu_h y_h$, avec $\mu_h = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \rho_{kh}$ pour $1 \leqslant h \leqslant q$.
Si les x_k sont <u>linéairement indépendants</u> , les λ_k sont déterminés de façon <u>unique</u>, car la relation $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda'_k x_k$ entraîne $\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda'_k) x_k = 0$ avec $\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda'_k) = 0$, donc $\lambda_k - \lambda'_k = 0$ pour tout k d'après la prop. 2.

Nous dirons qu'un système libre $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $n+1$ points dans l'espace affine F est un *repère affine*. Si x est un point quelconque de F, x et les a_i sont $n+2$ points linéairement dépendants, donc il existe $n+2$ éléments de K, μ et μ_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ non tous nuls, tels que $\mu+\sum_{i=0}^{n}\mu_i=0$ et $\mu x+\sum_{i=0}^{n}\mu_i a_i=0$ (prop.2) ; on a certainement $\mu\neq 0$ sans quoi les a_i seraient linéairement dépendants ; on peut donc écrire $x=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i a_i$, avec $\lambda_i=-\mu_i/\mu$ et $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1$. Nous venons de voir que les $n+1$ éléments λ_i de K sont bien déterminés par la donnée de x : nous dirons que ce sont les *coordonnées barycentriques* de x par rapport au repère affine (a_i). Si on identifie F à l'espace vectoriel T_n en prenant a_0 pour origine, les a_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont identifiés à une *base* de T_n, et les n coordonnées barycentriques λ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ d'un point x aux *coordonnées* de x par rapport à cette base. Plus généralement, $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k$ $\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k=1\right)$ est identifié à la combinaison linéaire des p vecteurs x_k, de coefficients λ_k.

Si F est identifié à l'hyperplan $a'_0+H'_\infty$ de E, avec a'_0 identifié à a_0, les $n+1$ vecteurs a_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ forment une *base* de l'espace vectoriel E, et les λ_i sont les *coordonnées* du point x par rapport à cette base (ou encore des coordonnées homogènes de x dans $P(E)$ par rapport à la même base). Par rapport à cette base, l'hyperplan $a'_0+H'_\infty$ auquel est identifié F est donc défini par l'équation $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1$, et l'hyperplan homogène parallèle H'_∞ par l'équation $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i=0$.

Il résulte aussitôt de l'une ou l'autre de ces interprétations des coordonnées barycentriques que tout *hyperplan affine* dans F est défini par une équation $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\alpha_i=0$, où les α_i sont $n+1$ éléments de K non tous nuls, mais quelconques ; toute autre équation de l'hyperplan est de la forme $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(\alpha_i\rho)=0$, où $\rho\neq 0$.

L'équation $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i a_i=0$ s'écrit aussi $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(a_i-a_0)=a_0$, d'où l'équation de l'hyperplan dans l'espace vectoriel identifié à F par choix de l'origine a_0 . D'ailleurs il suit directement de la définition d'un hyperplan affine dans un espace vectoriel G que tous les hyperplans parallèles à un même hyperplan homogène d'équation $u(x)=0$ ont pour équations $u(x)=\alpha$ $(\alpha\in K)$,.

Si $x=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i a_i$, $y=\sum_{i=0}^{n}\mu_i a_i$, la translation y-x est le vecteur $(y-a_0)-(x-a_0)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\mu_i)(a_i-a_0)$; lorsqu'on identifie F à T_n en prenant comme origine a_0 , le vecteur y-x a comme composantes $\lambda_i-\mu_i$ par rapport à la base $(a_i)_{1\leq i\leq n}$.

Notons enfin que la variété linéaire affine engendrée par p points x_k est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k$ avec $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k=1$. Les variétés linéaires de dimension p engendrées par p+1 points d'un repère affine sont appelées les <u>variétés coordonnées</u> de ce repère : une telle variété est aussi l'ensemble des points dont n-p coordonnées barycentriques sont nulles.

Ici encore, tout ce qui précède est valable lorsque K est non commutatif, une fois déterminée la structure d'espace vectoriel sur T_n , ou, ce qui revient au même, l'hyperplan affine $a'_0+H'_\infty$ auquel on identifie F ; si on remplace a'_0 par $\rho a'_0$, les coordonnées barycentriques de x par rapport au <u>même</u> repère (a_i) deviennent $\rho\lambda_i\rho^{-1}$ $(0\leq i\leq n)$.

Soit K_1 un surcorps du corps K , E_1 l'espace vectoriel de dimension n+1 sur K_1 obtenu par extension à K_1 du corps des scalaires de E ; on peut considérer l'espace projectif P(E) comme canoniquement <u>plongé</u> dans l'espace projectif $P(E_1)$ (§ 1). Soit $H_\infty^{(1)}$ l'hyperplan projectif dans $P(E_1)$ engendré par l'hyperplan H_∞ de $P(E)$; l'espace affine F est contenu dans l'espace affine F_1, complémentaire de $H^{(1)}_\infty$ dans $P(E_1)$. On vérifie immédiatement qu'un repère affine $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de F est aussi un repère affine de F_1 ; en outre, si on identifie F à un hyperplan $a'_0+H'_\infty$ de E, et F_1 à l'hyperplan (affine) de E_1 engendré par $a'_0+H'_\infty$, F peut être caractérisé comme la partie de F_1 formée des points dont les coordonnées barycentriques par rapport à (a_i) appartiennent à K. Toute variété linéaire affine de dimension p dans F engendre une variété linéaire affine de même dimension dans F_1, définie par les mêmes équations linéaires. Si on choisit dans F et F_1 la <u>même</u> origine a_0, F est identifié à un espace vectoriel de dimension n sur K, et F_1 à l'espace vectoriel obtenu par extension à K_1 du corps des scalaires de F.

<u>Applications linéaires affines</u>. <u>Projections</u>. La notion de transformation affine, définie ci-dessus pour les applications biunivoques de F sur lui-même, peut se généraliser. Soient en effet $P(E_1)$, $P(E_2)$ deux espaces projectifs sur K, de dimensions respectives n et m, H_1, H_2 deux hyperplans projectifs dans $P(E_1)$ et $P(E_2)$ respectivement, F_1 et F_2 les espaces affines complémentaires respectifs de H_1 et H_2. Soit u une projectivité impropre de $P(E_1)$ dans $P(E_2)$, telle que : 1° la variété linéaire projective V de $P(E_1)$ où u n'est pas définie est contenue dans H_1 ; 2° l'image réciproque par u de H_2 est le complémentaire de V par rapport à H_1. La restriction de u à F_1 est alors définie en tout point, et applique F_1 dans F_2 ; on dit que c'est une <u>application linéaire affine</u> (ou <u>affinité</u>) de F_1 dans F_2 ; l'image directe (resp. réciproque) par cette application d'une variété linéaire affine dans F_1 (resp. F_2)

est une variété linéaire affine dans F_2 (resp. F_1). La composée de deux applications linéaires affines est une application linéaire affine.

Soient H'_1, H'_2 les hyperplans homogènes dans E_1 (resp. E_2) dont H_1 et H_2 sont les images canoniques ; la projectivité impropre u provient d'une application linéaire u' de E_1 dans E_2, déterminée à un facteur près appartenant au centre de K ; les conditions imposées à u équivalent à la condition $u'(H'_2)=H'_1$. <u>Identifions</u> une fois pour toutes F_1 et F_2 aux hyperplans (non homogènes) $a'_0+H'_1$ et $b'_0+H'_2$ respectivement, dans E_1 et E_2. Il existe un élément $\rho\in K$ non nul et un seul tel que $u'(a'_0)\equiv \rho b'_0 \pmod{H'_2}$; l'application semi-linéaire (relative à l'automorphisme $\xi \longrightarrow \rho^{-1}\xi\rho$ de K) $x'\longrightarrow\rho^{-1}u'(x')$ applique alors F_1 dans F_2 (avec les identifications faites), et par suite peut être identifiée à l'application linéaire affine u correspondant à u' ; en outre, cette application est <u>bien déterminée</u>, car si on multiplie u' par un facteur γ du centre de K, ρ est multiplié par γ. Si enfin, on remplace a'_0 par $\lambda a'_0$ et b'_0 par $\mu b'_0$, le facteur ρ est remplacé par $\lambda\rho\mu^{-1}$; en particulier, lorsque K est commutatif et $\lambda=\mu$, ρ (et par suite l'application $x'\longrightarrow\rho^{-1}u'(x')$) n'est pas changé.

Soient x_k $(1\leqslant k\leqslant p)$ des points quelconques de F_1 ; on a $u(x_k)=\rho^{-1}u'(x_k)$; si λ_k $(1\leqslant k\leqslant p)$ sont p éléments de K tels que $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k=1$, et si $x=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k$, on a $u(x)=\rho^{-1}u'(x)=\rho^{-1}\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u'(x_k)$, d'où finalement

$$u\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k\right)=\sum_{k=1}^{p}(\rho^{-1}\lambda_k\rho)u(x_k). \tag{4}$$

Si maintenant on identifie F_1 et F_2 aux espaces vectoriels T_n et T_m (ou, ce qui revient au même, aux hyperplans homogènes H'_1 et H'_2) par choix d'origines a_0 $(=a'_0)$ et b_0 $(=b'_0)$, en composant avec u la translation $y\longrightarrow y+(b_0-u(a_0))$, on peut se ramener au cas où $u(a_0)=b_0$;

alors u est identifiée avec l'application $x \to \rho^{-1}u'(x)$ de H'_1 dans H'_2, qui ne dépend pas de a_0 et b_0, mais seulement de u et des choix des hyperplans $a'_0+H'_1$ et $b'_0+H'_2$. On peut donc dire que u est la <u>composée</u> d'une translation, d'une homothétie dans H'_2 et d'une application linéaire de H'_1 dans H'_2.

Soient $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ un repère affine dans F_1, $(b_j)_{0\leq j\leq m}$ un repère affine dans F_2 ; posons $u(a_i)=\sum_{j=0}^{m}\alpha_{ij}b_j$, avec $\sum_{j=0}^{m}\alpha_{ij}=1$; la matrice (α_{ij}) à n+1 lignes et m+1 colonnes est dite <u>la matrice de u par rapport aux repères</u> (a_i) <u>et</u> (b_j) ; c'est aussi la matrice de l'application semi-linéaire $x'\to\rho^{-1}u'(x')$ correspondant à u, par rapport aux bases (a_i) et (b_j) de E_1 et E_2 respectivement. Si $x=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i a_i$, on a, d'après (4), $u(x)=\sum_{j=0}^{m}\mu_j b_j$, avec $\mu_j=\sum_{i=0}^{n}(\rho^{-1}\lambda_i\rho)\alpha_{ij}$. Lorsqu'on identifie F_1 et F_2 à H'_1 et H'_2 par choix des origines a_0 et b_0, les coordonnées de u(x) s'expriment en fonction de celles de x par les formules $\mu_j=\sum_{i=1}^{n}\rho^{-1}\lambda_i\beta_{ij}+\gamma_j$, pour $1\leq j\leq m$, avec $\beta_{ij}=\rho(\alpha_{ij}-\alpha_{0j})$ et $\gamma_j=\alpha_{0j}$; les γ_j sont les composantes du vecteur $u(a_0)-b_0$, et $(\rho^{-1}\beta_{ij})$ est la matrice de l'application semi-linéaire $\rho^{-1}u'$, restreinte à H'_1, par rapport aux bases (a_i-a_0) et (b_j-b_0) de ces deux espaces. Le <u>rang</u> (affine) de u est par définition la dimension de $u(F_1)$; il est immédiat que c'est aussi la dimension de $u'(H'_1)$, autrement dit, le rang de la restriction de u' à l'hyperplan H'_1, et par suite le rang de la matrice (β_{ij}) précédente.

Si on prend arbitrairement les β_{ij}, γ_j et ρ dans les formules précédentes, on vérifie aussitôt qu'on définit ainsi une application linéaire affine u bien déterminée. En particulier :

Proposition 3. Etant donnés un repère affine $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ dans F_1, et $n+1$ points quelconques c_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ dans F_2, il existe une application linéaire affine u de F_1 dans F_2, telle que $u(a_i)=c_i$ pour $0\leqslant i\leqslant n$; si K est commutatif, cette application est unique. Pour que u soit biunivoque, il faut et il suffit que les c_i soient linéairement indépendants.

Corollaire. Si V_1 et V_2 sont deux variétés linéaires affines de même dimension dans F_1 et F_2 respectivement, il existe toujours une application linéaire affine u de F_1 dans F_2 (biunivoque si $\dim F_1 \leqslant \dim F_2$) telle que $u(V_1)=V_2$.

Considérons en particulier les applications linéaires affines u de F_1 dans lui-même ; dans ce qui précède, on prendra toujours $a'_0=b'_0$, et les repères (a_i) et (b_i) identiques ; lorsqu'on remplace a'_0 par $\lambda a'_0$, le facteur ρ est alors remplacé par $\lambda\rho\lambda^{-1}$, autrement dit, est transformé par un automorphisme intérieur de K. La matrice carrée (α_{ij}) est donc, elle aussi, déterminée (par le choix du repère (a_i)) à un automorphisme intérieur près. En particulier, lorsque K est commutatif, l'endomorphisme $x' \longrightarrow \rho^{-1}u'(x')$ de E_1 est entièrement déterminé par u (indépendamment de l'identification de F_1 avec un hyperplan $a'_0+H'_1$) ; sa restriction à H'_1 est un endomorphisme de ce sous-espace, dont le déterminant est par définition le déterminant de l'affinité u : avec les notations précédentes, c'est le déterminant de la matrice carrée $(\rho^{-1}\beta_{ij})$; le déterminant de la composée de deux affinités est alors le produit de leurs déterminants.

Ce qui précède montre aussi que :

Proposition 4. Le sous-groupe de stabilité H_x du groupe des affinités $A_n(K)$, laissant invariant un point x de l'espace affine F , est isomorphe au groupe des di-automorphismes de l'espace vectoriel K^n relatifs aux automorphismes intérieurs de K ; ce groupe est engendré par les homothéties et les automorphismes de K^n . En particulier, si K est commutatif, H_x est isomorphe à $GL_n(K)$.

De façon précise, toute affinité peut être mise d'une seule manière sous forme d'un produit d'une translation et d'une transformation du groupe H_x ; H_x est donc isomorphe au groupe quotient $A_n(K)/T_n$ du groupe des affinités par le groupe des translations. En outre, le groupe quotient $A_n(K)/J_n$ est isomorphe au groupe quotient de H_x par le groupe des homothéties (lui-même isomorphe à K^*) ; il est donc isomorphe au groupe projectif $PL_n(K)$. Lorsque K est commutatif, les affinités de déterminant 1 forment un sous-groupe distingué de $A_n(K)$, appelé groupe affine unimodulaire ; il contient les translations, et son quotient par le groupe des translations est isomorphe au sous-groupe distingué $SL_n(K)$ de $GL_n(K)$ formé des endomorphismes de déterminant 1 (groupe unimodulaire).

Lorsqu'on identifie F à un espace vectoriel, les applications linéaires affines de F dans lui-même laissant invariante l'origine sont dites homogènes ; ce sont les endomorphismes de l'espace vectoriel.

Parmi les applications linéaires affines de F dans lui-même, signalons en particulier les projections parallèles : si F est identifié à T_n , et si V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans T_n , la projection de F sur W parallèlement à V est par définition la projection canonique de T_n sur W relative à la décomposition V+W de T_n en somme directe (chap.II, § 1, n°). On peut encore la définir, en disant qu'à un point $x \in F$, elle fait correspondre l'intersection avec W de la variété linéaire déduite de V par translation et qui passe par x .

Droite affine et droite projective ; prolongement des fonctions rationnelles.

Appliquons ce qui précède au cas où $n=1$ (droite affine). Partons de la droite projective $P_1(K)=P(K^2)$, et prenons-y comme "point à l'infini" le point de coordonnées homogènes $(1,0)$ par rapport à la base canonique (e_1,e_2) de K^2 : ce point est donc l'image canonique de la droite D' d'équation $\eta=0$ dans l'espace vectoriel K^2 ("axe des abscisses") ; on peut alors identifier la droite affine F à la droite $(0,\rho)+D'$; les points de F sont les points de $P_1(K)$ dont les coordonnées homogènes (ξ,η) par rapport à la base canonique de K^2 sont telles que $\eta\neq 0$; un tel point est identifié au point $(\rho\eta^{-1}\xi,\rho)$ de la droite $(0,\rho)+D'$. Le vecteur d'origine x_1 et d'extrémité x_2 est alors identifié à l'élément $\rho(\eta_2^{-1}\xi_2-\eta_1^{-1}\xi_1)$ de K . Si x_1 et x_2 sont deux points distincts de F , ils forment un repère affine, et tout point $x \in F$ peut s'écrire d'une seule manière $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$: on dit que λ est le <u>rapport du vecteur</u> $x-x_2$ <u>au vecteur</u> x_1-x_2 ; il est donné par

$$\lambda=\rho(\eta^{-1}\xi-\eta_2^{-1}\xi_2)(\eta_1^{-1}\xi_1-\eta_2^{-1}\xi_2)^{-1}\rho^{-1}$$

et est transformé par un automorphisme intérieur de K si on change l'élément ρ . Si K n'est pas de caractéristique 2 , le point $x=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$, correspondant à $\lambda=\frac{1}{2}$, est appelé le <u>milieu</u> du segment d'extrémités x_1,x_2 : il ne dépend pas du choix de ρ . Si u est une affinité de F , le rapport du vecteur $u(x)-u(x_2)$ au vecteur $u(x_1)-u(x_2)$ est de la forme $\mu\lambda\mu^{-1}$; il est égal à λ si λ est dans le centre de K , ou si K est commutatif ; dans ce dernier cas, c'est donc un <u>invariant</u> des trois points x,x_1,x_2 pour toute affinité.

Plus généralement, si K est commutatif, et si D est une droite affine dans un espace affine F_1 de dimension quelconque, x_1, x_2 et x trois points de D tels que $x_1 \neq x_2$, on peut écrire d'une seule manière $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, et λ est encore appelé rapport du vecteur $x-x_2$ au vecteur x_1-x_2 : c'est encore un invariant par toute transformation affine dont la restriction à D est biunivoque. Si ω est le point à l'infini de D, on vérifie aussitôt que λ est égal au rapport anharmonique (x_2, x_1, x, ω) (§ 1).

Si on identifie la droite affine F au corps K en prenant le point $(0,\rho)$ comme origine, le point x, de coordonnées homogènes (ξ, η) est identifié à l'élément $\lambda = \rho\eta^{-1}\xi$ de K ; toute affinité de F est alors identifiée à une application $\lambda \longrightarrow \delta^{-1}\lambda\beta + \gamma$, où β et γ sont quelconques, et $\delta \neq 0$; lorsque K est commutatif, ces applications se ramènent à la forme $\lambda \longrightarrow \beta\lambda + \gamma$; β est le déterminant de l'affinité.

Désignons maintenant par $\tilde{K}$ un ensemble "somme" du corps K et d'un élément que nous noterons ∞ et appellerons "point" à l'infini de $\tilde{K}$). On peut identifier une fois pour toutes la droite projective $P_1(K) = P(K^2)$ à l'ensemble $\tilde{K}$, en identifiant le point de coordonnées homogènes (ξ, η) (par rapport à la base canonique de K^2) à l'élément $\eta^{-1}\xi$ de $\tilde{K}$ si $\eta \neq 0$, et à l'élément ∞ si $\eta = 0$; la droite affine F est alors identifiée à K par le choix de $\rho = 1$ et de l'origine $(0,1)$. On peut encore dire que l'on a identifié à $\tilde{K}$ l'ensemble des droites homogènes de l'espace vectoriel K^2 ; l'élément μ de $\tilde{K}$ auquel est identifié une telle droite s'appelle sa pente par rapport aux axes Ke_2, Ke_1 (dans cet ordre) ; on dit aussi par définition que c'est la pente de toute droite affine de K^2 parallèle à la droite homogène considérée.

Lorsque K est commutatif, l'immersion de K dans l'ensemble $\tilde{K}$ permet de <u>prolonger</u> en certains points les <u>fonctions rationnelles</u> à coefficients dans K , définies dans K^n . On sait (chap.VI) qu'une telle fonction u peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $x \to f(x)/g(x)$, où f et g sont deux polynomes <u>étrangers</u>, déterminés à un facteur près $\neq 0$; l'ensemble où la fonction est définie est le complémentaire dans K^n de l'ensemble des x tels que $g(x)=0$. Cela étant, on peut identifier u à l'application $x \to (f(x),g(x))$ de K^n dans la droite projective $P_1(K)$; aux points $x_0 \in K^n$ tels que $g(x_0)=0$ mais $f(x_0)\neq 0$, on peut donc <u>prolonger</u> u en lui donnant la valeur $(1,0)$; il revient au même de prolonger u en ces points en lui donnant la valeur ∞ ; on dit que les points x_0 de cette nature sont les pôles de la fonction rationnelle u . On notera que si $n \geqslant 2$, il peut y avoir des points $x_0 \in K^n$ où f et g soient tous deux nuls (il suffit de prendre $n=2$, $f=x_1x_2$, $g=x_1^2+x_2^2$; f et g s'annulent au point $(0,0)$ et sont étrangers).

Considérons plus particulièrement le cas $n=1$; alors, en tout point $x_0 \in K$ où $g(x_0)=0$, on a $f(x_0)\neq 0$ puisque f et g , étant étrangers, ne peuvent avoir de racine commune ; on peut donc dans ce cas prolonger la fonction rationnelle u à K tout entier. Mais on peut aller plus loin, en considérant non seulement l'ensemble des valeurs de u , mais l'ensemble où elle est définie, comme <u>plongés dans</u> $\tilde{K}$. Si on identifie (comme ci-dessus) $\tilde{K}$ à $P_1(K)$, l'élément x de K est identifié au point de coordonnées homogènes (x_1,x_2) telles que $x_1\ x_2=x$. Soient p et q les degrés de f et g , et considérons les polynomes à deux indéterminées $f_1(X_1,X_2)=X_2^p f(X_1/X_2)$, $g_1(X_1,X_2)=X_2^q g(X_1/X_2)$; l'application u peut alors être identifiée à l'application $(x_1,x_2) \to (x_2^{q-p}f_1(x_1,x_2),g_1(x_1,x_2))$

de K dans $P_1(K)$ si $q \geqslant p$, à l'application $(x_1,x_2) \to (f_1(x_1,x_2),$ $x_2^{p-q} g_1(x_1,x_2))$ si $q \leqslant p$; or, cette application est encore définie au point $(1,0)$, ayant pour valeur en ce point $(0,1)$ si $q > p$, $(1,0)$ si $q < p$ et (a_o,b_o) si $q=p$, en désignant par a_o et b_o les coefficients dominants de f et g . On peut ainsi prolonger u à $P_1(K)$ tout entière, ou, par identification de $P_1(K)$ et de $\tilde{K}$, à $\tilde{K}$ <u>tout entier</u> : on obtient ainsi une application de $\tilde{K}$ dans lui-même qui, aux pôles de u prend la valeur ∞ , et pour $x=\infty$ prend la valeur 0 si $q > p$, la valeur ∞ si $q < p$ et la valeur a_o/b_o si $q=p$; on convient de dire que le produit ∞ est un zéro d'ordre $q-p$ de u dans le premier cas, un pôle d'ordre $p-q$ dans le second. En particulier, toute transformation du groupe projectif $PL_2(K)$, qui peut s'écrire

$$(x_1,x_2) \to (\alpha x_1+\beta x_2, \gamma x_1+\delta x_2) \qquad \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$$

est (après identification de $P_1(K)$ et de $\tilde{K}$) identifiée au prolongement à $\tilde{K}$ de la fonction rationnelle $x \to (\alpha x+\beta)/(\gamma x+\delta)$, dite <u>fonction homographique</u>.

En particulier, si x,y,z,t sont quatre points distincts de K , on a défini au §1 le <u>rapport anharmonique</u> $(x,z,y,t)=(x-y)(z-t)/(x-z)(y-t)$; c'est une fonction homographique de chacune des 4 variables x,y,z,t , donc on peut la prolonger pour l'une quelconque d'entre elles, par exemple x , en prenant (z,z,y,t) égal à ∞ et (∞,z,y,t) égal à 1 ; on voit ainsi, en tenant compte des relations entre les divers rapports anharmoniques des 4 points x,y,z,t , qu'on peut toujours définir ces rapports lorsque les 4 points appartiennent à K , deux au plus étant confondus.

<u>Géomètrie affine sur un corps ordonné</u>. Soit F un espace affine de dimension n sur un corps commutatif <u>ordonné</u> K (chap. VI) ; nous supposerons qu'on a choisi une origine dans F et identifierons donc une fois pour toutes F à K^n. Soit V une variété linéaire affine de dimension p , W une sous-variété linéaire affine de V , de dimension p-1 ; considérons un repère affine de V , formé de p+1 points a_i $(0 \leqslant i \leqslant p)$ tel que les points $a_1, \ldots, a_p$ forment un repère affine de W ; tout point $x \in V$ s'écrit d'une seule manière $x = \lambda_0 a_0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$, avec $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$; en posant $y = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_0} a_i$ si $\lambda_0 \neq 1$, on voit que tout point $x \neq a_0$ peut s'écrire sous la forme $x = \lambda_0 a_0 + (1-\lambda_0) y$, où y est un point de W bien déterminé ; on étend encore cette relation au cas $x = a_0$, avec $\lambda_0 = 1$, y étant alors quelconque dans W . Cela étant, nous dirons que l'ensemble des points x tels que $\lambda_0 \geqslant 0$ (resp. $\lambda_0 \leqslant 0$) est une <u>demi-variété fermée</u> de V , déterminée par W ; nous dirons de même que l'ensemble des points x tels que $\lambda_0 > 0$ (resp. $\lambda_0 < 0$) est une <u>demi-variété ouverte</u> de V , déterminée par W ; une demi-variété fermée est évidemment la réunion de W et d'une demi-variété ouverte ; les deux demi-variétés fermées (resp. ouvertes) de V déterminées par W sont dites <u>opposées</u>. W est appelée le <u>bord</u> des demi-variétés qu'elle détermine. Il résulte aussitôt de cette définition que V est réunion des deux demi-variétés fermées déterminées par W ; deux points de V qui appartiennent à la même demi-variété fermée (resp. ouverte) déterminée par W , sont dits <u>du même côté de</u> W (resp. <u>strictement du même côté de</u> W). Il résulte de la formule (4) que toute affinité de F transforme une demi-variété linéaire fermée (resp. ouverte) en une demi-variété linéaire fermée (resp. ouverte) de même dimension.

Lorsque $p=n$, c'est-à-dire $V=F$, W est un hyperplan, et les demi-variétés correspondantes sont alors appelées <u>demi-espaces</u> déterminés par W . Si $u(x)=\alpha$ est une équation de W (u forme linéaire $\neq 0$, $\alpha \in K$), pour tout $x=\lambda_0 a_0+(1-\lambda_0)y$, on a $u(x)=\lambda_0 u(a_0)+(1-\lambda_0)\alpha$, et comme $u(a_0)-\alpha \neq 0$, on voit que les demi-espaces fermés (resp. ouverts) déterminés par W peuvent être caractérisés par les conditions $u(x) \geqslant \alpha$, $u(x) \leqslant \alpha$ (resp. $u(x) > \alpha$, $u(x) < \alpha$) .

Lorsque $p=1$, c'est-à-dire lorsque V est une <u>droite</u>, W est un point b sur V , et les demi-variétés correspondantes sont appelées les <u>demi-droites</u> (fermées ou ouvertes) <u>d'origine b</u>. Si u est un vecteur directeur de la droite V, les points d'une demi-droite fermée (resp. ouverte) d'origine b sont les points $b+\rho u$ avec $\rho \geqslant 0$ ou $\rho \leqslant 0$ (resp. $\rho > 0$ ou $\rho < 0$) ; la demi-droite fermée (resp. ouverte) formée de ~~ces points te~~ ces points tels que $\rho \geqslant 0$ (resp. $\rho > 0$) est dite <u>de même sens</u> que u et on dit que u est un <u>vecteur directeur</u> pour cette demi-droite, et ses composantes sur une base de F des <u>paramètres directeurs</u> de la demi-droite correspondante ; tout autre vecteur directeur de cette demi-droite est alors de la forme λu avec $\lambda > 0$; $-u$ est un vecteur directeur pour la demi-droite opposée.

On dit que deux demi-variétés fermées (resp. ouvertes) de même dimension sont <u>parallèles et de même sens</u> s'il existe une translation transformant l'une dans l'autre ; s'il existe une translation transformant l'une en l'opposée de l'autre, on dit que les deux demi-variétés sont <u>parallèles et de sens contraires</u>. Pour que deux demi-droites soient parallèles et de même sens, il faut et il suffit qu'elles aient même vecteur directeur.

Etant donnés deux points a,b de F, on appelle <u>segment fermé d'extrémités</u> a et b l'ensemble des points $x=\lambda a+(1-\lambda)b$ tels que $0\leqslant\lambda\leqslant 1$; si $a\neq b$, on appelle de même <u>segment ouvert</u> d'extrémités a,b l'ensemble des $x=\lambda a+(1-\lambda)b$ avec $0<\lambda<1$; c'est le complémentaire, par rapport au segment fermé d'extrémités a,b, de l'ensemble $\{a,b\}$; enfin, l'ensemble des $x=\lambda a+(1-\lambda)b$ tels que $0<\lambda\leqslant 1$ est dit <u>segment fermé en</u> a, <u>ouvert en</u> b. Le <u>milieu</u> des segments d'extrémités a et b leur appartient.

<u>Orientation de l'espace</u>. Prenons dans F une origine, et identifions ainsi F à un espace vectoriel. L'espace $\bigwedge^n F$ des n-vecteurs sur K, est, comme on sait, de dimension 1 sur K ; soit e une base de cet espace ; tout n-vecteur sur F est donc de la forme μe $(\mu\in K)$. On dit que deux n-vecteurs non nuls λe, μe, ont <u>même orientation</u> si λ et μ sont de même signe, et ont des <u>orientations opposées</u> si λ et μ sont de signes contraires ; il est immédiat que ces définitions ne dépendent pas de la base e de $\bigwedge^n F$. Les n-vecteurs $\neq 0$ sur F se répartissent donc en deux classes d'équivalence ; on dit que l'une de ces classes est formée des n-vecteurs <u>directs</u>, l'autre des n-vecteurs <u>rétrogrades</u> ; il y a évidemment deux manières de choisir ces dénominations ; lorsqu'on en choisit une, on dit qu'on donne une <u>orientation</u> à l'espace. Si on prend alors une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $e=e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n$ soit un n-vecteur direct, les n-vecteurs directs sont les n-vecteurs λe avec $\lambda>0$.

Si u est un automorphisme de l'espace vectoriel F, son extension aux n-vecteurs est telle que $u(\lambda e)=(\det u).\lambda e$; si $\det u>0$, u transforme donc tout n-vecteur en un n-vecteur de <u>même orientation</u> : on dit que u <u>conserve l'orientation</u>. Les automorphismes de F conservant l'orientation forment un sous-groupe distingué $\mathbf{GL}_n^+(K)$ du groupe linéaire $\mathbf{GL}_n(K)$, d'indice 2 . Par définition, une affinité de F est dite <u>conserver l'orientation</u> lorsque la transformation linéaire homogène qui lui correspond conserve l'orientation, ou, ce qui revient au même, quand son déterminant est >0 . En particulier, les translations conservent l'orientation. Il en résulte aussitôt que, pour qu'une affinité quelconque conserve l'orientation, il faut et il suffit que le déterminant de sa matrice (d'ordre n+1) par rapport à un repère affine quelconque, soit >0 .

On appelle <u>repère affine ordonné</u> une <u>séquence</u> (chap.I, §1,n°2) $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de n+1 points formant un repère affine ; de tout repère affine on déduit (n+1)! repères ordonnés en rangeant ses points dans un certain ordre. L'espace étant orienté, on dit qu'un repère ordonné $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est <u>direct</u> si l'affinité u telle que $u(a_0)=0$, $u(a_i)=e_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ (où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base telle que le n-vecteur $e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n$ soit direct) conserve l'orientation ; il est dit <u>rétrograde</u> dans le cas contraire. Si π est une permutation quelconque de $\mathfrak{S}_{n+1}$, il résulte de cette définition, que le repère ordonné $(a_{\pi(i)})_{0\leqslant i\leqslant n}$ a même orientation que $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ si la permutation π est <u>paire</u>, et a une orientation opposée dans le cas contraire : en effet, l'affinité u telle que $u(a_i)=a_{\pi(i)}$ a pour matrice par rapport au repère $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ la matrice de la permutation π (chap.II, §6,n°5), et son déterminant est donc égal à la signature ε_π de π (cf.chap.III, §6,n°1).

Soient V et W deux sous-espaces vectoriels <u>supplémentaires</u> dans F , de dimensions p et n-p respectivement. Si <u>un</u> au moins des deux nombres p,n-p est <u>pair</u>, à toute orientation de V on peut faire correspondre une orientation bien déterminée de W : en effet, si a et un p-vecteur produit de p vecteurs de V, b un (n-p-vecteur produit de $n-p$ vecteurs de W, on a $a \wedge b = b \wedge a = \lambda e$, où e est un n-vecteur direct ; si a est un p-vecteur direct pour l'orientation choisie dans V, l'orientation correspondante dans W sera celle pour laquelle les $(n-p)$-vecteurs directs b sont tels que λ soit $\geqslant 0$; la relation entre ces deux orientations est symétrique.

Secteurs angulaires. Plaçons-nous maintenant dans un plan affine F $(n=2)$, que nous supposerons orienté. Soient D_1, D_2, D_3 trois demi-droites d'origine O, u_1, u_2, u_3 des vecteurs directeurs de ces demi-droites; nous dirons que la séquence (D_1, D_2, D_3) est directe si parmi les bivecteurs $u_1 \wedge u_2$, $u_2 \wedge u_3$, $u_3 \wedge u_1$, deux au moins sont directs ou nuls. Il résulte aussitôt de cette définition que si π est une permutation quelconque de $\mathfrak{S}_3$, la séquence $(D_{\pi(1)}, D_{\pi(2)}, D_{\pi(3)})$ est directe ou non suivant que π est paire ou non. Tout automorphisme de l'espace vectoriel F conservant l'orientation transforme une séquence directe en une séquence directe.

Considérons maintenant deux demi-droites quelconques D, D' d'origine O ; on appelle secteur angulaire fermé de sommet O d'origine D et d'extrémité D' l'ensemble $S(D,D')$ des demi-droites Δ d'origine O telles que la séquence (D, Δ, D') soit directe ; D et D' sont encore appelés les cotés du secteur. Nous allons examiner ce qu'est cet ensemble dans les divers cas possibles ; nous désignerons par u et v des vecteurs directeurs respectifs de D et D'.

Supposons d'abord que le bivecteur $u \wedge v$ soit direct ; alors prenons u et v comme base de F, et soit $w = \lambda u + \mu v$ un vecteur directeur d'une demi-droite Δ : on a $u \wedge w = \mu u \wedge v$,

$w\wedge v = \lambda u\wedge v$, $v\wedge u = -u\wedge v$; comme $u\wedge v$ est direct, pour que Δ appartienne au secteur angulaire d'origine D et d'extrémité D' il faut et il suffit que $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$. On dit dans ce cas que le secteur S(D,D') est <u>saillant</u>.

Si au contraire $u\wedge v$ est <u>rétrograde</u>, le même calcul prouve que pour que Δ appartienne à S(D,D'), il faut et il suffit que <u>l'un</u> des deux éléments λ, μ soit $\geqslant 0$. On dit alors que S(D,D') est <u>rentrant</u>.

Supposons maintenant que D et D' soient <u>opposées</u> ; on peut donc supposer $v = -u$; comme $w\wedge v = -w\wedge u = u\wedge w$, et que $u\wedge v = 0$, le secteur S(D,D') est dans ce cas l'ensemble des demi-droites Δ telles que $u\wedge w$ soit direct ou nul, c'est-à-dire un <u>demi-plan fermé</u> déterminé par la droite réunion de D et D' ; on dit encore que S(D,D') est un secteur angulaire <u>plat</u>.

Enfin, si D et D' sont <u>confondues</u>, on peut supposer $v = u$, d'où $w\wedge v = -u\wedge w$; comme $u\wedge v = 0$, <u>toute demi-droite</u> appartient à S(D,D') qui est donc dans ce cas le plan tout entier.

Lorsque $D \neq D'$, il résulte aussitôt de ce qui précède que les secteurs S(D,D') et S(D',D), qui sont dits <u>opposés</u>, ont pour réunion le plan et pour intersection la réunion des demi-droites D,D' ; si l'un est saillant, l'autre est rentrant. Si D_o est la demi-droite opposée à D, le secteur $S(D,D_o)$ est contenu dans S(D,D') si ce dernier est rentrant, il le contient si S(D,D') est saillant. Dans ce dernier cas, le secteur angulaire $S(D',D_o)$ est dit supplémentaire de S(D,D').

Le complémentaire de $D\cup D'$ par rapport à S(D,D') est appelé <u>secteur angulaire ouvert</u> de sommet O d'origine D et d'extrémité D'.

Tout ensemble obtenu par translation à partir d'un secteur angulaire de sommet O est encore dit secteur angulaire de sommet a , si a est le transformé de O par la translation considérée.

Dans un secteur angulaire S(D,D'), on peut définir une structure d'ensemble <u>totalement ordonné</u> de la façon suivante : si Δ et Δ' sont deux demi-droites du secteur, on posera $\Delta \leqslant \Delta'$ si la séquence (D, Δ, Δ') est <u>directe</u> ; la vérification des axiomes des ensembles totalement ordonnés est immédiate. Si $\Delta \leqslant \Delta'$ dans S(D,D'), le secteur angulaire fermé $S(\Delta, \Delta')$ n'est autre alors que l'<u>intervalle fermé</u> des demi-droites Δ'' telles que $\Delta \leqslant \Delta'' \leqslant \Delta'$.

Notons enfin que toute affinité conservant l'orientation transforme un secteur angulaire saillant (resp. rentrant) en un secteur angulaire saillant (resp. rentrant).

<u>Exercices</u>.- 1) Montrer que si u et v sont deux homothéties, et si uv est une homothétie, les centres de ces trois homothéties sont en ligne droite. Que peut-on dire lorsque uv est une translation ?

2) Si $b-a$ et b_1-a_1 sont deux vecteurs équipollents et si le corps K n'est pas de caractéristique 2 , montrer que les milieux des segments ab_1 et ba_1 sont identiques ; que peut-on dire de ces deux segments lorsque K est de caractéristique 2 ?

3) Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Si a,b,c,d sont quatre points quelconques, montrer que les milieux des segments ab, bc, cd, da sont les sommets d'un parallélogramme.

4) Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$ et ayant au moins 5 éléments, et soit F un plan affine sur le corps K . Soient a,b,c,d quatre points de F tels que ab rencontre cd en un point e , et que bc rencontre ad en un point f . Montrer que les milieux des segments ac, bd, ef sont en ligne droite.

5) Soit K un corps dont la caractéristique est $\neq 2$ et $\neq 3$. Si a,b,c sont trois points non en ligne droite, a',b',c' les milieux des segments bc, ca, ab, montrer que les droites aa', bb', cc' passent par le point $(a+b+c)/3$, qu'on appelle <u>centre de gravité</u> des 3 points a,b,c. Que devient cette propriété lorsque K est un corps de caractéristique 3 ? Généraliser à n points linéairement indépendants.

6) Soit K un corps ordonné, F un espace affine de dimension n sur K. Montrer que, pour tout couple de demi-variétés de même dimension $p \leqslant n-1$, il existe une affinité conservant l'orientation et transformant une de ces demi-variétés dans l'autre. Il en est de même si $p=n$ et si n est pair.

7) Soit K un corps ordonné, F un plan affine sur K. Montrer que pour tout couple de secteurs angulaires saillants (resp. rentrants), il existe une affinité conservant l'orientation et transformant un de ces secteurs en l'autre.

8) Soit K un corps ordonné, F un plan affine sur K. Montrer que l'ensemble ordonné S(D,D') a une structure d'ordre isomorphe à celle de l'intervalle $[-1,+1]$ dans K (l'établir d'abord pour un secteur angulaire saillant).

§ 3. Géomètrie euclidienne et géomètrie hermitienne.

<u>Groupe des similitudes</u>. Soit K un corps commutatif de caractéristique =2, E un espace vectoriel de dimension n+1 sur K, F un espace affine de dimension n sur K, complémentaire dans P(E) de l'hyperplan à l'infini H_∞. Considérons <u>dans</u> H_∞ une <u>quadrique</u> non dégénérée et non vide Q ;

nous dirons que le sous-groupe du groupe projectif $\mathbb{P}\mathbb{L}_{n+1}(K)$ formé des transformations projectives qui laissent invariante la quadrique Q, est le groupe des similitudes $\mathcal{S}m_n(K,Q)$ correspondant à la quadrique Q, les transformations de ce groupe étant appelées similitudes (relatives à Q). Il est clair que toute similitude laisse invariante la variété linéaire projective engendrée par Q, c'est-à-dire H_∞ ; c'est donc une affinité, autrement dit $\mathcal{S}m_n(K,Q)$ est un sous-groupe du groupe affine $A_n(K)$. D'autre part, toute affinité laissant invariants tous les points de H_∞ est évidemment une similitude ; en d'autres termes (§ 2), les translations et les homothéties sont des similitudes.

Nous allons déterminer les similitudes de façon plus précise. On a vu au § 1 que si x est un point de H_∞, non situé sur Q, son hyperplan polaire par rapport à Q est déterminé par les conjugués harmoniques de x par rapport aux points d'intersection de Q et de n droites passant par x, rencontrant Q et engendrant H_∞. On en déduit aussitôt que si u est une similitude quelconque, x et y deux points de H_∞ conjugués par rapport à Q, $u(x)$ et $u(y)$ sont aussi conjugués par rapport à Q. Considérons alors dans E l'hyperplan homogène H'_∞ correspondant à H_∞, et soit $f(x')$ une forme quadratique de rang n dans H'_∞ telle que $f(x')=0$ soit une équation de Q ; on sait que f est déterminée à un facteur $\neq 0$ près ; nous noterons $\langle x',y'\rangle$ la forme bilinéaire (de rang n) polaire de la forme f. Considérons alors l'automorphisme u' de l'espace vectoriel H'_∞, correspondant à une similitude u (§ 2) ; ce que nous venons de dire prouve que la relation $\langle x',y'\rangle = 0$ entraîne $\langle u'(x'),u'(y')\rangle = 0$.

<u>Proposition 1</u>. <u>Si</u> u' <u>est un automorphisme de l'espace vectoriel</u> H'_∞ <u>tel que la relation</u> $\langle x',y'\rangle = 0$ <u>entraîne</u> $\langle u'(x'),u'(y')\rangle = 0$, <u>il existe un élément</u> $\lambda \neq 0$ <u>de</u> K <u>tel que l'on ait identiquement</u>

(1) $$\langle u'(x'),u'(y')\rangle = \lambda \langle x',y'\rangle .$$

En effet, soit (e'_i) une base orthogonale de H'_∞ , et posons $\langle e'_i,e'_i\rangle = \rho_i \neq 0$; par hypothèse, on a $\langle u'(e'_i),u'(e'_j)\rangle = 0$ pour $i \neq j$; posons $\langle u'(e'_i),u'(e'_i)\rangle = \lambda_i$; on peut alors écrire, pour $x' = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e'_i$, $y' = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e'_i$, $\langle x',y'\rangle = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \xi_i \eta_i$, $\langle u'(x'),u'(y')\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i$; prenons tous les $\eta_i = 1$, tous les ξ_k d'indices $\neq i$ et $\neq j$ nuls, $\xi_i = \rho_j$ et $\xi_j = -\rho_i$; on a $\langle x',y'\rangle = 0$, donc $\langle u'(x'),u'(y')\rangle = 0$, ce qui donne $\lambda_i \rho_j - \lambda_j \rho_i = 0$. Comme on ne peut avoir identiquement $\langle u'(x'),u'(y')\rangle = 0$ dans H'_∞ (car u' est un automorphisme, donc il existe des x' tels que $\langle u'(x'),u'(x')\rangle \neq 0$) les λ_i ne peuvent être tous nuls ; on a alors nécessairement $\lambda_i = \lambda \rho_i$, où $\lambda \neq 0$, ce qui établit la proposition.

L'élément λ (qu'on note encore $\lambda(u)$) est appelé le <u>multiplicateur</u> de la similitude u .

On notera que le multiplicateur $\lambda(u)$ ne peut prendre des valeurs quelconques dans K en général, puisque la forme $\lambda\langle x',y'\rangle$ doit, d'après (1) être <u>équivalente</u> à $\langle x',y'\rangle$; par exemple si K est <u>ordonné</u>, et si la <u>signature</u> (p,q) de f est telle que $p \neq q$, λ ne peut prendre de valeurs ≤ 0 dans K .

Nous allons maintenant élargir la définition du groupe des similitudes donnés ci-dessus. Si f est une forme quadratique <u>quelconque</u> de rang n dans H'_∞ , (admettant ou non des droites isotropes) et si on note $\langle x',y'\rangle$ sa forme polaire, nous dirons qu'une affinité u est une <u>similitude</u> relativement à la forme f si l'unique automorphisme u' de H'_∞

qui lui correspond est tel que la relation $\langle x',y'\rangle=0$ entraîne $\langle u'(x'),u'(y')\rangle=0$, ou encore, vérifie identiquement la relation (1); nous désignerons par $\mathcal{S}m_n(K,f)$ le groupe formé de ces similitudes ; il est clair qu'il reste le même lorsqu'on remplace f par αf ($\alpha\neq0$), et que les translations et les homothéties sont encore des similitudes avec cette nouvelle définition. On notera que pour que u soit une similitude il suffit qu'il existe une base orthogonale (e'_i) de H'_∞ telle que $(u'(e'_i))$ soit une base orthogonale et qu'on ait $\langle u'(e'_i),u'(e'_i)\rangle = \lambda\langle e'_i,e'_i\rangle$ pour $1\leqslant i\leqslant n$.

Il est évident qu'on a pour 2 similitudes u,v , $\lambda(u\circ v)=\lambda(u)\lambda(v)$; $u\to\lambda(u)$ est donc une <u>représentation</u> du groupe $\mathcal{S}m_n(K,f)$ dans K .

Soit (e'_i) une base orthogonale quelconque de H'_∞ , $\underline{R}$ la matrice diagonale de la forme f , $\underline{U}$ la matrice de u' par rapport à cette base ; la relation (1) est équivalente à

(2) $$^t\underline{U}.\underline{R}.\underline{U} = \lambda\underline{R}$$

On en tire en particulier

(3) $$(\det\underline{U})^2 = \lambda^n$$

Si n est <u>impair</u>, on déduit de (3) que λ est un <u>carré</u> μ^2 , d'où $\det\underline{U}=\pm\mu^n$; si au contraire n est <u>pair</u> , on a en posant $n=2m$, $\det\underline{U}=\pm\lambda^m$; les similitudes u de déterminant égal à $(\lambda(u))^m$ sont dites <u>similitudes directes</u>, les autres <u>similitudes inverses</u> ; les similitudes directes forment un <u>sous-groupe distingué</u> $\mathcal{S}m^+_n(K,f)$ d'indice 2 dans $\mathcal{S}m_n(K,f)$.

Comme le groupe des similitudes contient les translations, il opère <u>transitivement</u> dans l'espace affine F , et la seule similitude laissant invariant chaque point est la transformation identique ; le groupe $\mathcal{S}m_n(K,f)$ définit donc sur F une <u>géométrie subordonnée</u> à la géométrie affine.

qu'on appelle <u>géomètrie euclidienne</u> (relative à la forme f) ; l'espace F, muni de cette géomètrie est appelé <u>espace euclidien à n dimensions</u> (relatif à la forme f). Lorsque Q n'est pas vide, on l'appelle l'<u>ombilicale</u> de F.

<u>Groupe des déplacements</u>. L'ensemble des similitudes de multiplicateur 1 est un <u>sous-groupe distingué</u> $\mathcal{D}_n(K,f)$ de $\mathcal{S}m_n(K,f)$, le groupe quotient correspondant $\mathcal{S}m_n(K,f)/\mathcal{D}_n(K,f)$ étant un groupe abélien isomorphe à un sous-groupe du groupe multiplicatif K^*; $\mathcal{D}_n(K,f)$ est appelé <u>groupe des déplacements</u>. Il contient le groupe des translations et opère donc transitivement dans F, où il définit une géomètrie subordonnée à la géomètrie euclidienne, et qu'on appellela <u>géomètrie euclidienne stricte</u> (relative à la forme f).

L'espace F étant identifié à un hyperplan $a_0'+H'_\infty$ de E une fois pour toutes, et la forme f étant choisie une fois pour toutes dans H'_∞, l'espace des translations T_n est identifié à H'_∞ ; pour tout couple x,y de points de F, on dit alors que f(y-x)=f(x-y) est le <u>carré scalaire</u> du vecteur y-x ; le <u>produit scalaire</u> de deux vecteurs quelconques u, v sera de même par définition l'élément $\langle u, v\rangle$.

Il est clair que tout déplacement transforme un vecteur en un vecteur de même carré scalaire. Inversement :

<u>Proposition 2</u>. <u>Toute application u de F dans lui-même telle que, pour tout couple (x,y) de points de F, on ait f(x-y)=f(u(x)-u(y)) est un déplacement</u>.

En effet, soit a_0 un point de F que nous choisirons pour origine en composant avec u une translation, on peut supposer que $u(a_0)=a_0$. Nous désignerons alors par $u(t)$ le vecteur $u(a_0+t)-a_0$; d'après l'hypothèse, on a $\langle u(t),u(t)\rangle = \langle t,t\rangle$;

pour tout couple de vecteurs v, w, on a aussi $\langle v-w, v-w\rangle =$ $=\langle u(v)-u(w), u(v)-u(w)\rangle$, d'où on tire $\langle u(v), u(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. Prenons dans F une base orthogonale (e_i), et soit $t = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ un vecteur quelconque ; $(u(e_i))$ forme une base orthogonale de F telle que $\langle u(e_i), u(e_i)\rangle = \langle e_i, e_i\rangle$; on a par hypothèse $\langle u(t), u(e_i)\rangle = \langle t, e_i\rangle = \xi_i\langle e_i, e_i\rangle = \xi_i \langle u(e_i), u(e_i)\rangle$, ce qui montre que $u(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u(e_i)$; u est donc (dans l'espace vectoriel identifié à F) une transformation <u>linéaire</u> (homogène), d'où la proposition.

Le groupe de stabilité O_x du groupe des déplacements laissant invariant un point x est donc isomorphe au <u>groupe orthogonal</u> $O_n(K,f)$; de façon précise, tout déplacement u peut se mettre d'une seule manière sous forme du produit d'une translation et d'une transformation appartenant à O_x ; le déterminant de cette dernière est égal au déterminant de u (§ 2) ; s'il est égal à $+1$, on dit que u est un déplacement <u>propre</u> (la transformation correspondante de O_x étant dite <u>rotation de centre</u> x) ; dans le cas contraire, u est dit déplacement <u>impropre</u>. Les déplacements propres forment dans $D_n(K,f)$ un <u>sous-groupe distingué</u> $D_n^+(K,f)$, d'indice 2.

<u>Proposition 3. Si n est impair, toute similitude est produit d'une homothétie et d'un déplacement.</u>

En effet, on a vu plus haut que, dans ce cas, le multiplicateur d'une similitude u est un carré μ^2 ; en se ramenant par une translation au cas où u laisse invariant l'origine a_0 de F, on voit que $\mu^{-1}u$ est une transformation orthogonale, d'où la proposition. Le même raisonnement prouve que dans ce cas le groupe de stabilité L_x du groupe $Sm_n(K,f)$

est <u>produit direct</u> du groupe O_x^+ des <u>rotations</u> de centre x , et du groupe des <u>homothéties</u> de centre x .

Par contre, lorsque n est pair, le multiplicateur d'une similitude n'est pas nécessairement un carré. Considérons par exemple dans $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique $f(x)= \xi_1^2 - \xi_2^2$ (par rapport à la base canonique (e_1,e_2)) ; l'application linéaire u telle que $u(e_1)=e_2$, $u(e_2)=e_1$ est une similitude de multiplicateur -1 (cf. n°).

Lorsque n=2m est pair et que l'<u>indice</u> ν de la forme f est <u>égal à</u> m , on peut définir autrement les similitude directes. On sait en effet (chap.VIII) que dans les variétés linéaires projectives de dimension m-1 contenues dans l'ombilicale Q , il y a deux classes d'intransitivité Φ_1 , Φ_2 pour le <u>groupe des rotations</u> $O_n^+(K,f)$; les similitudes directes sont celles qui <u>conservent</u> ces classes d'intransitivité. En effet, choisissons une origine dans F , et soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 2m}$ une base de F , telle que les m premiers vecteurs soient une base d'un sous-espace isotrope V , et les m derniers une base d'un sous-espace isotrope W , avec $(e_k, e_{m+k})=1$, $(e_i, e_j)=0$ pour tout couple d'indices qui n'est pas de la forme (k,m+k). Les traces de V et W sur l'hyperplan H_∞ appartiennent à la même classe si m est pair, à des classes distinctes si m est impair. Soit alors u une similitude laissant O invariant ; u(V) et u(W) sont supplémentaires et isotropes, donc il existe une transformation orthogonale v telle que $v(u(V))=V$ et $v(u(W))=W$ (chap.VIII) ; un calcul facile montre alors que la matrice de w=vu par rapport à la base (e_i) est de la forme $\begin{pmatrix} \underline{A} & 0 \\ 0 & \lambda\check{\underline{A}} \end{pmatrix}$, où λ est le multiplicateur de u et $\underline{A}$ une matrice inversible arbitraire d'ordre m ; d'où $\det w = \lambda^m$, et par suite u est une similitude directe ou inverse suivant que v est une rotation ou non, ce qui démontre notre assertion.

Si $\nu < m$, il existe une extension K_1 de degré fini de K telle que, dans l'espace F_1 obtenu par extension à K_1 du corps des scalaires, la forme f_1 correspondant à f soit d'indice m ; on peut dire alors que les similitudes directes sont celles dont le prolongement à F_1 conservent les classes d'intransitivité des variétés de dimension m dans l'ombilicale Q_1 relative à f_1 .

<u>Variétés linéaires dans un espace euclidien.</u> Deux variétés linéaires affines V_1, V_2 sont dites <u>orthogonales</u> (ou <u>perpendiculaires</u>) dans l'espace euclidien F si, quels que soient les points x_1, y_1 de V_1 , x_2, y_2 de V_2 , les vecteurs $y_1 - x_1$ et $y_2 - x_2$ sont orthogonaux. Si on a choisi une origine dans F , il revient au même de dire que V_1 et V_2 se déduisent par translation de deux sous-espaces vectoriels orthogonaux. Etant donnée une variété linéaire V de dimension p , par tout point x de F il passe une variété et une seule W , orthogonale à V et de dimension $n-p$. Une variété linéaire est dite <u>isotrope</u> si elle contient une variété linéaire de dimension >0 qui lui est orthogonale ; elle est <u>totalement isotrope</u> si elle est orthogonale à elle-même. Pour que V soit isotrope, il faut et il suffit que $\overline{V} \cap H_\infty$ soit <u>tangente</u> à l'ombilicale Q ; pour que V soit totalement isotrope, il faut et il suffit que $\overline{V} \cap H_\infty$ soit <u>contenue</u> dans Q .

Si une variété linéaire V de dimension p est non isotrope, il en est de même de toute variété W de dimension $n-p$ qui lui est orthogonale, et $V \cap W$ est réduite à un point.

La <u>projection</u> de F sur V , parallèlement à W , est encore dite <u>projection orthogonale</u> de F sur V .

Toute similitude transforme deux variétés orthogonales en deux variétés orthogonales, une variété isotrope (resp. totalement isotrope) en une variété isotrope (resp. totalement isotrope).

Soient V_1 et V_2 deux variétés linéaires de même dimension p ; pour qu'il existe un déplacement transformant V_1 en V_2, il faut et il suffit, d'après le th. de Witt (chap.VIII) que, si V'_1 et V'_2 sont les sous-espaces vectoriels déduits de V_1 et V_2 par translation, les restrictions de la forme f à V'_1 et V'_2 soient des formes quadratiques équivalentes.

Il faut noter qu'il n'est pas possible d'étendre le th. de Witt aux similitudes : de façon précise, si V_1 et V_2 sont telles que la restriction de f à V'_2 soit équivalente à la restriction de f à V'_1, multipliée par un facteur constant, il n'existe pas nécessairement de similitude transformant V_1 en V_2. Par exemple, si F est de dimension 4 sur un corps ordonné K, et si la forme f peut s'écrire $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2$, il n'existe pas de similitude transformant Ke_3 en Ke_4, car il existe des droites isotropes dans l'hyperplan homogène orthogonal à Ke_3, mais non dans celui qui est orthogonal à Ke_4.

Soit V une variété linéaire non isotrope de dimension p, qu'on peut toujours supposer être homogène, par un choix convenable de l'origine dans F. La restriction f_1 de la forme quadratique f à V est alors de rang p, et il est immédiat que les restrictions à V des déplacements laissant invariante V forment un groupe isomorphe au groupe $\mathfrak{D}_p(K,f_1)$; on peut donc considérer V, muni de la structure définie par ce groupe, comme un espace euclidien (strict) relatif à la forme f_1.

$\sum$ Par contre, il peut exister des similitudes du groupe $Sm_p(K,f_1)$ qui <u>ne sont pas</u> des restrictions à V de similitudes laissant invariante V (cf. prop.9).

Soient V_1, V_2 deux variétés linéaires non isotropes d'intersection H non vide et non isotrope ; soit O un point de H , que nous prendrons pour origine. Soient W_1 et W_2 les variétés totalement orthogonales à H dans V_1 et V_2 respectivement : on dit que V_1 et V_2 sont <u>faiblement perpendiculaires</u> si W_1 et W_2 le sont ; H est alors identique à la projection orthogonale de chacune des variétés V_1, V_2 sur l'autre.

Inversement, si L et M sont deux variétés linéaires non isotrope, H la projection orthogonale de L sur M supposée non isotrope, la variété linéaire V engendrée par H et L est faiblement perpendiculaire à M ; en effet, V est somme de H et d'une variété orthogonale à M .

<u>Sphères dans un espace euclidien</u>. Etant donné un point $a_o \in F$ et un élément $\alpha \neq 0$ de K , on appelle <u>sphère euclidienne</u> de <u>centre</u> a_o et d'<u>extension</u> α l'ensemble des points x F tels que $f(x-a_o)=\alpha$. Une sphère peut être vide.

C'est ce qui se passe si K est ordonné, f positive et $\alpha < 0$.

Toute similitude u de multiplicateur λ (en particulier tout déplacement) transforme la sphère de centre a_o et d'extension α en la sphère de centre $u(a_o)$ et d'extension $\lambda\alpha$.

Si on prend dans l'espace projectif P(E) un système de coordonnées homogènes par rapport à une base (a'_i) tel que a'_o ait pour image canonique a_o , on voit que la sphère de centre a_o et d'extension α est la <u>trace</u> sur F de la <u>quadrique</u> S_α d'équation $f(x')-\alpha\,\xi_o^2=0$; la trace de S_α sur l'hyperplan à l'infini H_∞ n'est autre que l'<u>ombilicale</u> Q

(si elle n'est pas vide) ; le centre a_0 est le <u>pôle</u> de H_∞ par rapport à la quadrique S_α ; la droite joignant a_0 à un point quelconque x est <u>orthogonale</u> à l'hyperplan polaire de x par rapport à S_α , car l'équation de cet hyperplan est $\langle x',y'\rangle = \alpha\xi_0\eta_0$. En particulier, pour tout point x de la sphère $F\cap S_\alpha$, la droite joignant x au centre a_0 est orthogonale à l'hyperplan tangent à la sphère au point x .

<u>Proposition 4</u>. <u>Si l'intersection d'une sphère de centre</u> a_0 <u>et d'extension</u> α , <u>et d'une variété linéaire</u> V <u>non isotrope de dimension</u> p <u>non tangente à la sphère, n'est pas vide, c'est une sphère dans l'espace euclidien</u> V , <u>dont le centre est à l'intersection de</u> V <u>et de la variété</u> W <u>orthogonale à</u> V <u>et de dimension</u> n-p , <u>passant par</u> a_0 .

En effet, soit b_0 l'intersection de V et de W ; d'après le théorème de Pythagore (chap.VIII), en tout point x de V situé sur la sphère, on a $\langle x-a_0,x-a_0\rangle = \langle x-b_0,x-b_0\rangle + \langle b_0-a_0,b_0-a_0\rangle$, d'où $f(x-b_0)=\alpha-f(b_0-a_0)$, et réciproquement, ce qui établit la proposition.

Le même raisonnement montre que lorsque b_0 est sur la sphère, c'est-à-dire lorsque V est <u>tangente</u> à la sphère (et non isotrope), l'intersection de V et de la sphère est formée de b_0 et de l'ensemble des droites isotropes passant par b_0 et situées dans V (il peut d'ailleurs n'exister aucune droite ayant ces propriétés, lorsque l'ombilicale est vide, ou que $V\cap H_\infty$ ne la rencontre pas).

<u>Proposition 5</u>. <u>Si l'intersection de deux sphères de centres distincts</u> a_0 <u>et</u> b_0 <u>n'est pas vide, elle est identique à l'intersection de chacune d'elles par un hyperplan orthogonal à la droite joignant</u> a_0 <u>et</u> b_0 <u>si cette droite n'est pas isotrope</u>.

En effet, soit x un point de cette intersection et $c_0=a_0+\lambda(b_0-a_0)$ sa projection sur la droite D joignant a_0 et b_0 ; d'après le th. de Pythagore , on a $f(c_o-b_o)-f(c_o-a_o)=f(x-b_o)-f(x-a_o) = \beta-\alpha$ en désignant par α et β les extensions des deux sphères considérées ; on en tire $(1-2\lambda)f(b_o-a_o) = \beta-\alpha$, ce qui détermine λ de façon unique si $f(b_o-a_o)\neq 0$.

<u>Espaces euclidiens parfaits</u>. Nous dirons qu'un espace euclidien F est <u>parfait</u> si la forme quadratique f correspondante est telle que $f(x)$ soit un <u>carré</u> dans le corps K pour tout $x\in F$. Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale pour f , et $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i\xi_i^2$, on a $\rho_i=f(e_i)$, donc ρ_i est un carré μ_i^2 , et en remplaçant e_i par $\mu_i^{-1}e_i$, on peut supposer que $\rho_i=1$ (base <u>orthogonale</u>) ; l'hypothèse entraîne alors que $\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 = f(x)$ est un carré quels que soient les ξ_i , c'est-à-dire (chap.VIII) que K est un corps <u>pythagoricien</u>.

On sait qu'il en est toujours ainsi si K est algèbriquement clos ou si K est ordonné maximal.

La formule (1) montre que dans un espace euclidien parfait, le multiplicateur de toute similitude est un <u>carré</u> dans K , donc (pour n <u>quelconque</u>), toute similitude est <u>produit d'un déplacement et d'une homothétie</u>.

Dans un espace euclidien parfait, pour qu'une sphère soit non vide, il est nécessaire que son extension α soit un <u>carré</u> r^2 ; il est immédiat que cette condition est <u>suffisante</u>.

<u>Proposition 6</u>. <u>Soit</u> F <u>un espace euclidien parfait</u>, V_1 <u>et</u> V_2 <u>deux variétés linéaires non isotropes de même dimension</u> p <u>dans</u> F ; <u>il existe un déplacement propre transformant</u> V_1 <u>en</u> V_2 .

En effet, on peut se borner au cas où V_1 et V_2 passent par l'origine de F (choisie arbitrairement) ; la proposition résulte alors du th. de Witt : en effet, il existe dans F une base orthogonale $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$

dont les p premiers vecteurs forment une base de V_1, et comme $f(e_i)$ est par hypothèse un carré μ_i^2, la base $(\mu_i^{-1} e_i)$ est orthonormale ; en opérant de même pour V_2, le th. de Witt s'applique aussitôt.

Soit e un n-vecteur dans $\bigwedge^n F$, produit des n vecteurs d'une base <u>orthonormale</u> de F ; pour toute base orthonormale $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de F, on a $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n = \pm e$; on dit que deux bases orthonormales (a_i), (b_i) ont <u>même orientation</u> si $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n$; il revient au même de dire qu'il existe une <u>rotation</u> u telle que $u(a_i) = b_i$. <u>Orienter</u> l'espace F, c'est appeler <u>directes</u> les bases orthonormales de l'une des deux classes d'équivalence suivant le groupe des rotations, et <u>rétrogrades</u> les autres.

Ici encore, si V et W sont deux sous-espaces vectoriels <u>orthogonaux</u> (et non isotropes) dans F, de dimensions p et n-p, si un des deux nombres p,n-p est <u>pair</u>, on peut faire correspondre à toute orientation des bases orthonormales de V une orientation bien déterminée des bases orthonormales de W : si $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base orthonormale directe de V, $(b_{p+j})_{1 \leqslant j \leqslant n-p}$ sera une base orthonormale directe de W si la base orthonormale $a_1, \ldots, a_p, b_{p+1}, \ldots, b_n$ de F est directe. La relation entre ces deux orientations est encore symétrique.

Dans le cas plus particulier d'un espace euclidien parfait F sur un corps <u>ordonné</u> pythagoricien K (en particulier sur un corps ordonné maximal) f est une forme strictement positive ; on pose $d(x,y) = \sqrt{f(y-x)}$ ($d(x,y) \geqslant 0$), et cet élément $\geqslant 0$ de K est appelé <u>distance</u> des points x et y ; pour tout vecteur u, on pose $\| u \| = \sqrt{f(u)}$ (<u>norme euclidienne</u> de u) ; la relation $d(x,y)=0$ entraîne $x=y$ (autrement dit, il n'existe pas de variétés isotropes), on a $d(y,x)=d(x,y)$, et l'<u>inégalité du triangle</u> (chap. VIII)

$$d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

En outre, toute homothétie u de rapport λ est telle que $d(u(x),u(y))= |\lambda| d(x,y)$. Si V est une variété linéaire quelconque, x un point quelconque de F , x_0 sa projection orthogonale sur V , $d(x,x_0)$ est la plus petite des distances $d(x,y)$ lorsque y parcourt V : on dit que c'est la distance de x à V . Pour toute sphère non vide dont l'extension α est un carré, l'unique élément $r \geqslant 0$ tel que $r^2=\alpha$ est appelé le <u>rayon</u> de la sphère ; si a_0 est le centre de la sphère, l'ensemble des points x tels que $d(a_0,x) \leqslant r$ est appelé la <u>boule fermée</u> de centre a_0 et de rayon r , l'ensemble des points x tels que $d(a_0,x)<r$ la <u>boule ouverte</u> de centre a_0 et de rayon r ; tout point x tel que $d(a_0x) < r$ est dit <u>intérieur</u> à la boule fermée (ou ouverte) de centre a_0 et de rayon r , tout point tel que $d(a_0,x) >r$ est dit <u>extérieur</u> à cette boule.

On notera enfin que dans ce cas, les déplacements propres sont ceux qui <u>conservent l'orientation</u> au sens de la géométrie affine (§2).

<u>Géomètrie hermitienne</u>. Soit K_0 un corps commutatif quelconque, K une extension séparable de degré 2 de K_0 , $\lambda \to \bar{\lambda}$ l'unique automorphisme de K par rapport à K_0 distinct de l'automorphisme identique. Soit F un espace affine de dimension n sur K , identifié à un espace vectoriel par choix d'une origine a_0 , et soit f une <u>forme hermitienne</u> de rang n définie dans F ; nous désignerons par $\langle x,y \rangle$ la forme sesquilinéaire correspondante. On démontre comme dans la prop.1 que si une transformation linéaire (homogène) u de F est telle que $\langle x,y\rangle =0$ entraîne $\langle u(x),u(y)\rangle =0$, il existe $\lambda \in K_0$ non nul et tel que $\langle u(x),u(y)\rangle = \lambda \langle x,y\rangle$ identiquement ; toute affinité composée d'une translation et d'une telle transformation linéaire est encore appelée <u>similitude</u> (hermitienne), de multiplicateur λ . Si Δ est le déterminant d'une telle similitude,

on voit comme plus haut que $\lambda^n = \Delta\bar{\Delta}$, d'où (comme $\lambda \in K_0$) on déduit que si n est <u>impair</u>, λ est une <u>norme</u> d'un élément de K ; si n est <u>pair</u>, en posant $n=2m$, on voit que la norme de (Δ/λ^m) est égale à 1 ; les similitudes de déterminant égal à λ^m sont dites <u>similitudes propres</u>. La géomètrie définie sur F par le groupe des similitudes hermitiennes est dite <u>géomètrie hermitienne</u> (relative à la forme f), et l'espace F , muni de cette géomètrie, est appelé <u>espace hermitien à n dimensions</u> (relatif à la forme f).

Les similitudes hermitiennes de multiplicateur 1 forment un sous-groupe distingué du groupe des similitudes hermitiennes, le groupe quotient correspondant étant un groupe abélien isomorphe à un sous-groupe de K_0 ; ce sous-groupe est appelé <u>groupe des déplacements hermitiens</u>, et la géomètrie qu'il définit sur F , <u>géomètrie hermitienne stricte.</u> On dit encore que $f(y-x)$ est le <u>carré scalaire</u> du vecteur $y-x$, et $\langle u, v\rangle$ le <u>produit scalaire</u> des deux vecteurs u , v .

Le sous-groupe de stabilité U_x du groupe des déplacements hermitiens, laissant invariant un point x , est isomorphe au <u>groupe unitaire</u> $U_n(K,f)$: tout déplacement hermitien u peut se mettre d'une seule manière sous la forme du produit d'une translation et d'une transformation de U_x , le déterminant de cette dernière étant égal à celui de u ;s'il est égal à 1 , on dit que u est un déplacement hermitien <u>propre</u> . Si n est <u>impair</u>, toute similitude hermitienne u est produit d'une homothétie et d'un déplacement hermitien, car on a alors $\lambda = \mu\bar{\mu}$, donc $\mu^{-1}u$ est une transformation unitaire.

Tout ce qui a été dit ci-dessus relativement aux variétés linéaires en géomètrie euclidienne s'étend aussitôt à la géomètrie hermitienne.

Géomètrie euclidienne à 2 dimensions. Soit F un espace vectoriel de dimension 2 sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$, f une forme quadratique de rang 2 sur F ; soit (e_1, e_2) une base orthogonale de F, telle que $f(x) = \rho_1 \xi_1^2 + \rho_2 \xi_2^2$ par rapport à cette base.

Proposition 7. Le groupe des rotations $O_2^+(K,f)$ est abélien ; si f ~~Est~~ est d'indice 1, $O_2^+(K,f)$ est isomorphe au groupe multiplicatif K^* ; si f est d'indice 0, $O_2^+(K,f)$ est isomorphe au groupe multiplicatif des éléments de norme 1 dans l'extension quadratique K' de K obtenue par adjonction à K des racines du polynome $X^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}$.

Si f est d'indice 1, il existe dans F deux vecteurs isotropes a_1, a_2 tels que $\langle a_1, a_2 \rangle = 1$, de sorte que par rapport à cette base on a $f(x) = \xi_1 \xi_2$; soit u une rotation, et soit $u(a_1) = \alpha a_1 + \beta a_2$, $u(a_2) = \gamma a_1 + \delta a_2$; comme u doit transformer toute droite isotrope en droite isotrope, on doit avoir, soit $\alpha = \delta = 0$, soit $\beta = \gamma = 0$; mais dans le premier cas, la relation $\langle u(a_1), u(a_2) \rangle = 1$ donne $\beta\gamma = 1$, et par suite $\det u = -1$, u n'est pas une rotation ; dans le second cas, on a de même $\alpha\delta = 1$, et il est clair alors que le groupe $O_2^+(K,f)$ est isomorphe à K^*.

Supposons maintenant que f soit d'indice 0 ; alors le polynome $X^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}$ n'a pas de racines dans K ; soit ω une des racines de ce polynome, et soit $K' = K(\omega)$. Soit u une rotation, et posons $u(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2$, $u(e_2) = \gamma e_1 + \delta e_2$; en écrivant que u est une transformation orthogonale, il vient les conditions

(4) $$\rho_1 \alpha^2 + \rho_2 \beta^2 = \rho_1$$

(5) $$\rho_1 \gamma^2 + \rho_2 \delta^2 = \rho_2$$

(6) $$\rho_1 \alpha\gamma + \rho_2 \beta\delta = 0$$

De (5) et (6), on tire $\rho_1\alpha\gamma^2+\rho_2\beta\gamma\delta=0$, d'où $\rho_2\left[\alpha(1-\delta^2)+\beta\gamma\delta\right]=0$ c'est-à-dire $\alpha=\delta(\alpha\delta-\beta\gamma)$, et comme par hypothèse u est une rotation, on a $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, donc $\alpha=\delta$; on tire alors de (6), lorsque $\alpha\neq 0$, $\gamma=-\frac{\rho_2}{\rho_1}\beta$, et cette relation a encore lieu lorsque $\alpha=0$, en raison de la condition $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ et de la relation (4) ; en d'autres termes, la matrice d'une rotation u peut s'écrire $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\frac{\rho_2}{\rho_1}\beta & \alpha\end{pmatrix}$ avec la relation (4) entre α et β ; en outre, on a

$$(7)\qquad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\frac{\rho_2}{\rho_1}\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ -\frac{\rho_2}{\rho_1}\beta' & \alpha'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\alpha'-\frac{\rho_2}{\rho_1}\beta\beta' & \alpha\beta'+\beta\alpha'\\ -\frac{\rho_2}{\rho_1}(\alpha\beta'+\beta\alpha') & \alpha\alpha'-\frac{\rho_2}{\rho_1}\beta\beta'\end{pmatrix}$$

Si à la matrice de u on associe l'élément $\mu=\alpha+\omega\beta$ de K' , la relation (4) s'écrit $\mu\bar{\mu}=1$, et la relation (7) montre (en raison de $\omega^2=-\frac{\rho_2}{\rho_1}$) qu'au produit des matrices qui correspondent à μ et μ' correspond l'élément $\mu\mu'$, ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 8</u>. <u>Le groupe</u> L_0^+ <u>des similitudes directes laissant invariant 0 est abélien</u> ; <u>si</u> f <u>est d'indice</u> 1 , <u>ce groupe est isomorphe au groupe</u> $K^*\times K^*$; <u>si</u> f <u>est d'indice</u> 0 , <u>il est isomorphe au groupe multiplicatif</u> K'^*.

La démonstration suit exactement la même marche que celle de la prop.7 ; avec les notations de cette proposition, lorsque l'indice de f est 1 , toute similitude directe u est telle que $u(a_1)=\alpha a_1$, $u(a_1)=\delta a_2$, où α et δ sont arbitraires dans K^* . Si au contraire f est d'indice 0, on peut identifier le plan F au corps K' , en identifiant le point (ξ_1,ξ_2) à l'élément $\xi_1+\omega\xi_2$ de K' ; toute similitude directe est alors une <u>homothétie</u> $\xi\to\mu\xi$ <u>de</u> K' , où μ est arbitraire dans K'^* .

<u>Corollaire</u>. <u>Pour que toute similitude directe laissant invariant</u> 0 <u>soit le produit d'une homothétie et d'une rotation</u>, <u>il faut et il suffit que</u> F <u>soit un espace euclidien parfait</u>.

En effet, si f est d'indice 1, le multiplicateur d'une homothétie étant un carré, tout élément de K^* doit être un carré, et alors toutes les valeurs de f sont des carrés ; si f est d'indice 0, comme le multiplicateur de la similitude directe $\xi \to \mu\xi$ est la norme $\mu\bar{\mu}$, toute norme d'un élément de K' doit être un carré dans K, ce qui montre encore, d'après l'expression de la norme, que f ne doit prendre que des valeurs qui sont carrés dans K ; la réciproque a déjà été démontrée (pour n quelconque).

<u>Angles de droites</u>. <u>Proposition 9</u>. <u>Le groupe</u> L_0^+ <u>des similitudes directes laissant invariant 0 opère transitivement dans l'ensemble des droites non isotropes passant par</u> 0.

La proposition est immédiate si f est d'indice 0 (c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de droites isotropes) : si D_1 et D_2 sont deux droites passant par 0, ξ_1 un point $\neq 0$ sur D_1, ξ_2 un point $\neq 0$ sur D_2, la similitude $\xi \to \mu\xi$, où $\mu = \xi_2/\xi_1$, répond à la question. Si f est d'indice 1, prenons la même base que dans la démonstration de la prop. 7, et soit $x_1 = \alpha a_1 + \beta a_2$ un point de D_1, $x_2 = \gamma a_1 + \delta a_2$ un point de D_2 ; la similitude u telle que $u(a_1) = \frac{\gamma}{\alpha} a_1$, $u(a_2) = \frac{\delta}{\beta} a_2$ répond à la question.

Le sous-groupe de L_0^+ laissant invariantes toutes les droites homogènes non isotropes est le groupe H_0 des homothéties de centre 0 ; l'ensemble des droites homogènes non isotropes peut donc être considéré comme un espace homogène pour le groupe abélien L_0^+/H_0 ; d'ailleurs une similitude directe qui laisse invariante <u>une</u> droite non isotrope laisse invariantes <u>toutes</u> les droites non isotropes, si bien que l'ensemble des droites non isotropes est en correspondance biunivoque avec le groupe L_0^+/H_0 : de façon précise, étant donnée une droite D_0 et une dueixème droite D, il existe une classe et une seule de similitudes directes $u \in L_0^+$, modulo H_0, qui transforme D_0 ~~et~~ en D.

Nous dirons que le groupe abélien $L_0^+/H_0 = A_0$ est le groupe des <u>angles de droites</u>, et que la classe modulo H_0 à laquelle appartient une similitude directe $u \in L_0^+$ est l'<u>angle</u> (de droites) de la similitude u. Si Δ est la diagonale du groupe produit $K^* \times K^*$, le groupe A_0 est isomorphe à $(K^* \times K^*)/\Delta$ lorsque f est d'indice 1, et isomorphe à K'^*/K^* lorsque f est d'indice 0.

Etant données deux droites non isotropes D_1, D_2, l'unique classe de similitudes directes mod.H_0 qui transforme D_1 en D_2 est appelée l'<u>angle</u> du couple $\widehat{(D_1,D_2)}$, ou <u>angle que fait</u> D_2 <u>avec</u> D_1. On le note $\widehat{(D_1,D_2)}$; le groupe abélien des angles de droites étant noté <u>additivement</u>, on a donc les relations

$$\widehat{(D,D)}=0 \quad , \qquad \widehat{(D_2,D_1)}=-\widehat{(D_1,D_2)}$$
$$\widehat{(D_1,D_2)}+\widehat{(D_2,D_3)} = \widehat{(D_1,D_3)}$$

qui résultent aussitôt des définitions. La condition $\widehat{(D_1,D_2)}=\widehat{(D'_1,D'_2)}$ signifie qu'il existe une similitude directe transformant D_1 en D_2 et D'_1 en D'_2 ; elle est équivalente à $\widehat{(D_1,D'_1)}=\widehat{(D_2,D'_2)}$ puisque le groupe A_0 est <u>abélien</u>. Comme toute similitude directe transforme deux droites orthogonales en deux droites orthogonales, on voit que l'angle δ_0 d'un couple de droites orthogonales est <u>indépendant</u> de ce couple ; cet angle est appelé <u>angle droit</u>. C'est l'<u>unique</u> solution $\neq 0$ de l'équation $2\theta=0$ dans A_0 ; en effet, si on exprime qu'une similitude directe u est telle

u^2 soit une homothétie, on trouve, si f est d'indice 1 , que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ de u par rapport à 2 vecteurs isotropes doit être telle que $\alpha^2 = \delta^2$, ce qui donne l'unique solution distincte d'une homothétie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (à une homothétie près) ; si f est d'indice 0 , et si $\xi \to \mu\xi$ ($\mu \in K'^*$) est la similitude u , on voit que μ^2 doit appartenir à K , ce qui, si $\mu=\alpha+\omega\beta$, donne $2\alpha\beta=0$; la seule solution (à une homothétie près) qui ne soit pas une homothétie est donc $\mu=\omega$.

Si D_1,D_2 sont deux droites quelconques de F , D'_1,D'_2 les droites homogènes parallèles respectivement à D_1 et D_2 , l'angle $(\widehat{D_1,D_2})$ est par définition égal à $(\widehat{D'_1,D'_2})$.

Tangente d'un angle de droites. Considérons dans F une base orthogonale (e_1,e_2) et soit $f(x) = \rho_1 \xi_1^2 + \rho_2 \xi_2^2$ par rapport à cette base ; soit D_0 la droite Ke_1 . Pour tout angle $\theta \in A_0$, il existe une droite et une seule D qui fait avec D_0 l'angle θ (transformée de D_0 par la similitude d'angle θ) . Nous désignerons par tg θ et appellerons tangente de l'angle θ (par rapport à la base (e_1,e_2)) la pente de la droite D par rapport aux axes Ke_1,Ke_2 ; c'est donc un élément de $\tilde{K}$; l'application $\theta \to \mathrm{tg}\,\theta$ est une application biunivoque de A_0 sur $\tilde{K}$ si f est d'indice 0 ; si f est d'indice 1 , $\theta \to \mathrm{tg}\,\theta$ applique biunivoquement A_0 sur le complémentaire dans $\tilde{K}$ de l'ensemble des deux points $\pm\sqrt{-\frac{\rho_1}{\rho_2}}$; en particulier, la relation $\mathrm{tg}\,\theta = \infty$ est équivalente à $\theta = \delta_0$, et $\mathrm{tg}\,\theta = 0$ à $\theta=0$.

Lorsqu'on remplace la base (e_1,e_2) par la base $(\lambda e_1, \mu e_2)$, tg θ est remplacée par $\frac{\lambda}{\mu}$ tg θ ; par définition, si u_0 est une similitude directe quelconque, la tangente de θ par rapport à la base $(u_0(e_1),u_0(e_2))$ est la même que par rapport à la base (e_1,e_2) .

Une similitude de matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\rho_2}{\rho_1}\beta & \alpha \end{pmatrix}$ transforme D_0 en la droite de paramètres directeurs $(\alpha, -\frac{\rho_2}{\rho_1}\beta)$; on a donc $\operatorname{tg}\theta = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\beta}{\alpha}$ pour l'angle θ de cette similitude si $\alpha \neq 0$, et $\operatorname{tg}\theta = \infty$ dans le cas contraire. On déduit donc aussitôt de la formule (7) que

$$(8) \qquad \operatorname{tg}(\theta+\theta') = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\theta'}{1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\theta'}$$

lorsque $\operatorname{tg}\theta$ et $\operatorname{tg}\theta'$ sont $\neq \infty$, et que $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\theta' \neq \frac{\rho_2}{\rho_1}$. Lorsque $\theta = \delta_0$ la formule (8) devient

$$(9) \qquad \operatorname{tg}(\theta+\delta_0) = -\rho_2/\rho_1 \operatorname{tg}\theta$$

valable pour θ quelconque ; lorsque $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\theta' = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, le second membre de (8) doit être remplacé par ∞ .

Lorsque f est d'indice 1 , c'est-à-dire que $-\frac{\rho_1}{\rho_2}$ est un carré ω^2 dans K , les droites isotropes Δ_1 et Δ_2 ont pour pente ω et $-\omega$. On a donc la formule

$$(10) \qquad (\Delta_1, \Delta_2, D_0, D) = \frac{\omega-\operatorname{tg}\theta}{\omega+\operatorname{tg}\theta}$$

Par l'application biunivoque $\theta \rightarrow \operatorname{tg}\theta$, on peut <u>transporter</u> la structure de groupe abélien de A_0 à $\tilde{K}$ si f est d'indice 0 , au complémentaire dans $\tilde{K}$ des points $\pm\omega$ si f est d'indice 1 ; la loi de composition est donnée par $(t,t') \longrightarrow \frac{t+t'}{1-\frac{\rho_1}{\rho_2}tt'}$ d'après la formule (7) , lorsque $t \neq \infty$, $t' \neq \infty$ et $tt' \neq \frac{\rho_2}{\rho_1}$, par $(t,\infty) \longrightarrow -\frac{\rho_2}{\rho_1 t}$ et enfin par $(t,t') \longrightarrow \infty$ lorsque $tt' = \frac{\rho_2}{\rho_1}$.

<u>Angles de droites orientées</u>. En général, le groupe des rotations $O_2^+(K,f)$ n'opère pas transitivement dans l'ensemble des droites non isotropes passant par O . Si D_0 est une droite non isotrope quelconque passant par O , x_0 un point de cette droite, C le cercle de centre O passant par x_0 , la classe d'intransitivité du groupe $O_2^+(K,f)$ à laquelle appartient D_0 est formée des droites passant par O et rencontrant

le cercle C . Chacune de ces droites D rencontre C en deux points opposés x et $-x$; on dit que le couple (D,x) est la droite D orientée par le choix du point où elle rencontre C ; les droites orientées sont donc en correspondance biunivoque avec les points de C , et nous désignerons par Δ_x la droite orientée correspondant au point $x \in C$; les deux droites orientées Δ_x et Δ_{-x} sont dites portées par une même droite non orientée. Etant données deux droites orientées Δ_x , Δ_y , il existe une rotation et une seule transformant Δ_x en Δ_y , savoir celle qui transforme x en y .

Cela étant, dans l'ensemble des couples (Δ_x, Δ_y) de droites orientées (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des couples (x,y) de points de C) on définit une relation d'équivalence en considérant deux couples (Δ_x , Δ_y) , $(\Delta_{x'} , \Delta_{y'})$ (resp. (x,y) et (x',y')) comme équivalents s'il existe une rotation qui transforme x en y et x' en y' ; on vérifie aussitôt que la relation ainsi définie est bien une relation d'équivalence (parce que l'ensemble des rotations est un groupe). L'ensemble quotient A^+ (resp. A_C) de l'ensemble des couples (Δ_x, Δ_y) (resp. (x,y)) par cette relation d'équivalence est appelé l'ensemble des angles de droites orientées (resp. l'ensemble des écarts circulaires du cercle C) ; la classe d'équivalence à laquelle appartient un couple (Δ_x , Δ_y) (resp. (x,y)) est appelée l'angle du couple (Δ_x , Δ_y) et notée $(\widehat{\Delta_x , \Delta_y})$ (resp. l'écart circulaire de x et de y, noté $\widehat{xy}$). Cet ensemble A^+ (resp. A_C) est en correspondance biunivoque avec le groupe $O_2^+(K,f)$, la rotation qui transforme Δ_x en Δ_y étant dite rotation d'angle $(\widehat{\Delta_x , \Delta_y})$; par cette correspondance, on transporte à A^+ (resp. A_C) la structure de groupe abélien de $O_2^+(K,f)$; la loi de groupe ainsi définie est notée additivement. On a donc

$$(\widehat{\Delta_x, \Delta_x})=0 \quad , \quad (\widehat{\Delta_y, \Delta_x})=-(\widehat{\Delta_x, \Delta_y})$$

$$(\widehat{\Delta_x, \Delta_y})+(\widehat{\Delta_y, \Delta_z})=(\widehat{\Delta_x, \Delta_z})$$

et les relations analogues $\widehat{xx}=0$, $\widehat{yx}=-\widehat{xy}$, $\widehat{xy}+\widehat{yz} = \widehat{xz}$.

L'angle $\overline{\omega}$ correspondant à la symétrie $x \to -x$ est l'angle d'un couple quelconque (Δ_x, Δ_{-x}) ; on l'appelle <u>angle plat</u> ; c'est l'unique solution $\neq 0$ de l'équation $2\theta=0$ dans le groupe A^+ .

A tout angle θ de droites <u>orientées</u> correspond un angle bien déterminé $\tilde{\theta}$ de droites <u>non orientées</u>, savoir la classe de similitudes mod.H_o à laquelle appartient la rotation d'angle θ ; l'application $\theta \to \tilde{\theta}$ est une représentation du groupe A^+ sur un sous-groupe A_o^+ du groupe A_o ; la relation $\tilde{\theta}=0$ équivaut à $\theta=0$ ou $\theta=\overline{\omega}$, puisque la symétrie $x \to -x$ est la seule rotation qui soit une homothétie ; le groupe A_o^+ est donc isomorphe au groupe quotient $A^+\{0,\overline{\omega}\}$ (ou, ce qui revient au même, au groupe quotient de $O_2^+(K,f)$ par le sous-groupe d'ordre 2 formé de l'application identique et de la symétrie $x \to -x$). Si Δ_x , Δ_y sont deux droites orientées, $\theta=(\widehat{\Delta_x, \Delta_y})$, et si D_1 et D_2 sont les droites non orientées portant Δ_x et Δ_y , l'angle $(\widehat{D_1,D_2})$ est égal à $\tilde{\theta}$.

Si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\rho_2}{\rho_1}\beta & \alpha \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ , on pose $\alpha=\cos\theta$ et $\beta = \sin\theta$, ces deux éléments de K étant appelés respectivement <u>cosinus</u> et <u>sinus</u> de l'angle θ (de droites orientées) (par rapport à la base (e_1,e_2)) ; ils satisfont à la relation

(4') $$\cos^2\theta + \frac{\rho_2}{\rho_1}\sin^2\theta = 1$$

et réciproquement, deux éléments α,β de K satisfaisant à (4) définissent une rotation et une seule, donc un angle θ de droites orientées et un seul tel que $\alpha=\cos\theta$, $\beta=\sin\theta$. On a

$$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0$$
$$\cos \overline{\omega} = -1 \quad \sin \overline{\omega} = 0$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

La formule (7) se traduit par les "formules d'addition"

(11) $\qquad \cos(\theta+\theta') = \cos\theta \cos\theta' - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin\theta \sin\theta'$

(12) $\qquad \sin(\theta+\theta') = \sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta'$.

Il résulte aussitôt des définitions que, si $\tilde{\theta}$ est l'angle de droites non orientées correspondant à θ , on a

(13) $\qquad \operatorname{tg}\tilde{\theta} = \sin\theta/\cos\theta \quad$ (avec $\operatorname{tg}\tilde{\theta} = \infty$ lorsque $\cos\theta = 0$)

d'où on tire, en vertu de (4')

$$\frac{1}{\mathrm{Cos}^2\theta} = 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \operatorname{tg}^2\theta$$

Lorsqu'on parle de tangente d'un angle de droites, ou de sinus et cosinus d'un angle de droites orientées dans un plan euclidien parfait F on suppose toujours ces fonctions prises par rapport à une base orthonormale directe du plan F (supposé orienté).

Bissectrices. Dans ce qui suit, nous supposerons pour fixer les idées que D_0 est l'axe Ke_1 , et le cercle C le cercle passant par le point e_1 ; il passe donc aussi par le point $-e_1$. Soit x un point quelconque de C , de coordonnées α et β satisfaisant donc à (4) ; les droites D,D' joignant x aux points e_1 et $-e_1$ sont orthogonales, car la relation (4) s'écrit aussi $\rho_1(\alpha-1)(\alpha+1)+\rho_2\beta^2=0$. La parallèle D_x menée par O à la droite D' est donc perpendiculaire à D et rencontre cette dernière au milieu du segment d'extrémités e_1 et x (fig.1). Par suite x est transformé de e_1 par la symétrie par rapport à D_x , et Δ_x transformée de Δ_{e_1}

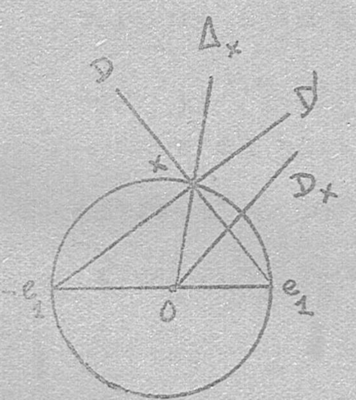

fig. 1

par cette même symétrie ; la droite D_x est évidemment bien déterminée par cette propriété ; on dit que c'est la <u>bissectrice</u> des deux droites orientées Δ_{e_1} et Δ_x. Inversement, <u>toute</u> droite passant par O est la bissectrice de Δ_{e_1} et d'une droite orientée Δ_x bien déterminée, savoir la symétri$\overset{qu}{e}$ de Δ_{e_1} par rapport à la droite considérée. Si $\theta=(\widehat{\Delta_{e_1}, \Delta_x})$, nous désignerons par $\frac{1}{2}.\theta$ l'angle de droites <u>non orientées</u> $(\widehat{D_o, D_x})$. Une rotation d'angle θ est donc de la forme ss', où s (resp. s') est une symétrie par rapport à une droite D (resp. D') telles que $(\widehat{D, D'}) = \frac{1}{2}.\theta$.

<u>Proposition 10</u>. <u>L'application</u> $\theta \longrightarrow \frac{1}{2}.\theta$ <u>est un isomorphisme du groupe</u> A^+ <u>des angles de droites orientées sur le groupe</u> A_o <u>des angles de droites non orientées</u>.

Tout revient à démontrer que $\frac{1}{2}.(\theta+\theta')= \frac{1}{2}.\theta+ \frac{1}{2}.\theta'$. Soient t_θ, $t_{\theta'}$ les rotations d'angles θ et θ', Δ_x, $\Delta_{x'}$ les transformées de Δ_{e_1} par ces rotations, D_x (resp. $D_{x'}$) la bissectrice de Δ_{e_1} et Δ_x (resp. de Δ_{e_1} et $\Delta_{x'}$) ; soient $s_o, s_\theta, s_{\theta'}$ les symétries par rapport à D_o, D_x et $D_{x'}$; on a $t_\theta=s_os_\theta$, $t_{\theta'}=s_os_{\theta'}$, donc $t_{\theta+\theta'} =$ $= s_os_\theta s_os_{\theta'} = (s_os_\theta s_o^{-1})s_{\theta'}$; mais $s_os_\theta s_o^{-1}$ est la symétrie par rapport à la droite D'_x telle que $(\widehat{D_o, D'_x}) = -\frac{1}{2}.\theta$; donc l'angle $(\widehat{D'_x, D_{x'}}) = \frac{1}{2}.\theta + \frac{1}{2}.\theta'$, ce qui établit la proposition.

On a en particulier $\frac{1}{2}.(-\theta) =-(\frac{1}{2}.\theta)$, et $\frac{1}{2}.\overline{\omega} = \delta_o$; la relation entre l'angle de droites orientées θ et l'angle de droites non orientées $\frac{1}{2}.\theta$ s'exprime encore par les formules

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2}.\theta = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\text{(15)} \qquad \sin\theta = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}.\theta}{1 + \frac{p_2}{p_1}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}.\theta}$$

(16) $$\cos \theta = \frac{1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}.\theta}{1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}.\theta}$$

qui se déduisent aussitôt des définitions.

<u>Remarque</u>.- Le composé de l'homomorphisme $\theta \to \tilde{\theta}$ de A^+ sur A_0^+ et de l'isomorphisme de A_0 sur A^+, réciproque de $\theta \to \frac{1}{2}.\theta$ n'est autre que l'application $\theta \to 2\theta$ de A_0 dans lui-même ; le sous-groupe A_0^+ est donc isomorphe à $A_0/\{0,\delta_0\}$. C'est en raison de cette propriété que l'on note $\theta \to \frac{1}{2}.\theta$ l'isomorphisme défini dans la prop.10 : on prendra garde que dans cette notation, $\frac{1}{2}$ doit être considéré comme un opérateur, et n'a pas le sens habituel.

Lorsque l'indice ν de f est 0, désignons par $z \to \bar{z}$ le K-automorphisme différent de l'identité, du corps K' obtenu en adjoignant à K une racine ω de $\rho_1 X^2+\rho_2$. Pour tout $z\neq 0$, l'élément $x=z/\bar{z}$ est de norme 1. L'espace F étant identifié à K', soit D_z la droite non orientée passant par 0 et z, Δ_x la droite orientée passant par 0 et x ; D_z est <u>bissectrice</u> de Δ_{e_1} et Δ_x, car le point $\frac{1}{2}(1+x)=(z+\bar{z})/2\bar{z}$ est sur D_z, puisque $(z+\bar{z})/2z\bar{z} \in K$.

<u>Angles de demi-droites</u>. Considérons maintenant le cas où K est un corps <u>ordonné</u>. La démonstration de la prop.9 prouve encore que L_0^+ opère transitivement dans l'ensemble des <u>demi-droites</u> (fermées) non isotropes passant par 0. Le sous-groupe de L_0^+ laissant invariantes toutes les demi-droites non isotropes d'origine 0 est ici le sous-groupe H_0^+ des <u>homothéties de rapport</u> >0 et de centre 0 (sous-groupe d'indice 2 dans H_0) ; en outre une similitude directe qui laisse invariante <u>une</u> demi-droite non isotrope les laisse <u>toutes</u> invariantes. L'ensemble des demi-droites non isotropes d'origine 0 est donc en correspondance biunivoque avec le groupe L_0^+/H_0^+ :

de façon précise, étant donnée une demi-droite D_o et une seconde demi-droite D, il existe une classe et une seule de similitudes directes $u \in L_o^+$, modulo H_o^+, qui transforme D_o en D. Nous dirons que le groupe abélien $A = L_o^+/H_o^+$ est le groupe des <u>angles de demi-droites</u>, et la classe modulo H_o^+ à laquelle appartient une similitude directe $u \in L_o^+$ l'<u>angle</u> (de demi-droites) de la similitude u. Etant données deux demi-droites non isotropes D_1, D_2, l'unique classe de similitudes directes mod. H_o^+ qui transforme D_1 en D_2 est appelée l'<u>angle</u> du couple (D_1, D_2), ou <u>angle que fait</u> D_2 <u>avec</u> D_1 et notée encore $\widehat{(D_1, D_2)}$; le groupe abélien A étant noté additivement, on a les mêmes relations que ci-dessus pour les angles de droites. Si D_1 et D_2 sont deux demi-droites quelconques (n'ayant pas nécessairement même origine), D_1' et D_2' les demi-droites d'origine O qui sont respectivement parallèles et de même sens que D_1 et D_2, l'<u>angle</u> $\widehat{(D_1, D_2)}$ est par définition égal à $\widehat{(D_1', D_2')}$.

Considérons maintenant celles des demi-droites d'origine O qui rencontrent un cercle C ; comme une demi-droite ne peut rencontrer C qu'en <u>un seul</u> point, on voit qu'il existe une correspondance biunivoque entre C et les demi-droites rencontrant C, ou encore, entre les <u>droites orientées</u> rencontrant C et les <u>demi-droites</u> rencontrant C : de façon précise, à toute droite orientée Δ_x correspond la demi-droite D_x d'origine O passant par le point $x \in C$. Comme la rotation qui transforme Δ_x en Δ_y transforme D_x en D_y, on voit en outre qu'on peut <u>identifier</u> le groupe A^+ des angles de droites orientées avec un sous-groupe du groupe A des angles de demi-droites, l'angle $\widehat{(\Delta_x, \Delta_y)}$ étant identifié à l'angle de demi-droites $\widehat{(D_x, D_y)}$; en particulier, l'angle plat $\overline{\omega}$ est identifié à l'angle d'une demi-droite D_x et de son opposée D_{-x} : c'est l'unique solution de l'équation $2\theta = 0$ dans A.

A tout angle θ de demi-droites correspond un angle bien déterminé $\tilde{\theta}$ de droites (non orientées), savoir l'angle de droites de la similitude directe dont l'angle de demi-droites est θ : l'application $\theta \to \tilde{\theta}$ n'est autre que l'application canonique du groupe $A=L_o^+/H_o^+$ sur son groupe quotient $A_o=L^+_o/H_o = A/(H_o/H_o^+) = A/\{0,\overline{\omega}\}$; avec l'identification faite ci-dessus, elle prolonge l'application $\theta \to \tilde{\theta}$ du sous-groupe A^+ sur le sous-groupe A_o^+. Si D_1, D_2 sont deux demi-droites, $\theta=(\widehat{D_1,D_2})$, et si Δ_1 et Δ_2 sont les droites portant D_1 et D_2, on a $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})=\tilde{\theta}$.

Par définition, pour tout angle de demi-droites θ, on pose $\operatorname{tg} \theta=\operatorname{tg} \tilde{\theta}$.

Etant donnée une demi-droite D_x rencontrant C au point x, soit θ l'angle qu'elle fait avec la demi-droite D_{e_1} passant par e_1 ; si θ_o et $\theta_o+\overline{\omega}$ sont les angles que font avec D_{e_1} les deux demi-droites portées par la bissectrice des deux demi-droites D_{e_1} et D_x, on a $2\theta_o=\theta$; le groupe A^+ est donc l'image du groupe A par l'application $\theta \to 2\theta$ de A dans lui-même.

Si l'indice ν de f est 0, on a vu qu'on peut identifier l'espace F à l'extension K' de K. Pour tout point $z \in K'^*$, on appelle alors <u>amplitude</u> de z et on note $\mathrm{Am}(z)$ l'angle θ que fait la demi-droite d'origine 0 passant par z, avec la demi-droite D_{e_1} ; l'application $z \to \mathrm{Am}(z)$ est une <u>représentation</u> du groupe multiplicatif K'^* (identifié à L_o^+) sur le groupe additif A ; la relation $\mathrm{Am}(z)=0$ est équivalente à $z \in K$ et $z > 0$, la relation $\mathrm{Am}(z)=\overline{\omega}$ à $z \in K$ et $z<0$; si $\overline{z}$ est le conjugué de z par rapport à K, on a $\mathrm{Am}(\overline{z}) = -\mathrm{Am}(z)$ si $z\overline{z} > 0$, $\mathrm{Am}(\overline{z}) = +\mathrm{Am}(z)$ si $z\overline{z} < 0$.

<u>Secteurs angulaires et arcs</u>. Dans ce n°, nous supposerons que K est ordonné et en outre que $\rho_2/\rho_1 > 0$; la forme f a alors un indice 0 et une signature (2,0) ou (0,2), et n'est donc pas équivalente à $-\alpha f$ pour aucun $\alpha > 0$. Il résulte alors de la prop.1 que le multiplicateur de toute similitude est > 0 ; en particulier, le déterminant d'une similitude directe, étant égal à son multiplicateur est > 0, donc une similitude directe est une affinité <u>conservant l'orientation</u>. Dans ce qui suit, nous supposerons le plan F orienté de sorte que le bivecteur $e_1 \wedge e_2$ soit direct.

Considérons alors deux demi-droites D, D' d'origine 0 ; nous appellerons <u>ouverture</u> du secteur angulaire S(D,D') (§ 2) l'angle $(\widehat{D,D'})$ que fait D' avec D ; toute similitude directe transforme un secteur angulaire en un secteur angulaire de même ouverture, et inversement, deux secteurs angulaires de même ouverture pouvent être transformés l'un dans l'autre par une similitude directe ; on dit que deux tels secteurs sont <u>égaux</u>. D'après ce qui précède, une similitude directe transforme un secteur saillant (resp. rentrant) en un secteur saillant (resp. rentrant) : on peut donc dire qu'un angle de demi-droites est <u>saillant</u> (resp. <u>rentrant</u>) pour l'orientation considérée du plan s'il est l'ouverture d'un secteur saillant (resp. rentrant) ; si un angle de demi-droites θ est saillant, l'angle $\theta+\varpi$ et l'angle $-\theta$ sont rentrants et vice-versa. En particulier, on appelle <u>angles droits</u> les deux solutions de l'équation $2\theta=\varpi$ dans A ; l'angle droit saillant est l'angle $(\widehat{D_{e_1}, D_{e_2}}) = \delta$.

Considérons deux demi-droites D_x, D_y d'origine 0 rencontrant le cercle C aux points x et y . Par définition, on appelle <u>arc</u> du cercle C , d'origine x et d'extrémité y , l'intersection de C avec le secteur angulaire $S(D_x,D_y)$. L'écart angulaire $\widehat{xy}$ des points x et y est encore appelé l'amplitude de l'arc d'origine x et d'extrémité y ; le sous-groupe A^+ du groupe A des angles de demi-droites est isomorphe canoniquement au groupe des amplitudes des arcs du cercle C ; l'angle $\widehat{(D_x, D_y)}$ est encore appelé l'angle au centre de l'arc d'origine x et d'extrémité y .

PROPOSITION 11.- Soient x et y deux points distincts de C . Si z est un point de C distinct de x et de y , l'ensemble des demi-droites d'origine z passant par les points de l'arc Γ d'origine x et d'extrémité y (y compris les deux demi-droites portées par la tangente à C au point z , si z appartient à cet arc) est identique au secteur angulaire Σ de sommet z , d'origine la demi-droite passant par x , et d'extrémité la demi-droite passant par y . Si θ est l'ouverture du secteur $S(D_x, D_y)$, θ_o l'ouverture de Σ , on a $2\theta_o = \theta$; en outre, si $z \notin \Gamma$, θ_o est égal à l'angle $\widehat{(D_x, \Delta)}$, ou' Δ est la demi-droite portée par la bissectrice de D_x et D_y et contenue dans le secteur $S(D_x, D_y)$; si au contraire, $z \in \Gamma$, $\theta_o = \widehat{(D_x, \Delta)} + \varpi$.

Par une rotation, on peut toujours supposer que $z = -e_1$ si $z \notin \Gamma$ et $z = e_1$ si $z \in \Gamma$. Considérons d'abord le premier cas ; en vertu de l'hypothèse sur ρ_2/ρ_1 , on a $\cos\theta \geqslant -1$ pour tout angle $\theta \in A^+$. Soient $\alpha = \widehat{(D_{e_1}, D_x)}$, $\beta = \widehat{(D_{e_1}, D_y)}$. D'après l'hypothèse, deux des trois bivecteurs $-x \wedge e_1$, $-e_1 \wedge y$, $y \wedge x$ doivent être rétrogrades ; or, ils sont égaux au produit de $e_1 \wedge e_2$ par les éléments respectifs $\sin\alpha$, $-\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$, qui ont même signe que $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, $-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, $(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta)/(1+\frac{\rho_1}{\rho_2}.\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta)$ respectivement. Nous allons en déduire qu'on a $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$; en effet, on ne peut avoir $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \geqslant 0$ et $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta \leqslant 0$; reste donc à considèrer le cas où $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ et $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ ont même signe ; alors $1+\frac{\rho_1}{\rho_2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha.\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta > 0$, donc il faut $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta \leqslant 0$.

Considérons maintenant un point u de Γ, d'amplitude ω ; deux des trois bivecteurs $x \wedge u$, $u \wedge y$, $y \wedge x$ doivent être directs, ce qui signifie que deux des trois éléments $\sin(\omega-\alpha)$, $\sin(\beta-\omega)$, $\sin(\alpha-\beta)$ doivent être $\geqslant 0$. Supposons d'abord que $0 \leqslant \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqslant \mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta$. Alors on ne peut avoir $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega < \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$, car on en déduirait $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega-\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha<0$, $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta-\mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega>0$, et si on avait en outre $1+\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega<0$, on aurait aussi $1+\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega<0$, donc dans tous les cas deux des trois éléments $\sin(\omega-\alpha)$, $\sin(\beta-\omega)$, $\sin(\alpha-\beta)$ seraient <0 ; on montre plus simplement encore qu'on doit avoir $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega \leqslant \mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta$. Raisonnement analogue quand $0 \geqslant \mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta \geqslant \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$, ou quand $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqslant 0 \leqslant \mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta$ et $1+\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha.\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta>0$; enfin, si $1+\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha.\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta<0$, la relation $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega<\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$ entraînerait $\sin(\omega-\alpha)>0$ et $1+\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega.\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta<0$, donc aussi $\sin(\beta-\omega)<0$, et on voit qu'il en serait de même si $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega>\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta$. En résumé, les points u de Γ sont caractérisés par la relation

(17) $$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha \leqslant \mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega \leqslant \mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta$$

D'autre part, le coefficient de $e_1 \wedge e_2$ dans le bivecteur $(x+e_1)\wedge(u+e_1)$ est $(1+\cos\alpha)\sin\omega-(1+\cos\omega)\sin\alpha = (1+\cos\alpha)(1+\cos\omega)(\mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega-\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha)$, et a donc le signe de $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\omega-\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$; la relation (17) prouve donc que l'ensemble des demi-droites d'origine $-e_1$ (qui toutes rencontrent C en un second point) passant par les points de Γ , est identique au secteur angulaire Σ . Reste à prouver que $\theta_0=(\widehat{D_x,\Delta})$, car d'après la prop.10, on a évidemment $2\theta_0=\theta$; comme θ_0 est un angle saillant, puisque Σ est contenu dans le demi-plan $\xi \geqslant -1$, tout revient à montrer que l'angle $(\widehat{D_x,\Delta})$ est saillant ; par une similitude directe, on peut toujours se ramener au cas où $\Delta=D_{e_1}$, et comme alors $x\wedge e_1=e_1\wedge y$, ces deux bivecteurs sont nécessairement directs, puisque Δ doit appartenir au secteur $S(D_x,D_y)$.

On traiterait de même le cas où $z \in \Gamma'$; nous en laissons le soin au lecteur.

Angles dans les espaces euclidiens parfaits. La théorie précédente se simplifie lorsque F est un plan euclidien parfait. Le groupe L_0^+ des similitudes directes laissant invariant 0 est alors le quotient du produit $O_2^+(K,f)\times H_0$ par le sous-groupe d'ordre 2 formé de l'application identique et de la symétrie $x \to -x$ (cette dernière étant la seule rotation qui soit une homothétie) (cor. de la prop.8). Toute droite non isotrope passant par 0 rencontre le cercle C , et par suite le groupe des rotations $O_2^+(K,f)$ opère transitivement dans l'ensemble de ces droites, et chacune de ces droites peut être orientée ; en d'autres termes, le groupe A_0^+ est alors identique au groupe des angles A_0 , et tout couple de droites orientées admet une bissectrice.

Supposons maintenant en outre que le corps (pythagoricien) K soit ordonné. Alors, le groupe L_0^+ est produit direct des groupes $O_2^+(K,f)$ et H_0^+ ; il n'y a pas de droites isotropes, et toute demi-droite d'origine 0 rencontre donc le cercle C en un point et un seul. Le groupe A des angles de demi-droites, identique à A^+ , est alors isomorphe au groupe $O_2^+(K,f)$, et au groupe des éléments de norme 1 dans le corps $K'=K(i)$ $(i^2=-1)$; pour tout $z\in K'^*$, on a $\mathrm{Am}(\bar{z})=-\mathrm{Am}(z)$, puisque $z\bar{z} > 0$. Les fonctions $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont définies pour tout angle de demi-droites θ ; la relation $\sin\theta > 0$ est nécessaire et suffisante pour que θ soit saillant. On a $\cos\delta=0$, $\sin\delta=1$, d'où $\cos(\theta+\delta)=-\sin\theta$; les angles saillants tels que $\cos\theta > 0$ sont dits aigus, ceux pour lesquels $\cos\theta < 0$ sont dits obtus .

De la relation $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ pour tout angle θ de demi-droites, on déduit que $|\cos\theta| \leqslant 1$ et $|\sin\theta| \leqslant 1$. Inversement, si K est un corps ordonné <u>maximal</u>, pour tout $\alpha \in K$ tel que $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, il existe un angle de demi-droites θ tel que $\cos\theta=\alpha$, puisqu'il existe alors $\beta \in K$ tel que $\beta^2=1-\alpha^2 \geqslant 0$.

Considérons maintenant un espace euclidien <u>parfait</u> E de dimension $n > 2$ sur un corps ordonné (pythagoricien) K , et soient D,D' deux <u>demi-droites</u> d'origine O dans E , P un plan quelconque dans E que nous orienterons arbitrairement. Il existe un déplacement transformant le plan Q défini par D et D' en P (prop.6) ; en outre, si u et v sont deux déplacements ayant cette propriété, uv^{-1} est un déplacement laissant P invariant ; on en déduit que l'<u>angle</u> des demi-droites transformées de D et D' est le même <u>au signe près</u>, quel que soit le déplacement transformant le plan Q défini par D et D' en P ; un seul de ces deux angles est <u>saillant</u> (sauf lorsque D et D' sont opposées) ; c'est celui qu'on définit comme l'<u>angle</u> θ des deux demi-droites D et D' (il est clair ici que l'ordre dans lequel on considère D et D' n'intervient plus) ; il ne dépend évidemment pas du plan P choisi. Si u et v sont des vecteurs directeurs des demi-droites D,D' , on a , pour l'angle θ de D et D' , la formule

(18) $$\cos\theta = \langle u,v\rangle / \|u\|\cdot\|v\|$$

qu'on vérifie aussitôt en supposant que P contient D et D', que $\|u\| = \|v\| = 1$ et que D est la demi-droite dont un des vecteurs directeurs est e_1 ; jointe à la condition $\sin\theta > 0$, la formule (18) détermine entièrement θ .

Lorsque Q est orienté, on voit que l'angle des transformées de D et D' par deux déplacements u,v transformant Q en P et transformant une base directe de Q en une base directe de P est le même ; c'est cet angle qu'on appelle l'angle de D et D' dans le plan orienté Q.

Lorsque E est un espace euclidien parfait sur un corps non ordonné K, Δ, Δ' deux droites quelconques passant par O, P un plan non isotrope quelconque dans E, on peut définir de la même manière l'angle des deux droites Δ, Δ' : c'est l'angle, au signe près, des transformées de Δ et Δ' par un déplacement transformant en P le plan défini par Δ et Δ, lorsque ce plan n'est pas isotrope ; si θ est un tel angle, on a encore

$$\cos^2\theta = \langle u,v\rangle^2/\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \tag{19}$$

si u et v sont des vecteurs directeurs des droites Δ et Δ', (On observera que le second membre de (19) garde un sens lorsque le plan défini par u et v est isotrope : il a alors la valeur 1, comme on le vérifie aussitôt).

Lorsque F n'est pas un espace euclidien parfait, la notion d'angle de deux droites D,D' dans F ne peut avoir de sens que pour les couples de droites tels qu'il existe une similitude transformant le plan défini par D et D' en un plan fixe P ; il y a donc autant de sortes d'angles de droites dans F qu'il y a de classes d'intransitivité pour le groupe des similitudes dans l'ensemble des plans non isotropes.

Géométrie hermitienne à 2 dimensions. Soit F un espace vectoriel de dimension 2 sur un corps commutatif K, extension séparable de degré 2 d'un corps K_0 (de caractéristique quelconque) ; soit f une forme hermitienne de rang 2 sur F.

Proposition 12. Si la forme f est d'indice 1 , le groupe des similitudes propres est isomorphe au groupe $GL_2(K_0)$.

Comme il existe des droites isotropes par hypothèse, on peut toujours prendre pour base de F deux vecteurs isotropes a_1, a_2 non colinéaires ; en multipliant au besoin a_2 par un scalaire convenable de K , on peut toujours supposer que $(a_2,a_1)=\overline{(a_1,a_2)}=-(a_1,a_2)$ (c'est évident si K est de caractéristique 2 , et dans le cas contraire, il existe toujours un élément $\mu \in K$ tel que $\overline{\mu}=-\mu$). Multipliant f par un scalaire, on peut enfin se ramener au cas où par rapport à la base (a_1,a_2) , on a $f(x)=\xi_1\overline{\xi}_2-\xi_2\overline{\xi}_1$. Soit alors u une similitude propre, de multiplicateur $\lambda \in K_0$, et posons $u(a_1)=\alpha a_1+\beta a_2$, $u(a_2)=\gamma a_1+\delta a_2$; en écrivant que u est une similitude, il vient $\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}=\gamma\overline{\delta}-\delta\overline{\gamma}=0$, $\alpha\overline{\delta}-\beta\overline{\gamma}=\lambda$; comme α et β ne sont pas tous deux nuls, on tire de là que l'on peut écrire $\overline{\alpha}=\rho\alpha$, $\overline{\beta}=\rho\beta$, d'où $\lambda=\overline{\rho}(\overline{\alpha\delta-\beta\gamma})$, et comme u doit être une similitude propre (c'est-à-dire de déterminant λ), il vient $\rho=1$; on a donc $\overline{\alpha}=\alpha$, $\overline{\beta}=\beta$, et on voit de même que $\overline{\gamma}=\gamma$, $\overline{\delta}=\delta$, autrement dit, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ appartiennent à K_0 et sont soumis à la seule condition $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, d'où la proposition.

On notera que dans cette isomorphie, les transformations unitaires de déterminant 1 correspondent aux transformations unimodulaires de $GL_2(K_0)$.

Supposons maintenant K de caractéristique $\neq 2$.

Proposition 13.- Si la forme $f(x)=\xi_1\overline{\xi}_1+\rho\,\xi_2\overline{\xi}_2$ (par rapport à une base orthogonale de F) est d'indice 0 , le groupe des similitudes hermitiennes propres correspondantes est isomorphe au groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ du corps des quaternions K' sur K_0 , relatif au couple $(-\theta,-\rho)$, où θ est un élément de K_0 tel que K s'obtienne par adjonction à K_0 des racines $\pm\omega$ de $X^2+\theta$.

En effet, soit (e_1, e_2) la base orthogonale considérée dans F , u une similitude propre telle que $u(e_1)=\alpha e_1+\beta e_2$, $u(e_2)=\gamma e_1+\delta e_2$; si λ est le multiplicateur de u , on doit avoir

$$\alpha\bar{\alpha} + \rho\beta\bar{\beta} = \lambda \tag{20}$$

$$\gamma\bar{\gamma} + \rho\delta\bar{\delta} = \lambda\rho \tag{21}$$

$$\alpha\bar{\gamma} + \rho\beta\bar{\delta} = 0 \tag{22}$$

De (21) et (22), on tire $\alpha\gamma\bar{\gamma} + \rho\beta\gamma\bar{\delta} = 0$, d'où $\alpha(\lambda - \delta\bar{\delta}) + \beta\gamma\bar{\delta} = 0$ c'est-à-dire $\lambda\alpha = \bar{\delta}(\alpha\delta - \beta\gamma)$, et comme par hypothèse $\alpha\delta - \beta\gamma = \lambda$, on a $\alpha = \bar{\delta}$; on tire alors de (21) que $\gamma = -\rho\bar{\beta}$; en d'autres termes, la matrice de u peut s'écrire $\begin{pmatrix} \alpha & -\rho\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, avec la relation (20) entre α, β et le multiplicateur λ ; en outre, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\rho\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & -\rho\bar{\beta}' \\ \beta' & \bar{\alpha}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \rho\bar{\beta}\beta' & -\rho(\bar{\beta}\bar{\alpha}' + \alpha\bar{\beta}') \\ \beta\alpha' + \bar{\alpha}\beta' & \bar{\alpha}\bar{\alpha}' - \rho\beta\bar{\beta}' \end{pmatrix} \tag{23}$$

Soit alors 1,u,v,w la base canonique de l'algèbre des quaternions K' sur K_o , correspondant au couple $(-\theta, -\rho)$ (chap.II, §7,n°8) ; posons $\alpha = a_o + \omega a_1$, $\beta = a_2 - \omega a_3$, et faisons correspondre à u le quaternion $\mu = a_o + a_1 u + a_2 v + a_3 w$ $(a_i \in K_o)$; on a $N(\mu) = \alpha\bar{\alpha} + \rho\beta\bar{\beta} = \lambda$ donc l'hypothèse sur f entraîne que K' est un <u>corps</u> (loc.cit.) ; on vérifie alors aisément à l'aide de la formule (23) qu'au produit uu' de deux similitudes propres correspond le produit $\mu\mu'$ des quaternions correspondant à u et u' , d'où la proposition.

On peut préciser ce résultat comme suit : considérons un point (ξ_1, ξ_2) quelconque de F , et soient $\xi_1 = z_o + \omega z_1$, $\xi_2 = z_2 - \omega z_3$; si nous faisons correspondre à ce point le quaternion $z = z_o + z_1 u + z_2 v + z_3 w$, on constate aussitôt que le transformé par u du point (ξ_1, ξ_2) correspond ainsi au quaternion μz . On identifie ainsi le plan F au corps des quaternions K' , et le groupe des similitudes hermitiennes au groupe des homothéties à gauche $z \to \mu z$ ($\mu \in K'^{*}$) de K' .

Dans cette identification, aux transformations unitaires de déterminant 1 correspondent les transformations $z \to \mu z$, où μ est un quaternion de norme 1 .

Géométrie euclidienne à 4 dimensions : I. Cas où $\nu = 2$. Soit F un espace vectoriel de dimension 4 sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, et f une forme quadratique d'indice 2 sur E . Le groupe des similitudes correspondant est le groupe des transformations projectives laissant invariante la quadrique Q d'équation $f(x')=0$ dans l'hyperplan à l'infini H_∞ de F . On peut supposer choisie dans E une base telle que par rapport à cette base on ait $f(x') = \xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3$ dans H'_∞ (qu'on identifie une fois pour toutes à F dans ce qui suit). La quadrique Q admet alors la représentation paramétrique

$$(24) \qquad \xi_1 = \lambda_1\mu_1 \ , \ \xi_3 = \lambda_2\mu_1 \ , \ \xi_2 = \lambda_1\mu_2 \ , \ \xi_4 = \lambda_2\mu_2$$

où (λ_1, λ_2) et (μ_1, μ_2) parcourent la droite projective $P_1(K)$; il est immédiat de vérifier que l'application qui au point $((\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2))$ de $P_1(K) \times P_1(K)$ fait correspondre le point de Q défini par (24) est une application biunivoque de $P_1(K) \times P_1(K)$ sur Q . Par cette application correspondent aux ensembles $P_1(K) \times \{b\}$ (resp. $\{a\} \times P_1(K)$) des génératrices rectilignes de Q , dont nous désignerons l'ensemble par S_1 (resp. S_2) ; le rapport anharmonique de quatre génératrices de l'ensemble S_1 (resp. S_2) correspondant aux points b_1, b_2, b_3, b_4 (resp. a_1, a_2, a_3, a_4) de $P_1(K)$, est égal au rapport anharmonique de ces quatre points.

Toute droite de S_1 rencontre toute droite de S_2 et ne rencontre aucune autre droite de S_1, donc une similitude ne peut que laisser invariants S_1 et S_2 ou les permuter ; le sous-groupe Γ de L_0

laissant invariants S_1 et S_2 est donc d'indice 2 dans L_0 ; nous verrons un peu plus loin qu'il est identique au groupe L_0^+ des similitudes directes laissant fixe 0 .

Toute transformation $u \in \Gamma$ transforme quatre génératrices de l'ensemble S_1 en quatre génératrices ayant même rapport anharmonique, puisque ce rapport est celui des points où les 4 génératrices rencontrent une génératrice de S_2 ; cela signifie que si on désigne par $u_1(b)$ le point de $P_1(K)$ qui correspond à la transformée par u de la génératrice correspondant au point b de $P_1(K)$, $b \rightarrow u_1(b)$ est une projectivité de $P_1(K)$; on définit de même une seconde projectivité u_2 correspondant à la transformation de l'ensemble S_2 sur lui-même définie par u . Inversement, à tout couple (u_2, u_1) de projectivités de $P_1(K)$ correspondent toutes les transformations u de Γ , qui transforment le point de paramètres (a,b) de Q dans le point de paramètres $(u_2(a), u_1(b))$; toutes ces transformations se déduisent de l'une d'entre elles par une <u>homothétie</u> arbitraire. On définit ainsi un <u>isomorphisme</u> du groupe Γ/H_0 sur le groupe produit $PL_2(K) \times PL_2(K)$. De façon précise, si u_1 correspond à la matrice $\underline{U}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, u_2 à la matrice $\underline{U}_2 = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$, on vérifie aussitôt que toutes les similitudes u correspondantes ont pour matrices $\lambda \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_2$; comme en outre on peut écrire $\underline{U}_1 \otimes \underline{U}_2 = (\underline{I} \otimes \underline{U}_2)(\underline{U}_1 \otimes \underline{I})$, on a $\det u = \lambda^4 (\det \underline{U}_1)^2 (\det \underline{U}_2)^2$ et on vérifie aisément que le multiplicateur de u est $\lambda^2 \det \underline{U}_1 . \det \underline{U}_2$, donc Γ est bien identique au groupe L_0^+ des similitudes directes. En d'autres termes :

<u>Proposition 14</u>. <u>Le groupe quotient</u> L_0^+/H_0 (pour un espace F de dimension 4 , et une forme quadratique f d'indice 2) <u>est isomorphe au groupe produit</u> $PL_2(K) \times PL_2(K)$.

De façon précise, si à un point $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ de F on associe la matrice $\underline{X} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix}$, on vérifie aisément que toute transformation de L_o^+ peut s'écrire

$$(25) \qquad \underline{X} \longrightarrow \underline{U}_1 \underline{X}\, {}^t\underline{U}_2$$

$\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ étant déterminées à un facteur près.

Pour que la transformation (25) soit une rotation, il faut et il suffit que $\det \underline{U}_1 . \det \underline{U}_2 = 1$.

Géomètrie euclidienne à 4 dimensions. II : Cas où $\nu = 1$. Soit f une forme d'indice 1 sur F ; on peut supposer choisie une base dans F telle que, par rapport à cette base, $f(x) = \xi_1 \xi_4 - (\rho_2 \xi_2^2 + \rho_3 \xi_3^2)$, l'élément $-\rho_3/\rho_2$ n'étant pas un carré dans K. Soit K_1 l'extension quadratique (séparable) de K obtenue par adjonction d'une racine ω du polynome $\rho_2 X^2 + \rho_3$; soit F_1 l'espace vectoriel sur K_1 obtenu par extension à ce corps du corps des scalaires de F ; f est la restriction à F de la forme quadratique sur F_1 qui s'écrit, par rapport à la même base (e_i), $f_1(x) = \xi'_1 \xi'_4 - \rho_2(\xi'_2 + \omega \xi'_3).(\xi'_2 - \omega \xi'_3)$, les ξ'_i étant des éléments quelconques de K_1. Le groupe $L_o^+(K,f)$ peut être considéré comme le sous-groupe du groupe analogue $L_o^+(K_1,f_1)$ formé des matrices dont les éléments appartiennent à K ; il revient au même de dire que ces matrices doivent être invariantes par l'automorphisme σ de K_1 sur K distinct de l'automorphisme identique ; ou encore que les transformations de $L_o^+(K,f)$ sont les transformations de $L_o^+(K_1,f_1)$ permutables avec la transformation semi-linéaire involutive t_σ :

$$(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4) \longrightarrow (\xi_1'^{\sigma}, \xi_2'^{\sigma}, \xi_3'^{\sigma}, \xi_4'^{\sigma}).$$

Prenons dans F_1 une nouvelle base, de sorte que les formules de changement de coordonnées soient :

$$\eta_1 = \xi'_1 \qquad \eta_4 = \xi'_4 \qquad \eta_2 = \rho_2(\xi'_2 + \omega\,\xi'_3) \qquad \eta_3 = \xi'_2 - \omega\,\xi'_3$$

Pour ces nouvelles coordonnées, la transformation t_σ devient

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \longrightarrow (\eta_1^\sigma, \rho_2\eta_3^\sigma, \frac{1}{\rho_2}\,\eta_2^\sigma, \eta_4^\sigma)$$

Cette transformation laisse invariante la quadrique Q_1 d'équation $\eta_1\eta_4 - \eta_2\eta_3 = 0$ et les paramètres (λ'_1, λ'_2), (μ'_1, μ'_2) du transformé d'un point de Q_1 de paramètres (λ_1, λ_2) et (μ_1, μ_2) sont

$$(\lambda'_1, \lambda'_2) = (\rho_2\,\mu_1^\sigma, \mu_2^\sigma)$$
$$(\mu'_1, \mu'_2) = (\lambda_1^\sigma, \rho_2\lambda_2^\sigma)$$

(elle échange donc les génératrices rectilignes de Q_1) ; les matrices $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ doivent donc vérifier les relations

$$\rho_2(\alpha'\mu_1 + \beta'\mu_2)^\sigma = \rho_2\alpha\,\mu_1^\sigma + \beta\,\mu_2^\sigma \qquad (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)^\sigma = \alpha'\lambda_1^\sigma + \rho_2\beta'\lambda_2^\sigma$$
$$(\gamma'\mu_1 + \delta'\mu_2)^\sigma = \rho_2\gamma\,\mu_1^\sigma + \delta\,\mu_2^\sigma \qquad \rho_2(\gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2)^\sigma = \gamma'\lambda_1^\sigma + \rho_2\delta'\lambda_2^\sigma$$

quels que soient $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ ce qui équivaut à la relation

(26) $$\underline{U}_2 = \underline{P}\underline{U}_1^\sigma\underline{P}^{-1}$$

avec $\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$. Le multiplicateur de la similitude correspondante u dans $L_0^+(K,f)$ est donc la <u>norme</u> $\Delta\Delta'$, où $\Delta = \det \underline{U}_1$, et on a la proposition suivante :

<u>Proposition 15</u>. <u>Pour un espace</u> F <u>de dimension</u> 4 <u>et une forme quadratique</u> f <u>d'indice</u> 1 , <u>le groupe</u> L_0^+ <u>est isomorphe au groupe quotient</u> $GL_2(K_1)/N$, <u>où</u> N <u>est le sous-groupe du centre de</u> $GL_2(K_1)$ <u>formé des homothéties</u> $x \longrightarrow \lambda x$ <u>dont le rapport</u> λ <u>a pour norme</u> 1 .

Les <u>rotations</u> correspondent aux matrices $\underline{U}_1$ dont le déterminant est de <u>norme</u> 1 .

<u>Géomètrie euclidienne à 4 dimensions</u>. <u>III</u> : <u>Cas où</u> $\nu=0$. Soit f une forme d'indice 0 sur F , et supposons que par rapport à une base orthogonale, on ait $f(x)=\rho_1\xi_1^2+\rho_4\xi_4^2-\rho_2\xi_2^2-\rho_3\xi_3^2$; $-\rho_4/\rho_1$ et $-\rho_3/\rho_2$ n'étant pas carrés dans K . Soit K_1 l'extension quadratique de K obtenue par adjonction à K d'une racine ω de $\rho_1X^2+\rho_4$; $-\rho_3/\rho_2$ peut ou non être un carré dans K_1 ; dans le premier cas, on a nécessairement $-\rho_3/\rho_2=\theta^2\omega^2=-\theta^2\rho_4/\rho_1$, avec $\theta\in K$, comme on le vérifie aussitôt, donc $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$ est un carré dans K , f a un <u>discriminant carré</u>, et réciproquement. Supposons donc en premier lieu que f ait un discriminant carré ; par un changement de variables on peut évidemment se ramener au cas où $\theta=1$, et on peut alors écrire

$$f(x)=\rho_1(\xi_1+\omega\xi_4)(\xi_1-\omega\xi_4)-\rho_2(\xi_2+\omega\xi_3)(\xi_2-\omega\xi_3)$$

Ici encore, le groupe $L_0^+(K,f)$ est le sous-groupe de $L_0^+(K_1,f_1)$ (f_1 se déduisant de f en remplaçant les ξ_i par les éléments ξ'_i de K_1) formé des transformations <u>permutables avec la transformation semi-linéaire</u> t_σ définie par : $(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3,\xi'_4)\longrightarrow(\xi_1'^\sigma,\xi_2'^\sigma,\xi_3'^\sigma,\xi_4'^\sigma)$; si on fait le changement de coordonnées

$$\eta_1=\rho_1(\xi'_1+\omega\xi'_4)\qquad\eta_4=\xi'_1-\omega\xi'_4\qquad\eta_2=\rho_2(\xi'_2+\omega\xi'_3)\qquad\eta_3=\xi'_2-\omega\xi'_3$$

la transformation t_σ devient, pour ces nouvelles coordonnées

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\longrightarrow(\rho_1\eta_4^\sigma,\ \rho_2\eta_3^\sigma,\ \frac{1}{\rho_2}\eta_2^\sigma,\ \frac{1}{\rho_1}\eta_1^\sigma)$$

Elle laisse invariante la quadrique Q_1 d'équation $\eta_1\eta_4-\eta_2\eta_3=0$, et les paramètres du transformé d'un point de Q_1 de paramètres (λ_1,λ_2) et (μ_1,μ_2) sont donnés par

$$(\lambda'_1,\lambda'_2)=(\rho_2\lambda_2^\sigma,\ \frac{1}{\rho_1}\lambda_1^\sigma)$$
$$(\mu'_1,\mu'_2)=(\rho_1\mu_2^\sigma,\ \rho_2\mu_1^\sigma)$$

D'où on tire aussitôt que les matrices $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ doivent vérifier les conditions

$$\rho_2(\gamma\lambda_1+\delta\lambda_2)^\sigma = \alpha\rho_2\lambda_2^\sigma + \frac{\beta}{\rho_1}\lambda_1^\sigma \qquad \rho_1(\gamma'\mu_1+\delta'\mu_2)^\sigma = \alpha'\rho_1\mu_2^\sigma+\beta'\rho_2\mu_1^\sigma$$

$$\frac{1}{\rho_1}(\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2)^\sigma = \gamma\rho_2\lambda_2^\sigma + \frac{\delta}{\rho_1}\lambda_1^\sigma \qquad \rho_2(\alpha'\mu_1+\beta'\mu_2)^\sigma = \gamma'\rho_1\mu_2^\sigma+\delta'\rho_2\mu_1^\sigma$$

quels que soient $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, ce qui donne les relations

$$\delta = \alpha^\sigma \qquad \delta' = \alpha'^\sigma$$

$$\beta = \rho_1\rho_2\gamma^\sigma \qquad \beta' = \frac{\rho_1}{\rho_2}\gamma'^\sigma$$

La prop.13 montre donc que si on pose $\underline{P}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho_1\end{pmatrix}$, les matrices $\underline{U}_1$ et $\underline{P}^{-1}.{}^t\underline{U}_2.\underline{P}$ sont des matrices du groupe des similitudes hermitiennes propres relatives à la forme $g(z)=\xi_1\bar{\xi}_1-\rho_1\rho_2\xi_2\bar{\xi}_2$ (en posant $\bar{\xi}=\xi^\sigma$); comme ρ_2/ρ_1 n'est pas une norme (sans quoi f ne serait pas d'indice 0), la forme g est d'indice 0. Si on pose $\underline{Y}=\underline{XP}=\begin{pmatrix}\rho_1(\xi_1+\omega\xi_4) & \rho_1\rho_2(\xi_2+\omega\xi_3)\\ \xi_2-\omega\xi_3 & \rho_1(\xi_1-\omega\xi_4)\end{pmatrix}$ il résulte de la prop.13 que si on fait correspondre au point $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ le quaternion (relatif au couple $(-\frac{\rho_4}{\rho_1}, \rho_1\rho_2)$) $z=\rho_1\xi_1+\rho_1\xi_4 u+\xi_2 v+\xi_3 w$, toute transformation du groupe L_0^+ peut s'écrire

(27) $$z \longrightarrow azb$$

où a et b sont deux quaternions arbitraires du corps K' des quaternions relatifs au couple $(-\frac{\rho_4}{\rho_1}, \rho_1\rho_2)$; en outre, a et b sont définis à un facteur scalaire près de K, et le multiplicateur de la similitude (27) est $N(a)N(b)$; on a d'ailleurs $N(z)=\rho_1(\rho_1\xi_1^2+\rho_4\xi_4^2-\rho_2\xi_2^2-\rho_3\xi_3^2)$ comme on le vérifie aussitôt. L'espace F peut ainsi être identifié à K', et les transformations de L_0^+ aux ~~xx~~ transformations (27). La structure de L_0^+ est donc déterminée par la proposition suivante :

<u>Proposition 16.- Pour un espace</u> F <u>de dimension 4</u> , <u>une forme quadratique</u> f <u>de discriminant carré et d'indice</u> 0 , <u>le groupe</u> L_0^+ <u>est isomorphe</u>

au groupe $(K'^* \times K'^*)/Z$, *où* K' *est un corps de quaternions sur* K , *et* Z *le sous-groupe de* $K'^* \times K'^*$, *isomorphe à* K^* , *formé des couples* $(\lambda, \frac{1}{\lambda})$, *où* $\lambda \in K^*$.

Pour que la transformation (27) soit une *rotation*, il faut et il suffit que $N(ab)=1$.

Supposons enfin que le discriminant de f ne soit pas un carré ; alors $-\rho_3/\rho_2$ n'est pas un carré dans K_1 ; soit K_2 le corps obtenu par adjonction à K d'une racine ω' de $\rho_2 X^2 + \rho_3$; K_1 et K_2 sont linéairement disjoints sur K ; soit K_0 leur corps composé, extension galoisienne de degré 4 de K . Dans K_0 on peut écrire

$$f(x)=\rho_1(\xi_1+\omega\xi_4)(\xi_1-\omega\xi_4)-\rho_2(\xi_2+\omega'\xi_3)(\xi_2-\omega'\xi_3)$$

et le groupe $L_0^+(K,f)$ est le sous-groupe de $L_0^+(K_0,f_1)$ (f_1 se déduisant de f en remplaçant les ξ_i par des éléments ξ_i' de K_0) constitué par les transformations *permutables avec les deux transformations semi-linéaires* t_σ et t_τ , correspondant aux automorphismes σ : $(\omega,\omega') \rightarrow (-\omega,\omega')$ et $\tau : (\omega,\omega') \rightarrow (\omega,-\omega')$ de K_0 , et définies par

$(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_4') \rightarrow (\xi_1'^\sigma, \xi_2'^\sigma, \xi_3'^\sigma, \xi_4'^\sigma)$ et

$(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_4') \rightarrow (\xi_1'^\tau, \xi_2'^\tau, \xi_3'^\tau, \xi_4'^\tau)$

Faisons le changement de coordonnées

$$\eta_1=\rho_1(\xi_1'+\omega\xi_4'),\quad \eta_4=\xi_1'-\omega\xi_4',\quad \eta_2=\rho_2(\xi_2'+\omega'\xi_3'),\quad \eta_3=\xi_2'-\omega'\xi_3'$$

Les transformations t_σ et t_τ deviennent, pour ces nouvelles coordonnées

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) \rightarrow (\rho_1\eta_4^\sigma, \eta_2^\sigma, \eta_3^\sigma, \frac{1}{\rho_1}\eta_1^\sigma)$$

et

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) \rightarrow (\eta_1, \rho_2\eta_3^\tau, \frac{1}{\rho_2}\eta_2^\tau, \eta_4^\tau)$$

Elles laissent invariantes la quadrique Q_1 d'équation $\eta_1\eta_4-\eta_2\eta_3=0$ et les paramètres du transformé d'un point de Q_1 de paramètres (λ_1,λ_2) et (μ_1,μ_2) sont donnés respectivement par

$$(\lambda'_1,\lambda'_2)=(\rho_1\mu_2^\sigma,\mu_1^\sigma) \qquad (\mu'_1,\mu'_2)=(\rho_2\lambda_2^\sigma,\lambda_1^\sigma)$$

et $$(\lambda'_1,\lambda'_2)=(\rho_2\mu_1^\tau,\mu_2^\tau) \qquad (\mu'_1,\mu'_2)=(\lambda_1^\tau,\rho_2\lambda_2^\tau)$$

Les matrices $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ doivent donc vérifier les conditions

$$\rho_1(\gamma'\mu_1+\delta'\mu_2)^\sigma=\alpha\rho_1\mu_2^\sigma+\beta\mu_1^\sigma \qquad (\alpha'\mu_1+\beta'\mu_2)^\sigma=\gamma\rho_1\mu_2^\sigma+\delta\mu_1^\sigma$$

$$\rho_2(\alpha'\mu_1+\beta'\mu_2)^\tau=\alpha\rho_2\mu_1^\tau+\beta\mu_2^\tau \qquad (\gamma'\mu_1+\delta'\mu_2)=\gamma\rho_2\mu_1^\tau+\delta\mu_2^\tau$$

quels que soient λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ce qui donne les relations

$$\alpha'=\delta^\sigma \qquad \beta'=\rho_1\gamma^\sigma \qquad \gamma'=\frac{1}{\rho_1}\beta^\sigma \qquad \delta=\alpha^\sigma$$

$$\alpha'=\alpha^\tau \qquad \beta'=\frac{1}{\rho_2}\beta^\tau \qquad \gamma'=\rho_2\gamma^\tau \qquad \delta'=\alpha^\tau$$

qui entraînent

$$\delta=\alpha^{\sigma\tau} \qquad \beta=\rho_1\rho_2\gamma^{\sigma\tau}$$

Autrement dit, si on pose $\bar{\xi}=\xi^{\sigma\tau}$, et $\underline{P}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\rho\end{pmatrix}$, la matrice $\underline{U}_1$ est une matrice du groupe des similitudes hermitiennes propres relatives à la forme $g(z)=\xi_1\bar{\xi}_1-\rho_1\rho_2\xi_2\bar{\xi}_2$, et on a $\underline{U}_2=\underline{P}\underline{U}_1^\tau\underline{P}^{-1}$. Si $\Delta=\det\underline{U}_1$, le multiplicateur de la similitude correspondante dans $L_0^+(K,f)$ est $\Delta\Delta^\tau$. Le sous-corps K_3 de K_0 formé des invariants de l'automorphisme $\xi\to\bar{\xi}$ est le sous-corps $K(\omega\omega')$; on constate aisément que si on avait $\rho_1\rho_2=\xi\bar{\xi}$ pour un $\xi\in K_0$, il existerait quatre éléments ξ_i de K annulant f et non tous nuls, donc g est d'indice 0. Soit K' le corps de quaternions sur K_3, correspondant au couple $(-\frac{\rho_4}{\rho_1},\rho_1\rho_2)$; la matrice $\underline{U}_1$ n'étant définie qu'à un facteur près $\lambda\in K_0$ tel que $\lambda=\bar{\lambda}$ et $\lambda\lambda^\tau=1$, on a nécessairement $\lambda\in K_3$, donc la prop.13 prouve que :

Proposition 17.- Pour un espace F de dimension 4 , et une forme quadratique f de discriminant non carré et d'indice 0, le groupe L_0^+ est isomorphe au groupe K'^*/N , où K' est un corps de quaternions sur une extension quadratique K_3 du corps K , et N le groupe des éléments de K_3 de norme 1 par rapport à K .

Dans cette isomorphie, les rotations correspondent aux quaternions dont la norme (par rapport à K_3) est de norme 1 sur K .

Géométrie euclidienne à 3 dimensions : I. Cas où $\nu=1$. Soit F un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, et soit f une forme quadratique d'indice 1 sur F ; on peut supposer choisie dans F une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ telle que par rapport à cette base, on ait (à un facteur constant près) $f(x) = \xi_1^2 - \xi_2\xi_3$. Considérons F comme le sous-espace $\xi_4=0$ d'un espace G de dimension 4 , f étant la restriction à ce sous-espace de la forme quadratique $g(x)= (\xi_1^2-\xi_4^2)-\xi_2\xi_3$. Le groupe $L_0(K,f)$ est produit direct du groupe $O_3^+(K,f)$ et d u groupe des homothéties (prop.3) ; nous allons donc nous borner à étudier la structure du groupe des rotations $O_3^+(K,f)$: ce dernier est le sous-groupe du groupe $O_4^+(K,g)$ formé des rotations laissant invariant l'hyperplan $\xi_4=0$. Prenons dans G une nouvelle base, de sorte que les formules de changement de coordonnées soient

$$\eta_1=\xi_1+\xi_4 \quad , \quad \eta_4=\xi_1-\xi_4 \quad , \quad \eta_2=\xi_2 \quad , \quad \eta_3=\xi_3$$

Les rotations de $O_3^+(K,f)$ doivent laisser invariante l'intersection de la quadrique $\eta_1\eta_4-\eta_2\eta_3=0$ avec l'hyperplan $\eta_1-\eta_4=0$, c'est-à-dire que les matrices $\underline{U}_1,\underline{U}_2$ de la formule (25) doivent être telles que la relation $\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2=0$ entraîne

$$(\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2)(\alpha'\mu_1+\beta'\mu_2) - (\gamma\lambda_1+\delta\lambda_2)(\gamma'\mu_1+\delta'\mu_2)=0$$

En faisant $\lambda_2=\mu_1=0$, puis $\lambda_1=\mu_2=0$, il vient $\alpha\beta'-\gamma\delta'=0$, $\alpha'\beta-\gamma'\delta=0$ d'où $\alpha'=\rho\delta$, $\beta'=\sigma\gamma$, $\gamma'=\rho\beta$, $\delta'=\sigma\alpha$, et la relation entre $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ donne alors $(\rho-\sigma)(\alpha\delta-\beta\gamma)=0$, c'est-à-dire $\rho=\sigma$, et finalement $\underline{U}_2=\mu\underline{H}\underline{U}_1\underline{H}^{-1}$, avec $\underline{H}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; comme il faut en outre que $\det\underline{U}_1.\det\underline{U}_2=1$, μ est déterminé par la relation $\mu^2(\det\underline{U}_1)^2=1$, donc au signe près ; mais pour que la restriction d'une rotation de $O_4^+(K,g)$ à l'hyperplan $\xi_4=0$ soit une rotation, il faut qu'elle laisse invariant ξ_4, ce qui donne par un calcul facile $\mu.\det U_1=1$. Il en résulte que $\underline{U}_1$ est arbitraire, et $\underline{U}_2$ entièrement déterminé par $\underline{U}_1$; en outre, si on multiplie $\underline{U}_1$ par $\lambda\in K^*$, $\underline{U}_2$ est multiplié par $1/\lambda$, donc la transformation ~~xx~~ (25) n'est pas modifiée. En résumé :

<u>Proposition 18.</u>- <u>Pour un espace F de dimension 3, et une forme quadratique f d'indice 1, le groupe $O_3^+(K,f)$ est isomorphe au groupe projectif $PL_2(K)$.</u>

<u>Géométrie euclidienne à 3 dimensions</u> : <u>II. Cas où</u> $\nu=0$. On peut toujours supposer la forme f (à ~~xx~~ un facteur constant près) rapportée à une base telle que $f(x)=\rho_2\rho_3\xi_4^2-(\rho_2\xi_2^2+\rho_3\xi_3^2)$, $-\rho_3/\rho_2$ n'étant pas un carré dans K. Considérons F comme le sous-espace $\xi_1=0$ d'un espace G de dimension ~~s~~ 4, f étant la restriction à F de la forme quadratique $g(x)=\xi_1^2+\rho_2\rho_3\xi_4^2-(\rho_2\xi_2^2+\rho_3\xi_3^2)$. Cette forme est <u>d'indice 0</u> dans G ; en effet, la relation $g(x)=0$ est impossible si $\xi_1=\xi_4=0$; si ξ_1 et ξ_4 ne sont pas nuls tous deux, cette relation s'écrit $\rho_2=(\xi_2^2+\frac{\rho_3}{\rho_2}\xi_3^2)/((\frac{1}{\rho_2}\xi_1)^2+\frac{\rho_3}{\rho_2}\xi_4^2)$; ρ_2 serait donc une <u>norme</u> (~~sur~~ K) d'un élément $\lambda+\omega\mu$ du surcorps K_1 de K obtenu en adjoignant

à K une racine ω du polynome $\rho_2 X^2+\rho_3$; mais la relation $\rho_2=\lambda^2+\frac{\rho_3}{\rho_2}\mu^2$ entraîne que f n'est pas d'indice 0 dans F .

Cela étant, la forme $g(x)$ a un discriminant <u>carré</u>. D'après la prop.16, si on fait correspondre au point $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ le <u>quaternion</u> (relation au couple $(-\rho_2\rho_3,\rho_2)$) $z=\xi_1+\xi_4 u+\xi_2 v+\xi_3 w$, toute rotation du groupe $O_4^+(K,g)$ peut s'écrire $z \longrightarrow azb$, où a et b sont deux quaternions tels que $N(ab)=1$. Pour qu'une telle rotation laisse invariant l'hyperplan $\xi_1=0$ et que sa trace sur cet hyperplan soit une rotation, il faut et il suffit qu'elle laisse ξ_1 invariant, ce qui donne la condition $ab=1$; toute rotation du groupe $O_3^+(K,f)$ peut donc s'écrire

$$z \longrightarrow aza^{-1} \tag{28}$$

où a est un quaternion arbitraire $\neq 0$ du corps K' des quaternions relatifs au couple $(-\rho_2\rho_3,\rho_2)$, l'espace F pouvant être identifié à l'ensemble des quaternions de partie scalaire <u>nulle</u> ; le quaternion a n'est d'ailleurs déterminé qu'à un facteur scalaire près de K^* . En résumé :

<u>Proposition 19.- Pour un espace F de dimension 3, et une forme quadratique f d'indice 0, le groupe $O_3^+(K,f)$ est isomorphe au groupe K'^*/K^*, où K' est un corps de quaternions sur K .</u>

On sait (chap.VIII) que toute rotation dans un espace de dimension 3 laisse invariants les points d'une droite D (<u>axe</u> de la rotation) ; il est facile de la déterminer connaissant le quaternion a : en effet, soit $a=s+v$, où $s=\frac{1}{2}(a+\bar{a})$ est la partie scalaire du quaternion a, et $v=\frac{1}{2}(a-\bar{a})$ la partie vectorielle, qui appartient à F ; comme s et v sont permutables, ona $ava^{-1}=v$, donc D est la droite contenant le vecteur v .

Supposons maintenant plus particulièrement que F soit un espace euclidien parfait sur un corps ordonné (pythagoricien) ; K' est alors le corps des quaternions ordinaires sur K ; dans la représentation (28) d'une rotation, on peut supposer que a est un quaternion de norme 1, déterminé au signe près. La restriction de la rotation au plan P perpendiculaire à D la détermine entièrement. Nous allons déterminer l'angle θ de cette rotation, D étant orientée par le choix du vecteur v (c'est-à-dire du signe de a) et P étant orienté par l'orientation concordante. Par une rotation on peut alors amener v à être un quaternion de la forme βi avec $\beta > 0$, autrement dit $a = \alpha + \beta i$; comme $(\alpha+\beta i)j(\alpha+\beta i)^{-1} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} j + \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} k$ on a $\cos\theta = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ et $\sin\theta = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, autrement dit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = \beta/\alpha = \|v\|/s$.

On vérifie aisément que si z et z' sont deux vecteurs de F, identifiés à des quaternions de partie scalaire nulle, la partie scalaire du quaternion zz' n'est autre que le produit scalaire $\langle z,z'\rangle$, et la partie vectorielle le produit vectoriel $z \wedge z'$ défini au chap.VIII.

Géométrie non-euclidienne. Soient E un espace vectoriel de dimension n+1, f une forme quadratique de rang n+1 définie dans E. Nous allons considérer dans le groupe projectif $\mathbf{PL}_{n+1}(K)$ le sous-groupe Γ des projectivités u définies dans P(E) provenant des transformations linéaires homogènes u' de E telles que $\langle x',y'\rangle = 0$ entraîne $\langle u'(x'),u'(y')\rangle = 0$ ($\langle x',y'\rangle$ étant la forme polaire de f) ; il revient au même, d'après la prop.1, de dire qu'on a $\langle u'(x'),u'(y')\rangle = \lambda\langle x',y'\rangle$ $(\lambda \in K^*)$ quels que soient x' et y' dans E.

On peut considèrer $P(E)$ comme l'hyperplan à l'infini H_∞ dans un espace projectif $P(G)$ de dimension $n+1$. Toute projectivité u de $P(E)$ peut alors être considérée comme la restriction à $P(E)$ d'une similitude v (relative à la forme f) dans $P(G)$; d'autre part, deux similitudes v_1, v_2 n'ont la même restriction à $P(E)$ que si $v_2 v_1^{-1}$ laisse invariants tous les points de $P(E)$, autrement dit appartient au groupe des homothéties et translations. On peut d'ailleurs toujours supposer que v laisse invariant un point O de $P(G)$ n'appartenant pas à $P(E)=H_\infty$; $v_2 v_1^{-1}$ est alors nécessairement une homothétie de centre O. On voit donc que le groupe Γ est isomorphe au groupe quotient L_0/H_0 du groupe L_0 des similitudes de centre O et du groupe des homothéties de centre O.

En général, le groupe Γ n'est pas transitif dans $P(E)$; si A est une classe d'intransitivité de Γ dans $P(E)$, le groupe Γ définit dans A une géomètrie subordonnée à la géomètrie projective, et dite géomètrie non-euclidienne (relative à la forme f) ; muni de cette géomètrie, on dit que A est un espace non euclidien (relatif à la forme f).

Nous allons nous borner à considèrer deux cas particuliers :

I. Espace~~s~~ elliptique. Supposons que K soit un corps pythagoricien, et l'espace euclidien associé à la forme f un espace euclidien parfait. Comme alors toute similitude est le produit d'un déplacement et d'une homothétie, le groupe Γ (dit groupe des déplacements non euclidiens) n'est autre que le groupe orthogonal projectif $\mathbf{PO}_{n+1}(K,f)$, image canonique dans $\mathbf{PL}_{n+1}(K)$ du groupe orthogonal $\mathcal{O}_{n+1}(K,f)$ (ou encore, quotient de ce dernier groupe par le sous-groupe à deux éléments formé de l'application identique et de la symétrie $x \to -x$). Si la quadrique

Q

d'équation $f(x')=0$ dans $P(E)$ n'est pas vide, on dit que c'est l'<u>absolu</u> de la géométrie elliptique ; l'<u>espace elliptique</u> A est le <u>complémentaire</u> $\complement Q$ de Q dans $P(E)$, puisqu'alors il existe une transformation orthogonale transformant l'une dans l'autre deux droites non isotropes quelconques passant par O .

Soient P,P' deux points de A tels que la droite PP' ne soit pas tangente à Q ; <u>orienter</u> la droite PP' c'est par définition choisir une base orthogonale directe dans le plan non isotrope OPP' ; la <u>distance orientée</u> $\overline{PP'}$ est alors, par définition, l'<u>angle</u> $\delta = (\widehat{OP,OP'})$ des droites OP et OP' dans le plan orienté OPP' .

Soit P un point de A , Π un plan contenu dans $P(E)$ et non tangent à Q ; l'espace H de dimension 3 déterminé par O et Π est alors non isotrope. Soient D,D' deux droites passant par P contenues dans Π et non tangentes à Q , Δ et Δ' les droites passant par O , situées dans H et orthogonales respectivement aux plans déterminés par O et D, et par O et D' ; elles sont situées dans le plan V passant par O , contenu dans H et orthogonal à la droite OP . Par définition, <u>orienter</u> le plan Π , c'est choisir une base orthogormale directe dans V ; l'<u>angle orienté</u> $(\widehat{D, D'})$ est alors égal, par définition, à l'angle $(\widehat{\Delta, \Delta'})$ dans le plan orienté V . On remarquera que, si R et R' sont les points où Δ et Δ' rencontrent A , l'angle $(\widehat{D,D'})$ n'est autre que la distance orientée $\overline{RR'}$.

Deux droites passant par P sont dites <u>perpendiculaires</u> si leur angle est défini et égal à un angle droit ; une droite D passant par P est dite <u>perpendiculaire</u> à une variété linéaire projective W passant par P si elle est perpendiculaire à toutes les droites de W qui passent par P

et dont l'angle avec D est défini. Cela signifie que le plan engendré par O et D est faiblement perpendiculaire à la variété linéaire engendrée par O et W . De façon générale, si W_1 et W_2 sont deux variétés linéaires dans P(E), on dira qu'elles sont faiblement <u>perpendiculaires</u> si les variétés linéaires engendrées par O et W_1 , d'une part, par O et W_2 d'autre part, sont faiblement perpendiculaires ; on vérifie aussitôt qu'il revient au même de dire que pour tout point de W_1 contenu dans A et n'appartenant pas à W_2 , la droite perpendiculaire (unique) à W_2 passant par ce point est contenue dans W_1 . Si W est une variété linéaire de dimension p dans P(E) , les droites perpendiculaires à W passant par un point de W (n'appartenant pas à A) engendrent une variété de dimension n-p , faiblement perpendiculaire à W au point considéré.

On notera que la notion de variétés linéaires <u>parallèles</u> n'a pas de sens en géométrie elliptique, car il n'y a pas dans le groupe Γ de sous-groupe analogue au groupe des translations, c'est-à-dire de sous-groupe abélien distingué.

II. <u>Espace hyperbolique</u>. Supposons que K soit un corps <u>ordonné maximal</u>, que $n \geqslant 2$ et que f soit <u>d'indice 1</u> ; on peut donc supposer que par rapport à une base convenable, on a $f(x') = \xi_0^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$. Considérons dans P(E) l'ensemble A des points x tels que $f(x') > 0$; en vertu de la loi d'inertie, A est une classe d'intransitivité du groupe Γ ; en outre, toujours en vertu de la loi d'inertie, toute droite D passant par un point x de A coupe l'absolu Q d'équation $f(x')=0$ en deux points distincts z', z'' . Si on convient de dire encore qu'on <u>oriente</u>

la droite D lorsqu'on oriente le plan passant par O et D , l'ensemble des points de D situés dans le même "segment" d'extrémités z', z'' que x est identique à $D \cap A$. On convient de dire que A est l'"intérieur" de l'absolu Q . Toute similitude étant encore ici le produit d'une homothétie et d'une rotation, le groupe Γ ("groupe des déplacements non euclidiens") est isomorphe à $\mathbf{P}O_{n+1}(K,f)$. La géomètrie définie sur A par Γ est dite <u>géomètrie hyperbolique</u>.

Si D et D' sont deux droites dans $P(E)$, rencontrant toutes deux A , il existe, d'après le th. de Witt, un déplacement non-euclidien trasformant $D \cap A$ en $D' \cap A$; on peut donc définir comme ci-dessus la distance de deux points sur une droite orientée. Si P est un point de A , D,D' deux droites passant par P , H l'espace de dimension 3 déterminé par O,D et D' , V le plan orthogonal à OP dans H , V ne rencontre pas Q , donc la restriction à V de la forme f peut s'écrire $\xi_1^2 + \xi_2^2$ pour une base convenable, ce qui montre, en vertu du th. de Witt, qu'on peut encore définir l'<u>angle</u> orienté de deux droites quelconques passant par un même point de A comme en géomètrie elliptique. Les définitions et propriétés des variétés faiblement perpendiculaires s'étendent alors sans modification.

APPENDICE

LE THEOREME FONDAMENTAL DE LA GEOMETRIE PROJECTIVE

Soient K_1, K_2 deux corps (commutatifs ou non) isomorphes, E_1 un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur K_1, E_2 un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur K_2. On a vu (§ 1) qu'une semi-projectivité de $P(E_1)$ sur $P(E_2)$ transforme toute variété linéaire projective de $P(E_1)$ en une variété linéaire projective de même dimension dans $P(E_2)$. Nous allons montrer que cette propriété caractérise les semi-projectivités pour $n \geqslant 2$. De façon précise :

THEOREME 1.- *Soient K_1, K_2 deux corps (commutatifs ou non), E_1 (resp. E_2) un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur K_1 (resp. K_2). S'il existe une transformation biunivoque u de $P(E_1)$ sur $P(E_2)$ telle que le transformé par u de tout hyperplan projectif dans $P(E_1)$ soit un hyperplan projectif dans $P(E_2)$, et si $n \geqslant 2$, alors K_1 et K_2 sont isomorphes, et u est une semi-projectivité.*

Tout d'abord, il est clair que les images par u de deux hyperplans projectifs distincts sont des hyperplans projectifs distincts, puisque u est biunivoque. On en déduit que l'image par u de toute variété linéaire projective de dimension $n-2$, intersection de deux hyperplans distincts, est une variété linéaire projective de dimension $n-2$; par récurrence sur p $(1 \leqslant p \leqslant n-2)$, on voit de même que l'image par u de toute variété linéaire projective de dimension $n-p$ est une variété linéaire projective de même dimension. De là, on déduit par récurrence sur q $(2 \leqslant q \leqslant n+1)$ que l'image par u de la variété linéaire projective V engendrée par q points a_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ est la variété linéaire projective engendrée par les $u(a_i)$; en effet, cela résulte de ce qui précède pour $q=2$; si x appartient à V et n'appartient pas à la variété linéaire projective W engendrée par les a_i d'indice $i \leqslant q-1$, x appartient à une droite joignant a_q à un point y de W, donc $u(x)$ appartient à une droite joignant $u(a_q)$ à $u(y)$ et par hypothèse $u(y)$ appartient à la variété linéaire projective engendrée par les $u(a_i)$ d'indice $\leqslant q-1$, d'où notre assertion.

Ceci montre en particulier pour $q=n+1$, que si les a_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ forment un système <u>libre</u> dans $P(E_1)$, les $b_i=u(a_i)$ forment un système <u>libre</u> dans $P(E_2)$. Considérons dans $P(E_1)$ l'hyperplan projectif engendré par $a_1, \ldots, a_n$ comme hyperplan à l'infini, et soit F_1 l'espace affine complémentaire de cet hyperplan dans $P(E_1)$; de même considérons dans $P(E_2)$ l'hyperplan projectif engendré par $b_1, \ldots, b_n$ comme hyperplan à l'infini, et soit F_2 l'espace affine complémentaire dans $P(E_2)$. La restriction de u à F_1 est une application biunivoque de F_1 sur F_2, qui transforme toute variété linéaire affine dans F_1 en une variété linéaire affine de même dimension, et en outre qui transforme deux droites parallèles en droites parallèles.

Identifions F_1 (resp. F_2) à un <u>espace vectoriel</u> de dimension n sur K_1 (resp. K_2) en prenant pour origine a_0 (resp. b_0), et en choisissant un point a'_0 (resp. b'_0) dans E_1 (resp. E_2) correspondant à a_0 (resp. b_0) (cf. § 2). Prenons dans F_1 n vecteurs de base d'origine a_0, dont les extrémités c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont respectivement sur les droites joignant a_0 à a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et posons $u(c_i)=d_i$, $c_i-a_0=e_i$, $d_i-b_0=f_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Par hypothèse on peut écrire $u(\xi e_1)=\xi^{\sigma} f_1$, l'application $\xi \rightarrow \xi^{\sigma}$ étant une application <u>biunivoque</u> de K_1 <u>sur</u> K_2, telle que $0^{\sigma}=0$, $1^{\sigma}=1$; nous allons voir que cette application est un <u>isomorphisme</u> de K_1 sur K_2.

Soient ξ, η deux éléments de K_1. Considérons dans F_1 la droite Δ_1 parallèle à a_0a_1 menée par le point c_2 ; il lui correspond dans F_2 la droite Δ_2 parallèle à b_0b_1 menée par d_2. Par le point ξe_1, menons une parallèle à la droite a_0a_2, qui coupe Δ_1 au point m ;

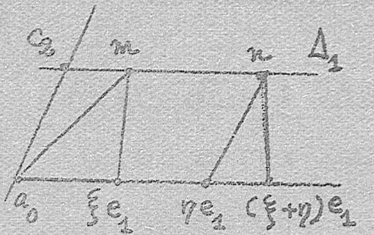

fig. 1

par ηe_1, menons une parallèle à la droite a_0m, qui coupe Δ_1 au point n ; enfin par n menons une parallèle à a_0a_2 ; elle recoupe a_0a_1 au point $(\xi+\eta)e_1$, car on a $n=(\xi+\eta)e_1+e_2$ (fig.1). On en déduit aussitôt qu'on a $(\xi+\eta)^\sigma=\xi^\sigma+\eta^\sigma$.

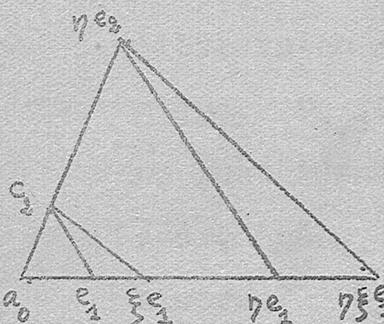

fig.2

De même, menons par ηe_1 une parallèle à la droite joignant c_1 à c_2 ; elle coupe la droite a_0a_2 au point ηe_2 ; par ce point, menons une parallèle à la droite joignant ξe_1 à c_2 ; elle coupe la droite a_0a_1 au point $(\eta\xi)e_1$, car ce point est de la forme $\eta e_2+\mu(\xi e_1-e_2)$ et doit être de la forme λe_1 (fig.2). On déduit aussitôt de cette construction que $(\eta\xi)^\sigma=\eta^\sigma\xi^\sigma$, ce qui prouve notre assertion.

De la même manière, pour tout indice i, on a $u(\xi e_i)=\xi^{\sigma_i}f_i$; montrons que tous les isomorphismes σ_i sont identiques à σ. Considérons en effet dans F_1 la droite D passant par a_0, ensemble des points $\xi(e_1+e_i)$, où ξ parcourt K_1. Le point $\xi(e_1+e_i)$ est à l'intersection des parallèles à a_0a_i et a_0a_1 respectivement, menées par ξe_1 et ξe_i ; il lui correspond donc le point $\xi^\sigma f_1+\xi^{\sigma_i}f_i$. Or à la droite D doit correspondre une droite passant par b_0 ; on doit donc avoir $\xi^{\sigma_i}=\rho\,\xi^\sigma$ pour tout ξ, et en faisant $\xi=1$, il vient $\rho=1$, et $\xi^{\sigma_i}=\xi^\sigma$ pour tout ξ.

Cela étant, au point $\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ correspond $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\sigma} f_i$, car $\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ est l'intersection des hyperplans parallèles aux hyperplans coordonnés menés par les points $\xi_i e_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

C.Q.F.D.

Application : Géomètrie euclidienne à 6 dimensions, lorsque $\nu = 3$. Soit K un corps commutatif quelconque, et considérons sur un espace affine F de dimension 6 sur K, la géomètrie euclidienne relative à une forme quadratique f d'indice $\nu = 3$. On peut supposer les coordonnées dans F choisies de sorte que $f(x) = \xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_5 + \xi_3 \xi_6$; l'ombilicale Q dans l'hyperplan à l'infini H_{∞} peut alors être identifiée à la grassmannienne $G_{3,1}(K)$ (§ 1). De façon précise, prenons une origine O dans F: on peut identifier F à l'espace des bivecteurs sur $E = K^4$, le point de coordonnées ξ_i étant identifié au bivecteur z de coordonnées grassmaniennes $\xi_{01} = \xi_1$, $\xi_{02} = \xi_2$, $\xi_{03} = \xi_3$, $\xi_{23} = \xi_4$, $\xi_{13} = \xi_5$, $\xi_{12} = \xi_6$. Nous allons étudier le groupe L_0^+ des similitudes directes laissant invariante l'origine. La forme bilinéaire polaire de f n'est autre que le produit extérieur $x \wedge y$ des bivecteurs. Soit φ un isomorphisme canonique de l'espace des bivecteurs sur l'espace des biformes sur E (chap.III, § 8, n°5) ; si z est un bivecteur non décomposable, donc tel que $f(z) \neq 0$, $\varphi(z)$ est une forme alternée de rang 4 sur E. Les droites du complexe linéaire défini dans P(E) par cette forme $\varphi(z)$ (§ 1) correspondent donc aux bivecteurs décomposables u sur E tels que $z \wedge u = 0$; elles correspondent donc aux points de H_{∞} situés dans l'intersection de Q et de l'hyperplan polaire par rapport à Q du point à l'infini z_0 sur la droite Oz. Si au contraire z est un bivecteur décomposable, les bivecteurs décomposables u tels que $z \wedge u = 0$

sont tels que les plans définis dans $E=K^4$ par les bivecteurs z et u aient une droite commune (chap.III, § 7, prop.5) ; autrement dit, le point z_0 de Oz correspond à une droite D de P(E), les points à l'infini u_0 des droites Ou sont les points de l'intersection de Q et de l'hyperplan tangent à Q au point z_0 , et ils correspondent aux droites Δ de P(E) qui <u>rencontrent</u> D ; la droite z_0u_0 est donc contenue dans Q .

Par toute droite contenue dans Q passent deux plans contenus dans Q ; nous allons les identifier à des ensembles de droites dans P(E) . En effet, deux points z_0 et u_0 de la droite considérée sur Q correspondent à deux droites concourantes D, Δ dans P(E) . Un plan contenu dans Q et passant par z_0 et u_0 correspond à un ensemble de droites dans P(E) qui rencontrent à la fois D et Δ ; on voit donc que l'un de ces plans Π_1 correspond à l'ensemble des droites de P(E) qui passent par le point de concours de D et Δ , et l'autre Π_2 correspond à l'ensemble des droites de P(E) qui sont contenues dans le plan défini par D et Δ . On voit donc que sur Q la famille Φ_1 des plans Π_1 correspond biunivoquement à l'ensemble des points de P(E), et la famille Φ_2 des plans Π_2 correspond biunivoquement à l'ensemble des plans de P(E) . En outre, ce raisonnement montre qu'un plan de Φ_1 et un plan de Φ_2 ont une intersection de dimension -1 ou 1 , et que deux plans de Φ_1 (ou deux plans de Φ_2) ont une intersection de dimension 0 ou 2 .

Cela étant, pour toute transformation u du groupe linéaire $GL_4(K)$, la puissance extérieure $\overset{2}{\wedge} u$ est un automorphisme de l'espace vectoriel F des bivecteurs sur E , qui laisse <u>invariante</u> l'ombilicale Q (puisqu'elle transforme un bivecteur décomposable en un autre) ; en outre, il est clair d'après ce qui précède que cette transformation transforme tout plan de la famille Φ_1 en un plan de la famille Φ_1 ; autrement dit, c'est une <u>similitude directe</u> (§ 3) appartenant au groupe L_0^+.

Réciproquement, soit v une similitude directe du groupe L_0^+ ; on sait (§ 3) qu'elle transforme les plans de la famille Φ_1 entre eux et les plans de la famille Φ_2 entre eux ; en d'autres termes, elle définit une application biunivoque $\overline{u}$ de $P(E)$ sur lui-même et comme les points de $P(E)$ situés dans un plan correspondent aux plans de la famille Φ_1 qui ont une intersection de dimension 1 avec un plan fixe de la famille Φ_2, il résulte du th. 1 que $\overline{u}$ est une <u>semi-projectivité</u> de $P(E)$, qu'on peut donc considérer comme définie par une application semi-linéaire u de E sur lui-même, déterminée à un facteur près. Par définition, $w = \overset{2}{\Lambda} u$ est alors une application semi-linéaire de F sur lui-même, telle que wv^{-1} transforme toute droite passant par l'origine en elle-même ; ceci n'est possible que si cette transformation semi-linéaire est une homothétie ce qui entraîne que u est une application <u>linéaire</u>.

En résumé :

PROPOSITION 1.- <u>Toute similitude directe du groupe</u> L_0^+ <u>est de la forme</u> $\mu \overset{2}{\Lambda} u$, <u>où</u> $\mu \in K^*$ <u>et où</u> u <u>est une application linéaire de</u> E <u>sur lui-même</u>.

Remarquons en outre que la relation $\mu . \overset{2}{\Lambda} u = \mu_1 . \overset{2}{\Lambda} u_1$ signifie que $\overset{2}{\Lambda}(uu_1^{-1})$ est une homothétie, donc uu_1^{-1} transforme tout plan en lui-même, et par suite toute droite en elle-même, ce qui montre que $u_1 = \lambda u$, et par suite $\mu = \mu_1 \lambda^2$. L'application $(\mu, u) \longrightarrow \mu . \overset{2}{\Lambda} u$ est donc un homomorphisme du groupe $K^* \times GL_4(K)$ sur L_0^+, dont le noyau est le sous-groupe des couples de la forme $(\lambda^2, \lambda^{-1})$, isomorphe à K^*.

Notons enfin que l'on a, pour tout couple de bivecteurs décomposables $z = x \wedge y$, $z' = x' \wedge y'$, $(\overset{2}{\wedge} u(z)) \wedge (\overset{2}{\wedge} u(z')) = \overset{4}{\wedge} u(x \wedge y \wedge x' \wedge y') =$
$= \det u.(z \wedge z')$, d'où par linéarité on déduit aussitôt que cette relation a lieu pour tout couple de bivecteurs ; par suite, le multiplicateur de la similitude directe $\mu . \overset{2}{\wedge} u$ est égal à $\mu^2 \det u$.
