COTE : BKI 13-1.1

RAPPORT SUR LA THEORIE DES ALGEBRES NORMEES

Rédaction n° 089

Nombre de pages : 178

Nombre de feuilles : 178

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Divers

Rapport sur les algèbres normés
(3. chapitres)

89

Delsarte

A 89

RAPPORT SUR LA THEORIE DES ALGEBRES NORMEES.

Plan général.

Ch. 1 : Propriétés générales des algèbres arbitraires.

Ch. 2 : Algèbres normées commutatives.

1 : Fonctions analytiques à valeurs dans un espace de Banach.

2 : Propriétés générales des algèbres normées.

3 : Algèbres normées commutatives : propriétés générales.

4 : Algèbres normées commutatives : algèbres régulières.

Ch. 3 : $*$-algèbres normées.

1 : Généralités sur les $*$-algèbres.

2 : $*$-algèbres normées commutatives.

3 : Théorie des $*$-algèbres normées symétriques.

4 : $*$-algèbres de Gelfand et Neumark .

Chapitre I - Propriétés générales des algèbres arbitraires.

Le présent Chapitre a pour but d'exposer les notions purement algébriques utilisées dans la théorie des algèbres normées - notions que la plupart des auteurs ayant traité cette dernière ont soigneusement masquées. Ce n'est pas, bien entendu, un rapport complet sur la théorie des algèbres, pour la raison - en particulier - que toute la partie classique de celle-ci n'est d'aucune utilité pour le but poursuivi ici ; mais il est bien évident que les résultats élémentaires auxquels il est fait allusion ci-dessus peuvent se déduire aisément (comme le fait du reste souvent Jacobson) de ceux qu'on trouvera dans ce Chapitre.

La méthode adoptée dans cet exposé conjugue les idées de Jacobson et celles de Segal ; mais, contrairement à ces auteurs, on a donné la priorité à la notion de représentation linéaire, et non à celle d'élément quasi-inversible (= quasi-régulier dans la terminologie de Segal), pour la raison que celle-ci s'introduit naturellement quand on étudie les représentations linéaires irréductibles ; en outre, on parvient par cette voie à éviter certains calculs pénibles, et à donner des résultats plus précis (ex. identification de la semi-simplicité de Jacobson avec la semi-simplicité faible de Segal). Ce point de vue est probablement pensé puisque, semble-t-il, adopté par Chevalley (dont on a cependant exclu la terminologie, dans l'espoir de ne pas être trop singulare ...) ; précisons encore qu'il aura fallu au rédacteur six ou sept rédactions de ce Chapitre avant de prendre conscience de la nécessité d'adopter le point de vue en question.

Bien entendu, les méthodes et les résultats de ce Chapitre sont valables, pour ainsi dire sans modification, quand il s'agit d'anneaux au lieu d'algèbres.

Dans tout ce chapitre, k désigne un corps quelconque (non nécessairement commutatif) ; sauf mention expresse du contraire, tous les espaces vectoriels et algèbres considérés sont pris sur k ; on notera toujours à gauche les opérateurs.

1.- Représentations linéaires.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant deux algèbres sur k , on appelle homomorphisme (resp. antihomomorphisme) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ une application linéaire $y = \varphi(x)$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ telle que l'on ait

$\varphi(xx') = \varphi(x)\varphi(x')$ (resp. $\varphi(xx') = \varphi(x')\varphi(x)$) quels que soient $x, x' \in \mathcal{A}$.

Déf. 1 : Etant donnés une algèbre $\mathcal{A}$ sur k et un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur k , on appelle représentation linéaire gauche (resp. droite) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$ un homomorphisme (resp. antihomomorphisme) $x \to T_x$ de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ des endomorphismes de $\mathcal{E}$.

On désignera par $\{\mathcal{E}, T_x\}$ une telle représentation linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$.

Déf. 2 : Une représentation linéaire $\{\mathcal{E}, T_x\}$ de $\mathcal{A}$ est dite algébriquement irréductible si, en dehors de $\mathcal{E}$ et de $\{0\}$, il n'existe dans $\mathcal{E}$ aucun sous-espace vectoriel invariant par les T_x.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\{\mathcal{E}, T_x\}$ soit algébriquement irréductible est évidemment que, quels que soient $X, Y \in \mathcal{E}$ avec $X \neq 0$, on puisse résoudre

$$Y = T_x X \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

Déf. 3 : Deux représentations linéaires gauches (resp. droites) $\{\mathcal{E}, T_x\}$ et $\{\mathcal{E}', T'_x\}$ de $\mathcal{A}$ sont dites algébriquement équivalentes s'il existe un isomorphisme $X' = \varphi(X)$ de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ tel que

$$T'_x \circ \varphi = \varphi \circ T_x \qquad \text{quel que soit } x \in \mathcal{A}.$$

Malgré le caractère barbare de l'adverbe "algèbriquement", le rapporteur est contraint de l'employer pour éviter ultérieurement des confusions avec des notions topologiques analogues mais non équivalentes aux précédentes. Dans ce chapitre seulement, on se permettra de l'omettre.

Si $\{\mathcal{E}, T_x\}$ est une représentation linéaire gauche (resp. droite) de $\mathcal{A}$, chaque $X \in \mathcal{E}$ définit un idéal à gauche (resp. droite) $\mathcal{N}(X)$ de $\mathcal{A}$, à savoir l'ensemble des $x \in \mathcal{A}$ tels que

$$T_x X = 0 .$$

L'intersection des $\mathcal{N}(X)$ quand X décrit $\mathcal{E}$ est l'ensemble des x tels que $T_x = 0$, et constitue donc un idéal bilatère $\mathcal{B}$, appelé le noyau de la représentation $\{\mathcal{E}, T_x\}$. Les endomorphismes T_x forment une algèbre isomorphe à $\mathcal{A}/\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{N}$ est un idéal à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{A}$, on peut définir dans $\mathcal{E} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$ une représentation linéaire gauche (resp. droite) de $\mathcal{A}$, obtenue comme suit : soit $x \longrightarrow \dot{x}$ l'application linéaire canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{E}$; pour chaque $s \in \mathcal{A}$, on pose

$$T_s \dot{x} = \widehat{sx} \qquad (\text{resp. } T_s \dot{x} = \widehat{xs}) .$$

On obtient ainsi la représentation linéaire canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. Dans le cas où $\mathcal{N} = \mathcal{N}(X)$ comme ci-dessus, il est clair que cette représentation est équivalente à la restriction de la représentation $\{\mathcal{E}, T_x\}$ donnée au sous-espace vectoriel (évidemment invariant) de $\mathcal{E}$ formé par les $T_x X$.

Soient $\{\mathcal{E}, T_x\}$ une ~~représentation~~ représentation linéaire gauche de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{N} = \mathcal{N}(X)$ l'ensemble des x avec $T_x X = 0$. Supposons qu'il existe un $u \in \mathcal{A}$ avec $T_u X = X$; alors on aura $xu - x \in \mathcal{N}$ quel que soit $x \in \mathcal{A}$. D'où la

Déf. 4 : On dit qu'un idéal à gauche (resp. à droite) $\mathfrak{r}$ est régulier s'il existe un $u \in \mathfrak{A}$ tel que

$$xu - x \in \mathfrak{r} \quad (\text{resp. } ux - x \in \mathfrak{r}) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{A}.$$

L'élément u est appelé une unité à droite (resp. à gauche) mod $\mathfrak{r}$. Un idéal bilatère est dit régulier s'il est régulier à la fois comme idéal à gauche et comme idéal à droite. (Segal (1)).

Si un idéal à gauche est régulier, la représentation linéaire canonique de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}/\mathfrak{r}$ possède une propriété remarquable. En effet, soit u une unité à droite mod $\mathfrak{r}$; on a

$$xu \equiv x \pmod{\mathfrak{r}} \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{A}$$

ce qui s'écrit, au moyen de la représentation linéaire $\{\mathfrak{A}/\mathfrak{r}, T_x\}$ en question :

$$(1) \qquad T_x \dot{u} = \dot{x} .$$

Donc les transformés de $\dot{u}$ par les T_x forment tout $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}/\mathfrak{r}$.

Déf. 5 : $\{\mathfrak{E}, T_x\}$ étant une représentation linéaire de $\mathfrak{A}$, on dit qu'un $X \in \mathfrak{E}$ engendre $\mathfrak{E}$ si les $T_x X$ ($x \in \mathfrak{A}$) constituent tout $\mathfrak{E}$.

Revenons à l'équation (1). Elle prouve que

$$T_x \dot{u} = 0 \quad \text{équivaut à} \quad x \in \mathfrak{r} .$$

Réciproquement, soient $\{\mathfrak{E}, T_x\}$ une représentation linéaire de $\mathfrak{A}$, et X un élément de $\mathfrak{E}$ engendrant $\mathfrak{E}$; il existera en particulier un $u \in \mathfrak{A}$ avec

$$T_u X = X$$

en sorte que u est une unité à droite mod $\mathfrak{r}(X)$. Dire que

$$x \equiv y \pmod{\mathfrak{r}(X)}$$

équivaut à

$$T_x X = T_y X$$

d'où un isomorphisme $\dot{x} \longrightarrow T_x X$ de $\mathfrak{A}/\mathfrak{r}(X)$ sur $\mathfrak{E}$, immédiatement qui conduit à la

Prop.1 : Pour qu'un idéal à gauche (resp. à droite) $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{A}$ soit régulier, il faut et il suffit qu'il existe une représentation linéaire gauche (resp. droite) $\{\mathfrak{E}, T_x\}$ de $\mathfrak{A}$ et un $X \in \mathfrak{E}$ tels que

1) X engendre $\mathfrak{E}$

2) $\mathfrak{r}$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{A}$ tels que $T_x X = 0$.

- Etant donné un idéal à gauche (resp. à droite) $\mathfrak{r}$, on notera $\mathfrak{r}^\circ$ le noyau de la représentation linéaire canonique de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}/\mathfrak{r}$, c'est-à-dire l'ensemble des $s \in \mathfrak{A}$ tels que

$$s\,\mathfrak{A} \subset \mathfrak{r} \qquad \text{(resp. } \mathfrak{A}\,s \subset \mathfrak{r}\text{)}$$

$\mathfrak{r}^\circ$ est donc un idéal bilatère. Si $\mathfrak{r}$ est régulier, et si u est une unité mod $\mathfrak{r}$, pour tout $s \in \mathfrak{r}^\circ$ on aura en particulier

$$su \in \mathfrak{r} \quad \text{et} \quad su - s \in \mathfrak{r} \quad \text{d'où} \quad s \in \mathfrak{r}$$

on sorte que $\mathfrak{r}^\circ \subset \mathfrak{r}$. Si par ailleurs b est un idéal bilatère $\subset \mathfrak{r}$, pour tout $s \in \mathfrak{b}$ on aura

$$s\,\mathfrak{A} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{r} \qquad \text{d'où} \quad s \in \mathfrak{r}^\circ$$

et donc $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{r}^\circ$. D'où la

Prop. 2 : Le noyau $\mathfrak{r}^\circ$ d'un idéal à gauche (resp. à droite) régulier est le plus grand idéal bilatère contenu dans $\mathfrak{r}$.

2.- Idéaux maximaux.

Si $\mathfrak{r}$ est un idéal à gauche, à chaque sous-espace vectoriel $\mathfrak{E}_1$ de $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}/\mathfrak{r}$, non trivial et invariant par la représentation linéaire canonique de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}/\mathfrak{r}$, correspond dans $\mathfrak{A}$ un idéal à gauche $\mathfrak{r}_1$ strictement compris entre $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{A}$, et réciproquement. Donc

Prop.3 : Pour qu'un idéal à gauche (resp. à droite) $\mathfrak{r}$ soit maximal, il faut et il suffit que la représentation linéaire canonique de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}/\mathfrak{r}$ soit irréductible.

(Bien entendu, on exclut la représentation identiquement nulle dans k lui-même !).

Maintenant, soit $\{\mathcal{E}, T_x\}$ une représentation linéaire gauche irréductible de $\mathcal{A}$. Chaque élément $X \neq 0$ de $\mathcal{E}$ engendre $\mathcal{E}$. Donc (Prop.1) l'idéal à gauche $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(X)$ défini par

$$T_x X = 0$$

est régulier ; $\{\mathcal{E}, T_x\}$ étant au surplus équivalente à la représentation linéaire canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ est maximal (Prop. 3). D'où

Théorème 1 : Toute représentation linéaire gauche (resp. droite) irréductible et non triviale de $\mathcal{A}$ est équivalente à une représentation linéaire canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}/\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal à gauche (resp. à droite) maximal et régulier convenable de $\mathcal{A}$, et réciproquement.

Il est clair que toute représentation linéaire irréductible de $\mathcal{A}$ définit en général, de la façon exposée ci-dessus, une infinité d'idéaux maximaux, dans $\mathcal{A}$.

Déf. 6 : On dit qu'une algèbre $\mathcal{A}$ est primitive à gauche (resp. à droite) si elle admet une représentation linéaire gauche (resp. droite) irréductible fidèle (c'est-à-dire dont le noyau est $\{0\}$). Un idéal bilatère $\mathfrak{b}$ d'une algèbre $\mathcal{A}$ est dit primitif à gauche (resp. à droite) si l'algèbre $\mathcal{A}/\mathfrak{b}$ est primitive à gauche (resp. à droite) (Jacobson, (1), (4)).

Prop.4 : Pour qu'un idéal bilatère d'une algèbre $\mathcal{A}$ soit primitif à gauche (resp. à droite), il faut et il suffit qu'il soit le noyau d'une représentation linéaire gauche (resp. droite) irréductible de $\mathcal{A}$.

Prop.5 : Pour qu'un idéal bilatère d'une algèbre $\mathcal{A}$ soit primitif à gauche (resp. à droite), il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\mathfrak{m}^\circ$, où $\mathfrak{m}$ est un idéal à gauche (resp. à droite) maximal régulier de $\mathcal{A}$.

Tout lecteur sérieux et moyennement doué est en mesure de démontrer tout seul ces deux Prop.

L'importance des idéaux réguliers provient du Théorème 1 et du Théorème 2 : Tout idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) régulier distinct de $\mathcal{A}$ est contenu dans au moins un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) maximal (et régulier). (Segal (1)).

Soient en effet $\mathfrak{n} \neq \mathcal{A}$ un idéal à gauche régulier, et u une unité à droite mod $\mathfrak{n}$. Il est clair que u est aussi une unité à droite mod $\mathfrak{n}'$ pour tout idéal à gauche $\mathfrak{n}' \supset \mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{n}' \neq \mathcal{A}$, on a $u \notin \mathfrak{n}'$ - cas de $u \in \mathfrak{n}'$ résulterait, pour tout $x \in \mathcal{A}$

$$xu \in \mathfrak{n}' \quad \text{d'où} \quad x = -(xu-x) + xu \in \mathfrak{n}'$$

et donc $\mathfrak{n}' = \mathcal{A}$.

Par conséquent, aucun idéal à gauche distinct de $\mathcal{A}$ et contenant $\mathfrak{n}$ ne contient u : le th.2 résulte alors de Zorn.

Une conséquence importante du th.2 est la

Prop. 6 : Tout idéal bilatère maximal et régulier de $\mathcal{A}$ est primitif à gauche et à droite, et est l'intersection des idéaux à gauche (resp. à droite) maximaux réguliers qui le contiennent.

En effet, un tel idéal $\mathfrak{m}$ est contenu (th. 2) dans au moins un idéal à gauche (resp. à droite) $\mathfrak{n}$ maximal et régulier : on a (Prop.2) $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}^\circ \subset \mathfrak{n}$, d'où $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^\circ$: $\mathfrak{m}$ est primitif à gauche (resp. à droite) (Prop. 5).

Soit maintenant $\{\mathfrak{E}, T_x\}$ une représentation linéaire gauche (resp. droite) irréductible de $\mathfrak{A}$ dont le noyau est $\mathfrak{m}$ (Prop.4). Chaque $X \neq 0$ de $\mathfrak{E}$ donne lieu à un idéal à gauche (resp. à droite) $\mathfrak{m}(X) \supset \mathfrak{m}$, qui est maximal et régulier ; l'intersection de ces $\mathfrak{m}(X)$ est évidemment $\mathfrak{m}$. C.Q.F.D.

3. Le radical faible.

Il est clair que le raisonnement utilisé pour prouver la seconde partie de la Prop.6 conduit plus généralement au résultat suivant : tout idéal bilatère $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{A}$, primitif à gauche (resp. à droite), est l'intersection des idéaux à gauche (resp. à droite) maximaux réguliers qui le contiennent. Toutefois, il n'est pas évident qu'un idéal primitif à gauche soit l'intersection des idéaux à droite maximaux et réguliers qui le contiennent - pour la simple raison que, jusqu'à maintenant, on ignore si ces derniers existent effectivement.

Tout le problème revient à prouver le

Théorème 3 : Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre irréductible d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathfrak{E}$ sur k. L'intersection des idéaux à gauche (resp. à droite) maximaux réguliers de $\mathfrak{A}$ est réduite à $\{0\}$.

Démonstration. Pour les idéaux à gauche, c'est déjà prouvé : tout $X \neq 0$ de $\mathfrak{E}$ détermine un tel idéal, à savoir l'ensemble des $T \in \mathfrak{A}$ tels que $TX = 0$. Désignons maintenant par $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ l'intersection des idéaux à droite maximaux et réguliers de $\mathfrak{A}$. D'après ce qu'on a vu au début de ce N°, c'est aussi l'intersection des idéaux bilatères primitifs à droite de $\mathfrak{A}$; donc $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ est un idéal bilatère.

Je dis que pour tout $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ l'endomorphisme $A + 1$ de $\mathfrak{E}$ est inversible.

a) les $AS + S$ ($S \in \mathfrak{A}$) forment tout $\mathfrak{A}$. Sinon, ils constituent un idéal à droite $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{A}$; -A est visiblement une unité à gauche

mod $\mathfrak{a}$; donc il existe (Th. 2) un iléal à droite maximal régulier $\mathfrak{m}$ qui contient $\mathfrak{a}$; on a $A \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{m}$ donc $-A \in \mathfrak{m}$ contrairement au fait que $-A$ est une unité à gauche mod $\mathfrak{a}$ et donc mod $\mathfrak{m}$.

b) En particulier il existe $S \in \mathcal{A}$ avec

(1) $\qquad AS + S = -A$

d'où

$$(A + 1)(S + 1) = 1 :$$

$A + 1$ est inversible à droite ; $S + 1$ est inversible à gauche.

Mais (1) s'écrit

$$S = -A - AS \ ;$$

$\mathcal{R}(\mathcal{A})$ étant un idéal bilatère, contient aussi S : donc $S + 1$ est inversible à droite - mais aussi à gauche - donc inversible, et par suite aussi $A + 1$.

Ceci étant, soit $A \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Soit $X \in \mathcal{E}$. Je dis que $AX = 0$. Sinon, il existerait, $\mathcal{A}$ étant irréductible, un $S \in \mathcal{A}$ avec

$$SAX = -X$$

en sorte que $SA + 1$ ne serait pas inversible, contrairement au fait que $SA \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. C.Q.F.D.

Ce théorème étant prouvé, considérons une algèbre quelconque $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{R}_g(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{R}_d(\mathcal{A})$) l'intersection des idéaux à gauche (resp. à droite) maximaux réguliers de $\mathcal{A}$. C'est aussi l'intersection des idéaux bilatères de $\mathcal{A}$ qui sont primitifs à gauche (resp. à droite) donc $\mathcal{R}_g(\mathcal{A})$ et $\mathcal{R}_d(\mathcal{A})$ sont des idéaux bilatères. Je dis que $\mathcal{R}_g(\mathcal{A}) = \mathcal{R}_d(\mathcal{A})$. Par raison de symétrie, il suffit évidemment de prouver que

$$\mathcal{R}_d(\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}_g(\mathcal{A}) .$$

Or, soit $\{\mathcal{E}, T_x\}$ une représentation linéaire gauche irréductible dont le noyau est $\mathfrak{b}$; les T_x forment une algèbre irréductible d'endomorphismes de $\mathcal{E}$, isomorphe à $\mathfrak{A}/\mathfrak{b}$, et il est clair que, si $\mathfrak{r}$ est un idéal à droite maximal régulier de cette algèbre, son image réciproque $\mathfrak{a}$ par l'homomorphisme $x \to T_x$ de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}/\mathfrak{b}$ sera de même un idéal à droite maximal régulier de $\mathfrak{A}$, vérifiant $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$. Or, il résulte du th.3 que l'intersection de ces $\mathfrak{r}$ est $\{0\}$: donc l'intersection des $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{b}$.

Par conséquent, $\mathfrak{b}$ - idéal bilatère primitif à gauche, par ailleurs arbitraire d'après la Prop.4 - contient $\mathcal{R}_d(\mathfrak{A})$, ce qui prouve

$$\mathcal{R}_g(\mathfrak{A}) \supset \mathcal{R}_d(\mathfrak{A}),$$

et finalement $\mathcal{R}_g(\mathfrak{A}) = \mathcal{R}_d(\mathfrak{A})$.

On notera désormais $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ l'idéal bilatère ainsi obtenu ; c'est le radical faible de $\mathfrak{A}$. Son introduction est due à Jacobson, sauf erreur, qui le caractérise comme intersection des idéaux bilatères primitifs à gauche (ou à droite) de $\mathfrak{A}$; sa caractérisation comme intersection des idéaux à gauche (ou à droite) maximaux réguliers de $\mathfrak{A}$ est apparemment due au rapporteur. Résumons les résultats obtenus :

Théorème 4 : Dans une algèbre arbitraire $\mathfrak{A}$, les notions suivantes coïncident :

1) l'intersection des idéaux à gauche maximaux réguliers de $\mathfrak{A}$;
2) l'intersection des idéaux à droite maximaux réguliers de $\mathfrak{A}$;
3) l'intersection des idéaux bilatères primitifs à gauche de $\mathfrak{A}$;
4) l'intersection des idéaux bilatères primitifs à droite de $\mathfrak{A}$;
5) l'ensemble des $x \in \mathfrak{A}$ dont l'image par toute représentation linéaire gauche irréductible de $\mathfrak{A}$ est 0 ;
6) l'ensemble des $x \in \mathfrak{A}$ dont l'image par toute représentation linéaire droite irréductible de $\mathfrak{A}$ est 0.

Définition 7 : L'intersection des idéaux à gauche (resp. à droite) maximaux réguliers de $\mathcal{A}$ est le radical faible de $\mathcal{A}$, noté $\mathcal{R}(\mathcal{A})$. On dit que $\mathcal{A}$ est faiblement semi-simple si $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{0\}$.

Pour que $\mathcal{A}$ soit faiblement semi-simple, il faut et il suffit qu'elle possède un système complet de représentations linéaires gauches (ou droites) irréductibles. Le Th.3 exprime que toute algèbre irréductible d'endomorphismes est faiblement semi-simple ; ce qui implique la

Prop. 7 : Tout idéal bilatère primitif (à gauche ou à droite) d'une algèbre $\mathcal{A}$ est l'intersection des idéaux à gauche maximaux réguliers qui le contiennent ; c'est aussi l'intersection des idéaux à droite maximaux réguliers qui le contiennent.

La Prop. 7 généralise la prop. 6 .

Dans le cas des algèbres avec élément unité, tout idéal est régulier, en sorte que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ est alors l'intersection des idéaux à gauche (ou à droite) maximaux de $\mathcal{A}$ et, d'après la prop.6, est contenu dans tous les idéaux bilatères maximaux de $\mathcal{A}$.

Par ailleurs, la Prop.6 montre que toute algèbre simple avec unité est primitive à gauche et à droite, et est faiblement semi-simple.

4.- Eléments quasi-inversibles.

Si $x \in \mathcal{A}$, l'idéal à gauche (resp. à droite) $\mathcal{U}$ formé par les $sx + s$ (resp. $xs + s$) est régulier, $-x$ étant une unité à droite (resp. à gauche) mod. $\mathcal{U}$. Si donc $\mathcal{U} \neq \mathcal{A}$, il existe un idéal à gauche (resp. à droite) maximal régulier $\mathcal{M}$ qui contient $\mathcal{U}$, et qui - vu $\mathcal{M} \neq \mathcal{A}$ - ne contient pas $-x$, donc non plus x . Par suite, $x \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ implique $\mathcal{U} = \mathcal{A}$; mais $\mathcal{U} = \mathcal{A}$ équivaut à $x \in \mathcal{U}$ (car $x \in \mathcal{U} \longrightarrow sx \in \mathcal{U} \longrightarrow s = (sx + s) - sx \in \mathcal{U}$ pour tout $s \in \mathcal{A}$) ; et $x \in \mathcal{U}$ équivaut à l'existence d'un $x' \in \mathcal{A}$ tel que

$$x'x + x + x' = 0 \qquad \text{(resp. } xx' + x + x' = 0\text{)} .$$

D'où la

Définition 8 : On dit qu'un $x \in \mathcal{A}$ est quasi-inversible à gauche (resp. à droite) s'il existe un $x' \in \mathcal{A}$, désigné "quasi-inverse à gauche (resp. à droite) de x" tel que

$$x'x + x + x' = 0 \qquad (\text{resp. } xx' + x + x' = 0).$$

On dit que x est quasi-inversible s'il est à la fois quasi-inversible à gauche et quasi-inversible à droite.

Il est immédiat de prouver que :

1) Si x est quasi-inversible, il possède un seul et même quasi-inverse à gauche et à droite ;

2) Si $\mathcal{A}$ admet un élément unité e, x est quasi-inversible à gauche (resp. à droite, tout court) si $x + e$ est inversible à gauche (resp. à droite, tout court) - et réciproquement.

3) pour que x soit quasi-inversible à gauche (resp. à droite) il faut et il suffit que les $sx + s$ (resp. $xs + s$) constituent tout $\mathcal{A}$ (c'est ce qu'on a vu au début de ce N°).

4) tout $x \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ est quasi-inversible (c'est assuré ce qu'on a vu ci-dessus) en sorte qu'il en est de même - puisque $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ est un idéal bilatère - des $sxt + \lambda x$ ($s,t \in \mathcal{A}$, $\lambda \in k$).

On va prouver que cette dernière propriété caractèrise $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Théorème 5 : Le radical faible de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des $x \in \mathcal{A}$ tels que, pour tout $s \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda \in k$, l'élément $sx + \lambda x$ (resp. $xs + \lambda x$) soit quasi-inversible. (Jacobson, (1)).

En effet, supposons $sx + \lambda x$ quasi-inversible quels que soient s et λ, et soit $\{\mathcal{E}, T_x\}$ une représentation linéaire gauche irréductible de $\mathcal{A}$. Si pour un $X \neq 0$ de $\mathcal{E}$ on avait $T_x X \neq 0$, les $T_s T_x X$ ($s \in \mathcal{A}$) constitueraient tout $\mathcal{A}$; d'où en particulier un s avec

$$T_s T_x X + \lambda T_x X + X = 0$$

$T_s T_x + \lambda T_x + 1 = T_{sx+\lambda x} + 1$ ne serait pas inversible, contrairement au fait que $sx + \lambda x$ est quasi-inversible dans $\mathcal{A}$.

On a donc $T_x X = 0$ pour tout $X \in \mathcal{E}$ d'où, $\{\mathcal{E}, T_x\}$ étant une représentation linéaire gauche irréductible arbitraire, $x \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. C.Q.F.D.

Cette démonstration est bien entendu étroitement liée à celle du Théorème 3.

On voit en particulier que, si $x \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, λx est quasi-inversible pour tout $\lambda \neq 0$; cette propriété du radical est fondamentale pour les algèbres normées.

Si $\mathcal{A}$ possède un élément unité e, elle se traduit par l'existence de $(x-\lambda e)^{-1}$ quel que soit $\lambda \in k$.

5 - Structure des algèbres faiblement semi-simples.

Définition 9 : On dit qu'une algèbre $\mathcal{A}$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur un corps k est complètement réductible s'il existe une décomposition

$$\mathcal{E} = \sum_{\iota \in I} \mathcal{E}_\iota$$

de $\mathcal{E}$ en une somme directe de sous-espaces vectoriels $(\mathcal{E}_\iota)_{\iota \in I}$ possédant les propriétés suivantes :

1) les $\mathcal{E}_\iota$ sont invariants par $\mathcal{A}$;

2) pour tout $\iota \in I$, la restriction de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{E}_\iota$ est une algèbre irréductible d'endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_\iota$.

Théorème 6 : Pour qu'une algèbre $\mathcal{A}$ sur un corps k soit faiblement semi-simple, il faut et il suffit qu'elle soit isomorphe à une algèbre complètement réductible d'endomorphismes d'un espace vectoriel sur k.

En effet, soit $\{\mathcal{E}_\iota, T_x^\iota\}_{(\iota \in I)}$ un système complet de représentations linéaires gauches irréductibles de $\mathcal{A}$; soit $\mathcal{E}$ le produit direct des $\mathcal{E}_\iota$, et posons

$$T_x(X_\iota)_{\iota \in I} = (T_x^\iota X_\iota)_{\iota \in I} \quad ;$$

d'où visiblement l'isomorphisme cherché. Il est clair que, réciproquement toute algèbre complètement réductible d'endomorphismes admet un système complet de représentations irréductibles, et est donc faiblement semi-simple.

6 - Le radical fort.

Définition 10 : On appelle radical fort d'une algèbre $\mathcal{A}$ l'intersection de tous les idéaux bilatères maximaux réguliers de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est fortement semi-simple si son radical fort est $\{0\}$. (Segal (1)).

Il est clair d'après la Prop.6 que :

Prop. 8 : Le radical fort de $\mathcal{A}$ est un idéal bilatère contenant le radical faible de $\mathcal{A}$.

D'autre part, toute algèbre irréductible d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie étant, non seulement primitive, mais simple et avec unité, on a la

Prop. 9 : Si les représentations linéaires irréductibles d'une algèbre $\mathcal{A}$ sur k sont réalisées dans des espaces vectoriels de dimension finie sur k (ou des surcorps de k permutables aux représentations correspondantes), alors le radical fort de $\mathcal{A}$ coïncide avec son radical faible.

Ceci justifie la considération du radical dans les cas classiques. Pour obtenir une caractérisation analogue à celle du Théorème 5, on introduit, pour chaque $x \in \mathcal{A}$, l'ensemble $[x]$ des éléments de la forme

$$\sum (a_i x b_i + a_i b_i)$$

où a_i, b_i sont arbitraires et en nombre fini dans $\mathcal{A}$. Il est clair que $[x]$ est un idéal bilatère, et que $-x$ est une unité mod $[x]$. Donc, $x \in [x]$ équivaut à $[x] = \mathcal{A}$, ce qui prouve que, pour tout élément x du radical fort, on a $[x] = \mathcal{A}$. Le radical fort étant un idéal bilatère, on aura donc plus généralement $[y] = \mathcal{A}$ pour tout élément de la forme

$$y = \sum s\, x t_i + \lambda x \qquad (s, t_i \in \mathcal{A},\ \lambda \in k).$$

Pour montrer que cette propriété caractérise le radical fort, il suffit que prouver qu'elle implique $x=0$ dans le cas où $\mathcal{A}$ est simple avec unité. Or les y en question constituent un idéal bilatère $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$; ces y ont évidemment la même propriété que x ; mais -e ne possède pas cette propriété car

$$\sum a_i(-e)b_i + a_i b_i = 0 \text{ , en sorte que } [-e] = \{0\} \neq \mathcal{A}.$$

Donc $-e \notin \mathcal{B}$, ce qui implique $\mathcal{B} = \{0\}$ et donc $x = 0$ comme annoncé. On a donc le

Théorème 7 : Le radical fort de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des $x \in \mathcal{A}$ tels que l'on ait $\left[\sum_i s_i x t_i + \lambda x\right] = \mathcal{A}$ quels que soient les $s_i, t_i \in \mathcal{A}$ et $\lambda \neq k$.

En ce qui concerne l'utilité de la notion de radical fort (dire à Segal), elle n'est pas encore parfaitement évidente.

7 - Propriétés élémentaires des algèbres irréductibles d'endomorphismes.

Rappelons qu'une algèbre $\mathcal{A}$, réalisée par des endomorphismes (S, T,...) d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur k , est dite irréductible quand il n'existe aucun sous-espace vectoriel non trivial de $\mathcal{E}$ qui soit invariant par $\mathcal{A}$. Toute algèbre isomorphe à une telle algèbre est dite primitive à gauche (Déf. 6). Ces algèbres sont évidemment caractérisées par la

Prop.10 : Pour qu'une algèbre $\mathcal{A}$ soit primitive à gauche (resp. à droite) il faut et il suffit qu'elle possède au moins un idéal à gauche (resp. à droite) maximal régulier $\mathcal{M}$ dont le noyau $\mathcal{M}^0$ soit réduit à $\{0\}$:

On va maintenant étudier les principales propriétés des algèbres irréductibles d'endomorphismes.

Définition 11 : Etant donnée une sous-algèbre $\mathcal{B}$ d'une algèbre $\mathcal{A}$, on appelle centralisateur de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ l'ensemble des $x \in \mathcal{A}$ tels que

$$xy = yx \qquad \text{pour tout } y \in \mathcal{B} .$$

Il est clair que ce centralisateur est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$, contenant e si $\mathcal{A}$ possède un élément unité e .

En particulier, si $\mathcal{A}$ est une algèbre d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur k, on appellera centralisateur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$ le centralisateur de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ des endomorphismes de $\mathcal{E}$, et on le désignera par $\mathcal{A}'$; c'est une algèbre avec unité.

Théorème 8 (Lemme de Schur) : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre irréductible d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur k ; le centralisateur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$ est un corps (c'est-à-dire une algèbre à division sur k).

Démonstration superflue.

Dans les conditions du Théorème 8, on peut donc considérer $\mathcal{E}$ comme un espace vectoriel sur $K = \mathcal{A}'$; les $S \in \mathcal{A}$ sont encore des endomorphismes de $\mathcal{E}$ pour cette nouvelle structure, mais $\mathcal{A}$ n'est plus alors une algèbre (du moins : pas sur K).

Il est fondamental d'observer que le fait pour $\mathcal{A}'$ d'être un corps ne suffit pas à assurer l'irréductibilité de $\mathcal{A}$. On a en effet la

Prop. 11 : Soient $\mathcal{A}$ une algèbre irréductible d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur k, et $\mathcal{U}$ un idéal à gauche non nul de $\mathcal{A}$. Le centralisateur de $\mathcal{U}$ (dans $\mathcal{E}$) coïncide avec $\mathcal{A}'$.

En effet, choisissons un $X_0 \in \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{U} X_0 \neq \{0\}$ - d'où $\mathcal{U} X_0 = \mathcal{E}$ comme sous-espace invariant par $\mathcal{A}$. Soit un U permutable à $\mathcal{U}$; on aura donc, pour $S \in \mathcal{U}$ et $T \in \mathcal{A}$

$$U T S = T S U = T U S$$

d'où

$$(UT - TU) SX_0 = 0 ;$$

les SX_o constituant tout $\mathcal{E}$, il en résulte $UT = TU$, c'est-à-dire $U \in \mathcal{A}'$. C.Q.F.D.

On voit que si $\mathcal{M}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{A}$:

ou bien constitue une algèbre irréductible dans $\mathcal{E}$;

ou bien il existe un $X \neq 0$ de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{M}X = \{0\}$, et dans ce dernier cas on a le contre exemple cherché.

Si $\mathcal{M}$ est en outre bilatère, on ne peut avoir $\mathcal{M}X = \{0\}$ que pour $X = 0$; car les X tels que $\mathcal{M} \cdot X = \{0\}$ forment alors un sous-espace invariant par $\mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{M}$ est irréductible ou réduit à $\{0\}$. On a donc la

Prop. 12 : Tout idéal bilatère non nul d'une algèbre primitive à gauche (resp. à droite) est lui-même une algèbre primitive à gauche (resp. à droite).

8.- Algèbres denses d'endomorphismes.

Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une algèbre complètement réductible d'endomorphismes de $\mathcal{E}$; on a alors le résultat bien connu que voici :

Proposition 13 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre complètement réductible d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$, et supposons que $\mathcal{E}$ soit la somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, invariants par $\mathcal{A}$ et dans chacun desquels $\mathcal{A}$ soit irréductible ; si alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, invariant par $\mathcal{A}$, il existe un second sous-espace $\mathcal{F}'$ invariant par $\mathcal{A}$ et tel que $\mathcal{E}$ soit la somme directe des sous-espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.

Rappelons la démonstration de ce résultat. Soit

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_n$$

une décomposition de $\mathcal{E}$ en sous-espaces invariants minimaux $\mathcal{E}_i$, et soit $\mathcal{F}$ un sous-espace invariant quelconque de $\mathcal{E}$.

La propriété est évidente si n=I ; on va procéder par récurrence sur n, en supposant la propriété démontrée pour n-I . Considérons alors le sous-espace

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 \otimes \ldots\ldots \otimes \mathcal{E}_{n-1} \ ;$$

la restriction de $\mathcal{A}$ à celui-ci est complètement réductible ; par ailleurs, le sous-espace

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{E}' \cap \mathcal{F}$$

est invariant par $\mathcal{A}$; d'après la récurrence, il existe donc dans $\mathcal{E}'$ un sous-espace invariant $\mathcal{F}''$ tel que

$$\mathcal{E}' = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}''$$

et il est clair que l'on a

$$\mathcal{E}' + \mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'' \ .$$

Ceci étant, deux cas peuvent se présenter :

a) $(\mathcal{E}' + \mathcal{F}) \cap \mathcal{E}_n$ (qui est un sous-espace invariant de $\mathcal{E}_n$) est réduit à $\{0\}$; alors on a immédiatement

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}'$$

en sorte que

$$\mathcal{E} = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'') \otimes \mathcal{E}_n = \mathcal{F} \otimes (\mathcal{F}'' \otimes \mathcal{E}_n)$$

ce qui démontre la proposition dans ce cas.

b) $(\mathcal{E}' + \mathcal{F}) \cap \mathcal{E}_n$ n'est pas nul ; comme $\mathcal{E}_n$ est irréductible, c'est que

$$(\mathcal{E}' + \mathcal{F}) \cap \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n$$

et alors on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}''$$

en sorte que la proposition est démontrée encore dans ce cas. C.Q.F.D.

Ceci étant, considérons un espace vectoriel $\mathcal{E}$ et une algèbre complètement réductible $\mathcal{A}$ d'endomorphismes de $\mathcal{E}$; soient $\mathcal{A}'$ le centralisateur de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}''$ celui de $\mathcal{A}'$; on a évidemment $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ est une décomposition de $\mathcal{E}$ en deux sous-espaces invariants par $\mathcal{A}$, les opérateurs de projection sur $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ associés à la décomposition en question sont dans $\mathcal{A}'$, en sorte que $\mathcal{A}''$ conserve $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$; en d'autres termes, <u>tout sous-espace de</u> $\mathcal{E}$ <u>invariant par</u> $\mathcal{A}$ <u>l'est aussi par</u> $\mathcal{A}''$. En particulier pour tout $X \in \mathcal{E}$, le sous-espace $\mathcal{A}.X$ sera invariant par $\mathcal{A}''$: d'où résulte qu'à tout $S'' \in \mathcal{A}''$ correspond au moins un $S \in \mathcal{A}$ tel que

$$S''X = SX .$$

Comme application de ces propriétés, soient $\mathcal{A}$ une algèbre <u>irréductible</u> d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$, et $K = \mathcal{A}'$ le corps centralisateur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$. Considérons l'espace produit

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E} \times \ldots \times \mathcal{E} .$$

ensemble des systèmes $[X_1, \ldots, X_n]$ d'éléments de $\mathcal{E}$; en associant à tout S l'endomorphisme $\overset{\circ}{S}$ de $\mathcal{E}^n$ défini par

$$\overset{\circ}{S}\,[X_1, \ldots, X_n] = [SX_1, \ldots, SX_n] ,$$

on est conduit à une représentation linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}^n$, laquelle est manifestement <u>fidèle</u> et <u>complètement réductible</u> : une décomposition de $\mathcal{E}^n$ en sous-espaces invariants minimaux s'obtient en prenant les sous-espaces de coordonnées. On peut donc appliquer ici les résultats précédents.

Pour cela, désignons par $\mathcal{E}_i$ le i^e espace de coordonnées : c'est l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui sont de la forme

$$[0, \ldots, \underset{\uparrow}{X}, \ldots, 0] \quad ;$$

et soient E_i l'opérateur de projection sur $\mathcal{E}_i$ dans $\mathcal{E}^n$, et φ_i l'application linéaire canonique de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}_i$. A tout endomorphisme U de $\mathcal{E}^n$ on peut associer n^2 endomorphismes U_{ij} de $\mathcal{E}$ définis par

$$U_{ij} = \varphi_i^{-1} \circ E_i \circ U \circ \varphi_j$$

(cf. les coefficients d'une matrice), et la condition nécessaire et suffisante pour que U permute aux $\mathring{S}$ ($S \in \mathcal{A}$) est que tous les U_{ij} soient dans $\mathcal{A}'$. Soit alors un $T \in \mathcal{A}''$; on aura $TU_{ij} = U_{ij}T$ si $U \in (\mathring{\mathcal{A}})'$, et par conséquent $\mathring{T} \in (\mathring{\mathcal{A}})''$; donc pour tout élément $[X_1, \ldots, X_n]$ de $\mathcal{E}^n$ on pourra trouver un $S \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mathring{T}[X_1, \ldots, X_n] = \mathring{S}[X_1, \ldots, X_n] ;$$

en explicitant ce résultat, on est ainsi amené au

Théorème 9 - Soient $\mathcal{A}$ une algèbre irréductible d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}' = K$ le centralisateur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}''$ le centralisateur de $\mathcal{A}'$; quels que soient $T \in \mathcal{A}''$ et les éléments $X_1, \ldots, X_n$ de $\mathcal{E}$ en nombre fini, il existe un $S \in \mathcal{A}$ tel que

$$SX_i = TX_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) .$$

Corollaire 1 du Th.9 : Avec les notations du Th.9, soient $X_1, \ldots, X_n$ des éléments linéairement indépendants sur K ; il existe un $S \in \mathcal{A}$ tel que $SX_1, \ldots, SX_n$ soient arbitrairement donnés dans $\mathcal{E}$.

En effet, $\mathcal{E}$ étant considéré comme espace vectoriel sur K, $\mathcal{A}''$ n'est autre que l'algèbre de tous les endomorphismes de $\mathcal{E}$; si donc $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendants sur K, il existe $T \in \mathcal{A}'$ tel que $TX_1, \ldots, TX_n$ soient arbitraires dans $\mathcal{E}$.

Corollaire 2 du Th.9 : Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur k, et $\mathcal{A}$ une algèbre irréductible d'endomorphismes de $\mathcal{E}$. Pour que $\mathcal{A}' = k$, il faut et il suffit que, quels que soient $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{E}$, indépendants sur k, et $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{E}$, on puisse résoudre

$$SX_i = Y_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) , \qquad S \in \mathcal{A} .$$

La nécessité découle du Corollaire 1. Si réciproquement la condition est remplie, il en résulte immédiatement que tout système d'éléments de $\mathcal{E}$ indépendant sur k l'est aussi sur $K \supset k$ - d'où $K = k$.

Il suffit du reste que la condition du coroll. 2 soit vérifiée pour $n = 2$.

On est ainsi amené à la définition suivante :

Définition 12 : Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur k , et $\mathcal{A}$ une algèbre d'endomorphismes de $\mathcal{E}$. On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est algèbriquement dense dans $\mathcal{A}$ si, quels que soient $S \in \mathcal{A}$ et $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{E}$ il existe un $T \in \mathcal{B}$ avec

$$TX_i = SX_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$ (Jacobson (1),(2))

Par abus de langage, on dira qu'une algèbre $\mathcal{A}$ est algèbriquement dense si elle est algèbriquement dense dans l'algèbre de tous les endomorphismes de $\mathcal{E}$; le Corollaire 2 du Th.9 exprime que : si $\mathcal{A}$ est irréductible, pour que $\mathcal{A}$ soit algèbriquement dense il faut et il suffit que $\mathcal{A}' = k$.

Bien entendu, la notion de densité définie ci-dessus pourrait s'interpréter topologiquement, en munissant $\mathcal{E}$ de la topologie discrète etc... ; mais le rapporteur est d'avis, au contraire, d'exclure radicalement toute topologie de ces considérations afin de mettre en évidence par la suite l'importance des propriétés purement algébriques des algèbres normées.

9 - Intersections d'idéaux réguliers.

Prop. 14 : Dans une algèbre commutative $\mathcal{A}$, toute intersection finie d'idéaux réguliers est un idéal régulier.

Soient en effet $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ deux idéaux bilatères réguliers, et u_1 (resp. u_2) une unité mod $\mathcal{M}_1$ (resp. mod $\mathcal{M}_2$). Posons

$$u = u_1 + u_2 - u_1 u_2 \quad ;$$

pour $x \in \mathcal{A}$ on aura

$$ux - x = u_1 x + u_2 x - u_1 u_2 x - x = u_1(x - u_2 x) - (x - u_2 x)$$

donc $ux - x \in \mathcal{M}_1$;

de même

$$ux - x = u_2(x-u_1x)-(x-u_1x) \in \mathfrak{a}_2 \ .$$

Donc u est une unité mod $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$. C.Q.F.D.

Problème : une intersection finie d'idéaux bilatères réguliers d'une algèbre quelconque est-elle un idéal régulier ?

Prop. 15 : Dans une algèbre quelconque $\mathfrak{A}$, une intersection finie d'idéaux à gauche maximaux réguliers est un idéal à gauche régulier.

Soient en effet $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ des idéaux à gauche maximaux réguliers, et

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n ;$$

on peut supposer que tous les $\mathfrak{a}_i$ interviennent effectivement dans l'intersection, de telle sorte que

$$(1) \qquad \mathfrak{a}'_i = \bigcap_{k \neq i} \mathfrak{a}_k \neq \mathfrak{a} \ .$$

Ceci étant, soient $u_1, \ldots, u_n$ des unités à droite mod $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ respectivement. Toute la question revient à montrer qu'on peut s'arranger de façon que

$$u_1 = \ldots = u_n = u$$

(car on aura alors $xu - x \in \mathfrak{a}_i$ quel que soit i , donc $xu-x \in \mathfrak{a}$).

Or de (1) et du fait que $\mathfrak{a}_i$ est maximal résulte

$$\mathfrak{a}'_i + \mathfrak{a}_i = \mathfrak{A}$$

(car (1) signifie $\mathfrak{a}'_i \not\subset \mathfrak{a}_i$) ; il existe donc un $u'_i \in \mathfrak{a}'_i$ vérifiant

$$u'_i \equiv u_i \pmod{\mathfrak{a}_i}$$

- en sorte que u'_i est aussi une unité à droite mod $\mathfrak{a}_i$. En d'autres termes, on peut supposer

$$u_i \in \mathfrak{a}_j \quad \text{pour } j \neq i \ .$$

Posons alors

$$u = u_1 + \ldots + u_n \ .$$

On aura

$$xu - x = \sum_{j \neq i} xu_j + (xu_i - x) \ ;$$

de $u_j \in \mathfrak{v}_j$ résulte $xu_j \in \mathfrak{v}_j$ - et, comme u_i est unité à droite mod $\mathfrak{v}_i$, on voit que $xu-x \in \mathfrak{v}_i$.

i étant quelconque, u est une unité à droite mod $\mathfrak{v}$. C.Q.F.D.

Remarque. Cette proposition permet une démonstration immédiate et sans calcul de la suivante : toute algèbre faiblement semi-simple, vérifiant la condition descendante pour les idéaux à gauche, possède un élément unité (car $\{0\}$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche maximaux réguliers !).

Prop. 16 : Soient $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ deux idéaux bilatères non nuls d'une algèbre primitive $\mathfrak{A}$; le produit $\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2$ est $\neq \{0\}$.

En effet, supposons $\mathfrak{A}$ réalisée comme algèbre irréductible d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathfrak{E}$; alors $\mathfrak{v}_1$ et $\mathfrak{v}_2$ sont aussi (Prop. 12) des algèbres irréductibles d'endomorphismes de $\mathfrak{E}$. Il en résulte, si X_1, X_2, X_3 sont des éléments tous $\neq 0$ de $\mathfrak{E}$, l'existence de $T_1 \in \mathfrak{v}_1$ et de $T_2 \in \mathfrak{v}_2$ avec

$$X_2 = T_1 X_1 \quad , \quad X_3 = T_2 X_2 \quad ,$$

d'où

$$X_3 = T_2 T_1 X_1 \quad ,$$

en sorte que $T_2 T_1 \neq 0$. C.Q.F.D.

Bien entendu, il en résulte à fortiori $\neq \{0\}$.

Prop. 17 : Soient $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ deux idéaux bilatères d'une algèbre arbitraire $\mathfrak{A}$, avec $\mathfrak{v}_1 \cap \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v} = \mathfrak{A}$. Tout idéal bilatère primitif contenant $\mathfrak{v}$ contient au moins l'un des idéaux $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$.

Supposons en effet qu'il existe un idéal primitif $\mathfrak{b}$ avec

$$\mathfrak{v}_1 \cap \mathfrak{v}_2 \subset \mathfrak{b} \quad , \quad \mathfrak{v}_1 \not\subset \mathfrak{b} \quad , \quad \mathfrak{v}_2 \not\subset \mathfrak{b} \quad ;$$

soit $x \to \dot{x}$ l'application canonique de $\mathfrak{A}$ sur l'algèbre primitive $\mathfrak{A}/\mathfrak{b}$; alors $\dot{\mathfrak{v}}_1$ et $\dot{\mathfrak{v}}_2$ sont des idéaux bilatères non nuls de $\mathfrak{A}/\mathfrak{b}$, en sorte que (Prop.16) il existe $x_1 \in \mathfrak{v}_1$, $x_2 \in \mathfrak{v}_2$ avec

$x_1 x_2 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}}$;

ce qui est absurde puisque

$$x_1 x_2 \in \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \subset \mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_2 \subset \mathfrak{b}$$ C.Q.F.D.

10 - Le spectre faible d'une algèbre (Jacobson (3))

Etant donnée une algèbre $\mathfrak{A}$, non confondue avec son radical faible on désignera par $\hat{\mathfrak{A}}_g$ l'ensemble de ses idéaux primitifs à gauche. Etant donné une partie $A \subset \hat{\mathfrak{A}}_g$, non vide, on appellera noyau de A l'intersection $\mathfrak{n}(A)$ de tous les idéaux $\mathfrak{r} \in A$; c'est donc un idéal bilatère de A ; et on notera $\bar{A}$ l'ensemble des $\mathfrak{r} \in \hat{\mathfrak{A}}_g$ tels que $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{n}(A)$. Soit $\mathcal{F}$ la famille des $A \subset \hat{\mathfrak{A}}_g$ tels que $A = \bar{A}$ - avec en outre $\phi \in \mathcal{F}$. On a les propriétés suivantes

1) Toute intersection de $A_\nu \in \mathcal{F}$ est un $A \in \mathcal{F}$.

(En effet, on a visiblement $\mathfrak{n}(A) \supset \mathfrak{n}(A_\nu)$, donc $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{n}(A)$ entraîne $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{n}(A_\nu)$ - donc $\mathfrak{r} \in A_\nu$ - donc $\mathfrak{r} \in A$)

2) Toute réunion finie de $A_i \in \mathcal{F}$ est un $A \in \mathcal{F}$.

(En effet, soient $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ non vides ; alors on a évidemment

$$\mathfrak{n}(A_1 \cup A_2) = \mathfrak{n}(A_1) \cap \mathfrak{n}(A_2) \neq \mathfrak{A} \quad ;$$

donc (Prop. 17) tout idéal primitif $\mathfrak{r}$ contenant $\mathfrak{n}(A_1 \cup A_2)$ contient $\mathfrak{n}(A_1)$ - auquel cas $\mathfrak{r} \in A_1$ - ou bien contient $\mathfrak{n}(A_2)$ - auquel cas $\mathfrak{r} \in A_2$; et on a bien $\mathfrak{r} \in A_1 \cup A_2$ dans tous les cas).

On déduit de là la possibilité d'introduire sur $\hat{\mathfrak{A}}_g$ une topologie pour laquelle $\mathcal{F}$ soit la famille des fermés. L'espace topologique ainsi obtenu est appelé le spectre faible à gauche de $\mathfrak{A}$ ("structure space" chez Jacobson), et est bien entendu un invariant algébrique de $\mathfrak{A}$.

Si $\mathfrak{m} \in \hat{\mathcal{A}}_g$, l'adhérence dans $\hat{\mathcal{A}}_g$ de l'ensemble $\{\mathfrak{m}\}$ réduit au point est évidemment l'ensemble $\overline{\{\mathfrak{m}\}}$ des $\mathfrak{b} \in \hat{\mathcal{A}}_g$ avec $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{m}$; on en conclut que $\overline{\{\mathfrak{m}_1\}} = \overline{\{\mathfrak{m}_2\}}$ implique $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ - c'est-à-dire : $\hat{\mathcal{A}}_g$ vérifie l'axiome (T_0) de séparation. Par contre, l'axiome (T_1) - et à fortiori Hausdorff - peuvent ne pas être vérifiés par $\hat{\mathcal{A}}_g$; il suffit pour le voir de prendre pour $\mathcal{A}$ une algèbre primitive à gauche mais non simple (ex : l'algèbre de tous les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie) . Bien entendu, on a $\overline{\{\mathfrak{m}\}} = \{\mathfrak{m}\}$ au moins dans le cas où $\mathfrak{m}$ est non seulement primitif mais maximal ; en particulier, le spectre $\hat{\mathcal{A}}_g$ d'une algèbre commutative vérifie l'axiome (T_1) de séparation.

Terminons ce N° en prouvant la

Prop. 18 : Le spectre $\hat{\mathcal{A}}_g$ d'une algèbre $\mathcal{A}$ avec unité est bicompact (c'est-à-dire : vérifie Borel-Lebesgue).

Soient en effet des fermés $A_\iota \subset \hat{\mathcal{A}}_g$ tels que $\bigcap_\iota A_\iota$ soit vide ; on a alors

$$(1) \qquad \sum_\iota \mathfrak{m}(A_\iota) = \mathcal{A}$$

- sinon, il existerait (unité !) un idéal bilatère maximal contenant tous les $\mathfrak{m}(A_\iota)$, donc appartenant à $\bigcap_\iota A_\iota$.
De (1) résulte l'existence d'un nombre fini d'indices $\iota_1, \ldots, \iota_n$ et d'éléments $x_1 \in \mathfrak{m}(A_{\iota_1}), \ldots, x_n \in \mathfrak{m}(A_{\iota_n})$ tels que

$$x_1 + \ldots + x_n = e \ ;$$

donc on a

$$\mathfrak{m}(A_{\iota_1}) + \ldots + \mathfrak{m}(A_{\iota_n}) = \mathcal{A} \ ,$$

ce qui prouve

$$A_{\iota_1} \cap \ldots \cap A_{\iota_n} = \phi \ . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Une autre définition du spectre a été proposée par Segal ; elle est basée sur les idéaux bilatères maximaux réguliers, et jouit de propriétés analogues à celle de Jacobson. L'intérêt de ces notions n'est pas encore clair ; il n'est pas non plus démontré, ce qui est encore plus grave, qu'elles soient adaptées aux applications (cf. Ch. II, § 3, où il est montré, pour les algèbres normées commutatives, que la bonne topologie à introduire sur $\hat{\mathcal{A}}$ peut ne pas être celle définie ici ; autre exemple, dû à Segal : soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des polynomes $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}$; $\hat{\mathcal{A}}$ est alors $\mathbb{C}$ muni de la monstrueuse topologie que voici : un $A \subset \mathbb{C}$ est fermé s'il est fini ; dernier exemple : soit $\mathcal{K}$ un corps de fonctions algébriques sur $\mathbb{C}$, et $\mathcal{K}$ l'algèbre des fonctions critères de $\mathcal{K}$; un idéal maximal définit un point de la surface de Riemann correspondante- et on aboutirait, par la méthode Jacobson, à introduire sur celle-ci une topologie analogue à la précédente) .

Bibliographie (sommaire !)

N. Jacobson

(1) The radical and semi-simplicity for arbitrary rings (Am. Journal, 67, 1945, pp. 300 - 320)

(2) Structure theory of simple rings without finiteness assumptions (Transactions, 57, 1945, pp. 228 - 245).

(3) A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring (Proceedings U.S.A., 31, 1945, pp. 333 - 338).

(4) On the theory of primitive rings (Annals, 48 , 1947, pp. 8 - 21) .

I.E. Segal

(1) The group algebra of a locally compact group (Transactions, 61, 1947, pp. 69 - 105).

C. Chevalley

Travaux secrets sur l'annihilation des idéaux (communiqués au rapporteur par Samuel).

Problème non résolu par le rapporteur : Retrouver la référence de l'article d'un ou plusieurs américains inconnus, dans lequel est démontré le Th. 7 .

Chapitre II - Algèbres normées commutatives.

Le § I de ce Chapitre expose les notions indispensables de la théorie des fonctions analytiques dans un Banach. Pour des raisons de rapidité, on a passé par l'intermédiaire des fonctions scalaires ; mais le rapporteur ne tient pas spécialement à ce point de vue.

Le § 2 est consacré aux propriétés générales des algèbres normées - question qui n'a jamais été exposée clairement et sur laquelle on connaît du reste fort peu de choses ; ici comme dans toute la suite, on a cherché à ne pas oublier l'aspect purement algébrique des problèmes qui se posent.

Le § 3 concerne les propriétés élémentaires des algèbres normées commutatives ; la plupart des résultats en sont dus à Gelfand (qui supposait toutefois l'existence d'un élément unité), bien que les méthodes adoptées ici ne soient pas toujours les siennes.

Le § 4 exposé, d'après un mémoire important et récent de Šilov, la théorie des algèbres normées "régulières" ; c'est d'elle que dépendent, entre autres, les applications à l'analyse harmonique classique (cf. sur cette question : Gelfand [3], Gelfand-Raikov [I], Godement [I], Raikov [I], Segal [I]), ainsi qu'aux algèbres de fonctions analytiques (et même non quasi-analytiques). Les résultats du N°2 sont dus au rapporteur, qui s'est contenté de Bourbakiser les idées de Beurling sur les spectres. Comme Šilov, et faute de temps et de courage, on s'est borné aux algèbres possédant un élément unité - mais il serait bon de se débarrasser de cette hypothèse, ce qui est probablement aisé.

On trouvera au Chapitre suivant la théorie des $*$-algèbres commutatives, dont l'étude demande des préliminaires trop importants pour figurer dans le présent Chapitre.

CH. II : Algèbres normées sur le corps complexe.

§ 1 - Fonctions analytiques à valeurs dans un Banach

Etant donnés un espace de Banach complexe $\mathcal{A}$ et un domaine D du plan complexe, on dira qu'une application $\zeta \longrightarrow x(\zeta)$ de D dans $\mathcal{A}$ est continue en sous-entendant toujours qu'on muni $\mathcal{A}$ de la topologie forte, c'est-à-dire définie par la norme $\|x\|$. Il en résulte bien entendu que, pour chaque élément x' du dual (topologique) $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$, la fonction numérique $(x(\zeta), x')$ est continue - mais la réciproque n'est pas vraie.

Une application $x(\zeta)$ de D dans $\mathcal{A}$ sera dite régulière dans D si, pour chaque $x' \in \mathcal{A}'$, la fonction numérique $(x(\zeta), x')$ est régulière au sens ordinaire du terme (c'est-à-dire possède en chaque point de D une dérivée par rapport à ζ, ou encore est développable en série entière au voisinage de tout point de D). Le but de ce § est d'entendre à de telles fonctions vectorielles les propriétés élémentaires des fonctions numériques d'une variable complexe. On s'appuiera pour cela sur les propriétés suivantes.

Lemme 1. Si une fonction numérique variable $f(\zeta)$ d'une variable complexe ζ, définie et régulière dans un domaine D, converge uniformément sur toute partie compacte de D vers une fonction limite $f_0(\zeta)$, alors :

1) f_0 est régulière dans D.

2) pour chaque n, la dérivée $f^{(n)}(\zeta)$ converge vers $f_0^{(n)}(\zeta)$ uniformément sur toute partie compacte de D.

3) la primitive $F(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(\xi)\,d\xi$ (prise à partir d'un ζ_0 D fixe) converge vers $F_0(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} f_0(\xi)\,d\xi$ uniformément sur toute partie compacte de D.

Lemme 2. Soit K une partie fortement compacte d'un espace de Banach $\mathcal{A}$. Alors, si un x' variable du dual $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ converge faiblement vers un x'_0, en restant dans une boule fixe de $\mathcal{A}'$, la fonction $\mu(x) = (x,x')$ converge, uniformément sur K, vers $\mu_0(x) = (x,x'_0)$.

(Gelfand 1938)

(et réciproquement : le lemme 2 caractérise les parties compactes de $\mathcal{A}$ - mais on n'en aura pas besoin).

Lemme 3. Soient $\mathcal{A}$ un espace de Banach complexe, $\mathcal{A}'$ son dual, $\mu(x')$ une forme linéaire sur $\mathcal{A}'$. Pour qu'il existe un $x_0 \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu(x') \equiv (x_0,x')$$

il faut et il suffit que $\mu(x')$ soit faiblement continue sur la boule unité de $\mathcal{A}'$.

Ceci étant, soit $x(\zeta)$ une fonction définie et régulière dans D et à valeurs dans $\mathcal{A}$. Soit A une partie compacte de D ; alors les $x(\zeta)$, quand ζ décrit A, décrivent une partie compacte de $\mathcal{A}$ en sorte que, si un x' variable de $\mathcal{A}'$ converge faiblement vers un x'_0, en restant dans la boule unité B' de $\mathcal{A}'$, la fonction numérique $(x(\zeta), x')$ converge vers $(x(\zeta),x'_0)$ uniformément sur A (Lemme 2).

Mais alors (Lemme 1) sa dérivée en $\zeta_0 \in D$: $\left[\frac{d}{d\zeta}(x(\zeta),x')\right]_{\zeta_0}$ converge vers $\left[\frac{d}{d\zeta}(x(\zeta), x'_0)\right]_{\zeta_0}$ en sorte que l'expression

$$\left[\frac{d}{d\zeta}(x(\zeta),x')\right]_{\zeta_0} = \mu(x')$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{A}'$, faiblement continue sur B'. Donc il existe (Lemme 3) un $x_0 \in \mathcal{A}$ tel que

$$\left[\frac{d}{d\zeta}(x(\zeta),x')\right]_{\zeta_0} = (x_0,x') \quad \text{pour tout} \quad x' \in \mathcal{A}'.$$

D'où la

Prop. 1. Si $x(\zeta)$ est une fonction régulière dans D et à valeurs dans $\mathcal{A}$, il existe une fonction $x'(\zeta)$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ telle que l'on ait

$$(x'(\zeta),x') = \frac{d}{d\zeta}(x(\zeta),x') \quad \text{pour tout } x' \in \mathcal{A}' \text{ et tout } \zeta \in D .$$

Il est facile de voir que $x'(\zeta)$ est elle-même régulière dans D .

Comme pour chaque $x' \in \mathcal{A}'$ $(x'(\zeta),x')$ est régulière, il suffit de vérifier la continuité forte de $x'(\zeta)$; or, cela résulte du fait que les fonctions scalaires $(x'(\zeta),x')$ (où x' décrit la boule unité de $\mathcal{A}'$) sont également uniformément continues sur tout compact contenu dans D , en sorte qu'il en est de même de leurs dérivées - bref, tout repose sur les histoires connues de familles "normales" conjuguées avec l'équation

$$\| x(\zeta_1) - x(\zeta_2) \| = \sup_{\substack{x' \in \mathcal{A}' \\ \|x'\| \leqslant 1}} \left| (x(\zeta_1),x') - (x(\zeta_2),x') \right| .$$

Par des raisonnements de même nature (convergence uniforme de "rapports incrémentaux", comme dit M. Bouligand) on pourrait prouver que

$$\lim_{h \to 0} \text{forte} \quad \frac{x(\zeta+h) - x(\zeta)}{h} = x'(\zeta)$$

ce qui nous ramène à la définition des fonctions analytiques proposée par Gelfand lui-même.

Bien entendu, on peut itérer le procédé et obtenir ainsi l'existence de dérivées de tous ordres.

Prop. 2. Soit $x(\zeta)$ une fonction régulière dans un cercle de centre ζ_0 et de rayon R . On a

$$(1) \qquad x(\zeta) = x(\zeta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \zeta_0)^n}{n!} x^{(n)}(\zeta_0)$$

où la série converge absolument dans $\mathcal{A}$ pour tout ζ tel que $|\zeta - \zeta_0| < R$.

En effet, soit C la circonférence $|\zeta - \zeta_0| = \rho < R$. Pour tout $x' \in \mathcal{A}$ on aura

$$(2) \qquad (x(\zeta),x') = (x(\zeta_0),x') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta-\zeta_0)^n}{n!} (x^{(n)}(\zeta_0),x')$$

et (formule de Cauchy)

$$(x^{(n)}(\zeta_0),x') = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{(x(\zeta),x')}{(\zeta-\zeta_0)^{n+1}} d\zeta$$

Il en résulte que, si M est une borne supérieure de $\|x(\zeta)\|$ sur C , on aura

$$\left|(x^{(n)}(\zeta_0),x')\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \times 2\pi\rho \times \frac{M.\|x'\|}{\rho^{n+1}}$$

et donc

$$\|x^{(n)}(\zeta_0)\| \leqslant M \frac{n!}{\rho^n}$$

- d'où la convergence en norme de la série (1), et possibilité d'écrire

$$(x(\zeta_0) + \sum \frac{(\zeta-\zeta_0)^n}{n!} x^{(n)}(\zeta_c), x') = (x(\zeta_0),x') + \sum \frac{(\zeta-\zeta_0)^n}{n!} (x^{(n)}(\zeta_0),x')$$

$$= (x(\zeta),x') \quad \text{C.Q.F.D.}$$

d'après (2) - et finalement (1) est prouvé.

<u>Corollaire de la Prop. 2</u> (<u>Liouville-Gelfand</u>) : <u>Une fonction</u> $x(\zeta)$, <u>définie et régulière dans tout le plan complexe, se réduit à une constante si elle est bornée</u>

car si $\|x(\zeta)\| \leqslant M < \infty$ quel que soit ζ , on aura

$$\|x^{(n)}(0)\| \leqslant M \frac{n!}{\rho^n}$$

quel que soit ρ , donc $x^{(n)}(0) = 0$ et $x(\zeta) = x(0)$.

C.Q.F.D.

Ch. II - § 2 - Propriétés générales des algèbres normées.

1 - Définitions

On désigne par k l'un des corps R , C .

Définition 1 : On appelle algèbre normée sur k un ensemble $\mathcal{A}$ muni d'une structure d'algèbre sur k et d'une norme $\| x \|$ vérifiant les axiomes suivants :

(AN_1) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$; $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$

(AN_2) $\| xy \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$

(AN_3) $\| e \| = 1$ si $\mathcal{A}$ possède un élément unité e .

est donc aussi un espace vectoriel normé sur k , dans lequel les endomorphismes $x \longrightarrow xy$ et $x \longrightarrow yx$ sont continus.

Comme il y a lieu de préciser les différentes notions d'isomorphisme qui interviennent, on peut poser la

Définition 2 : Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres normées sur un corps k, et $y = \varphi(x)$ une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. On dit que φ est :

un homomorphisme algèbrique si

$$\varphi(\lambda x + \lambda' x') = \lambda \varphi(x) + \lambda' \varphi(x') \; ; \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \; ;$$

un homomorphisme continu si, en outre, φ est une application continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$;

un isomorphisme algèbrique si φ est un homomorphisme algèbrique et est biunivoque ;

un isomorphisme continu si φ est, en outre, un homomorphisme continu ;

un isomorphisme bicontinu si, en outre, φ^{-1} est continu ;

un isomorphisme métrique si, en outre,

$$\| \varphi(x) \| = \| x \| \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{A} \; .$$

Malgré leur lourdeur et leur multiplicité, toutes ces notions sont indispensables.

Rappelons sans démonstration les faits élémentaires que voici :

Prop. 1 : Toute algèbre normée $\mathcal{A}$ sur k est métriquement isomorphe à une sous-algèbre partout dense d'une algèbre normée complète $\mathcal{A}$ sur k, déterminée à un isomorphisme métrique près.

Prop. 2 : Toute algèbre topologique sur k, dont la topologie est définie par une norme, est bicontinûment isomorphe à une algèbre normée sur k.

Cette dernière proposition justifie la forme apparemment restrictive des axiomes (AN_2) et (AN_3).

2.- Eléments quasi-inversibles.

Prop. 3 : Dans une algèbre normée complète, les x tels que $\|x\| < 1$ sont quasi-inversibles.

et leur quasi-inverse est

$$x' = \sum_1^\infty (-1)^n x^n , \tag{1}$$

la série (1) étant absolument convergente d'après (AN_2).

Corollaire : Dans une algèbre normée complète $\mathcal{A}$ avec unité e, les x tels que $\|e-x\| < 1$ sont inversibles.

Prop. 4 : L'ensemble des éléments quasi-inversibles d'une algèbre normée complète $\mathcal{A}$ est ouvert ; dans cet ensemble, l'application $x \to x'$ est continue.

Tout d'abord, si x et y sont quasi-inversibles, il en est de même de $x + y + xy$, et on a

$$(x + y + xy)' = x' + y' + y'x' .$$

Ceci étant, soit un $x_0 \in \mathcal{A}$ quasi-inversible. D'après la prop. 3, il en sera de même des

$$x = x_0 + y + x_0y \qquad \text{où} \qquad \|y\| < 1 ;$$

mais l'application $y \longrightarrow y + x_0y$ est un endomorphisme continu, et biunivoque (puisque x_0 est quasi-inversible!) de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}$ -

donc est inversible, en sorte que les $y + x_o y + x_o$ avec $\|y\| < 1$ forment un voisinage de x_o : d'où la première partie de la Prop. 4 .

Pour montrer que x' dépend continûment de x , il suffit de le prouver en $x_o = 0$. Or on a, pour $\|x\| < 1$,

$$x' = \sum_1^\infty (-1)^n x^n = x(-1 + x - \ldots)$$

d'où

$$\|x'\| \leqslant \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$$ C.Q.F.D.

Prop. 5 : Soient $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète sur C ; pour chaque $x \in \mathcal{A}$, les $\lambda \in C$ tels que λx soit quasi-inversible forment un sous-ensemble ouvert de C , non vide ; dans cet ouvert, l'application $\lambda \longrightarrow (\lambda x)'$ est régulière.

Le fait que l'ensemble des λ tels que λx soit quasi-inversible soit ouvert résulte immédiatement de la Prop. 4 . Cet ensemble est non vide, car il contient (Prop. 3) les λ avec

$$|\lambda| < \frac{1}{\|x\|} .$$

Soit D cet ouvert ; pour $\lambda \in D$, posons

$$x_\lambda = (\lambda x)'$$

d'où, si λ et $\lambda + h \in D$:

$$\lambda x + x_\lambda + \lambda x . x_\lambda = (\lambda + h)x + x_{\lambda+h} + (\lambda + h) x x_{\lambda+h} = 0 ,$$

équation dont on tire, si $\lambda + h \neq 0$ et $h \neq 0$

$$\frac{1}{h}(x_{\lambda+h} - x_\lambda) + \lambda x - \frac{1}{h}(x_{\lambda+h} - x_\lambda) = \frac{1}{\lambda + h} x_{\lambda+h} .$$

Pour λx donné, l'application

$$Ty = y + \lambda x . y$$

est un endomorphisme continu et inversible de $\mathcal{A}$ (λx est quasi-inversible!), et on a

$$\frac{1}{h}(x_{\lambda+h} - x_\lambda) = T^{-1}\left(\frac{x_{\lambda+h}}{\lambda + h}\right) .$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1) $\lambda \neq 0$. Quand $h \to 0$, $\frac{x_{\lambda+h}}{\lambda+h}$ tend (Prop. 4) vers $\frac{x_\lambda}{\lambda}$, d'où existence de

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (x_{\lambda+h} - x_\lambda) = T^{-1} \left(\frac{x_\lambda}{\lambda} \right)$$

2) $\lambda = 0$ - alors $T = 1$ et, pour $|h|$ assez petit :

$$\frac{1}{h} (x_h - x_0) = \frac{x_h}{h} = \frac{1}{h} \sum_1^\infty (-1)^n h^n x^n ,$$

ce qui montre l'existence de

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (x_h - x_0) .$$

D'où, dans tous les cas, existence de $\frac{dx_\lambda}{d\lambda}$ pour $\lambda \in D$. C.Q.F.D.

§ 3. Corps normés.

Théorème 1 : Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé complet sur C , et T un endomorphisme continu de $\mathcal{E}$; les $\lambda \in C$ tels que $T - \lambda 1$ ne soit pas inversible forment un sous-ensemble compact non vide de C ("spectre de T ").

Soit, en effet, $\mathcal{A}$ l'algèbre normée complète avec unité formée par les endomorphismes continus de $\mathcal{E}$. Si $(T - \lambda 1)^{-1}$ existe pour tout λ , λT est quasi-inversible quel que soit $\lambda \in C$, en sorte que l'application $\lambda \longrightarrow (T - \lambda 1)^{-1}$ de C dans $\mathcal{A}$ est régulière dans C . Quand $\lambda \longrightarrow \infty$, $(T - \lambda 1)^{-1} \longrightarrow 0$ car

$$\| (T - \lambda 1)^{-1} \| = \frac{1}{|\lambda|} \| \left(\frac{T}{\lambda} - 1 \right)^{-1} \| \sim \frac{1}{|\lambda|} .$$

Il résulte alors de Liouville-Gelfand (§ 1) que $(T - \lambda 1)^{-1}$ est indépendant de λ - ce qui est absurde. D'où l'existence du spectre de T .

L'ensemble des $\lambda \in C$ tels que $(T - \lambda 1)^{-1}$ existe est ouvert (Prop. 5) ; le spectre de T est donc fermé ; enfin, il est borné (et donc compact) puisque (Prop. 2) $\frac{T}{\lambda}$ est quasi-inversible pour $|\lambda| > \|T\|$. C.Q.F.D.

Théorème 2 (Gelfand - Mazur) : Si une algèbre normée $\mathcal{A}$ sur C est un corps, elle est isomorphe à C .

En effet, plongeons $\mathcal{A}$ dans une algèbre normée complète $\overline{\mathcal{A}}$, et associons à chaque $x \in \mathcal{A}$ l'endomorphisme continu

$$T_x \, s = x \, s$$

de $\overline{\mathcal{A}}$. D'après le Th.1, il existe un $\lambda \in C$ tel que $(T_x - \lambda 1)^{-1}$ n'existe pas ; ce qui implique $x - \lambda e = 0$ - sinon $x - \lambda e$ serait inversible, et donc aussi $T_x - \lambda 1 = T_{x-\lambda e}$.

Par suite, $\mathcal{A}$ est de dimension 1 sur C , d'où résulte le théorème.

- Si x est un élément d'une algèbre normée $\mathcal{A}$ sur C , possédant un élément unité (mais non nécessairement complète), il résulte du Th. 1 l'existence d'au moins un λ tel que $x - \lambda e$ ne soit pas inversible. Si $\mathcal{A}$ est complète, ces λ forment un sous-ensemble compact de C , appelé spectre de x dans $\mathcal{A}$.

4 - Préliminaire à la détermination du radical faible.

Prop. 6 : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète sur C ; pour tout $x \neq 0$,

$$\lim_{n \infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$$

existe, et R représente le rayon du plus grand cercle de centre 0 dans lequel λx soit quasi-inversible.

Démonstration : Soit R le rayon du plus grand cercle de centre 0 dans lequel $x_\lambda = (\lambda x)'$ existe. Pour $|\lambda| < R$, x_λ est une fonction régulière de λ , donc développable en série entière ; comme on a déjà, pour $|\lambda| < \frac{1}{\|x\|}$, le développement

$$(1) \qquad x_\lambda = \sum_1^\infty (-1)^n \lambda^n x^n \ ,$$

on en conclut que R est le rayon de convergence de (1) - ce qui entraîne immédiatement

$$(2) \qquad \lim_{n \infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{R} \ .$$

Maintenant, considérons le développement analogue pour x^p , à savoir

$$(3) \qquad (\mu x^p)' = \sum_1^\infty (-1)^n \mu^n x^{pn} \ ;$$

son rayon de convergence R_p vérifie surement

$$(4) \qquad R_p \geqslant \frac{1}{\| x^p \|}$$

(puisque (3) converge pour $\| \mu x^p \| < 1$) ; mais la comparaison avec (1) prouve que

$$R_p \geqslant R^p$$

(en faisant $\mu = \lambda^p$ dans (3), on obtient une série extraite de (1) !) et, d'autre part, que

$$R_p \leqslant R^p$$

(car pour $|\lambda| > R$ le terme général de (1) - donc aussi de (3) pour $|\mu| > R^p$ - est arbitrairement grand en norme). Par conséquent, on a $R_p = R^p$ et, d'après (4), il vient

$$\| x^n \|^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{R} \ ,$$

ce qui, conjugué avec (2), achève de démontrer la Prop. 6 .

Corollaire 1 de la Prop. 6 : Soit T un endomorphisme continu d'un espace de Banach complexe. Le plus petit cercle de centre λ_0 contenant le spectre de T a pour rayon

$$\lim_{n \infty} \| (T - \lambda_0 1)^n \|^{\frac{1}{n}} \ .$$

En particulier, pour que le spectre de T soit réduit à $\{0\}$, il faut et il suffit que

$$\lim_{n \infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} = 0 \ .$$

Corollaire 2 de la Prop. 6 : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée sur $\mathbb{C}$; pour que λx soit quasi-inversible quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, il faut que

$$\lim_{n \infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} = 0 \ ;$$

cette condition est aussi suffisante si $\mathcal{A}$ est complète.

Remarque : Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée non nécessairement complète, pour chaque $x \in \mathcal{A}$ existe

$$\lim_{n\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} \quad ;$$

il suffit pour le voir de plonger $\mathcal{A}$ dans l'algèbre complétée $\overline{\mathcal{A}}$.

5 - Radical faible d'une algèbre normée.

Théorème 3 : Dans une algèbre normée complète $\mathcal{A}$ sur C ou R, tout idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) maximal régulier est fermé.

Soient en effet $\mathcal{U}$ un idéal à gauche maximal régulier de $\mathcal{A}$, et u une unité à droite mod $\mathcal{U}$. Si $x \in \mathcal{U}$, u-x n'est pas quasi-inversible, ce qui implique (Prop. 3)

$$\| u-x \| \geqslant 1 \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{U} .$$

Donc $\overline{\mathcal{U}}$ est distinct de $\mathcal{A}$; comme c'est aussi un idéal à gauche, contenant $\mathcal{U}$, on a $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}$. C.Q.F.D.

Corollaire 1 du Th. 3 : Tout idéal bilatère primitif d'une algèbre normée complète est fermé.

Corollaire 2 du Th. 3 : Le radical faible d'une algèbre normée complète est un idéal bilatère fermé.

Théorème 4 : Soit une algèbre normée sur C ; pour qu'un $x \in \mathcal{A}$ soit dans le radical faible de $\mathcal{A}$, il faut que l'on ait

(1) $\lim_{n\infty} \| (sx + \lambda x)^n \| = 0$ quels que soient $s \in \mathcal{A}$, $\lambda \in C$;

cette condition est de plus suffisante si $\mathcal{A}$ est complète.

1) Nécessité de la condition. Si x est dans le radical, et si $y = sx + \lambda x$, alors μy est quasi inversible pour tout $\mu \in C$ (Ch. I, Th. 5), en sorte que (Corell. 2 de la Prop. 6)

$$\lim_{n\infty} \| (sx + \lambda x)^n \|^{\frac{1}{n}} = 0 ,$$

ce qui entraîne à fortiori

$$\lim_{n\infty} | (sx + \lambda x)^n | = 0 .$$

2) Suffisance de la condition. Posons $y = sx + \lambda x$; alors, pour tout $\mu \in C$, y est de la même forme, et on a donc

$$\lim_{n\infty} \| \mu^n y^n \| = 0$$

d'où immédiatement

$$\lim_{n\infty} \| y^n \|^{\frac{1}{n}} = 0 ;$$

y est donc quasi-inversible (Coroll.2 de la Prop.6), et x appartient au radical faible de $\mathcal{A}$ (Ch.I, Th.5). C.Q.F.D.

Corollaire 1 du Th. 4 : Le radical d'une algèbre normée commutative complète sur C est l'ensemble des x tels que

$$\lim_{n\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} = 0 . \qquad (2) \qquad \text{(Gelfand)}$$

En effet, si cette dernière condition est réalisée, on aura (d'après la commutativité)

$$\| (sx + \lambda x)^n \| = \| s^n x^n + \binom{n}{1} s^{n-1} \lambda x^n + \ldots + \lambda^n x^n \| \leqslant \| x^n \| (\| s \| + |\lambda|)^n ,$$

et comme (2) entraîne

$$\lim_{n\infty} |\mu|^n \| x^n \| = 0$$

pour tout $\mu \in C$, on en conclut que (2) implique (1) (et, bien entendu, réciproquement).

Coroll.2 du Th.4 : Le radical d'une algèbre normée complète et commutative $\mathcal{A}$, possédant un élément unité, est l'ensemble des $x \in \mathcal{A}$ dont le spectre dans $\mathcal{A}$ est réduit à $\{0\}$.

Coroll. 3 du Th. 4 : Toute algèbre normée $\mathcal{A}$ sur C, dans laquelle

$$\| x^2 \| = \| x \|^2 \qquad \text{quel que soit } x \in \mathcal{A} ,$$

est faiblement semi-simple.

En effet

$$\lim \| x^n \|^{\frac{1}{n}} = \lim \| x^{2^n} \|^{2 \cdot \frac{1}{n}} = \| x \| .$$

6 - Représentations linéaires algébriquement irréductibles.

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète, et $\mathcal{M}$ un idéal à gauche fermé dans $\mathcal{A}$. Si $x \to \dot{x}$ est l'application canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}/\mathcal{M}$,

on peut munir ce dernier espace d'une structure d'espace de Banach (= normé complet) en posant

$$\| \dot{x} \| = \inf_{\dot{y}=\dot{x}} \| y \| .$$

Si alors $s \to T_s$ est la représentation linéaire canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, on aura

$$\| T_s \dot{x} \| = \| \dot{sx} \| \leqslant \| sx \| \leqslant \| s \| \cdot \| x \|$$

et, en prenant la borne inférieure du dernier membre :

$$\| T_s \dot{x} \| \leqslant \| s \| \cdot \| \dot{x} \| .$$

Les T_s sont donc des endomorphismes continus de $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, et on est amené à poser la

Définition 3 : $\mathcal{A}$ étant une algèbre normée sur R (resp. C), on appelle représentation linéaire bornée de $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{ \mathcal{E}, T_x \}$ d'un espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ sur R (resp. C) et d'un homomorphisme $x \to T_x$ de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre normée des endomorphismes continus de $\mathcal{E}$, vérifiant

$$\| T_x \| \leqslant \| x \| \cdot \text{ pour tout } x \in \mathcal{A} .$$

En combinant le Th. 3 du présent § avec le Th. 1 du Chap.I, on obtient le

Théorème 5 : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète ; toute représentation linéaire algébriquement irréductible de $\mathcal{A}$ est algébriquement équivalente à une représentation linéaire bornée (algébriquement irréductible) de $\mathcal{A}$ dans un espace de Banach.

On va montrer que ces représentations possèdent une propriété algébrique remarquable. Pour cela, soient $\mathcal{E}$ un espace de Banach sur C, et $\mathcal{A}$ une algèbre algébriquement irréductible d'endomorphismes continus de $\mathcal{E}$; je dis que le centralisateur $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$ se réduit aux $\lambda 1$ ( ) $\lambda \in C$) .

En effet, $\mathcal{A}'$ est un corps (lemme de Schur). Pour un $X_0 \neq 0$ de $\mathcal{E}$, considérons le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}_0 = \mathcal{A}' X_0$; pour tout $X \in \mathcal{E}_0$ il existe ($\mathcal{A}$ étant algèbriquement irréductible) un $S \in \mathcal{A}$ avec $X = SX_0$; un tel S conserve $\mathcal{E}_0$, car pour $U \in \mathcal{A}'$ on a

$$SUX_0 = USX_0 = UX = UVX_0 \in \mathcal{E}_0$$

où $V \in \mathcal{A}'$ est tel que $X = VX_0$.

Ceci étant, considérons les restrictions à $\mathcal{E}_0$ des $S \in \mathcal{A}$ qui conservent $\mathcal{E}_0$ (c'est-à-dire tels que $SX_0 \in \mathcal{E}_0$) ; ces restrictions forment une algèbre $\mathcal{A}_0$ d'endomorphismes de $\mathcal{E}_0$; $\mathcal{E}_0$ étant de dimension 1 sur le corps $\mathcal{A}'$, et les SX_0 ($S \in \mathcal{A}_0$) constituant tout $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{A}_0$ est un <u>corps</u>.

Mais de $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ résulte que l'on peut munir $\mathcal{E}_0$ d'une structure d'espace vectoriel <u>normé</u> sur C ; et $\mathcal{A}_0$ sera alors, les $S \in \mathcal{A}$ ~~d'espace vectoriel normé sur C~~ étant continus, une algèbre <u>normée</u> sur C (la norme d'un $S \in \mathcal{A}_0$ étant sa norme naturelle en tant qu'opérateur continu dans $\mathcal{E}_0$). Par conséquent, $\mathcal{A}_0$ est (Gelfand-Mazur) isomorphe à C, ce qui prouve que $\mathcal{E}_0$ est de dimension 1, non seulement sur $\mathcal{A}'$, mais aussi sur C.

Comme X_0 est arbitraire, on en conclut que $\mathcal{A}'$ se réduit aux $\lambda 1$. On a donc prouvé la

<u>Prop. 7</u> : <u>Toute algèbre algèbriquement irréductible d'endomorphismes continus d'un espace de Banach complexe</u> $\mathcal{E}$ <u>est algèbriquement dense dans</u> $\mathcal{E}$.

d'où résultent les deux suivantes :

<u>Coroll. 1 de la Prop.7</u> : <u>Pour qu'une algèbre normée complète</u> $\mathcal{A}$ <u>sur C soit primitive (à gauche ou à droite) il faut que son centre soit réduit à</u> $\{0\}$ <u>(ou aux</u> λe <u>si</u> $\mathcal{A}$ <u>possède un élément unité)</u>.

Coroll. 2 de la Prop. 7 : Soient $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète sur C , $\mathcal{Z}$ le centre de $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$ un idéal bilatère primitif de $\mathcal{A}$; alors $\mathcal{M} \cap \mathcal{Z}$ est un idéal maximal régulier de $\mathcal{Z}$ - ou bien $\mathcal{M} \supset \mathcal{Z}$.

En effet, il existe une représentation linéaire bornée algèbriquement irréductible $\{\mathcal{E}, T_x\}$ de $\mathcal{A}$ dans un Banach $\mathcal{E}$ telle que

$$x \in \mathcal{M} \quad \text{équivaut à} \quad T_x = 0 .$$

Pour $x \in \mathcal{Z}$, T_x permute à tous les T_s , donc (Prop.7) est de la forme

$$T_x = \lambda(x)\, 1 \ ;$$

$x \longrightarrow \lambda(x)$ est un homomorphisme de $\mathcal{Z}$ dans C , et même sur C si $\mathcal{M}$ ne contient pas $\mathcal{Z}$ - d'où immédiatement le résultat cherché.

7 - Représentations linéaires de $\mathcal{A}$ dans l'espace dual.

Soit $\mathcal{A}'$ l'espace de Banach dual de $\mathcal{A}$ (on supposera que $\mathcal{A}$ est une algèbre normée complète sur C , et on désignera par (x,x') le produit scalaire d'un $x \in \mathcal{A}$ et d'un $x' \in \mathcal{A}$). On peut définir dans $\mathcal{A}'$ deux représentations linéaires canoniques de $\mathcal{A}$, à savoir :

1) $x \longrightarrow T^d_x$ définie par

$$(y,\ T^d_x z') \equiv (xy,\ z')$$

2) $x \longrightarrow T^s_x$ définie par

$$(y,\ T^s_x z') \equiv (yx\ ,\ z') \ ;$$

il est clair que

$$T^d_{x_1 x_2} = T^d_{x_2} \circ T^d_{x_1} \ ; \quad T^s_{x_1 x_2} = T^s_{x_1} \circ T^s_{x_2}$$

en sorte que $\{\mathcal{A}', T^s_x\}$ est une représentation linéaire gauche, et $\{\mathcal{A}', T^d_x\}$ une représentation linéaire droite de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$.

Evidemment, ces représentations sont bornées, et même continues pour la topologie faible de $\mathcal{A}'$ (les T_x^d et T_x^g sont les transposés d'endomorphismes continus de $\mathcal{A}$).

Si $\mathfrak{r}$ est un idéal à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{A}$, le sous-espace (faiblement fermé) $\mathfrak{r}^\perp$ de $\mathcal{A}'$ orthogonal à $\mathfrak{r}$ est invariant par les opérateurs T_x^d (resp. T_x^g) ; on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les idéaux fermés et les sous-espaces invariants faiblement fermés. Il est clair que, pour qu'un idéal à gauche fermé $\mathfrak{r} \neq \mathcal{A}$ soit maximal, il faut et il suffit que $\mathfrak{r}^\perp$ soit un élément minimal dans l'ensemble des sous-espaces faiblement fermés invariants par les T_x^d .

Les notions qu'on vient d'introduire permettent de donner un critère simple pour un $x \in \mathcal{A}$ soit quasi-inversible à gauche - c'est-à-dire pour qu'il existe un $y \in \mathcal{A}$ tel que

$$x + y + yx = 0 .$$

En effet, les $zx + z$ ($z \in \mathcal{A}$) doivent constituer tout $\mathcal{A}$. Si la condition n'est pas remplie, ils forment un idéal à gauche $\mathfrak{r}$ régulier, donc non partout dense ; d'après Hahn-Banach, il existe donc un $x' \in \mathcal{A}'$ vérifiant

$$x' \neq 0 , \quad (zx + z , x') = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathcal{A}$$

ce qui s'écrit

$$(z , T_x^g x') + (z, x') = 0$$

ou encore

$$T_x^g x' = -x' \quad ;$$

d'où le

Prop. 8 : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète ; pour qu'un $x_0 \in \mathcal{A}$ ne soit pas quasi-inversible à gauche (resp. à droite), il faut et il suffit qu'il existe une représentation linéaire gauche (resp. droite) bornée $\{\mathcal{E}, T_x\}$ de $\mathcal{A}$ dans un espace de Banach $\mathcal{E}$, et un élément non nul $X_0 \in \mathcal{E}$, tels que l'on ait

$$T_{x_0} X_0 = -X_0 .$$

- On verra au § 4 (N° 2), les principales applications des notions exposées dans le présent N° .

Bibliographie

I. Gelfand - Normierte Ringe (Math. Sb., 9, 1941, pp. 1-24)
(concerne les algèbres commutatives avec unité).

N. Jacobson - The radical and semi-simplicity for arbitrary rings (Am. Journal, of Math., 67, 1945, pp. 289 - 320) (Théorème 4)

I.E. Segal - The group algebra of a locally compact group (Transactions, 61, 1947, pp. 69 - 105) (Théorème 3).

Appendice : Quelques généralisations du Théorème de Gelfand-Mazur

Pour les résultats exposés ici, cf. R. Arens, Linear topological division algebras (Bull. Am. Math. Soc., 53, juin 1947, pp. 623-30).

Prop.: Soit $\mathcal{A}$ une algèbre topologique localement convexe sur C ; supposons que :

1) $\mathcal{A}$ soit un corps

2) x^{-1} soit fonction continue de x pour $x \neq 0$.

Alors $\mathcal{A}$ est isomorphe à C .

Démonstration. Supposons qu'on puisse trouver un x_0 qui ne soit pas un multiple scalaire de e ; $(x_0 - \lambda e)^{-1}$ existe donc pour tout $\lambda \in C$, et d'après l'hypothèse 2) dépend continûment de λ .

$\mathcal{A}$ étant localement convexe, il existe d'après Hahn-Banach une fonctionnelle linéaire continue f sur $\mathcal{A}$ telle que $f(x_0^{-1}) \neq 0$.

La fonction numérique

$$\varphi(\lambda) = f\left[(x_0 - \lambda e)^{-1}\right]$$

est définie et continue pour tout $\lambda \in C$, et tend vers zéro quand $\lambda \longrightarrow \infty$ (hypothèse 2!). D'autre part, on voit sans difficulté que

$$\frac{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)}{\mu - \lambda} = f\left[(x_0 - \mu e)^{-1}(x_0 - \lambda e)^{-1}\right]$$

d'où (hypothèse 2) résulte que φ est une fonction entière : d'après Liouville, $\varphi \equiv 0$ contrairement à $\varphi(0) = f(x_0^{-1}) \neq 0$. C.Q.F.D.

Théorème : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre topologique localement convexe sur R ; supposons que

1) $\mathcal{A}$ soit un corps

2) x^{-1} soit fonction continue de x pour $x \neq 0$.

Alors $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'un des trois corps suivants : R ; C ; le corps des quaternions.

Démonstration

Cas où $\mathcal{A}$ est commutative

1è Cas : le polynome X^2+e a une racine u dans $\mathcal{A}$.

En posant

$$(\alpha + i\beta)x = \alpha x + \beta ux ,$$

on introduit sur $\mathcal{A}$ une structure d'algèbre sur C ; il est clair que l'application $(\alpha+i\beta, x) \longrightarrow (\alpha+i\beta)x$ de $C \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ est continue : on a donc une structure d'algèbre topologique sur C ; enfin, est évidemment localement convexe en tout qu'espace topologique sur C . Par conséquent, $\mathcal{A} = C$.

2è Cas : le polynome X^2+e n'a pas de racine dans $\mathcal{A}$.

Dans ce cas, on considère l'algèbre $\mathcal{B}$ sur C obtenu en adjoignant à $\mathcal{A}$ une racine de X^2+e ; si on introduit dans $\mathcal{B}$ la topologie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, on obtient évidemment une algèbre vérifiant les hypothèses de la Prop. 1 . Donc $\mathcal{B} = C$ et $\mathcal{A} = R$.

Cas où $\mathcal{A}$ n'est pas commutative.

Le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{A}$ est d'après ce qui précède isomorphe à C ou à R . Pour $x \notin \mathcal{Z}$ soit $\mathcal{A}(x)$ l'ensemble des

$$y = P(x).\left[Q(x)\right]^{-1}$$

où $P, Q \in R[X]$, $Q(x) \neq 0$; ces y constituent évidemment une algèbre topologique etc... - bref $\mathcal{A}(x) = R$ ou C , ce qui montre que x est algèbrique sur R et de degré $\leqslant 2$

Par conséquent, $\mathcal{A}$ est une extension algèbrique de R de degré $\leqslant 2$, propriété qui caractérise les quaternions. C.Q.F.D.

Corollaire : Si une algèbre normée sur R est un corps, elle est isomorphe soit à R , soit à C , soit aux quaternions.

Il suffit pour le voir de vérifier que $x \longrightarrow x^{-1}$ est continue. Or posons

$$(x+h)^{-1} = x^{-1} + k ,$$

d'où facilement

$$k = -khx^{-1} - x^{-1}hx^{-1}$$

et par suite

$$\| k \| \leqslant \| k \| . \| h \| . \| x^{-1} \| + \| x^{-1} \|^2 \| h \| ;$$

pour $\| h \| < \frac{1}{\| x^{-1} \|}$ on aura donc

$$\| k \| \leqslant \| x^{-1} \|^2 \frac{\| h \|}{1 - \| x^{-1} \| . \| h \|}$$

ce qui prouve la continuité.

L'intérêt de cette démonstration est naturellement qu'elle ne suppose pas que $\mathcal{A}$ soit complète.

Remarque : Les quaternions constituent :

1) une algèbre normée sur R

2) une algèbre sur C

mais non une algèbre normée sur C (car $\| \lambda x \| = | \lambda | . \| x \|$ n'est pas vrai) .

Exemple d'algèbre topologique localement convexe où $x \to x^{-1}$ n'est pas continue.

Soit Ω un ouvert du plan complexe, et $H(\Omega)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur Ω , avec la topologie de la convergence compacte. Alors $H(\Omega)$ est : 1) localement convexe 2) métrisable (mais non normable) 3) complète 4) semi-simple - et cependant les éléments inversibles de $H(\Omega)$ constituent un sous-ensemble fermé de $H(\Omega)$.

CH. II - § 3 - Algèbres normées commutatives.

N-B.- La Bibliographie des § § 3 et 4 se trouve à la fin du § 4 .

1 - Idéaux maximaux réguliers.

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre normée commutative complète sur C , et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal régulier de $\mathcal{A}$; l'algèbre normée $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ est alors un corps et est donc (§ 2, Th.2) isomorphe à C - cet isomorphisme étant non seulement algébrique mais bicontinu (et même à peu de choses près isométrique). Il en résulte l'existence d'une forme linéaire continue $f(x)$ sur $\mathcal{A}$ telle que

$$f(xy) = f(x)\, f(y) \ ;$$

$x \in \mathfrak{m}$ équivaut à $f(x) = 0$.

Réciproquement, soit $x \longrightarrow f(x)$ un homomorphisme algébrique de $\mathcal{A}$ sur C ; alors l'équation $f(x)=0$ définit visiblement un idéal maximal et régulier de $\mathfrak{m}$ pour lequel f correspond à l'isomorphisme défini ci-dessus de $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ sur C ; il en résulte que f est automatiquement un homomorphisme continu de $\mathcal{A}$ sur C .

Introduisons alors la

Définition 1 : On appelle caractère d'une algèbre $\mathcal{A}$ commutative sur un corps k un homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans k .

Il en résulte le

Théorème 1 : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète commutative sur C ; tout caractère de $\mathcal{A}$ est continu ; il existe une correspondance biunivoque entre les caractères non nuls de $\mathcal{A}$ et les idéaux maximaux réguliers de $\mathcal{A}$ - l'idéal associé à un caractère f étant défini par l'équation $f(x) = 0$.

Remarque : Tout idéal maximal d'une algèbre normée complète commutative est régulier (et donc fermé).

2 - L'espace des caractères.

D'après le Th.1, tout caractère de $\mathcal{A}$ peut être identifié à un point de l'espace de Banach $\mathcal{A}'$, dual de $\mathcal{A}$. L'ensemble de ces caractères sera noté $\hat{\mathcal{A}}_\infty$, et muni de la topologie faible de $\mathcal{A}'$; la notation $\hat{\mathcal{A}}$ désignera l'espace obtenu en otant de $\hat{\mathcal{A}}_\infty$ le caractère nul. On désignera les élénents de $\hat{\mathcal{A}}_\infty$ par $\hat{x}$, $\hat{y}$ .... et par $(x, \hat{x})$ la valeur en $x \in \mathcal{A}$ du caractère $\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}_\infty$; on a donc

$$(1) \qquad (xy, \hat{x}) = (x, \hat{x})\,(y, \hat{x})$$

et ceci caractérise les $\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}_\infty$: il en résulte que $\hat{\mathcal{A}}_\infty$ est fermé pour la topologie faible de $\mathcal{A}'$.

Soit $\mathcal{M}(\hat{x})$ l'idéal maximal défini par un $\hat{x} \neq 0$. Pour qu'un $u \in \mathcal{A}$ soit une unité mod $\mathcal{M}(\hat{x})$, il faut et il suffit que

$$(u, \hat{x}) = 1 .$$

Prop. 1 : Pour qu'un $x \in \mathcal{A}$ soit quasi-inversible, il faut et il suffit que

$$1 + (x, \hat{x}) \neq 0 \qquad \text{pour tout} \quad \hat{x} \in \hat{\mathcal{A}} ;$$

le quasi-inverse x' de x vérifie alors

$$1 + (x', \hat{x}) = \frac{1}{1 + (x, \hat{x})} .$$

Prop. 2 : Si $\hat{x}$, $\hat{y}$ sont deux éléments distincts de $\hat{\mathcal{A}}$, il existe un $x \in \mathcal{A}$ vérifiant

$$(x, \hat{x}) \neq (x, \hat{y}) \neq 0 .$$

Prop. 3 : Le radical de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des x tels que

$$(x, \hat{x}) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \hat{x} \in \hat{\mathcal{A}} .$$

Prop. 4 : Pour tout $x \in \mathcal{A}$ on a

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} = \sup_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}} |(x, \hat{x})|$$

En effet, pour que λx soit quasi-inversible, il faut et il suffit (Prop. 1) que

$$(x, \hat{x}) \neq -\frac{1}{\lambda} \qquad \text{pour tout} \quad \hat{x} \ ;$$

donc le rayon du plus grand cercle de centre 0 dans lequel λx est quasi-inversible est R où

$$\frac{1}{R} = \operatorname{Sup}_{\hat{x}} |(x, \hat{x})| \qquad (\leqslant +\infty) ;$$

mais c'est aussi le premier membre de (2) d'après le § 2, Prop. 6 .

Théorème 2. $\hat{\mathcal{A}}$ est un espace localement compact ; pour chaque $x \in \mathcal{A}$, $(x,\hat{x})$ est une fonction continue et qui tend vers zéro à l'infini sur $\hat{\mathcal{A}}$.

En effet, il résulte de la Prop. (4.) que

$$|(x, \hat{x})| \leqslant \|x\| \quad \text{quels que soient } x \in \mathcal{A} , \hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}_\infty ;$$

$\hat{\mathcal{A}}_\infty$ est donc contenu dans la boule unité de $\mathcal{A}'$ et, étant faiblement fermé, est compact. $\hat{\mathcal{A}}$ est par suite localement compact, l'élément 0 de $\hat{\mathcal{A}}_\infty$ jouant vis à vis de $\hat{\mathcal{A}}$ le rôle du point à l'infini d'Alexandroff. C.Q.F.D.

Remarque : Si $\mathcal{A}$ possède un élément unité e , on a

$$(e , \hat{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{x} = 0 \\ 1 & \text{si } \hat{x} \neq 0 \end{cases}$$

donc 0 est isolé dans $\hat{\mathcal{A}}_\infty$, et $\hat{\mathcal{A}}$ est lui-même compact.

La réciproque n'est pas évidente.

3 - Structure des algèbres semi-simples.

Théorème 3 : Pour qu'une algèbre normée complète et commutative sur C soit semi-simple, il faut et il suffit qu'elle soit isomorphe algébriquement à une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact.

Propriété évidente si l'on associe à chaque $x \in \mathcal{A}$ la fonction

$$f_x(\hat{x}) = (x, \hat{x})$$

définie et continue sur l'espace compact $\hat{\mathcal{A}}_\infty$.

On notera que, si l'on munit $C(\hat{\mathcal{A}}_\infty)$ de la norme de la convergence uniforme

$$\| f \| = \sup_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}_\infty} |f(\hat{x})| ,$$

l'homomorphisme $x \longrightarrow f_x$ est continu puisque (Prop.4)

$$\| f_x \| = \lim \| x^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \| x \| .$$

Pour que l'on ait une application isométrique, il faut que $\mathcal{A}$ vérifie

$$\| x^2 \| = \| x \|^2$$

-puisque cette condition est visiblement vérifiée par $C(\hat{\mathcal{A}}_\infty)$; réciproquement, si $\mathcal{A}$ la vérifie, on en déduit (§ 2, Coroll.3 du Th.4)

$$\| f_x \| = \lim \| x^n \|^{\frac{1}{n}} = \| x \| ,$$

d'où la

Prop. 5 : Pour qu'une algèbre normée commutative $\mathcal{A}$ sur C soit métriquement isomorphe à une sous-algèbre de $C(K)$, où K est un espace compact convenable, il faut et il suffit que l'on ait

(AN_4) $\quad \| x^2 \| = \| x \|^2$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

Remarque. Il n'est pas nécessaire de supposer $\mathcal{A}$ complète, la condition (AN_4) étant d'elle-même vérifiée par le complété de $\mathcal{A}$ dès qu'elle l'est par $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est complète, on peut la réaliser comme sous-algèbre fermée de $C(K)$.

- Les algèbres vérifiant (AN_4) donnent lieu à une propriété remarquable:

Prop. 6 : Tout homomorphisme algébrique d'une algèbre normée complète commutative $\mathcal{A}$ sur C , dans une algèbre normée complète commutative $\mathcal{B}$ sur C vérifiant (AN_4), est continu ; tout isomorphisme algébrique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ est bicontinu, et même isométrique si $\mathcal{A}$ vérifie aussi (AN_4) .

Posons en effet

$$|||\, x \,||| = \lim \| x^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \| x \| ;$$

$|||\, x \,|||$ est, d'après la Prop.4, une semi-norme sur $\mathcal{A}$ (et même une norme si $\mathcal{A}$ est semi-simple ; mais $\mathcal{A}$ n'est plus, en général,

complète pour la topologie correspondante). Dans $\mathcal{B}$, cette norme est identique à la norme donnée.

Soit alors φ un homomorphisme algébrique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$; à tout caractère $\hat{y}$ de $\mathcal{B}$ on pourra associer un caractère $\hat{x}$ de $\mathcal{A}$, défini par la formule

$$(x, \hat{x}) = (\varphi(x), \hat{y}) \quad ;$$

il est clair que $\hat{y} \longrightarrow \hat{x}$ est une application (continue) de $\hat{\mathcal{B}}_\infty$ dans $\hat{\mathcal{A}}_\infty$, et on aura

$$\| \varphi(x) \| = \sup_{\hat{y}} \left| (\varphi(x), \hat{y}) \right| \leqslant \sup_{\hat{x}} \left| (x, \hat{x}) \right| = |\!|\!| x |\!|\!| \leqslant \| x \|$$

ce qui prouve la continuité de φ .

Si φ applique <u>biunivoquement</u> l'espace <u>complet</u> $\mathcal{A}$ <u>sur</u> l'espace <u>complet</u> $\mathcal{B}$, on peut donc affirmer en outre que φ est bicontinue.

Enfin, si $\mathcal{A}$ vérifie aussi (AN_4), et si φ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$. l'application $\hat{y} \longrightarrow \hat{x}$ définie plus haut est un homéomorphisme de $\hat{\mathcal{B}}_\infty$ <u>sur</u> $\hat{\mathcal{A}}_\infty$, en sorte qu'alors

$$\| \varphi(x) \| = \sup_{\hat{y}} \left| (\varphi(x), \hat{y}) \right| = \sup_{\hat{x}} \left| (x, \hat{x}) \right| = \| x \| \ .$$

C.Q.F.D.

Remarque : Il est clair que ces résultats proviennent de ce que la norme $|\!|\!| x |\!|\!|$ <u>peut être définie de façon purement algébrique</u> au moyen du § 2,).

Un résultat beaucoup plus profond que les précédents est (Gelfand, [1]) la

<u>Prop.</u> 6' - <u>Soient</u> $\mathcal{A}$ <u>et</u> $\mathcal{A}'$ <u>deux algèbres normées sur</u> $\mathbb{C}$, <u>complètes, commutatives et semi-simples</u> ; <u>tout isomorphisme algébrique de</u> $\mathcal{A}$ <u>sur</u> $\mathcal{A}'$ <u>est bicontinu.</u>

Soit en effet φ un tel isomorphisme ; considérons l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}$ défini de la manière suivante :

a) un élément de $\mathcal{B}$ est un couple $\left[x, \varphi(x)\right]$; les opérations dans $\mathcal{B}$ sont définies par

$$\left[x, \varphi(x)\right] + \left[y, \varphi(y)\right] = \left[x+y\ ,\ \varphi(x+y)\right] ;$$
$$\lambda \left[x, \varphi(x)\right] = \left[\lambda x,\ \lambda\varphi(x)\right] ;$$

b) la norme d'un élément de $\mathcal{B}$ est

$$\left\| \left[x, \varphi(x)\right] \right\| = \| x \| + \| \varphi(x) \| .$$

Il est clair que ces règles définissent bien un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$; je dis qu'il est <u>complet</u>. En effet soit $\left[x_n, \varphi(x_n)\right]$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}$; alors les x_n forment évidemment une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}$, de même que les $\varphi(x_n)$ en forment une dans $\mathcal{A}'$; donc il existe des éléments $x \in \mathcal{A}$ et $x' \in \mathcal{A}'$ tels que

$$\lim \| x_n - x \| = 0 \ ; \quad \lim \| \varphi(x_n) - x' \| = 0 \ ;$$

ce qui implique

$$(3) \qquad (x, \hat{x}) = \lim (x_n, \hat{x}) \quad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}$$

$$(4) \qquad (x', \hat{x}') = \lim (\varphi(x_n), \hat{x}') \quad \text{pour tout } \hat{x}' \in \hat{\mathcal{A}}' \ ;$$

mais l'isomorphisme φ se traduit par un isomorphisme θ des espaces topologiques $\hat{\mathcal{A}}$ et $\hat{\mathcal{A}}'$, défini par l'équation

$$(5) \qquad (x, \theta(\hat{x}')) = (\varphi(x), \hat{x}') \ ;$$

de (3), (4) et (5) résulte que

$$(x, \theta(\hat{x}')) = (x', \hat{x}') \quad \text{pour tout } \hat{x}' \in \hat{\mathcal{A}}' \ ;$$

d'où comme $\mathcal{A}$ est semi-simple,

$$x' = \varphi(x) \ ;$$

on voit alors immédiatement que, dans $\mathcal{B}$, le point $\left[x_n, \varphi(x_n)\right]$ converge vers $\left[x, \varphi(x)\right]$: $\mathcal{B}$ est donc bien complet.

Dans ces conditions, l'application $\left[x, \varphi(x)\right] \longrightarrow x$ de $\mathcal{B}$ <u>sur</u> $\mathcal{A}$ est : linéaire, continue et biunivoque. Comme il s'agit d'espaces complets, elle est donc bicontinue ; il en est de même de l'application

$[x, \varphi(x)] \to \varphi(x)$ de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}'$; par conséquent, l'application $x \to \varphi(x)$ de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$ est elle-même bicontinue, ce qui achève la démonstration.

Problème (mis au concours) : la Prop. 6' s'étend-elle au cas non commutatif ? (On peut voir qu'il en est bien ainsi pour des algèbres dont toutes les représentations linéaires irréductibles sont de dimension finie).

4 - Fonctions analytiques d'un élément. (Gelfand [1] ; Dunford [1] ; Lorch [1] , [2]).

Théorème 4 : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète commutative sur C , possédant un élément unité ; pour un $x \in \mathcal{A}$, soit $\sigma(x)$ le sous-ensemble compact de C formé des nombres $(x,\hat{x})$ $(\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}})$ - "spectre de x dans $\mathcal{A}$ " ; alors, pour toute fonction numérique $\varphi(\zeta)$ définie et régulière dans un domaine contenant $\sigma(x)$, il existe un élément $y \in \mathcal{A}$ - et un seul si $\mathcal{A}$ est semi-simple - tel que l'on ait

$$(y, \hat{x}) = \varphi[(x, \hat{x})] \quad \text{pour tout} \quad \hat{x} \in \hat{\mathcal{A}} .$$

Soit en effet Γ un contour d'intégration, fermé et suffisamment régulier (!), tel que :

1) Γ soit intérieur au domaine de définition de φ

2) $\sigma(x)$ soit intérieur à Γ .

Pour tout $\zeta \in \Gamma$ existe $(x - \zeta e)^{-1}$, et l'application $\zeta \to (x - \zeta e)^{-1}$ est régulière dans un voisinage de Γ (§ 2, prop. 5).

On peut donc former

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} (\zeta e - x)^{-1} \varphi(\zeta)\, d\zeta ,$$

d'où immédiatement, par Cauchy,

$$(y,\hat{x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - (x,\hat{x})}\, d\zeta = \varphi\left[(x,\hat{x})\right]$$

pour tout $\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}$.

L'unicité de y si $\mathcal{A}$ est semi-simple est évidente. C.Q.F.D.

- Pour $x \in \mathcal{A}$, désignons par $\mathcal{H}(x)$ la classe des fonctions $\varphi(\zeta)$ qui sont définies et holomorphes dans un voisinage connexe du spectre de x . Il est clair que $\mathcal{H}(x)$ peut être munie d'une structure d'algèbre sur C . A toute $\varphi \in \mathcal{H}(x)$ on peut associer un élément de $\mathcal{A}$ défini par

$$(1) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} (\zeta e - x)^{-1}\, \varphi(\zeta)\, d\zeta \ ,$$

où Γ^+ est un contour fermé contenant $\sigma(x)$ et contenu dans le domaine d'holomorphie de φ . Il est clair que l'élément défini par (1) ne dépend pas du contour Γ^+ adopté, puisque c'est l'intégrale porte sur une fonction (à valeurs dans $\mathcal{A}$) holomorphe à l'extérieur de $\sigma(x)$.

Prop. 7 : L'application $\varphi \to \varphi(x)$ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{H}(x)$ dans l'algèbre $\mathcal{A}$.

La linéarité de l'application étant évidente, il suffit de prouver que

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(x)\,\psi(x) \ .$$

Pour le voir, on va d'abord montrer que

$$(2) \qquad x^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} (\zeta e - x)^{-1}\, \zeta^n\, d\zeta$$

- ce qui, par dessus le marché, justifiera la notation $\varphi(x)$.

La fonction ζ^n est entière ; on peut donc prendre pour Γ un cercle suffisamment grand - par exemple la circonférence $|\zeta| = R$ où $R > \|x\|$; on a alors

$$(3) \qquad (\zeta e - x)^{-1} = \frac{1}{\zeta}\left(e - \frac{x}{\zeta}\right)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{\zeta^{p+1}} \ ,$$

et la série du second membre converge absolument et uniformément au voisinage de Γ puisque

$$\left\| \frac{x}{\zeta} \right\| = \frac{\|x\|}{R} < 1 .$$

En portant (3) dans le second membre de (2), on parvient alors au résultat par des calculs que tout membre (même fondateur) de Bourbaki doit être en mesure de reconstituer, et que par conséquent nous ne reproduirons pas ici.

Ceci étant, pour tout polynome P on aura

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} (\zeta e - x)^{-1} P(\zeta) d\zeta$$

où cette fois P(x) est défini, non plus par l'intégrale (1), mais comme polynome en x dans $\mathfrak{A}$. Il en résulte que la propriété à démontrer est vraie si φ et ψ sont des polynomes.

Mais toute $\varphi \in \mathcal{H}(x)$, définie dans un domaine $G \supset \sigma(x)$, est limite, uniforme sur tout compact contenu dans G , d'une suite de polynomes P_n - d'où résulte immédiatement que $\varphi(x)$ est limite, pour la norme de $\mathfrak{A}$, des $P_n(x)$. On en conclut la propriété annoncée. C.Q.F.D.

Remarque 1 - $\varphi(x)$ <u>appartient toujours à la plus petite sous-algèbre fermée de</u> $\mathfrak{A}$ <u>contenant</u> x <u>et</u> e . Mais ne pas oublier l'hypothèse : φ est holomorphe dans un voisinage <u>connexe</u> du spectre de x ; par exemple, la propriété peut être fausse pour les $(x-\lambda e)^{-1}$, bien qu'ils <u>aient l'air</u> d'être des fonctions analytiques de x . (cf. N° 6) .

<u>Remarque</u> 2 - <u>Le spectre de</u> $\varphi(x)$ <u>est l'image par</u> φ <u>du spectre de</u> x . - car

$$(\varphi(x), \hat{x}) = \varphi\left[(x, \hat{x})\right] .$$

5 - <u>Algèbres à un générateur</u>.

<u>Définition</u> 2 : <u>On dit qu'une algèbre normée complète commutative</u> $\mathfrak{A}$ <u>sur</u> C , <u>possédant un élément unité, admet un générateur</u> x <u>si les polynomes en</u> x <u>sont partout denses dans</u> $\mathfrak{A}$.

L'étude complète de ces algèbres exige des outils analytiques puissants, et est en dehors du cadre de ce rapport ; en outre, elle est à peine commencée, ce qui n'est pas étonnant étant donné la grande diversité de structure des algèbres en question.

Prop. 8 : L'espace $\hat{\mathcal{A}}$ des caractères d'une algèbre $\mathcal{A}$ possédant un générateur x est homéomorphe au sous-ensemble compact de C constitué par le spectre de x .

Il est clair en effet que $\hat{x} \longrightarrow (x, \hat{x})$ est une application biunivoque et continue du compact $\hat{\mathcal{A}}$ sur le compact $\sigma(x)$!

- Si P est un polynome, on aura évidemment

$$(P(x), \hat{x}) = P\left[(x, \hat{x})\right] ,$$

en sorte que $(P(x), \hat{x})$ peut être identifié à un polynome en ζ sur $\sigma(x)$. Pour tout $y \in \mathcal{A}$, la fonction $(y, \hat{x})$ - considérée comme définie sur $\sigma(x)$ - est donc limite uniforme sur $\sigma(x)$ de polynômes; on en conclut que la structure topologique de $\sigma(x)$ doit déterminer en grande partie la nature des fonctions $(y, \hat{x})$ - qui peuvent être continues, ou analytiques, ou quasi-analytiques, ou indéfiniment différentiables etc... . Par exemple, l'algèbre des fonctions continues sur $[0,1]$ possède un générateur - par exemple $f(t) = t$; de même celle des fonctions holomorphes dans $|\zeta| < 1$ et continues sur $|\zeta| \leqslant 1$; notons encore le curieux phénomène que voici (Silov) : soit f(t) une fonction définie, continue, et non-analytique sur $[0,1]$; alors il existe une algèbre normée complète $\mathcal{A}$, commutative, avec unité, et possédant les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{A}$ possède un générateur x ;

2) $\hat{\mathcal{A}}$ est homéomorphe à $[0,1]$;

3) aucune des fonctions $(y, \hat{x})$ $(y \in \mathcal{A})$ ne coïncide (en tant que définie sur $[0,1]$) avec f(t) .

On peut donc dire, en un sens facile à préciser, que l'algèbre des fonctions analytiques sur $[0,1]$ est l'intersection de toutes les algèbres normées complètes de fonctions sur $[0,1]$ qui contiennent la fonction t .

Une autre question intéressante, est celle des algèbres de séries entières formelles - définies comme habituellement, avec la condition supplémentaire suivante : pour chaque n , $\sum_0^\infty a_n x^n \longrightarrow a_n$ est une application continue de $\mathcal{A}$ dans C . Silov a donné le critère suivant : pour qu'une algèbre normée complète avec unité possédant un générateur x puisse être considérée, relativement à x , comme une algèbre de séries entières formelles, il faut et il suffit que l'intersection des idéaux fermés engendrés dans $\mathcal{A}$ par x, x^2,... respectivement soit $\{0\}$.

Pour toutes ces questions, on consultera Šilov [1] et Lorch [3]

6 - Singularités spectrales permanentes.

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre normée commutative complète avec unité, et $\mathcal{B}$ une sous-algèbre fermée de $\mathcal{A}$ contenant e . Pour un $x \in \mathcal{B}$, on peut définir un spectre relatif à $\mathcal{B}$, de même qu'un spectre relatif à $\mathcal{B}\mathcal{A}$; le premier contient évidemment le second, et n'a à priori aucune raison de lui être identique comme le montre l'exemple suivant :

$\mathcal{A}$ = fonctions continues sur $[0,1]$; $\mathcal{B}$ sous-algèbre engendrée par 1 et

$$x(t) = e^{2i\pi t}$$

Il est clair que x est inversible dans $\mathcal{A}$ (son spectre est la circonférence $|\zeta| = 1$) ; mais non dans $\mathcal{B}$, $e^{-2\pi i t}$ ne pouvant pas être approché par des polynomes trigonométriques de la forme

$$a_0 + a_1 e^{2\imath\pi t} + \ldots + a_n e^{2n\imath\pi t}$$

Il est donc utile de trouver un critère assurant que le spectre d'un $x \in \mathcal{A}$ est <u>absolu</u>, c'est-à-dire indépendant de l'algèbre (normée complète !) dans laquelle x est plongé. Le seul résultat simple connu est le suivant :

<u>Prop. 9 : Tout point frontière du spectre est une singularité spectrale permanente</u>. (Lorch, [2])

Soit en effet $x \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, et supposons que le spectre de x <u>dans</u> $\mathcal{B}$ admette un point <u>frontière</u> λ_0 ; il s'agit de prouver que $x - \lambda_0 e$ n'est pas inversible dans $\mathcal{A}$.

Or, d'après l'hypothèse il existe une suite $\lambda_n \in C$ telle que :

1) $(x - \lambda_n e)^{-1}$ existe dans $\mathcal{B}$;

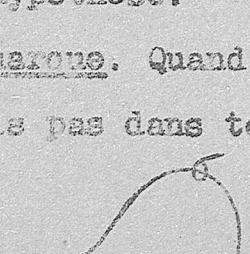
2) $\lim_{n\infty} \lambda_n = \lambda_0$.

Si $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ existait dans $\mathcal{A}$, $(x-\lambda e)^{-1}$ serait (§ 2, définie et continue au voisinage de λ_0 ; on aurait donc

$$(x-\lambda_0 e)^{-1} = \lim_{n\infty} (x - \lambda_n e)^{-1}$$

et donc, $\mathcal{B}$ étant fermée, $(x - \lambda_0 e)^{-1} \in \mathcal{B}$ contrairement à l'hypothèse. C.Q.F.D.

<u>Remarque</u>. Quand on restreint $\mathcal{A}$, le spectre ne peut qu'augmenter - mais pas dans toutes les directions, si l'on peut dire. En particulier,



soit λ non dans le spectre σ de x relatif à $\mathcal{A}$, et supposons qu'il existe un <u>domaine</u> G (donc connexe) contenant σ mais non λ . Alors $(x - \lambda e)^{-1}$ existe dans toute sous-algèbre de $\mathcal{A}$ contenant x - et appartient à la sous-algèbre engendrée par x . En effet, la fonction

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \lambda}$$

est holomorphe dans G , d'où possibilité d'appliquer la formule

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{(\zeta e - x)^{-1}}{\zeta - \lambda} \, d\zeta \ ,$$

qui donne $\varphi(x) = (x - \lambda e)^{-1}$.

Par exemple, si σ est une circonférence, le spectre ne peut s'agrandir que vers l'intérieur de σ .

On en déduit aussi la

Prop. 10 : Si le spectre de x dans $\mathcal{A}$ est réel, il ne varie pas par contradiction de (Lorch [2])

(cf. le spectre d'un opérateur hermitien !)

Evidemment, la Prop. 10 tient à ce que le complémentaire du spectre est connexe.

---

§ 4 - Algèbres normées régulières.

I - Définitions et propriéts fondamentales.

Dans tout ce §, A désigne une algèbre normée complète commutative et avec élément unité.

DEFINITION 1 - On dit que A est régulière si elle vérifie la condition suivante: étant donnés un sous-ensemble fermé F de $\hat{A}$ et un élément $\hat{x}_0$ de $\hat{A}$ non contenu dans F, il existe au moins un élément $x \in A$ tel que l'on ait

$$(x,\hat{x}) = 1 \text{ si } \hat{x} \in F \quad , = 0 \text{ si } \hat{x} = \hat{x}_0 \quad .$$

Cette notion est due à Silov [1] , ainsi qu'un grand nombre des résultats de ce § .

DEFINITION 2 - Etant donné une partie A de $\hat{A}$, on désigne par $\mathcal{J}(A)$ et par $\mathcal{N}(A)$ les idéaux de A définis comme suit:

$x \in \mathcal{J}(A)$ si l'on a $(x,\hat{x}) = 0$ pour tout $\hat{x} \in A$;

$x \in \mathcal{N}(A)$ si l'on a $(x,\hat{x}) = 0$ pour tous les $\hat{x}$ d'un voisinage de A.

(Bien entendu, le voisinage dont il s'agit dépend de x).

Il est clair que $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{J}(A)$; que $\mathcal{J}(A)$ est un idéal fermé de A - ce qui peut être faux pour $\mathcal{N}(A)$; si A est réduit à un seul point $\hat{x}$, on emploiera les notations $\mathcal{J}(\hat{x})$ et $\mathcal{N}(\hat{x})$: $\mathcal{J}(\hat{x})$ est donc un idéal maximal de A .

DEFINITION 3 - On appelle spectre d'un idéal $\mathfrak{m}$ de A l'ensemble $\sigma(\mathfrak{m})$ des caractères non nuls $\hat{x}$ tels que $(x,\hat{x}) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{m}$.

Il est clair que $\sigma(\mathfrak{m})$ est un ensemble fermé, et non vide si $\mathfrak{m} \neq A$.

PROPOSITION 1 - Pour que A soit régulière, il faut et il suffit que pour tout $\hat{x}_0 \in \hat{A}$ on puisse trouver un $x_0 \in A$ tel que

$(x_0,\hat{x}_0) = 1$, $(x_0,\hat{x}) = 0$ en dehors d'un voisinage arbitraire de $\hat{x}_0$.

C'est évident sur la Definition 1.

PROPOSITION 2 - Pour que $\mathcal{A}$ soit régulière, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée: pour tout sous-ensemble fermé non vide $F \subset \hat{\mathcal{A}}$, le spectre de l'idéal $\mathcal{J}(F)$ est F lui-même.

En effet, si $\mathcal{A}$ est régulière il existe, pour tout $\hat{x}_0 \notin F$, un $x \in \mathcal{A}$ tel que $(x, \hat{x})$ soit nul sur F mais non en $\hat{x}_0$; on a alors $x \in \mathcal{J}(F)$ et on voit que le spectre de $\mathcal{J}(F)$ ne contient pas $\hat{x}_0$; par suite ce spectre est contenu dans F - mais comme il contient trivialement F, il est bien identique à F.

Réciproquement, si la condition est réalisée, et si $\mathcal{A}$ n'est pas régulière, il existe un fermé non vide $F \subset \hat{\mathcal{A}}$ et un $\hat{x}_0 \notin F$ tels que

$$(x, \hat{x}) = 0 \text{ quel que soit } \hat{x} \in F \quad \text{implique} \quad (x, \hat{x}_0) = 0 \ ,$$

en sorte qu'alors le spectre de $\mathcal{J}(F)$ contient $\hat{x}_0$ - ce qui est absurde.

Corollaire de la Proposition 2 - Les algèbres normées régulières sont celles pour lesquelles la topologie faible coincide, sur $\hat{\mathcal{A}}$, avec la topologie "algèbrique" définie au Chap. I, N° 10.

PROPOSITION 2' - Soient $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète avec unité et $\mathfrak{m}$ un idéal fermé de $\mathcal{A}$; alors l'espace des caractères de $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ est homéomorphe au spectre de $\mathfrak{m}$.

Soient en effet $x \to \dot{x}$ l'application linéaire canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$, et $\dot{y}$ un caractère non nul de $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$; on en déduit un élément $\varphi(\dot{y})$ du spectre de $\mathfrak{m}$ en posant

$$(x, \varphi(\dot{y})) = (\dot{x}, \dot{y}) \ ,$$

et il est clair que φ est un homéomorphisme de l'espace des caractères de $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ sur le sous-espace de $\hat{\mathcal{A}}$ constitué par le spectre de $\mathfrak{m}$.

Remarque - Cette Proposition n'a naturellement rien à voir avec les algèbres régulières, et son apparition ici résulte d'un oubli involontaire du rapporteur.

DEFINITION 4 - On dit qu'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions continues sur un espace compact E est régulière si, pour tout fermé $F \subset E$ et pour tout point $x \in E$ non contenu dans F, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ prenant la valeur 0 sur F et la valeur 1 en x; on dit que $\mathcal{A}$ est normale si, étant donnés deux sous-ensembles fermés disjoints F et G de E, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ qui prend la valeur 0 sur F et la valeur 1 sur G.

DEFINITION 5 - Etant donnée une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions continues sur un espace topologique E, on dit qu'une fonction numérique f, définie sur E, appartient localement à $\mathcal{A}$ en un point x de E s'il existe un voisinage V de x dans E et une fonction g de $\mathcal{A}$ telle que f et g coincident dans V. On dit que f appartient localement à $\mathcal{A}$ dans une partie F de E si f appartient localement à $\mathcal{A}$ en tout point de F. On dit que f appartient localement à $\mathcal{A}$ si f appartient localement à $\mathcal{A}$ dans E (c'est-à-dire en tout point de E).

THEOREME 1 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normale de fonctions continues sur un espace compact E, contenant la constante 1. Pour qu'une fonction f soit dans $\mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'elle appartienne localement à $\mathcal{A}$ (Silov [1]).

En employant Borel-Lebesgue, on est ramené immédiatement à prouver ce qui suit: soit $E = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ un recouvrement ouvert fini de E, et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathcal{A}$ telles que

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{pour tout } x \in U_i \quad (1 \leq i \leq n);$$

alors $f \in \mathcal{A}$. On va démontrer ce point par récurence sur n.

Soit tout d'abord $n = 2$. Alors les fermés F_1 et F_2, complémentaires de U_1 et U_2 respectivement, sont disjoints; d'où une $u \in \mathcal{A}$ vérifiant $u(x) = 0$ sur F_1 et $= 1$ sur F_2; on a $1 - u \in \mathcal{A}$, et l'identité

$$f(x) = u(x) f_2(x) + [1 - u(x)] f(x)$$

prouve que $f \in \mathcal{A}$.

Ceci étant, supposons la propriété vraie jusqu'à n-1, et soit $E = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ un recouvrement comprenant n ensembles, f coincidant dans U_i avec une $f_i \in \mathcal{A}$. Si l'on note F le complémentaire de U_n, F est fermé et recouvert par les U_i $(i < n)$, de sorte qu'il existe un ouvert U tel que

$$F \subset U \subset \bar{U} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1} \quad ;$$

les restrictions à $\bar{U}$ des fonctions de $\mathcal{A}$ forment évidemment une algèbre normale de fonctions continues du compact $\bar{U}$; celui-ci étant recouvert par n-1 ouverts, il résulte de la récurence que f coincide dans $\bar{U}$ avec une fonction de $\mathcal{A}$; comme U et U_n forment un recouvrement ouvert à deux éléments de E, on est ainsi ramené au cas n = 2, ce qui démontre le Théorème.

PROPOSITION 3 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée régulière; alors les fonctions $(x,\hat{x})$ forment une algèbre normale de fonctions continues sur l'espace compact $\hat{\mathcal{A}}$.

En effet, considérons - F étant un sous-ensemble fermé de $\hat{\mathcal{A}}$ - l'algèbre $\mathcal{A}/\mathcal{J}(F) = \mathcal{B}$; soit (Prop.2') φ l'homéomorphisme canonique de $\hat{\mathcal{B}}$ sur F. Soit G un second sous-ensemble fermé de $\hat{\mathcal{A}}$, disjoint de F; l'image de l'idéal $\mathcal{J}(G)$ par l'application canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}$; sinon cette image serait contenue dans au moins un idéal maximal de $\mathcal{B}$, d'où l'on en déduirait l'existence d'un $\hat{x} \in F$ tel que $(x,\hat{x}) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{J}(G)$: ce qui est absurde puisque, $\mathcal{A}$ étant régulière, le spectre de $\mathcal{J}(G)$ est G et ne peut donc contenir $\hat{x}$.

Ceci étant, il existe un $u \in \mathcal{J}(G)$ dont l'image dans $\mathcal{B}$ est l'élément unité de $\mathcal{B}$; on en déduit que

$$(u,\hat{x}) = 0 \text{ sur } G \quad , = 1 \text{ sur } F$$

ce qui prouve la Proposition 3.

Corollaire 1 de la Prop.3 - Pour qu'une fonction $f(\hat{x})$ soit de la forme $(x,\hat{x})$,

il faut et il suffit qu'elle appartienne localement sur $\hat{A}$ à la famille formée par celles-ci.

(Exemple:le fait pour une fonction d'avoir une série de Fourier absolument convergente est une propriété locale).

Corollaire 2 de la Prop.3 - Soient F et G deux sous-ensembles fermés disjoint de $\hat{A}$,et f une fonction appartenant localement sur F à la famille des fonctions $(x,\hat{x})$;alors il existe un $x \in \mathfrak{n}(G)$ tel que f coincide sur F avec la fonction $(x,\hat{x})$.

En effet,les $(x,\hat{x})$ forment une algèbre normale sur F,d'où un $y \in A$ tel que f coincide sur F avec $(y,\hat{x})$.Par ailleurs,comme F et G sont disjoints,on peut les séparer par un voisinage compact de G,d'où un $u \in A$ tel que $(u,\hat{x})$ soit nulle au voisinage de G -ce qui signifie $u \in \mathfrak{n}(G)$ - et prenne la valeur I sur F;il est alors évident que l'élément x = uy répond à la question.

Une propriété analogue mais un peu plus forte est la suivante:

PROPOSITION 4 -Soient A une algèbre normée régulière,F un sous-ensemble fermé de $\hat{A}$ et $\mathfrak{m}$ un idéal (non nécessairement fermé) de A dont le spectre ne rencontre pas F;alors la famille des fonctions $(x,\hat{x})$ $(x \in A)$ coincide sur F avec la famille des fonctions $(x,\hat{x})$ $(x \in \mathfrak{m})$.

Désignons en effet par $\mathcal{F}$ la famille des fonctions $(x,\hat{x})$ $(x \in A)$ et par $\mathcal{F}_0$ la sous-famille des $(x,\hat{x})$ $(x \in \mathfrak{m})$, ces deux familles étant considérées sur le compact F. $\mathcal{F}_0$ est un idéal de $\mathcal{F}$;d'autre part, $\mathcal{F}$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre (normée complète avec unité) $A / \mathcal{J}(F)$,dont l'espace des caractères est canoniquement isomorphe à F;le spectre de $\mathfrak{m}$ ne rencontrant pas F,on déduit de là que l'idéal $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ n'est contenu dans aucun idéal maximal de $\mathcal{F}$,donc coincide avec $\mathcal{F}$:d'où la Proposition.

Il résulte en particulier de la Prop.4 que, si le spectre d'un idéal $\mathfrak{m}$ ne rencontre pas un sous-ensemble fermé de $\hat{\mathcal{A}}$, il existe un $u \in \mathfrak{m}$ dont la "transformée de Foutier" $(u,\hat{x})$ prend la valeur un en tout point de cet ensemble.

Etant donné un $x \in \mathcal{A}$, on désignera par $\sigma(x)$ l'adhérence dans $\hat{\mathcal{A}}$ de l'ensemble $(x,\hat{x}) \neq 0$. L'intérêt de cette notion est révélé par la

PROPOSITION 5 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée régulière et semi-simple. Tout idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{A}$ contient tout élément x tel que

$$\sigma(\mathfrak{m}) \cap \sigma(x) = \emptyset \quad .$$

En effet, $\sigma(x)$ étant fermé et disjoint de $\sigma(\mathfrak{m})$, il existe un $u \in \mathfrak{m}$ dont la transformée de Fourier est identique à un sur $\sigma(x)$; alors les transformées de x et de ux sont identiques partout, en sorte que $x = ux$ en vertu de la semi-simplicité - et $x \in \mathfrak{m}$ comme annoncé.

THEOREME 2 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée regulière et semi-simple. L'ensemble des idéaux de $\mathcal{A}$ dont le spectre est un sous-ensemble fermé donné de $\hat{\mathcal{A}}$ possède un plus grand élément - à savoir $\mathcal{J}(F)$ - et un plus petit élément - à savoir $\mathfrak{n}(F)$. (Silov).

L'affirmation concernant le plus grand idéal se réduit à la Prop.2. Si un idéal $\mathfrak{m}$ vérifie $\sigma(\mathfrak{m}) = F$, et si la transformée d'un x est nulle au voisinage de F, on sera dans l'hypothèse de la Prop.5, en sorte que $x \in \mathfrak{m}$, et on a donc $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{n}(F)$; comme le spectre de $\mathfrak{n}(F)$ est évidemment F, le Théorème est démontré.

Corollaire du Théorème 2 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée régulière et semi-simple et soient x et y deux éléments tels que l'ensemble des zéros de $(y,\hat{x})$ soit intérieur à l'ensemble des zéros de $(x,\hat{x})$; alors il existe un z tel que $x = yz$.

Considérons en effet l'idéal principal $\mathfrak{m} = [y]$; son spectre est l'ensem-

/x ble F des zéros de $(y,\tilde{x})$; $(x,\hat{x})$ étant nulle au voisinage de F/est dans $\mathfrak{N}(F)$ donc -Th.2 -dans $\mathfrak{N}$,ce qui signifie précisément $x = yz$.

2 - Analyse et synthèse harmoniques.

Dans ce N°, $\mathcal{A}$ désigne une algèbre normée ,complète,commutative,avec unité; $\mathcal{A}'$ désigne l'espace de Banach dual de $\mathcal{A}$,et (x,x') le produit scalaire d'un élément $x \in \mathcal{A}$ et d'un élément $x' \in \mathcal{A}'$.

Rappelons quelques résultats de la théorie des espaces de Banach.

Lemme 1 - Soient V un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{A}$,et $V^{\perp}$ le sous-espace vectoriel faiblement fermé de $\mathcal{A}'$ défini par les équations

$$(x,x') = 0 \text{ pour tout } x \in V;$$

alors V est réciproquement défini par les équations

$$(x,x') = 0 \text{ pour tout } x' \in V^{\perp} .$$

Lemme 2 - Soient V un sous-espace vectoriel faiblement fermé de $\mathcal{A}'$,et $V^{\perp}$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{A}$ défini par les équations

$$(x,x') = 0 \text{ pour tout } x' \in V;$$

alors V est réciproquement défini par les équations

$$(x,x') = 0 \text{ pour tout } x \in V^{\perp}.$$

Lemme 3 - Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}'$;pour qu'un $x' \in \mathcal{A}'$ soit faiblement adhérent à V,il faut et il suffit qu'il le soit à l'intersection de V et d'une boule convenable de $\mathcal{A}'$.

Ceci étant,on peut (Cf. § 2,N°7 pour le cas général - les notations employées dans le présent N° ne concordent pas avec celles du § 2)définir dans $\mathcal{A}'$ une représentation linéaire canonique de $\mathcal{A}$;celle-ci consiste à associer à tout $x \in \mathcal{A}$ l'endomorphisme $x' \to x*x'$ de $\mathcal{A}'$ défini par

$$(I) \qquad (xy,x') = (y,x*x') \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{A}$$

(la notation $x*x'$ éployée ici est inspirée de la théorie des groupes).

Le but de l'analyse harmonique est l'étude des sous-espaces de $\mathcal{A}'$ qui sont invariants par cette représentation ,et,en particulier,d'étudier dans quelle mesure un tel espace peut être fabriqué au moyen de caractères de $\mathcal{A}$;comme on le verra,lorsqu'il s'agit de sous-espaces fermés pour la topologie faible,cette étude est à peu près équivalente à celle des idéaux de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 6 - Pour qu'un élément x' de $\mathcal{A}'$ soit un caractère de $\mathcal{A}$,il faut et il suffit qu'il vérifie

$$x * x' = (x,x').x' \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} .$$

Il est superflu d'insister sur la démonstration.On voit que les transformés d'un caractère constituent un sous-espace invariant de dimension un (donc faiblement fermé);réciproquement,il est clair que tout sous-espace vectoriel invariant de dimension un est engendré par un caractère bien déterminé de $\mathcal{A}$, en sorte que les caractères apparaissent comme associés aux sous-espaces invariants minimaux de $\mathcal{A}'$.

Le premier problème de l'analyse harmonique est résolu(au moins dans le cas où $\mathcal{A}$ possède un élément unité) par le

THEOREME 3 - Tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}'$,faiblement fermé et invariant,contient,s'il n'est pas nul,au moins un caractère non nul de $\mathcal{A}$.

En effet,si V est un tel sous-espace,le sous-espace orthogonal $V^{\perp}$ est un idéal de $\mathcal{A}$,distinct de $\mathcal{A}$ si V n'est pas nul;$V^{\perp}$ est donc contenu dans au moins un idéal maximal de $\mathcal{A}$,ce qui implique l'existence d'un caractère non nul $\hat{x}$ orthogonal à $V^{\perp}$: V étant faiblement fermé,il résulte du Lemme 2 que V contient $\hat{x}$.

On notera que la correspondance $V \to V^{\perp}$ est une application biunivoque de l'ensemble des sous-espaces invariants faiblement fermés de $\mathcal{A}'$ sur l'ensemble des idéaux fermés de $\mathcal{A}$:c'est pourquoi l'étude des premiers est équiva-

lente à celle des seconds.

DEFINITION 6 - Etant donné un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}'$, invariant et faiblement fermé, on appelle spectre de ce sous-espace l'ensemble des caractères non nuls qu'il contient. On appelle spectre d'un élément $x' \in \mathcal{A}'$ le spectre du plus petit sous-espace vectoriel invariant et faiblement fermé qui le contient.

Il est clair que le spectre d'un sous-espace V est l'intersection de V et de $\hat{\mathcal{A}}$ (considéré comme sous-ensemble de $\mathcal{A}'$); c'est donc un sous-ensemble fermé de $\hat{\mathcal{A}}$; par ailleurs, le spectre de V n'est autre que le spectre de l'idéal $V^{\perp}$ orthogonal à V, comme il résulte du lemme 2.

Ce qui précède montre que, si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces invariants faiblement fermés, on a

$$\sigma(V_1 \cap V_2) = \sigma(V_1) \cap \sigma(V_2).$$

Une propriété analogue est la suivante: le spectre de $W = \overline{V_1 + V_2}$ (plus petit sous-espace fermé contenant V_1 et V_2, automatiquement invariant) est la réunion des spectres de V_1 et V_2. En effet, on a $W^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$, en sorte que tout idéal maximal contenant $W^{\perp}$ contient l'un au moins des idéaux $V_1^{\perp}$ et $V_2^{\perp}$ (propriété du reste purement algèbrique); ce qui veut dire $\sigma(W) \subset \sigma(V_1) \cup \sigma(V_2)$; comme l'inégalité opposée est évidente, notre assertion est démontrée.

PROPOSITION 7 - Le spectre d'un sous-espace invariant fermé V de $\mathcal{A}'$ est l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}$ tels que

$x * x' = 0$ pour tout $x' \in V$ implique $x * \hat{x} = 0$ (c'est-à-dire $(x, \hat{x}) = 0$).

Il est clair que la condition est nécessaire. Réciproquement, si un $\hat{x}$ la vérifie, il est orthogonal à $V^{\perp}$; car $x \in V^{\perp}$ implique - puisque V est invariant -

$(x, y * x') = 0$ quels que soient $y \in \mathcal{A}$ et $x' \in V$,

ou encore

$$(y, x*x') = 0 \quad \text{quels que soient } y \in \mathcal{A} \text{ et } x' \in V \quad ,$$

d'où $x*x' = 0$ et donc, par hypothèse, $(x,\hat{x}) = 0$: $\hat{x}$ est donc bien dans le spectre de V.

--En particulier, le spectre $\sigma(x')$ d'un élément $x' \in \mathcal{A}'$ sera l'ensemble des $\hat{x}$ tels que

$$x*x' = 0 \quad \text{entraine} \quad (x,\hat{x}) = 0$$

(car le sous-espace invariant fermé engendré par x' est l'adhérence faible de l'ensemble des $y*x'$). Il en résulte que l'on a

$$\sigma(x*x') \subset \sigma(x')$$

quels que soient $x \in \mathcal{A}$ et $x' \in \mathcal{A}'$; en fait, on peut prouver plus dans la plupart des cas intéressants:

PROPOSITION 8 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète avec unité, régulière et semi-simple; quels que soient $x \in \mathcal{A}$ et $x' \in \mathcal{A}'$, on a

$$\sigma(x*x') \subset \sigma(x) \cap \sigma(x') \quad ;$$

en outre, $\sigma(x*x')$ contient tout $\hat{x} \in \sigma(x')$ pour lequel $(x,\hat{x}) \neq 0$.

Montrons d'abord que $\sigma(x*x') \subset \sigma(x)$. Pour cela, soit un $\hat{x}_0 \notin \sigma(x)$; $\sigma(x)$ étant fermé, et $\mathcal{A}$ régulière, il existe un $x_0 \in \mathcal{A}$ tel que

$$x_0 * \hat{x} = 0 \quad \text{pour tout} \quad \hat{x} \in \sigma(x) \quad , \quad x_0 * \hat{x}_0 \neq 0$$

-ce qui implique, puisque $x*\hat{x}$ est nul en dehors de $\sigma(x)$, que l'on ait

$$x_0 x * \hat{x} = 0 \quad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{\mathcal{A}} \quad ;$$

comme $\mathcal{A}$ est semi-simple, on en déduit $x_0 x = 0$ et par conséquent

$$x_0 * (x*x') = 0;$$

comme x_0 est "orthogonal" à $x*x'$ sans l'être à $\hat{x}_0$, on a $\hat{x}_0 \notin \sigma(x*x')$, ce qui prouve notre assertion, et donc la première partie de la Proposition.

Si maintenant un $\hat{x}$ appartient à $\sigma(x')$, et si on a $y*(x*x') = 0$, on aura

$(xy)* x' = 0$ et donc $(xy)* \hat{x} = 0$, c'est-à-dire

$$(x,\hat{x}).(y,\hat{x}) = 0;$$

si donc $(x,\hat{x}) \neq 0$, on aura $(y,\hat{x}) = 0$, et ceci étant vrai dès que y est "orthogonal" à $x* x'$, prouve que $\hat{x} \in \sigma(x*x')$.

Remarque: il ne faudrait pas croire que l'on a toujours $\sigma(x*x') = \sigma(x) \cap \sigma(x')$ -voici un contre-exemple trivial: x' est un caractère de $\mathcal{A}$ (auquel cas $\sigma(x')$ est réduit à x'), et x vérifie $(x,x') = 0$, sa transformée de Fourier étant au surplus $\not\equiv 0$ dans tout voisinage de x' -auquel cas $x' \in \sigma(x)$; alors, le spectre de $x*x'$ est vide (car $x* x' = 0$) bien que $\sigma(x) \cap \sigma(x')$ ne le soit pas!

Le problème de la "synthèse harmonique" -qui consiste à reconstituer un sous-espace invariant fermé - est maintenant, en partie, à notre portée:

THEOREME 4 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète, régulière et avec unité; et semi-simple. Soient V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}'$, invariant et faiblement fermé, G un voisinage, dans $\hat{\mathcal{A}}$, du spectre de V. Alors V est contenu dans le sous-espace vectoriel faiblement fermé de $\mathcal{A}'$ soustendu par les $\hat{x} \in G$.

Première démonstration. Soit W le plus petit sous-espace faiblement fermé contenant les $\hat{x} \in G$ -c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}'$ qui sont de la forme $\lambda_1 \hat{x}_1 + \ldots + \lambda_n \hat{x}_n$ ($\hat{x}_j \in G$) ou limites faibles de tels éléments. $V \subset W$ revient à $W^{\perp} \subset V^{\perp}$; or $W^{\perp}$ n'est autre que $\mathcal{J}(G)$; comme $F = \sigma(V)$ est intérieur à G, on a (Théorème 2) $W^{\perp} \subset \mathcal{J}(F)$; $\mathcal{J}(F)$ étant le plus petit idéal admettant F pour spectre est contenu dans $V^{\perp}$: on a donc bien $W^{\perp} \subset V^{\perp}$.

Deuxième démonstration. Montrons que $x \in W^{\perp}$ entraine $x \in V^{\perp}$. Or si $x' \in V$, on a évidemment $\sigma(x') \subset \sigma(V)$, en sorte que G est un voisinage de $\sigma(x')$, qu'on peut sans restreindre la généralité supposer ouvert; d'autre part, on a (Prop. 8) $\sigma(x*x') \subset \sigma(x) \cap \sigma(x')$; le fait que $x \notin W^{\perp}$ implique que l'ensemble des points où la transformée de Fourier de x n'est pas nulle est contenu dans le

fermé $\hat{A}$ - G, donc aussi son adhérence $\sigma(x)$: par conséquent $\sigma(x)$ et $\sigma(x')$ sont disjoints, en sorte que $x * x' = 0$. On voit donc que $x \in V^{\perp}$ implique $x * x' = 0$ pour tout $x' \in V$, donc, comme on l'a déja vu, implique $x \in V^{\perp}$. CQFD.

Corollaire I du Théorème 4 - Si un $x \in A$ vérifie $(x, \hat{x}) = I$ pour tous les $\hat{x}$ d'un voisinage du spectre de $x' \in A'$, on a $x * x' = x'$.

(car on aura visiblement $x * x'' = x''$ pour tout x'' qui est combinaison linéaire de caractères appartenant au spectre de x', donc aussi, à la limite et en vertu du Théorème 4, pour x' lui-même).

Corollaire 2 du Théorème 4 - Soit $\sigma(x') = \sigma_1 \cup \sigma_2$ une partition de $\sigma(x')$ en deux ensembles fermés (disjoints); alors il existe deux éléments x'_1 et x'_2 tels que $\sigma(x'_1) = \sigma_1$, $(x'_2) = \sigma_2$, $x' = x'_1 + x'_2$.

En effet, d'après la Prop.3 il existe des éléments u_1 et u_2 de A tels que $(u_1, \hat{x})$ (resp. $(u_2, \hat{x})$) prenne la valeur I (resp.0) dans un voisinage de σ_1 et la valeur 0 (resp.I) dans un voisinage de σ_2 ; il suffit alors de prendre $x'_1 = u_1 * x'$, et $x'_2 = u_2 * x'$.

Ce corollaire montre que l'on peut se limiter à étudier les x' dont le spectre est connexe -ce qui du reste ne simplifie pas grand chose.

--On observera que, si Hahn-Banach permet de déduire le Th.4 du Th.2, celui-ci est cependant plus fort que le premier, puisqu'il concerne des idéaux qu'on ne suppose pas fermés.

--Posé d'une manière brutale, le problème de la synthèse harmonique revient à déterminer si un idéal fermé -ou un sous-espace vectoriel invariant faiblement fermé de A' -est entièrement caractérisé par son spectre (c'est-à-dire par l'ensemble des idéaux maximaux qui le contiennent, ou, dans l'autre cas, par les caractères qu'il contient). Il serait évidemment chimérique de vouloir lui donner une réponse simple et générale, ne serait-ce que du fait

bien connu dans les algèbres classiques, de l'existence d'idéaux primaires qu'il est tout à fait impossible de "décomposer", au même titre que les idéaux maximaux.

DEFINITION 7 - On dit qu'un idéal (resp. sous-espace invariant fermé) est primaire si son spectre est réduit à un seul point.

Le Théorème 2 exprime que les idéaux primaires dont le spectre est un $\hat{x}$ donné ne sont autres que les idéaux compris entre $\mathcal{N}(\hat{x})$ et $\mathcal{J}(\hat{x})$ -dans des hypothèses convenables bien entendu. $\mathcal{N}(\hat{x})$ apparait donc comme étant le plus petit de ces idéaux primaires.

L'introduction des idéaux primaires permet de poser le problème de la synthèse harmonique sous une forme plus adéquate, à savoir: un idéal fermé est-il l'intersection des idéaux primaires fermés qui le contiennent? Même sous cette forme, il peut arriver que la réponse soit négative -d'après Schwartz (L.), il en est ainsi pour l'algèbre L^1 des groupes R^n, au moins pour $n \geqslant 3$, en sorte que le problème corrélatif (une fonction continue et bornée sur R^n est-elle limite, pour la convergence compacte, de polynômes trigonométriques uniformément bornés fabriqués avec les exponentielles de son spectre?) admet lui aussi une réponse négative -ce qui est bien malheureux. Par contre, la synthèse harmonique fonctionne normalement dans le cas suivant (Silov): l'algèbre $\mathcal{D}_n$ des fonctions continues et n fois continument différentiables sur $[0,I]$, normée par

$$\|f\| = \sup \sum_p \left| f^{(p)}(t) \right| / p!$$

et munie de la multiplication ordinaire des fonctions; l'espace des caractères de cette algèbre est canoniquement homéomorphe au segment $[0,I]$; chaque idéal maximal contient exactement n idéaux primaires (visibles sans explications) fermés, et tout idéal fermé est l'intersection des idéaux primaires fer-

més qui le contiennent.On notera que cette algèbre possède un générateur,par exemple f(x) = x.Des considérations analogues s'appliquent au cas de plusieurs variables -mais la question est évidemment plus compliquée dans ce cas ;elle a été résolue par Whitney (qui n'a pas encore publié ses résultats).

3 - Théorème de Ditkin.

Après les vagues généralités qui précèdent,il ne sera sans doute pas superflu de montrer que l'on peut donner des résultats qui,s'ils ne résolvent pas entièrement (et pour cause) le problème de la synthèse harmonique,ne sont cependant pas dénués d'un certain intérêt.Le plus profond d'entre eux est le Théorème de Ditkin (démontré par Ditkin [1] dans le cas des algèbres de groupes associées aux R^n,et bourbakisé par Silov).Dans tout ce N°, $\mathcal{A}$ désignera une algèbre normée complète avec unité,régulière et semi-simple.

On a déja vu au N°I l'importance des considérations de nature locale et,en particulier,obtenu le résultat suivant:soient $\mathfrak{m}$ un idéal, et F un sous-ensemble fermé de $\hat{\mathcal{A}}$ ne rencontrant pas le spectre de $\mathfrak{m}$;alors

1)la famille des fonctions $(x,\hat{x})$ $(x\in\mathcal{A})$ coincide sur F avec la famille des fonctions $(x,\hat{x})$ $(x\in\mathfrak{m})$;

2)le fait pour une fonction $f(\hat{x})$,définie sur F, d'appartenir à cette famille est une propriété locale.

Ces considérations nous conduisent à poser la définition suivante:

DEFINITION 9 - Etant donnés un point $\hat{x}_0\in\hat{\mathcal{A}}$ et un idéal $\mathfrak{m}$,on désigne par $\mathcal{P}(\mathfrak{m};\hat{x}_0)$ l'ensemble des $x\in\mathcal{A}$ qui vérifient la condition suivante:

il existe un $y\in\mathfrak{m}$ tel que $(x,\hat{x}) = (y,\hat{x})$ au voisinage de $\hat{x}_0$.

Pour un $x\in\mathcal{A}$,on note $P(\mathfrak{m};x)$ l'ensemble des $\hat{x}$ tels que $x\notin\mathcal{P}(\mathfrak{m};\hat{x})$.

On peut donc dire que $\mathcal{P}(\mathfrak{m};\hat{x})$ est l'ensemble des x dont la transformée de Fourier appartient localement à $\mathfrak{m}$ en $\hat{x}$;et que $P(\mathfrak{m};x)$ est l'ensemble

des $\hat{x}$ où la transformée de Fourier de x n'appartient pas localement à $\mathfrak{n}$. On notera que $P(\mathfrak{n};x)$ est contenu dans le spectre de $\mathfrak{n}$ en vertu de ce qu'on a vu au début de ce N°.

PROPOSITION IO - L'idéal $\mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x})$ est la composante primaire de $\mathfrak{n}$ dans l'idéal maximal $\mathfrak{J}(\hat{x})$ -c'est-à-dire vérifie les deux conditions équivalentes que voici:

I) $\mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x}) = \mathfrak{n} + \mathfrak{n}(\hat{x})$

2) si $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{J}(\hat{x})$, $\mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x})$ est le plus petit idéal primaire contenant $\mathfrak{n}$ et contenu dans $\mathfrak{J}(\hat{x})$;dans le cas contraire, $\mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x}) = \mathcal{A}$.

Démonstration - Que l'on ait $\mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x}) = \mathcal{A}$ si $\mathfrak{n}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{J}(\hat{x})$ exprime simplement le fait, déjà vu plusieurs fois, que, sur tout fermé ne rencontrant pas le spectre de $\mathfrak{n}$, les transformées de Fourier des éléments de $\mathcal{A}$ se réduisent à celles des éléments de $\mathfrak{n}$.

Si $\hat{x}_0$ appartient au spectre de $\mathfrak{n}$, la condition $x \in \mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x}_0)$ revient à l'existence d'un $y \in \mathfrak{n}$ tel que $(x-y,\hat{x}) = 0$ au voisinage de $\hat{x}_0$, et est donc équivalente à $x-y \in \mathfrak{n}(\hat{x}_0)$, c'est-à-dire à $x \in \mathfrak{n} + \mathfrak{n}(\hat{x}_0)$:d'où le premier point. Pour démontrer le second, soit $\mathfrak{p}$ l'intersection des idéaux primaires contenus dans $\mathfrak{J}(\hat{x}_0)$ et contenant $\mathfrak{n}$;on a (Th.2) $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{n}(\hat{x}_0)$ et donc, d'après ce qu'on vient de voir, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{n} + \mathfrak{n}(\hat{x}_0) = \mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x}_0)$;mais $\mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x}_0)$ étant visiblement un idéal primaire de cette catégorie, on a aussi $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x}_0)$ et finalement $\mathfrak{p}(\mathfrak{n};\hat{x}_0)$ coincide avec $\mathfrak{p}$:d'où le second point.

PROPOSITION II - Soit $\mathfrak{n}$ un idéal fermé ;la propriété $P(\mathfrak{n};x) = \emptyset$ caractérise les $x \in \mathfrak{n}$.

Comme il est trivial que $x \in \mathfrak{n}$ entraine $P(\mathfrak{n};x) = \emptyset$, il suffit de démontrer la réciproque. Pour cela, considérons le sous-espace $\mathfrak{n}^{\perp}$ orthogonal à $\mathfrak{n}$;

je dis que $\sigma(x*x') \subset P(\mathfrak{n}; x)$ quels que soient $x \in \mathcal{A}$ et $x' \in \mathfrak{n}^{\perp}$. En effet, si $\hat{x}_0 \notin P(\mathfrak{n};x)$, il existe un $y \in \mathfrak{n}$ avec $x = y + z$ et $(z,\hat{x}) = 0$ au voisinage de $\hat{x}_0$; on a alors, puisque $x' \in \mathfrak{n}^{\perp}$, $x*x' = z*x'$ et donc (Prop.8) $\sigma(x*x') = \sigma(z*x') \subset \sigma(z) \cap \sigma(x')$; comme la transformée de z est nulle au voisinage de $\hat{x}_0$, ce dernier point n'est pas dans le spectre de z, et donc non plus dans celui de $x*x'$ en vertu de ce qu'on vient de voir : en définitive, on voit que $\hat{x}_0 \notin P(\mathfrak{n};x)$ implique $\hat{x}_0 \notin \sigma(x*x')$, ce qui prouve bien notre assertion.

Ceci étant, de $P(\mathfrak{n};x) = \emptyset$ résulte $\sigma(x*x') = \emptyset$ pour tout $x' \in \mathfrak{n}^{\perp}$ d'après ce qu'on vient de voir ; $\mathcal{A}$ étant semi-simple, ceci entraine $x*x' = 0$; et x' étant arbitraire dans $\mathfrak{n}^{\perp}$, il s'ensuit que $x \in \mathfrak{n}$: d'où la Proposition.

(le fait que $\mathfrak{n}$ soit fermé intervient à la fin de la démonstration, quand on utilise sans le dire explicitement -ce qui est fait maintenant- la propriété $(\mathfrak{n}^{\perp})^{\perp} = \mathfrak{n}$.)

Corollaire de la Proposition II - Si $\mathfrak{n}$ est un idéal fermé de $\mathcal{A}$, la propriété " $x \in \mathfrak{n}$ " est une propriété locale de la fonction $(x,\hat{x})$.

C'est évidemment un résultat plus fort que la Prop.4.

PROPOSITION I2 - Pour tout idéal $\mathfrak{n}$ et pour tout $x \in \mathcal{A}$, $P(\mathfrak{n};x)$ est un sous-ensemble fermé de $\hat{\mathcal{A}}$, qui est en outre porté par la frontière de $\sigma(\mathfrak{n})$ dans le cas où x appartient à l'intersection des idéaux maximaux contenant $\mathfrak{n}$.

En effet, si la transformée de Fourier de x appartient localement à la famille des $(y,\hat{x})$ $(y \in \mathfrak{n})$ en un point $\hat{x}$, il en sera évidemment de même pour tous les points d'un voisinage de $\hat{x}$: le complèmentaire de $P(\mathfrak{n};x)$ est donc ouvert, ce qui prouve la première partie de la Proposition.

Si en outre la transformée de x est nulle sur $\sigma(\mathfrak{n})$ -c'est-à-dire précisément si x est dans l'intersection des idéaux maximaux qui contiennent $\mathfrak{n}$ -

il est clair que cette transformée appartient localement à la famille des $(y,\hat{x})$ $(y \in \mathcal{M})$ en tout point intérieur à $\sigma(\mathcal{M})$: comme au surplus $P(\mathcal{M};x)$ est dans tous les cas porté par $\sigma(\mathcal{M})$, il en résulte bien que, alors, $P(\mathcal{M};x)$ est porté par la frontière de $\sigma(\mathcal{M})$.

--Pour un idéal fermé $\mathcal{M}$, le problème de la synthèse harmonique est de démontrer (si possible) que l'on a l'équation

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\hat{x}} \overline{\mathcal{P}(\mathcal{M};\hat{x})} \quad ;$$

on va le résoudre dans certains cas en montrant que -avec des hypothèses convenables- l'ensemble $P(\mathcal{M};x)$ est parfait.

Pour cela, remarquons d'abord ceci. Soit $\mathcal{J}(\hat{x}_0)$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$. L'ensemble des x tels que $(x,\hat{x}) = 0$ au voisinage de $\hat{x}_0$ constitue, comme on l'a vu, le plus petit idéal primaire $\mathcal{N}(\hat{x}_0)$ contenu dans l'idéal maximal en question; l'adhérence $\overline{\mathcal{N}(\hat{x}_0)}$ de cet idéal primaire est évidemment le plus petit idéal primaire fermé contenu dans $\mathcal{J}(\hat{x}_0)$, et ses éléments sont limites de suites x_n d'éléments de $\mathcal{N}(\hat{x}_0)$; si l'on pose considère un $x \in \overline{\mathcal{N}(\hat{x}_0)}$, on pourra donc (en considérant, avec la notation utilisée à l'instant, les $x-x_n$) trouver une suite d'éléments u_n de $\mathcal{A}$ tels que:

A) $\| x_n \| \longrightarrow 0$; B) $(x,\hat{x}) = (x_n,\hat{x})$ au voisinage de $\hat{x}_0$;

il est clair que réciproquement ces propriétés caractèrisent les $x \in \overline{\mathcal{N}(\hat{x}_0)}$.

En particulier, il sera particulièrement facile de former des suites x_n de ce type s'il existe une suite $u_n \in \mathcal{A}$ telle que

A') $\| xu_n \| \longrightarrow 0$, B') $(u_n,\hat{x}) = I$ au voisinage de $\hat{x}_0$:

il suffira en effet de prendre $x_n = xu_n$.

DEFINITION 10 - On dit que $\mathcal{A}$ vérifie la condition de Ditkin si, quels que soient $\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}$ et $x \in \overline{\mathcal{N}(\hat{x})}$, il existe une suite u_n d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que

$\lim \| xu_n \| = 0$, $(u_n,\hat{y}) = I$ au voisinage de $\hat{x}$.

THEOREME 5 - Si $\mathcal{A}$ vérifie la condition de Ditkin, et ne possède pas d'idéaux primaires fermés non maximaux, alors pour tout idéal fermé $\mathcal{M}$ et tout élément x de l'intersection des idéaux maximaux qui contiennent $\mathcal{M}$, l'ensemble $P(\mathcal{M},x)$ est parfait dans $\hat{\mathcal{A}}$. (Silov).

Démonstration - Il faut prouver que $P(\mathcal{M};x)$ ne possède pas de point isolé dans les hypothèses faites. Or supposons qu'il existe un tel point $\hat{x}_0$, et soit V un voisinage de $\hat{x}_0$ dans $\hat{\mathcal{A}}$ ne rencontrant $P(\mathcal{M};x)$ qu'en $\hat{x}_0$. Tout d'abord, on a $(x,\hat{x}_0) = 0$, car x appartenant à tous les idéaux maximaux contenant $\mathcal{M}$, sa transformée de Fourier est nulle sur $\sigma(\mathcal{M}) \supset P(\mathcal{M};x)$.

D'autre part, $\mathcal{A}$ ne possédant pas d'idéaux primaires fermés non triviaux, on a $\overline{\mathcal{M}(\hat{x})} = \mathcal{J}(\hat{x})$ pour tout caractère, et la condition de Ditkin implique alors l'existence d'une suite u_n telle que

$$\| xu_n \| \longrightarrow 0 \quad , \quad (u_n,\hat{x}) = I \text{ au voisinage de } \hat{x}_0 .$$

$\mathcal{A}$ étant régulière, il existe un y tel que

$$(y,\hat{x}) = I \text{ au voisinage de } \hat{x}_0, \quad = 0 \text{ sur } \hat{\mathcal{A}} - V .$$

Posons alors $y_n = (x - xu_n)y$; je dis que $y_n \in \mathcal{M}$: il suffit pour le voir de montrer que la fonction $(y_n,\hat{x})$ appartient localement à $\mathcal{M}$ sur tout $\hat{\mathcal{A}}$. Or sur $\hat{\mathcal{A}} - V$ c'est évident car alors cette fonction est nulle ; pour la même raison c'est vrai au voisinage de $\hat{x}_0$; enfin, dans $V - \{\hat{x}_0\}$ -ensemble qui ne rencontre pas $P(\mathcal{M};x)$ - la fonction $(x,\hat{x})$ appartient localement à $\mathcal{M}$ (par définition de $P(\mathcal{M};x)$!) et donc aussi la fonction

$$(y_n,\hat{x}) = \left[(y,\hat{x}) - (u_n,\hat{x})(y,\hat{x})\right](x,\hat{x}) = (z,\hat{x})(x,\hat{x})$$

qui est un multiple de la première (on notera que la condition de Ditkin n'intervient qu'ici). On a donc bien $y_n \in \mathcal{M}$ comme annoncé.

Ceci étant, on a $y_n = xy - xu_n y$ et par suite $\lim y_n = xy$; $\mathcal{M}$ étant fermé, il s'ensuit que $xy \in \mathcal{M}$; mais puisque les fonctions $(xy,\hat{x})$ et $(x,\hat{x})$ coincident au voisinage de $\hat{x}_0$, on voit que x appartient localement à $\mathcal{M}$ en $\hat{x}_0$: c'est absurde.

Corollaire du Théorème 5 - Dans les hypothèses du Théorème 5, la synthèse harmonique est possible pour tout idéal fermé dont le spectre est réductible (c'est-à-dire tel que la frontière du spectre de cet idéal ne contienneaucun sous-ensemble parfait non vide). En effet, on a vu que $x \in \mathcal{M}$ équivaut à $P(\mathcal{M};x) = \emptyset$ (Prop. II)

Reamrque I - Si la synthèse harmonique est toujours possible dans une algèbre régulière ne contenant pas d'idéaux primaires fermés non maximaux; cette algèbre vérifie nécessairement la condition de Ditkin - et même une condition beaucoup plus forte, à savoir: si F est le fermé de $\hat{\mathcal{A}}$ sur lequel $(x,\hat{x}) = 0$, alors x est limite dans $\mathcal{A}$ d'éléments de la forme ux dont les transformées de Fourier sont nulles au voisinage de F. En effet, la synthèse harmonique, étant possible, l'idéal $\mathcal{N}(F)$ (Def. 2), dont le spectre est F, est partout dense dans $\mathcal{J}(F)$; comme $x \in \mathcal{J}(F)$, il en résulte que x est limite d'éléments y dont la transformée de Fourier est nulle au voisinage de F; mais pour un tel y, l'ensemble des zéros de $(y,\hat{x})$ est intérieur à l'ensemble analogue relatif à y; donc (Coroll. du Th. 2) on a $y = ux$, ce qui prouve notre assertion.

On voit donc que la condition de Ditkin s'introduit nécessairement dans la question. Bien entendu, la condition plus forte dont on vient de parler permet la synthèse harmonique; mais toute la question est précisément de ne pas utiliser cette condition, dont la vérification pratique est au moins aussi difficile que la résolution du problème dont on s'occupe ici.

Remarque 2 - Si $\mathcal{A}$ possède des idéaux primaires fermés non maximaux, on peut obtenir des résultats analogues, et, en particulier, le suivant: si une algèbre régulière et semi-simple $\mathcal{A}$ vérifie la condition de Ditkin, et si $\mathcal{M}$ est un idéal fermé vérifiant les conditions suivantes:

a) $\sigma(\mathcal{M})$ est l'adhérence de son intérieur;

b) $\sigma(\mathcal{U})$ est un ensemble réductible ,

alors $\mathcal{U}$ est l'intersection des idéaux primaires fermés qui le contiennent.

4 - Méthodes analytiques.

Les méthodes exposées dans les N° précédents appartiennent à la pure topologie générale. On va maintenant indiquer, en suivant Gelfand [2] , quelques résultats qui, au contraire, font appel à des méthodes relativement fines de la théorie des fonctions analytiques. Dans ce N°, $\mathcal{A}$ est une algèbre normée complète, commutative, avec unité -sans plus -et $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ désignera le radical de/$\mathcal{A}$ caractérisé, rappelons-le, soit par

$$\lim \| x^n \|^{1/n} = 0 \quad ,$$

soit par l'existence de $(x-\lambda e)^{-1}$ pour tout $\lambda \neq 0$.

PROPOSITION 13 - Soit $x \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ et supposons qu'il existe une constante M telle que l'on ait

$$\| (e - \lambda x)^{-1} \| \leq M . \rho^n / \cos^n \varphi \qquad (\lambda = \rho e^{i\varphi})$$

pour ρ assez grand et $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$; alors on a $x^{n+1} = 0$.

En effet, soit $P(\lambda)$ un polynome de degré n dont les zéros sont dans le demi-plan $\Im(\lambda) \leq 0$. Alors la fonction analytique

$$\phi(\lambda) = (e - \lambda x)^{-1} / P(\lambda)$$

est bornée sur l'axe réel, et on voit de plus que

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{\rho} \int_0^{\pi} \log^+ \left| \phi(\rho e^{i\varphi}) \right| \sin\varphi \, d\varphi = 0 ;$$

il résulte alors d'une variété allotropique du théorème de Phragmén-Lindelöf que ϕ est bornée dans le demi-plan supérieur, ce qui donne

$$\| (e - \lambda x)^{-1} \| \leq K \rho^n \quad \text{pour} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi ;$$

on verrait de même que l'on a une limitation analogue dans le demi-plan inférieur, en sorte que, d'après le théorème de Liouville-Gelfand, $(e - \lambda x)^{-1}$ est un polynome de degré n au plus ; on a alors $x^{n+1} = 0$ puisque

$$(e - \lambda x)^{-I} = \sum \lambda^p x^p$$

pour $|\lambda|$ assez petit.

THEOREME 6 - La synthèse harmonique est possible dans toute algèbre vérifiant les conditions suivantes:

I) il existe dans $\mathcal{A}$ un antiautomorphisme involutif $x \to x^*$ tel que

(I) $(x,\hat{x}) = \overline{(x^*,\hat{x})}$ pour tout $\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}$;

2) si $(x,\hat{x})$ ne prend que des valeurs réelles et si x n'est pas inversible, on a

(2) $$\| (x - \lambda e)^{-I} \| = o\left(\frac{1}{\Im(\lambda)^2}\right)$$ quand $\lambda \to 0$ avec $\Im(\lambda) \neq 0$.

En effet, soit $\mathcal{M}$ un idéal fermé de $\mathcal{A}$: il faut prouver que l'algèbre quotient $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ est semi-simple, donc ne contient pas de "nilpotent généralisé". Notons $x \to \dot{x}$ l'application linéaire canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}/\mathcal{M}$. Il résulte immédiatement de la condition (I) que, si $\dot{x}$ appartient au radical de $\mathcal{A}/\mathcal{M}$, il en est de même de $\dot{x^*}$, ce qui permet, en décomposant x en parties "hermitiennes", de se ramener au cas où $(x,\hat{x})$ ne prend que des valeurs réelles. Comme $\| \dot{x} \| \leqslant \| x \|$, (2) montre que l'on a à fortiori

$$\| (\dot{x} - \lambda \dot{e})^{-I} \| = o\left(\frac{1}{\Im(\lambda)^2}\right)$$ quand $\lambda \to 0$ avec $\Im(\lambda) \neq 0$;

en posant $\lambda = I/\mu$, il en résulte que

$$\| (\dot{e} - \mu \dot{x})^{-I} \| = o\left(\frac{\rho}{\cos^2\varphi}\right) \quad \text{où} \quad \mu = \rho e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})},$$

ce qui, avec la Prop. I3, permet de voir que $\dot{x} = 0$.

Signalons encore sans démonstration le résultat suivant:

si $\mathcal{A}$ possède un générateur x, dont le spectre est réel, et si l'on a une majoration de la forme

$$\| (x - \lambda e)^{-I} \| = o\left(\frac{1}{\Im(\lambda - \lambda_0)^n}\right)$$

au voisinage de tout point λ_0 du spectre de x, alors il existe, dans l'idéal maximal correspondant (ne pas oublier que, x étant un générateur, $\hat{\mathcal{A}}$ est

canoniquement homeomorphe au spectre de x dans $\mathcal{A}$)au plus n-I idéaux primaires fermés,chacun d'entre eux étant principal sur un élément $(x - \lambda_0 e)^k$ ($1 \leqslant k < n$).

Enfin,on doit à Silov un critère de régularité -dont la démonstration repose sur le théorème de Paley-Wiener:

PROPOSITION I4 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète ,commutative ,avec élément unité,et soit $(z_\nu)_{\nu \in I}$ un système de générateurs de $\mathcal{A}$;tels que les nombfes $(z_\nu, \hat{x})$ soient tous réels.Pour que $\mathcal{A}$ soit régulière,il suffit que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log \| e^{i\lambda z_\nu} \| \, d\lambda / 1 + \lambda^2 < \infty \text{ pour tout } \nu \in I .$$

(bien entendu,on pose $e^z = \sum z^n/n!$ pour tout $z \in \mathcal{A}$).

BIBLIOGRAPHIE (§ 3 et § 4)

V.Ditkin [I] On the structure of ideals in certain normed rings (Thèse, Moscou 1939 -Cf. Math.Reviews, I ,1940, p. 336)

N.Dunford [I] Spectral theory (Trans.A.M.S.,54, 1943,pp.185 -217)

I.Gelfand [I] Normierte Ringe (Math.Sbornik,9,1941,pp.3-24)

[2] Ideale und primäre Ideale in normierten Ringe (id.pp.41-48)

[3] U.absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale (id.pp51-66)

I.Gelfand-D.Raikov [I] On the theory of characters of commutative topological groups (Doklady,28,1940,pp.195-198)

I.Gelfand-G.Šilov [I] U.verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierte Ringes (Math.Sb.9,25-39)

R.Godement [I] Théorèmes tauberiens et théorie spectrale (Ann.E.N.S.1947)

E.R.Lorch [I] The spectrum of linear transformations(Trans.52,1942,pp.238-48

[2] The theory of analytic functions in normed abelian vector rings (Trans. 54,1943,pp.414-425)

[3] The structure of normed abelian rings (Bull.A.M.S.,50,1944,pp.447-463)

D.Raikov [I] Harmonic analysis in commutative groups (Trav.Inst.Stekloff, XIV,1946,86 pp.) (en russe)

I.E.Segal [I] The group algebra of a locally compact group (Trans.61,pp.69 -105)

G.Šilov [I] On regular normed rings (Trav.Inst.Stekloff,XXI,1947,118 pp.) (en russe).

CHAPITRE III - THEORIE DES $*$ -ALGEBRES NORMEES .

Ce Chapitre a pour but, comme son nom l'indique, d'étudier les algèbres normées dans lesquelles est défini un antiautomorphisme involutif $x \to x^*$, algèbres dont l'importance est capitale en théorie des groupes par exemple. Cette étude est centrée essentiellemnt sur les représentations unitaires des $*$ -algèbres-notion définie au § I , et est du reste loin d'être complète. Comme ceux du Chapitre II, les principaux résultats en sont dus à l'école russe , à savoir Gelfand, Neumark et Raikov.

Le § I concerne les propriétés générales des représentations unitaires et des formes linéaires positives définies sur une $*$-algèbre quelconque (non nécessairement normée). En dépit de son caractère intuitif, la question est remplie de canulars que le rapporteur s'est efforcé d'élucider -sans y être parvenu de façon complète. En particulier, la distinction entre représentation unitaire et représentation pré-unitaire (due, semble-t-il, au rapporteur) parait importante si l'on veut bien corstater qu'à toute représentation unitaire d'un groupe de Lie (ou, puisqu'il s'agit ici d'algèbres, de l'algèbre L' d'un tel groupe) correspond une représentation pré-unitaire de son algèbre de Lie (ou, plus exactement, de la $*$ -algèbre dont les éléments sont des opérateurs différentiels et qui est engendrée par les transformations infinitésimales du groupe en question)-phénoméne qui exprime que toute représentation unitaire du groupe est engendrée par une représentation de son algèbre de Lie. De même, la notion de forme unitaire sur une $*$-algèbre -plus restrictive que celle de forme positive -semble intéressante comme on le constatera au § 2 .

Le 2 est consacré aux $*$-algèbres normées commutatives. Il contient un exposé "abstrait" de la transformation de Fourier. Tous les résultats dans cette voie sont dus au rapporteur (par contre, il n'en est probablement pas de même des idées directrices, pour employer la terminologie de G. Bouligand).

Au § 3, nous exposons, d'après une note de Raikov, les propriétés principales des $*$-algèbres normées symétriques (c'est-à-dire dans lesquelles tout les éléments de la forme $x^* x + e$ sont inversibles); leur intérêt provient de ce que, dans une telle algèbre, toute représentation linéaire algébriquement irréductible est équivalente à une représentation pré-unitaire. Par ailleurs, on y trouvera des méthodes qui permettraient, si on le désirait, d'étudier de façon particulièrement élégante les propriétés classiques des opérateurs hermitiens.

Ces méthodes sont dues essentiellement à Gelfand et Neumark, qui les ont créées dans le but d'obtenir une caractérisation interne des algèbres d'opérateurs d'un espace de Hilbert; on trouvera leurs résultats au § 4.

Enfin, le § 5 constitue une vague tentative d'étendre aux $*$-algèbres des notions qui tournent autour de celle de trace (en théorie des groupes, il s'agit de caractères), et présente des résultats extrêmement incomplets, que l'on n'a exposés que pour donner une idée des problèmes qui se posent ; heuristiquement, on peut se demander si, pour certaines algèbres, il n'existerait pas une correspondance entre les représentations unitaires irréductibles et les homomorphismes du centre de ces algèbres dans le corps complexe, comme c'est le cas dans certaines algèbres classiques bien connues, et comme on peut le constater aussi en théorie des groupes (par exemple, ce n'est pas un hasard si, dans le cas du groupe de Lorentz par, les représentations unitai-

res irréductibles peuvent être déterminées, comme le fait Bargmann, en considérant les opérateurs différentiels qui sont invariants par les automorphismes intérieurs du groupe -c'est-à-dire précisément en étudiant le centre de l'algèbre à laquelle nous avons fait allusion en parlant du I). Il semble qu'il y ait là un sujet de recherches fort important (déjà aperçu, du reste, par von Neumann dans ses travaux sur les anneaux d'opérateurs).

I-Génralités sur les $*$-algèbres.

1-Définitions générales.

Définition 1 - On appelle $*$-algèbre une algèbre $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$ munie d'une application $x \to x^*$ de $\mathcal{A}$ sur elle-même possédant les propriétés suivantes:

(I_1) $(x+y)^* = x^* + y^*$; $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$;

(I_2) $(xy)^* = y^* x^*$;

(I_3) $(x^*)^* = x$.

dans toute la suite, une application $x \to x^*$ possédant les propriétés énumérées ci-dessus sera une involution -terme plus court que "antiautomorphisme involutif" .

Définition 2 - On appelle espace pré-hilbertien un espace vectoriel $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{C}$ muni d'une application $[X,Y] \to (X,Y)$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ sur $\mathbb{C}$ telle que:

(PH_1) (X,Y) est, pour chaque $Y \in \mathcal{H}$, une forme linéaire en X ;

(PH_2) quels que soient X et Y, on a $(X,Y) = \overline{(Y,X)}$;

(PH_3) pour tout X, on a $(X,X) \geqslant 0$, et $(X,X) = 0$ exige $X = 0$.

Il est sans doute superflu de préciser qu'un tel espace n'est pas autre chose qu'un espace de Hilbert incomplet, et peut toujours être réalisé comme sous-espace vectoriel partout dense d'un espace de Hilbert (complet, et déterminé alors à un isomorphisme près).

Définition 3 - On appelle représentation pré-unitaire d'une $*$-algèbre $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{\mathcal{H}, U_x\}$ constitué par: un espace pré-hilbert en $\mathcal{H}$ et une représentation linéaire $x \to U_x$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ telle que l'on ait

(HPU) $(U_{x^*} X, Y) = (X, U_x Y)$ quels que soient $x \in \mathcal{A}$ et $X, Y \in \mathcal{H}$.

Définition 4 - On appelle représentation unitaire d'une $*$-algèbre $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{\mathcal{H}, U_x\}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'une représentation

linéaire $x \to U_x$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ telle que :

(RU_1) pour tout x, U_x est un endomorphisme continu de $\mathcal{H}$;

(RU_2) pour tout x, on a $U_{x^*} = (U_x)^*$.

(Précisons que, ici comme dans toute la suite, on désigne par A^* l'adjoint de A lorsque A est un endomorphisme continu d'un espace de Hilbert).

Il est clair que la Définition 4 est un cas particulier de la Définition 3.

Définition 5 - On appelle représentation pré-unitaire (resp. unitaire) monogène d'une *-algèbre $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ d'une représentation pré-unitaire (resp. unitaire) $\{\mathcal{H}, U_x\}$ de $\mathcal{A}$ et d'un élément distingué X de $\mathcal{H}$ tel que les $U_x X$ constituent tout $\mathcal{H}$ (resp. soient partout denses dans $\mathcal{H}$). X est appelé l'élément générateur de la représentation considérée.

Définition 6 - On dit que deux représentations pré-unitaires $\{\mathcal{H}, U_x\}$ et $\{\mathcal{H}', U'_x\}$ de $\mathcal{A}$ sont équivalentes s'il existe un isomorphisme φ de l'espace pré-hilbertien $\mathcal{H}$ sur l'espace $\mathcal{H}'$ tel que l'on ait

$$(U_x X, Y) = (U'_x \varphi(X), \varphi(Y)) \quad \text{quels que soient } x \in \mathcal{A} \text{ et } X, Y \in \mathcal{H} .$$

Bien entendu, cette notion s'applique aussi aux représentations unitaires.

Définition 7 - On dit que deux représentations pré-unitaires monogènes $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ et $\{\mathcal{H}', U'_x, X'\}$ de $\mathcal{A}$ sont équivalentes si les représentations pré-unitaires correspondantes le sont ausens de la Définition 6 et si l'on peut en outre choisir l'isomorphisme φ de la Définition 6 de telle sorte que l'on ait

$$X' = \varphi(X) .$$

Définition 8 - On dit qu'une forme linéaire f(x) définie sur une *-algèbre $\mathcal{A}$ est positive si elle possède les propriétés suivantes:

(FLP_1) $f(x^*) = \overline{f(x)}$; (FLP_2) $f(x^* x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

On observera que dans de nombreux cas la condition (FLP_2) implique (FLP_1).

Ces définitions indispensables étant posées, indiquons dès maintenant que les principaux problèmes posés par la théorie des $*$-algèbres sont les suivants:

I° - Existence de représentations unitaires et décomposition de celles-ci en "éléments simples" (c'est-à-dire irréductibles en un sens qui sera précisé plus loin);

2° - Relations entre ces représentations et les propriétés algèbriques des $*$-algèbres considérées.

Il est sans doute superflu de préciser que ces problèmes sont actuellement loin d'être résolus en toute généralité, et même que l'existence d'une solution générale est on ne peut plus douteuse.

Dans le cas qui nous intéressera le plus souvent, il est undispensable de compléter la série des définitions précédentes par la suivante:

Définition 9 - On dit qu'une représentation unitaire $\{\mathcal{H}, U_x\}$ d'une $*$-algèbre $\mathcal{A}$ est bornée si l'on a l'inégalité

$$\| U_x \| \leqslant \| x \| \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

On pourrait croire que cette définition soit trop restrictive, mais on verra qu'en fait il n'en est rien dans la plupart des cas intéressants. Précisons aussi que la notation $\| A \|$, où A est un endomorphisme continu d'un espace de Hilbert, désigne la norme de l'opérateur A au sens habituel.

Définition 10 - $\mathcal{A}$ étant une $*$-algèbre normée, on dit que l'involution de $\mathcal{A}$ est continue si l'on a

$$\| x^* \| = \| x \| \quad \text{quel que soit } x \in \mathcal{A}.$$

Ici encore, la restriction n'est qu'apparente, car si l'on a

$$\| x^* \| \leqslant M. \| x \|$$

où M est une constante finie et positive, il est facile de se ramener à la Définition IO en remplaçant la norme donnée par une norme équivalente-et ce, bien entendu, sans détruire la structure d'algèbre normée de $\mathcal{A}$.

Le prototype de toutes les $*$-algèbres normées que l'on rencontre dans la pratique est constitué par l'algèbre de tous les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, munie de la norme et de l'involution bien connues qu'on peut y définir. Il est clair que dans ce cas la Définition IO est satisfaite -ainsi que d'autres propriétés que l'on trouvera au § 4.

Notons enfin la

Définition II - $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ étant deux $*$-algèbres, on dit qu'un homomorphisme φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ est un $*$-homomorphisme s'il vérifie la condition

$$\varphi(x^*) = \varphi(x)^* \quad .$$

2 - Formes linéaires positives et représentations unitaires.

PROPOSITION I - Pour toute représentation pré-unitaire (resp. unitaire) monogène $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ d'une $*$-algèbre $\mathcal{A}$, la formule

$$(I) \qquad f(x) = (U_x X, X)$$

définit une forme linéaire positive f sur $\mathcal{A}$, dont la connaissance détermine, à une équivalence près, la représentation en question.

Que f soit linéaire et positive est évident. Si $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ et $\{\mathcal{H}', U'_x, X'\}$ déterminent la même forme f, on aura

$$(2) \qquad (U_x X, U_y X) = (U'_x X', U'_y X') \quad \text{quels que soient x et y}$$

d'où un isomorphisme φ de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ tel que l'on ait

$$(3) \qquad U'_x X' = \varphi(U_x X) \ ;$$

on aura en outre

puisque φ conserve le produit scalaire mais par hypothèse on a

(5) $\qquad (X, U_x X) = (X', U'_x X')$

d'où en comparant (3),(4) et (5) :

(6) $\qquad (\varphi(X), U'_x X') = (X', U'_x X')$;

les $U'_x X'$ constituant tout $\mathcal{H}$ (resp.étant partout denses dans $\mathcal{H}$)il suit de là que

(7) $\qquad X' = \varphi(X)$

ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 2 - Soit f une forme linéaire positive sur $\mathcal{A}$;l'ensemble des $x \in \mathcal{A}$ tels que $f(x^* x) = 0$ constitue un idéal à gauche de $\mathcal{A}$.

En effet,il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

(8) $\qquad |f(y^* x)|^2 \leqslant f(x^* x) f(y^* y)$

que la condition

$f(x^* x) = 0$ équivaut à $f(y^* x) = 0$ pour tout $y \in \mathcal{A}$,

ce qui rend la Prp.2 évidente.

Si f est une forme linéaire positive sur $\mathcal{A}$,on peut définir une représentation pré-unitaire de $\mathcal{A}$ de la façon suivante:

considérons l'idéal à gauche $\mathfrak{n}$ défini par $f(x^* x) = 0$,et soit $x \to \dot{x}$ l'application linéaire canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}/\mathfrak{n}$;l'expression $f(y^* x)$ ne dépend que de $\dot{x}$ et $\dot{y}$,et en posant

(9) $\qquad (\dot{x}, \dot{y})_f = f(y^* x)$

on définit sur $\mathcal{A}/\mathfrak{n}$ une structure d'espace pré-hilbertien;si alors on introduit la représentation linéaire gauche canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}/\mathfrak{n}$,soit $x \to U_x$,on obtient une représentation pré-unitaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}/\mathfrak{n}$,car

(10) $\qquad (U_{x^*} \dot{y}, \dot{z})_f = f(z^* x^* y) = f((xz)^* y) = (\dot{y}, U_x \dot{z})_f$.

Nous appellerons celle-ci la représentation pré-unitaire canonique de $\mathcal{A}$ des

finie par f.

PROPOSITION 3 - Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre avec élément unité; toute forme linéaire positive f définie sur $\mathcal{A}$ admet une représentation de la forme

(I) $\quad f(x) = (U_x X, X)$

où $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ est une représentation pré-unitaire monogène de $\mathcal{A}$, entièrement déterminée (à une équivalence près) par la donnée de f, et réciproquement.

En effet, (I0) implique

(I2) $\quad f(x) = (U_x \dot{e}, \dot{e})_f$,

et comme les $U_x \dot{e} = \dot{x}$ constituent tout $\mathcal{A}/\mathcal{M}$, la représentation cherchée n'est autre que $\{\mathcal{A}/\mathcal{M}, U_x, \dot{e}\}$. Le reste de la Prop. résulte de la Prop. I.

Définition I2 - On dit qu'une forme linéaire positive f définie sur une $*$-algèbre $\mathcal{A}$ est pré-unitaire s'il existe une représentation pré-unitaire $\{\mathcal{H}, U_x\}$ de $\mathcal{A}$ telle que l'on ait

(I3) $\quad f(x) = (U_x X, X)$

pour un élément X convenable de $\mathcal{H}$.

Bien entendu, cette définition est vide pour les algèbres avec unité - d'après la Prop. 3.

PROPOSITION 4 - Pour qu'une forme linéaire positive f soit pré-unitaire, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes:

a) f est la restriction à $\mathcal{A}$ d'une forme linéaire positive définie sur la $*$-algèbre déduite de $\mathcal{A}$ par adjonction d'un élément unité;

b) il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que l'on ait

(I4) $\quad |f(x)|^2 \leqslant M.f(x^* x)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

Nécessité de la condition. Soit $\mathcal{B}$ la $*$-algèbre déduite de $\mathcal{A}$ par adjonction d'un élément unité -dans laquelle l'involution est donnée par

(I5) $\quad (x + \lambda e)^* = x^* + \bar{\lambda} e$;

si f est pré-unitaire sur $\mathcal{A}$, et si l'on a (I3), il est clair que la formule $x + \lambda e \to U_x + \lambda 1 = U_{x+\lambda e}$ définit une représentation pré-unitaire de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{H}$, et que f sera la restriction à $\mathcal{A}$ de la forme positive g définie sur $\mathcal{B}$ par

(I6) $\quad g(x + \lambda e) = (U_{x+\lambda e} X, X)$.

Réciproquement, si la condition a) est vérifiée, f sera pré-unitaire en vertu de la Prp.3.

Reste à montrer que a) équivaut à b); or si a) est vérifiée et si f est la restriction de g, on aura d'après Cauchy-Schwartz

(I7) $\quad |f(x)|^2 = |g(x)|^2 = |g(e^* x)|^2 \leqslant g(e) g(x^* x) = M . f(x^* x)$

d'où b). Réciproquement, b) implique a) comme on le voit en introduisant sur $\mathcal{B}$ la forme

(I8) $\quad g(x + \lambda e) = f(x) + M\lambda$.

PROPOSITION 5 - Soit f une forme linéaire positive quelconque sur $\mathcal{A}$; pour tout $s \in \mathcal{A}$, la formule

(I9) $\quad g(x) = f(s^* x s)$

définit une forme linéaire positive pré-unitaire sur $\mathcal{A}$.

En effet, si l'on considère la représentation pré-unitaire canonique de $\mathcal{A}$ définie par f, on a

(20) $\quad g(x) = (U_x \dot{s}, \dot{s})_f$,

d'où la Prop.5 -qui résulte aussi de la Prop.4 et de l'inégalité évidente

(2I) $\quad |g(x)|^2 \leqslant f(s^* s) g(x^* x)$.

Examinons maintenant le cas des représentations unitaires. Nous poserons de même la

Définition I3 - On dit qu'une forme linéaire positive f sur $\mathcal{A}$ est unitaire s'il existe une représentation unitaire $\{\mathcal{H}, U_x\}$ de $\mathcal{A}$ telle que

(22) $\qquad f(x) = (U_x X, X)$

pour un élément convenable X de $\mathcal{H}$.

Remarque- On pourra toujours supposer que $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ est monogène -au besoin en substituant à $\mathcal{H}$ le sous-espace fermé $\mathcal{H}'$ sous-tendu par les $U_x X$ et à X sa projection orthogonale sur $\mathcal{H}'$, comme on le voit facilement (par contre, le raisonnement analogue n'est pas valable pour les représentations pré-unitaires).

THEORÈME I - Pour qu'une forme linéaire positive f définie sur $\mathcal{A}$ soit unitaire, il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions suivantes:

(FU_1) il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$|f(x)|^2 \leq M.f(x^*x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} ;$$

(FU_2) pour chaque $x \in \mathcal{A}$, il existe une constante $M_x \geq 0$ telle que

$$f(y^*x^*xy) \leq M_x.f(y^*y) \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{A} .$$

Nécessité des conditions. (FU_1) exprime que f est pré-unitaire, ce qui est évidemment nécessaire; si on a

$$f(x) = (U_x X, X)$$

on aura, puisque par hypothèse les U_x sont continus:

$$f(y^*x^*xy) = (U_x U_y X, U_x U_y X) \leq \|U_x\|^2 (U_y X, U_y X) = \|U_x\|^2 f(y^*y)$$

d'où (FU_2).

Suffisance des conditions. D'après (FU_1), f est la restriction à $\mathcal{A}$ d'une forme positive g définie sur l'algèbre $\mathcal{B}$ déduite de $\mathcal{A}$ par adjonction d'un élément unité e. Considérons alors la représentation pré-unitaire canonique de $\mathcal{B}$ définie par g -soit $\{\mathcal{H}, U_{x+\lambda e}, X\}$ où les transformés de X par les opérateurs de la représentation forment tout $\mathcal{H}$. Désignons par $\mathcal{E}$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathcal{H}$, et par $\mathcal{L}$ le sous-espace

vectoriel fermé de $\mathcal{E}$ engendré par les éléments $U_x X$ où $x \in \mathcal{A}$. On aura d'après (FU_2)

$$(23) \qquad (U_x U_y X, U_x U_y X) = f(y^* x^* xy) \leqslant \|x\|^2 (U_y X, U_y X)$$

ce qui prouve que les endomorphismes U_x sont prolongeables par continuité à tout $\mathcal{L}$, et y constituent évidemment une représentation unitaire de $\mathcal{A}$? Deux cas peuvent alors se présenter:

I°) $\mathcal{L}$ contient X; alors la formule

$$(24) \qquad f(x) = (U_x X, X)$$

(déduite de la formule correspondante pour g) prouve que f est unitaire;

2°) $\mathcal{L}$ ne contient pas X; comme les $U_{x+\lambda e} X = U_x X + \lambda X$ sont partout denses dans $\mathcal{E}$, c'est que $\mathcal{L}$ est un hyperplan fermé de $\mathcal{E}$, et que tout $Y \in \mathcal{E}$ est de la forme

$$(25) \qquad Y = Z + \lambda X \qquad \text{où } Z \in \mathcal{L} .$$

Si l'on pose alors, pour un Y de la forme (25),

$$(26) \qquad U_x Y = U_x Z + \lambda U_x X$$

(ce qui a un sens puisque les U_x sont définis dans $\mathcal{L}$), on obtient une représentation linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$, qui est réalisée par des endomorphismes continus de $\mathcal{E}$, et qui constitue même une représentation unitaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$; en effet, si

$$(27) \qquad Y' = Z' + \lambda' X \qquad \text{où } Z' \in \mathcal{L}$$

est un autre élément de $\mathcal{E}$, on aura

$$(28) \qquad (U_x^* Y, Y') = (U_x^* Z, Z') + \lambda (U_x^* X, Z') + \bar{\lambda}' (U_x^* Z, X) + \lambda \bar{\lambda}' (U_x^* X, X);$$

comme U_x est une représentation unitaire dans $\mathcal{L}$, on aura

$$(29) \qquad (U_x^* Z, Z') = (Z, U_x Z') \quad ;$$

comme Z et Z' sont dans $\mathcal{L}$, donc limites fortes d'éléments de la forme $U_y X$ et $U_{y'} X$ respectivement, et comme les U_x sont continus dans $\mathcal{L}$, on aura

(30) $(U_x * X, Z') = \lim(U_x * X, U_z X) = \lim(X, U_x^* U_z X) = (X, U_x Z')$;

(31) $(U_x * Z, X) = \lim(U_x U_z Z, X) = \lim(U_z Z, U_x^* X) = \lim_{z} (Z, U_x X)$;

enfin on aura

(32) $(U_x * X, X) = (X, U_x X)$

puisque l'on est parti d'une représentation pré-unitaire monogène dont X est l'élément générateur. En comparant les équations qu'on vient d'écrire avec (26), on voit que

(33) $(U_x * Y, Y') = (Y, U_x^* Y')$

vaut pour tout couple d'éléments Y et Y' de $\mathcal{E}$ -ce qui prouve à la fois (puisque $\mathcal{E}$ est complet) la continuité des U_x et le fait qu'ils constituent une représentation unitaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$. La formule (24) achève alors la démonstration du Théorème.

Remarque. La démonstration précédente se simplifie considérablement lorsque $\mathcal{A}$ possède un élément unité (le 2°) est alors superflu). On notera aussi que, dans ce cas, la condition (FU) est inutile, car on a

(34) $|f(x)|^2 \leq f(e) f(x^* x)$.

3 - Représentations unitaires irréductibles.

Définition 14 - On dit qu'une représentation unitaire $\{\mathcal{H}, U_x\}$ de $\mathcal{A}$ est irréductible (topologiquement) s'il n'existe aucun sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, autre que $\mathcal{H}$ et $\{0\}$, qui soit invariant par les U_x .

On aura soin de distinguer cette notion de celle d'irréductibilité algébrique -beaucoup plus forte, et qui ne présente d'intérêt, semble-t-il, que pour les représentations pré-unitaires.

PROPOSITION 6 - Pour qu'une représentation unitaire $\{\mathcal{H}, U_x\}$ de $\mathcal{A}$ soit irréductible, il faut et il suffit que tout opérateur hermitien borné H défini dans $\mathcal{H}$ et vérifiant les conditions

(35) $0 \leq H \leq 1$; $H.U_x = U_x.H$ pour tout $x \in \mathcal{A}$

se réduise à un scalaire; dans ce cas, il n'existe, en dehors des scalaires,

aucun opérateur linéaire borné dans $\mathcal{H}$ qui permute aux U_x.

Démonstration- Si H permute aux U_x, il en est de même des projecteurs qui interviennent dans sa décomposition spectrale, lesquels sont par conséquent associés à des sous-espaces vectoriels fermés invariants par les U_x, et finalement se réduisent à 0 ou à 1 si la représentation est irréductible. Donc la décomposition spectrale de H est triviale et H est un scalaire. Si un opérateur A borné quelconque permute aux U_x, il en est de même des hermitiens $A + A^*$ et $i(A - A^*)$ -et ce parceque les U_x forment une algèbre stable par l'involution naturelle des opérateurs - lesquels sont donc des scalaires d'après le raisonnement précédent; la propriété correspondante pour A lui-même en résulte immédiatement.

Réciproquement, si la représentation est réductible, et si le sous-espace fermé $\mathcal{M}$, non trivial, est stable par les U_x, l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathcal{M}$ vérifie les hypothèses de la Prop.6, d'où la suffisance des conditions énoncées.

Avant d'étudier plus à fond les représentations unitaires irréductibles, démontrons quelques propriétés importantes des formes unitaires.

Définition 15 - Etant données deux formes linéaires positives f et g sur $\mathcal{A}$, on dit que f majore g (notation $f > g$ ou $g < f$) si la forme linéaire f - g est elle-même positive.

Il est clair que l'on définit ainsi une relation d'ordre dans l'ensemble des formes linéaires positives sur $\mathcal{A}$, laquelle est visiblement compatible avec les opérations que l'on peut effectuer sur les formes en question (addition et produit par un scalaire positif); enfin, la relation $f > g$ est équivalente à

$$(36) \qquad f(x^*x) \geqslant g(x^*x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A}_0.$$

PROPOSITION 7 - Toute combinaison linéaire à coefficients positifs de formes

unitaires est elle-même une forme unitaire.

Il suffit de le montrer pour f + g;or si l'on introduit les re résentations unitaires monogènes $\{\mathcal{E},U_x,X\}$ et $\{\mathcal{F},V_x,Y\}$ de $\mathcal{A}$ définies par f et g respectivement,et si l'on considère,dans le produit direct $\mathcal{G} = \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ des espaces de Hilbert $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$,les opérateurs W_x définis par

$$(37) \qquad W_x[X',Y'] = [U_xX',V_xY'] ,$$

on obtient visiblement une représentation unitaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{G}$,et la formule

$$(38) \qquad f(x) + g(x) = (W_x[X,Y],[X,Y])$$

démontre alors la Prop.7.

Proposition 8 - Sur une $*$-algèbre avec élément unité,toute forme linéaire positive majorée par une forme unitaire est elle-même unitaire.

En effet,soit

$$(39) \qquad f(x) = (U_xX,X)$$

une forme unitaire définissant une représentation unitaire monogène $\{\mathcal{H},U_x,X\}$ de $\mathcal{A}$,et considérons une forme positive g majorée par f.On aura donc

$$(40) \quad 0 \leq g(x^*x) \leq (U_xX,U_xX)$$

en sorte que $U_xX = 0$ implique $g(x^*x) = 0$ et par suite $g(yx) = 0$ pour tout $y \in \mathcal{A}$;on peut donc poser

$$(41) \qquad g(y^*x) = \langle U_xX,U_yX \rangle$$

où le second membre est une forme bilinéaire hermitienne définie sur le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ formé par les U_xX ;comme on a de plus par hypothèse

$$(42) \qquad 0 \leq \langle U_xX,U_xX \rangle \leq (U_xX,U_xX) \quad \text{pour tout } x,$$

on voit que la forme bilinéaire en question est prolongeable par continuité à $\mathcal{H}$ tout entier,et définit dans $\mathcal{H}$ un opérateur hermitien H tel que

(43) $\langle U_x X, U_y X \rangle = (HU_x X, U_y X)$ quels que soient x et y ;

il est clair sur (42) que $0 \leq H \leq 1$;par ailleurs,de

(44) $(HU_z U_x X, U_y X) = \omega(y^* zx) = g((z*y)^* x) = (HU_x X, U_z U_y X)$

et du fait que les $U_x X$ sont partout denses dans $\mathcal{H}$ résulte

(45) $HU_x = U_x H$ pour tout $x \in \mathcal{A}$;

(44) et (45) impliquent

(46) $g(y^* x) = (U_x HX, U_y X)$ quels que soient x et y ;

posons alors

(47) $Y = H^{1/2} X$ ($H^{1/2}$ désigne la racine carré positive de H);

$H^{1/2}$ est comme H permutable aux U_x ,et (46) s'écrit

(48) $g(y^* x) = (U_x Y, U_y Y)$

d'où la Prop.8 dans le cas où $\mathcal{A}$ possède un élément unité(faire y = e dans (48)).

Remarque- Dans le cas général,la Prop.8 est encore vraie sous certaines réserves;en effet,(48) donne

(48') $g(y^* x) = (U_y *_x Y, Y)$

en sorte que l'on pourra affirmer que l'on a

(49) $g(x) = (U_x Y, Y)$

si,par exemple ,les éléments de la forme $\sum x_i y_i$ constituent tout $\mathcal{A}$; ou encore,dans le cas où, $\mathcal{A}$ étant une algèbre normée,ces éléments sont partout denses dans $\mathcal{A}$ (les formes considérées devant être alors supposées continues).On étudiera plus loin cette question.

THEOREME 2 - Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre arbitraire.Pour que la représentation unitaire canonique de $\mathcal{A}$ définie par une forme positive unitaire f sur soit irréductible,il faut et il suffit que toute forme unitaire g majorée par f soit proportionnelle à f.

Suffisance de la condition. Soit $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ la représentation unitaire monogène de $\mathcal{A}$ définie par f - en sorte que

(50) $\quad f(x) = (U_x X, X)$ -

et #supposons-la réductible;il existe donc un hermitien non trivial H vérifiant

(5I) $\quad 0 \leqslant H \leqslant 1 \quad ; \quad H.U_x = U_x.H$,

d'où l'on déduit immédiatement que la formule

(52) $\quad g(x) = (HU_x X, X) = (U_x Y, Y) \quad$ où $\quad Y = H^{1/2}X$

définit une forme unitaire g telle que $g < f$,et qui,H n'étant pas un scalaire, n'est pas proportionnelle à f.

Nécessité de la condition.Supposons la représentation en question irréductible ,et soit g une forme unitaire majorée par f;la démonstration de la Prop.8 prouve alors l'existence dans $\mathcal{H}$ d'un hermitien H tel que l'on ait (5I) et

(53) $\quad g(y^*x) = (HU_{y^*x}X, X) \quad$ quels que soient x et y;

en vertu de la Prop.6,H est un scalaire et on a donc

(54) $\quad g(y^*x) = \lambda f(y^*x) \quad$ où $\quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$:

il reste à déduire de là que g est proportionnelle à f(ce qui serait évident si $\mathcal{A}$ possèdait un élément unité).

Or g est par hypothèse unitaire,donc de la forme

(55) $\quad g(x) = (V_x Y, Y)$

où $\{\mathcal{K}, V_x, Y\}$ est une représentation unitaire monogène convenable de $\mathcal{A}$; en introduisant l'élément $X' = H^{1/2}X$ de $\mathcal{H}$,(53) et (55) donnent

(56) $\quad (V_x Y, V_y Y) = \lambda (U_x X', U_y X')$;

deux cas peuvent alors se présenter:

a) $\lambda = 0$;alors $g(x^*x) = 0$ pour tout x et,g étant unitaire,g = 0 auquel cas le Théorème est démontré;

b) $\lambda \neq 0$;((56) s'écrit alors

(57) $(V_x Y, V_y Y) = (U_x X_1, U_y X_1)$ où $X_1 = \lambda^{I/2} X \neq 0$;

comme les $U_x X$ sont partout denses dans $\mathcal{H}$, il en est de même des $U_x X_1$, et (57) prouve l'existence d'un isomorphisme φ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{K}$ tel que

(58) $V_x Y = \varphi(U_x X_1)$ - d'où $\varphi \cdot U_x = V_x \cdot \varphi$,

et on aura par conséquent, en vertu de (55),

(59) $g(x) = (U_x Z, Z)$ où $Z = \varphi^{-1}(Y)$.

Mais (58) prouve aussi que

(60) $g(x) = (U_x X_1', Z) = (U_x X, Z_1)$ où $Z = \lambda^{I/2} Z$;

en comparant (60) et (54), on tire de là

(61) $(U_x X, U_y(Z_1 - \lambda X)) = 0$ quels que soient x et y,

ce qui implique, puisque les $U_x X$ sont partout denses, que $U_y(Z_1 - \lambda X) = 0$ pour tout y; mais alors le sous-espace fermé de dimension un constitué par les multiples de $Z_1 - \lambda X$ est invariant par les U_x, donc est nul-auquel cas $Z_1 = \lambda X$ -ou bien est confondu avec $\mathcal{H}$ tout entier -auquel cas $Z_1 = \mu X$ avec un scalaire μ convenable; dans tous les cas, on voit que Z_1 est proportionnel à X, ce qui, conjugué à (60), achève la démonstration.

Définition I6 - On dit qu'une forme unitaire sur $\mathcal{A}$ est élémentaire si la représentation unitaire de $\mathcal{A}$ qu'elle définit est irréductible.

Si $\{\mathcal{H}, U_x\}$ est une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{A}$, on peut la définir au moyen d'une infinité de formes élémentaires-à savoir toutes les formes

(62) $f(x) = (U_x X, X)$

où X est un élément arbitraire de $\mathcal{H}$ (non nul bien entendu). Cela résulte du fait que, la représentation étant irréductible, les $U_x X$ (qui forment un sous-espace vectoriel invariant de $\mathcal{H}$) sont partout denses dans $\mathcal{H}$.

PROPOSITION 9 - Si f est une forme élémentaire sur $\mathcal{A}$,il en est de même des formes

(63) $\quad g(x) = f(s^* xs)$ pour tout $s \in \mathcal{A}$.

Car si

$f(x) = (U_x X, X)$ on a $g(x) = (U_x Y, Y)$ où $Y = U_s X$.

Si l'on considère l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué par les formes linéaires f définies sur $\mathcal{A}$ et vérifiant

(64) $\quad f(x^*) = \overline{f(x)}$,

il est clair que les formes positives en constituent un cône convexe P,et que les formes unitaires définissent de même un cône convexe P_u (contenu dans P)-et ce en vertu de la Prop.7.On a même la

PROPOSITION IO - Les formes unitaires f sur $\mathcal{A}$ forment un cône strictement convexe P_u - c'est-à-dire que si f et -f sont unitaires,on a f = 0 .

En effet si f et -f sont positives on a trivialement $f(x^* x) = 0$ pour tout x,ce qui -d'après (FU) -implique f = 0 lorsqu'il s'agit de formes unitaires

Définition I? - f étant une forme pré-unitaire sur u e $*$-algèbre $\mathcal{A}$,on appelle norme de f la plus petite constante positive $\| f \|$ telle que

(65) $\quad |f(x)|^2 \leq \| f \| \cdot f(x^* x)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

Cette définition a un sens d'après la Prop.4,et elle s'applique en particulier aux formes unitaires.

PROPOSITION II - Soit $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ la représentation unitaire monogène de $\mathcal{A}$ définie par une forme unitairef;on a alors

(66) $\quad \| f \| = (X,X)$.

En effet,les $U_x X$ étant partout denses dans $\mathcal{H}$,on a d'après une propriété classique du produit scalaire:

(67) $\quad (X,X) = \sup \dfrac{|(U_x X, X)|^2}{(U_x X, U_x X)} = \sup \dfrac{|f(x)|^2}{f(x^* x)}$,

d'où immédiatement la Prop.II.

Il est clair en particulier que si $\mathcal{A}$ possède un élément unité, on a

(68) $\quad \|f\| = f(e)$.

PROPOSITION I2 - Soient f et g deux formes unitaires sur $\mathcal{A}$; on a

(69) $\quad \|f\| + \|g\| = \|f + g\|$.

Démonstration- Soient $\{\mathcal{F}, U_x, X\}$ et $\{\mathcal{G}, V_x, Y\}$ les représentations unitaires monogènes associées à f et g respectivement; on a

(70) $\quad f(x) = (U_x X, X)$ et $\|f\| = (X,X)$;

(71) $\quad g(x) = (V_x Y, Y)$ et $\|g\| = (Y,Y)$.

Introduisons (cf. la démonstration da la Prop.7) l'espace de Hilbert $\mathcal{L} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, et posons

(73) $\quad Z = [X,Y]$; $\quad W_x[X',Y'] = [U_x X', V_x Y']$,

d'où une représentation unitaire de $\mathcal{A}$, pour laquelle on a

(74) $\quad f(x) + g(x) = (W_x Z, Z)$;

si l'on désigne par $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}$ engendré par les $W_x Z$ -lequel est évidemment invariant par les W_x - et par $Z' = [X',Y']$ la projection orthogonale de Z sur $\mathcal{H}$, on constate que

I°) pour tout x, on a $\quad W_x Z' = W_x Z$;

2°) on a $\quad f(x) + g(x) = (W_x Z', Z')$.

(On laisse au lecteur le soin d'établir ce point qui ne présente pas de difficulté essentielle).

Il résulte de là que les $W_x Z'$ sont partout denses dans $\mathcal{H}$, et que, par suite, la représentation unitaire monogène associée à f + g n'est autre que - à une équivalence près - $\{\mathcal{H}, W_x, Z'\}$; en conséquence, il vient

(75) $\quad \|f + g\| = (Z',Z') = (X',X') + (Y',Y')$.

Mais I°) s'écrit aussi

$$0 = (X', U_x(X - X')) = (U_x X', X - X') =$$

et finalement en utilisant à nouveau (21')

$$(76) \qquad U_x X = U_x X' \quad ; \quad V_x Y = V_x Y' \quad ,$$

en sorte que l'on a

$$0 = (X', U_x(X - X')) = (U_x X', X - X') = (U_x X', X) - (U_x X', X')$$

et finalement, en utilisant à nouveau (76) :

$$(77) \qquad f(x) = (U_x X, X) = (U_x X', X') \quad .$$

Comme les $U_x X' = U_x X$ sont partout denses dans $\mathcal{F}$, on voit que la représentation unitaire monogène définie par f est isomorphe à $\{\mathcal{F}, U_x, X'\}$ et que, par suite, on a

$$(78) \qquad \|f\| = (X', X') \; ;$$

pour la même raison, on a

$$(79) \qquad \|g\| = (Y', Y') \quad ;$$

la comparaison de (78) et (79) avec (75) démontre la Proposition.

<u>COROLLAIRE DE LA PROPOSITION</u> I2 - <u>Les formes unitaires</u> f <u>définies sur</u> $\mathcal{A}$ <u>et telles que</u> $\|f\| \leq 1$ <u>forment un ensemble convexe</u> P_u^o .

En effet, on a

$$(80) \qquad \|\alpha f + \beta g\| = \alpha \|f\| + \beta \|g\| \quad \text{quels que soient } \alpha \text{ et } \beta \geq 0 \; .$$

<u>THEOREME</u> 3 - <u>Les points extrémaux de l'ensemble convexe</u> P_u^o <u>sont les suivants</u>:

a) <u>la forme</u> $f = 0$;

b) <u>les formes élémentaires f telles que</u> $\|f\| = I$.

Que 0 soit un point extrémal de P_u^o est évident d'après la Prop.IO.

Soit f un point extrémal non nul; on a d'abord $\|f\| = I$ -sinon f serait <u>intérieur</u> au segment $\left[0, \dfrac{f}{\|f\|}\right]$ de P_u^o. Pour montrer que f est élémentaire, soit g une forme unitaire majorée par f -d'où

$$(8I) \qquad f = g + h \quad \text{où } h \in P_u \; ;$$

si l'on suppose la décomposition (8I) non triviale (ce qu'on est en droit de faire), on a $g \neq 0$ et $h \neq 0$, et (8I) s'écrit encore

(82) $$f = \|g\| \frac{g}{\|g\|} + \|h\| \frac{h}{\|h\|} ,$$

or on a

(83) $$\|g\| + \|h\| = \|f\| = 1 ;$$

(84) $$\left\| \frac{g}{\|g\|} \right\| = 1 , \quad \left\| \frac{h}{\|h\|} \right\| = 1 ,$$

en sorte que (82) exprime que f est situé sur le segment de P_u° dont les extrémités sont $g/\|g\|$ et $h/\|h\|$;f étant point extrémal de P_u°,la décomposition (82) doit être triviale,d'où l'on déduit immédiatement que g est proportionnelle à f :par conséquent(Théorème 2)f est élémentaire.

Réciproquement,si $f \in P_u^\circ$ est élémentaire et si $\|f\| = 1$,f est un point extrémal de P_u° ;car si f est sur le segment $[g,h]$ de P_u° ,on voit que g et h sont majorées par des formes du type nf,donc sont proportionnelles à f ce qui, avec les conditions

$$\|f\| = 1, \quad \|g\| \leq 1, \quad \|h\| \leq 1,$$

exige que f soit confondue avec g ou h .

Remarque- Le raisonnement précédent est dû essentiellement à Gelfand et Raïkov .

4-Cas des algèbres normées.

Les résultats exposés dans les N° précédents peuvent se compléter considérablement lorsqu'il s'agit de $*$-algèbres normées.

PROPOSITION 13 - Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre normée complète.Pour toute forme linéaire continue et positive f définie sur $\mathcal{A}$,on a

(85) $$f(y^* x^* xy) \leq f(y^* y).\lim \|(x^* x)^n\|^{1/n} .$$

En effet,il résulte de Cauchy-Schwartz que

(86) $$f(y^* x^* xy)^2 \leq f(y^* y) f(y^* (x^* x)^2 y) ,$$

ou encore

$$(87)\qquad f(y^*x^*xy) \leq f(y^*y)^{1/2} f(y^*(x^*x)^2 y)^{1/2} ,$$

d'où l'on déduit en itérant que

$$(88)\qquad f(y^*x^*xy) \leq f(y^*y)^{1/2+\ldots+1/2^n} f(y^*(x^*x)^{2^n}y)^{1/2^n}$$
$$\leq f(y^*y)^{1/2+\ldots+1/2^n} \|f\|^{1/2^n} \|y^*\|^{1/2^n} \cdot \|(x^*x)^{2^n}\|^{1/2^n} \cdot \|y\|^{1/2^n} ;$$

en faisant tendre n vers l'infini, on aboutit à l'inégalité cherchée.

Remarque - Ne pas confondre la norme de f qui apparait dans (88) avec celle définie au N° précédent (bien que dans de nombreux cas les deux notions coincident).

Remarque - Dans le cas où $\mathcal{A}$ possède un élément unité, on déduit de (86)

$$(89)\qquad f(x^*x) \leq f(e).\lim \|(x^*x)^n\|^{1/n} ,$$

propriété démontrée par Raikov.

THEOREME 4 - *Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre normée complète; pour qu'une forme linéaire continue et positive f définie sur $\mathcal{A}$ soit unitaire, il faut et il suffit qu'il existe une constante M telle que l'on ait*

$$(FU_1)\qquad |f(x)|^2 \leq M.f(x^*x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} ;$$

si en particulier $\mathcal{A}$ possède un élément unité, toute forme linéaire continue et positive sur $\mathcal{A}$ est unitaire.

En effet, la Prop. 13 implique visiblement la condition (FU_2).

Un autre résultat fondamental est le suivant:

THEOREME 5 - *Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre normée, complète et munie d'une involution continue; alors toute représentation unitaire de $\mathcal{A}$ est continue, et toute forme unitaire f définie sur $\mathcal{A}$ vérifie*

$$(90)\qquad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \lim \|x^n\|^{1/n}$$

(en particulier est continue).

En effet, soit $\{\mathcal{H}, U_x\}$ une représentation unitaire de $\mathcal{A}$; comme λx^*x est quasi-inversible pour tout λ tel que

$$|\lambda| \leq 1 / \lim \| (x^* x)^n \|^{1/n} ,$$

d'où il suit que le spectre de l'opérateur hermitien positf $U_{x^* x}$ est contenu dans le cercle de rayon $\lim \| (x^* x)^n \|^{1/n}$;de l'inégalité

$$(91) \quad \| U \|^2 = \| U^* U \|$$

valable pour tout opérateur borné d'un espace de Hilbert;on tire alors

$$(92) \quad \| U_x \|^2 \leq \lim \| (x^* x)^n \|^{1/n}$$

d'où,si $\| x \| = \| x^* \|$,

$$(93) \quad \| U_x \| \leq \lim \| x^n \|^{1/n} \leq \| x \| :$$

ce qui démontre la continuité de la représentation.

Si alors f est une forme unitaire sur $\mathcal{A}$,et si l'on a

$$f(x) = (U_x X, X) ,$$

il résulte de (93) que

$$(94) \quad | f(x) | \leq \| U_x \| \cdot (X,X) \leq \| f \| \cdot \lim \| x^n \|^{1/n} ,$$

ce qui achève de démontrer le Théorème.

Remarque-Il est clair que la norme figurant dans (90) est celle qu'on a définie au N° précédent pour toute forme unitaire;elle est au moins égale à la norme de f considérée comme forme linéaire continue sur .

COROLLAIRE DU THEOREME 5 - Sur une $*$-algèbre normée complète,avec unité et muni d'une involution continue,les notions de forme unitaire et de forme linéaire continue positive sont équivalentes.

5-Existence de représentations unitaires irréductibles.

L'existence de représentations unitaires irréductibles repose sur la remarque suivante:soit $\{ \mathcal{H}, U_x \}$ une représentation unitaire d'une $*$-algèbre quelconque $\mathcal{A}$;il est clair alors que les U_x forment une algèbre autoadjointe d'opérateurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$,et que toute représentation uni-

taire irréductible de celle-ci conduit automatiquement à une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{A}$ -la réciproque étant évidente.Par conséquent, tout revient à démontrer l'existence de représentations unitaires irréductibles de $\mathcal{A}$ dans le cas où $\mathcal{A}$ est une algèbre autoadjointe d'opérateurs d'un espace de Hilbert convenable ;or nous allons voir qu'une telle algèbre possède un système complet de telles représentations;d'une manière précise:

THEORÈME 6 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre autoadjointe d'opérateurs d'un espace de Hilbert;alors $\mathcal{A}$ est faiblement semi-simple,et admet un système complet de représentations unitaires irréductibles.

Semi-simplicité de $\mathcal{A}$ (Segal [1]).Si U est dans le radical faible de $\mathcal{A}$, il en est de même de $U^* U$,dont le spectre est donc réduit à 0 ;mais $U^* U$ étant hermitien,il en résulte $U^* U = 0$ et finalement $U = 0$.

Représentations unitaires irréductibles.

Cas particulier : $\mathcal{A}$ possède un élément unité et est complète pour la topologie uniforme des opérateurs (définie par leur norme naturelle)

Comme l'involution de $\mathcal{A}$ est continue,les formes unitaires sur $\mathcal{A}$ ne sont autres(Corollaire du Théorème 5)que les formes linéaires positives et continues sur $\mathcal{A}$ .Donc l'ensemble P_u^o des formes unitaires sur $\mathcal{A}$ telles que $\| f \| \leq 1$ peut être identifié à un sous-ensemble du dual réel de l'espace de Banach réel constitué par les opérateurs hermitiens contenus dans $\mathcal{A}$ (on notera que,l'involution étant continue,ceux-ci forment un sous-ensemble fermé de $\mathcal{A}$).Les $f \in P_u^o$ sont par ailleurs caractérisés par les propriétés

$$(35) \quad f(U^*) = \overline{f(U)} \; ; \; f(U^* U) \geq 0 \; ; \; |f(U)|^2 \leq f(U^* U) \; ,$$

ce qui démontre sans qu'il soit utile d'insister que P_u^o est fermé pour la topologie faible du dual de $\mathcal{A}$;comme au surplus les $f \in P_u^o$ vérifient

(96) $\quad |f(U)| \leqslant \|U\|$

(et ce en vertu de (94)),on voit que P_u° est un sous-ensemble borné du dual de $\mathcal{A}$ -donc compact pour la topologie faible du dual de l'espace de Banach réel formé par les éléments hermitiens de $\mathcal{A}$ .Par suite,on peut appliquer à P_u° le

THEOREME DE KREIN ET MILMANN - Dans le dual réel d'un espace de Banach réel, tout ensemble convexe,compact pour la topologie faible,est l'enveloppe convexe faiblement fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.

Le Théorème 3 nous montre alors que toute forme unitaire sur $\mathcal{A}$ est limite faible de combinaisons linéaires à coefficients positifs de formes unitaires élémentaires.Si donc il existe,pour un $U \in \mathcal{A}$ donné,une forme unitaire f telle que $f(U) \neq 0$,on sera sûr de l'existence d'une forme élémentaire possédant la même propriété,et,par conséquent,de l'existence d'une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{A}$ pour laquelle l'image de U est un opérateur non nul.

Or,par hypothèse, $\mathcal{A}$ possède une représentation unitaire fidèle puisque constituée par des opérateurs d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$;toutes les formes

(97) $\quad f(U) = (UX,X)$

où X est arbitraire dans $\mathcal{H}$ sont manifestement unitaires sur $\mathcal{A}$,et si U est non nul,il existe,parmi ces formes,une f telle que $f(U) \neq 0$:ainsi est démontrée l'existence d'un système complet de représentations unitaires irréductibles dans le cas particulier considéré.

Cas d'une algèbre autoadjointe quelconque.Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre arbitraire de l'algèbre de tous les opérateurs bornés d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, soumise à la seule restriction d'être stable par l'involution naturelle des

opérateurs,il est facile de se ramener au cas pércédent;en effet,désignons par $\mathcal{A}_1$ l'algèbre formée par les $U+\lambda 1$ où $U \in \mathcal{A}$,et par l'algèbre obtenue en fermant $\mathcal{A}_1$ pour la topologie uniforme des opérateurs ;d'après le cas particulier qu'on vient d'examiner, $\mathcal{B}$ possède un système complet de repésentations unitaires irrèductibles.Soit $\{\mathcal{L}, T_U\}$ l'une d'entre elles;je dis que sa restriction à $\mathcal{A}$ est encore irréductible.En effet,si un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}$ est stable par les T_U où $U \in \mathcal{A}$,il l'est aussi par les T_U où $U \in \mathcal{A}_1$,d'où sa stablité par tous les T_U $(U \in \mathcal{B})$ -par raison de continuité.Le Théorème 6 est donc complètement démontré.

Remarque - Il ne faudrait surtout pas croire,sur la foi de la démonstration précédente,que toutes les représentations unitaires irréductibles d'une algèbre autoadjointe d'opérateurs soient prolongeables à l'adhérence de $\mathcal{A}$ pour la topologie uniforme des opérateurs.Contre-exemple:soit G un groupe localement compact arbitraire,ds la mesure de Haar invariante à gauche sur G,L^2 l'espace des fonctions de carré sommable pour ds,L^1 l'algèbre des fonctions sommables sur G pour ds ,munie de la structure algèbrique définie par le produit de composition bien connu.Toute $f \in L^1$ définit dans L^2 un opérateur donné par

$$U_f g = f * g \quad ,$$

et on peut alors considérér l'algèbre L^1 comme une algèbre autoadjointe d'opérateurs de L^2 ;ceci étant,on peut démontrer que,dans la plupart des cas(G semi-simple par exemple -non compact bien entendu -et aussi les groupes discrets suffisamment éloignés des abéliens)les représentations unitaires irréductibles de cette algèbre ne sont pas toutes prolongeables à son adhérence pour la topologie uniforme.En d'autres termes,le vieux principe suivant lequel toutes les représentations sont "contenues" dans la représentation

"régulière" est faux.

Dans le cas d'une $*$-algèbre quelconque, on a le résultat suivant -qui se réduit essentiellemnt au Théorème précédent d'après la remarque faite au début de ce N° ,en sorte que nous nous dispenserons de le démontrer -

THEOREME 7 - Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre arbitraire; pour qu'il existe une représentation unitaire irréductible $\{\mathcal{H}, U_x\}$ de $\mathcal{A}$ vérifiant $U_x \neq 0$ pour un élément x donné de $\mathcal{A}$,il faut et il suffit qu'il existe une forme unitaire f sur $\mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$.

On a enfin le théorème de structure que voici:

THEOREME 8 - Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre normée complète munie d'une involution continue; pour que $\mathcal{A}$ possède un système complet de représentations unitaires irréductibles, il faut et il suffit qu'il existe un $*$-isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur une algèbre autoadjointe d'opérateurs d'un espace de Hilbert convenable -ou encore, que $\mathcal{A}$ possède une représentation unitaire fidèle.

La suffisance de la condition n'est autre que le Théorème 6. Pour montrer qu'elle est suffisan nécessaire, supposons que $\mathcal{A}$ possède un système complet de représentations unitaires $\{\mathcal{H}^\nu, U_x^\nu\}$,et considérons le produit direct de tous les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^\nu$ -c'est-à-dire, l'ensemble $\mathcal{H}$ des systèmes $X = [X^\nu]$ d'éléments des $\mathcal{H}^\nu$ tels que

$$(98) \qquad (X,X) = \sum_\nu (X^\nu, X^\nu) \quad \text{converge.}$$

Les hypothèses faites sur $\mathcal{A}$ impliquent que l'on a

$$(99) \qquad \| U_x^\nu X^\nu \| \leq \| x \| \, \| X^\nu \| \quad ,$$

en sorte que l'on peut définir une représentation unitaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ en posant

$$(100) \qquad U_x [X^\nu] = [U_x^\nu X^\nu] \quad ;$$

et il est à peu près évident que l'on obtient ainsi une représentation unitaire fidèle de $\mathcal{A}$.

Remarque - Si l'on ne suppose pas l'involution de $\mathcal{A}$ continue, le résutat est encore valable, car on a

$$(101) \qquad \| U_{x^* x} \| \leqslant \| x^* x \|$$

(cf.(92)) et par suite

$$(102) \qquad \| U_x \|^2 \leqslant \| x^* x \| \ ,$$

ce qui permet d'appliquer encore le raisonnement-l'essentiel étant visiblement de s'assurer que, pour un x donné, les opérateurs U_x soient tous uniformément bornès.

Si nous n'avons pas énoncé le Théorème précédent avec ces hypothèses, c'est qu'en réalité il s'agit là d'une généralisation profondément inutile; on a en effet le

THEOREME 9 - Soit $\mathcal{A}$ une *-algèbre normée complète, possédant une représentation unitaire fidèle; alors l'involution de $\mathcal{A}$ est continue.

Introduisons en effet sur $\mathcal{A}$ l'expression

$$(103) \qquad \| \| x \| \| = \| x^* \| \ ;$$

il est clair que c'est une norme sur $\mathcal{A}$, de même par suite que

$$(104) \qquad N(x) = \| x \| + \| x^* \| \ ;$$

d'après un raisonnement déja ubilisé au Chap.II, § 3, tout revient à démontrer que $\mathcal{A}$ est complète pour la norme (104).

Or soit $\{ \mathcal{H}, U_x \}$ une représentation unitaire fidèle de $\mathcal{A}$, et soit x_n une suite de Cauchy pour la norme (104); il est clair qu'alors les suites x_n et x_n^* convergent dans la topologie initiale de $\mathcal{A}$; soit donc

$$(105) \qquad \lim \| x' - x_n \| = 0; \qquad \lim \| x'' - x_n \| = 0 \ :$$

il s'agit évidemment de montrer que $x'' = (x')^*$.

Or on a

$$(106)\quad \| U_{x'} - U_{x_n} \|^2 = \| (U_{x'} - U_{x_n})^* (U_{x'} - U_{x_n}) \| = \| U_{(x'-x_n)^*(x'-x_n)} \|$$

et donc, en vertu de (102)

$$(107)\quad \| U_{x'} - U_{x_n} \|^2 \leq \| (x'-x_n)^* (x'-x_n) \| \leq \| (x'-x_n)^* \| \| x'-x_n \| ;$$

comme les x_n^* forment une suite de Cauchy, ils sont de norme uniformément bornée, en sorte que (107) et (105) impliquent

$$(108)\quad \lim \| U_{x'} - U_{x_n} \| = 0 \quad ;$$

pour la même raison, on aura

$$(109)\quad \lim \| U_{x''} - U_{x_n^*} \| = 0 \quad ;$$

mais de $U_{x_n^*} = (U_{x_n})^*$ et du fait que l'involution naturelle des opérateurs hilbertiens est continue, on déduit, d'après (108) et (109), que

$$(110)\quad U_{x''} = (U_{x'})^* = U_{(x')^*} \quad ,$$

ce qui, puisque la représentation considérée est fidèle, prouve

$$(111)\quad x'' = (x')^* \quad ,$$

et achève la démonstration .

Remarque - Le Théorème 9 est dû à Raikov [^] , qui n'utilise pas (apparemment) la notion de représentation unitaire -et qui, malheureusement pour le rapporteur, s'est borné à énoncer le résultat en question; quatre mois de réflexions n'ont pas été de trop pour reconstituer celui-ci, en dépit de son caractère lumineux.

Bien entendu, et contrairement aux conventions adoptées par ailleurs, la "continuité" de l'involution dont il s'agit ici est prise au sens général, et non sous la forme restrictive $\| x \| = \| x^* \|$ (à laquelle on peut cependant se ramener , au besoin par un changement de norme).

Terminons ce § en observant que les raisonnements utilisés pour démontrer l'existence de représentations unitaires irréductibles pour les algèbres d'opérateurs sont encore valables dans des algèbres plus générales-l'essentiel étant de pouvoir appliquer le Théorème de Krein et Milmann au convexe P_u^o ;ce sera toujours le cas,en particulier,si $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre normée, complète,avec unité et dans laquelle l'involution est continue;car alors,comme on l'a vu,P_u^o n'est pas autre chose que l'ensemble des formes linéaires f définies sur $\mathcal{A}$ qui sont continues,positives et vérifient

$$(I12) \qquad |f(x)| \leq \|x\| \ ;$$

on peut alors considérer P_u^o comme un sous-ensemble convexe et faiblement compact du dual réel de l'espace de Banach réel formé par les éléments hermitiens de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire tels que $x = x^*$;ils forment un sous-ensemble fermé de $\mathcal{A}$ parceque l'involution est supposée continue).L'existence d'un élément unité n'est du reste pas essentielle,car on peut toujours en adjoindre un à $\mathcal{A}$ de façon à obtenir une algèbre vérifiant les conditions précédentes-et à laquelle toutes les formes unitaires définies sur $\mathcal{A}$ sont prolongeables,comme on l'a vu.

32'

§2 - -algèbres normées commutatives.

I - Involution et idéaux maximaux.

Dans tout ce § , $\mathcal{A}$ désigne une $*$-algèbre normée, complète et commutative. On emploie la notation $\mathcal{A}_\infty$ pour désigner la $*$-algèbre normée déduite de $\mathcal{A}$ par adjonction d'un élément unité.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre satisfaisant aux conditions que l'on vient d'énoncer. Si $\hat{x}$ est un caractère de $\hat{\mathcal{A}}$, il est clair que la formule

$$(1) \qquad (x^*, \hat{x}) = \overline{(x, \hat{x}^*)}$$

définit un autre caractère $\hat{x}^*$ de $\mathcal{A}$, et que l'application $\hat{x} \to \hat{x}^*$ est un automorphisme involutif de l'espace topologique $\hat{\mathcal{A}}$;

Inversement, soient E un espace localement compact, $x \to \tilde{x}$ un automorphisme involutif de E, et L_∞ l'algèbre des fonctions $f(x)$ continues sur E et telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $[|f(x)| \geq \varepsilon]$ soit compact; alors la formule

$$(2) \qquad f^*(x) = \overline{f(\tilde{x})}$$

définit une involution sur L_∞ , laquelle est continue pour la norme de la convergence uniforme sur E. Toutefois, il importe de caractériser l'involution "naturelle" , associée à l'automorphisme identique de E - ce qui sera fait au moyen du résultat suivant:

THEOREME I - Pour que tout idéal maximal régulier de $\mathcal{A}$ soit stable par l'involution de $\mathcal{A}$, il faut et il suffit que $\mathcal{A}$ possède la propriété suivante:

quel que soit $x \in \mathcal{A}$, l'élément $x^* x$ est quasi-inversible dans $\mathcal{A}$.

Nécessité de la condition - Si l'idéal associé au caractère $\hat{x}$ est stable par l'involution de $\mathcal{A}$, on voit que $(x, \hat{x}) \to \overline{(x^*, \hat{x})}$ est un automorphisme du corps complexe, en sorte que l'on a

(3) $\quad (x^*,\hat{x}) = \overline{(x,\hat{x})}$ pour tout x,

puisque cet automorphisme est au surplus compatible avec la structure vectorielle <u>complexe</u> de $\mathbb{C}$.

Ceci étant, si (3) est vérifié pour tous les caractères de $\mathcal{A}$, on aura

(4) $\quad (x^* x,\hat{x}) = |(x,\hat{x})|^2 \geq 0$ quels que soient x et $\hat{x}$,

ce qui prouve que $x^* x$ est quasi-inversible (Chap. II, 3)

<u>Suffisance de la condition</u> - Si les $x^* x$ sont tous quasi-inversibles, on a (3). En effet, (3) revient évidemment à dire que $(x,\hat{x})$ est réel pour tout x hermitien ($x = x^*$); or pour un $\hat{x}$ donné, les nombres $(x,\hat{x})$ où x est hermitien forment une sous-algèbre de $\mathbb{C}$ considéré comme algèbre sur $\mathbb{R}$ ($\mathcal{A}$ étant commutative, le produit de deux éléments hermitiens est encore hermitien); cette algèbre n'est pas réduite à $\{0\}$, puisque $\mathcal{A}$ est l'enveloppe linéaire de l'ensemble de ses éléments hermitiens en vertu de l'identité

(5) $\quad x = \frac{x+x^*}{2} + i\,\frac{x - x^*}{2i}$;

donc cette sous-algèbre est soit R -auquel cas le Théorème est démontré - soit $\mathbb{C}$; mais dans ce dernier cas, on peut trouver un x vérifiant

(6) $\quad x = x^*$, $\quad (x,\hat{x}) = i$,

ce qui implique

(7) $\quad (x^* x,\hat{x}) = -1$,

contrairement au fait que $x^* x$ est quasi-inversible . CQFD.

<u>Définition I - On dit qu'une $*$-algèbre $\mathcal{A}$ est symétrique si elle vérifie la condition suivante:</u>

(AS) <u>pour tout</u> $x \in \mathcal{A}$ <u>, l'élément</u> $x^* x$ <u>est quasi-inversible</u>.

On étudiera plus en détail ces algèbres au § suivant; nous nous bornerons ici à énoncer quelques conséquences immédiates du Théorème I.

PROPOSITION I - Toute algèbre normée, complète, commutative, semi-simple et symétrique est algèbriquement isomorphe à une sous-algèbre partout dense de l'algèbre L_∞ relative à l'espace de ses caractères.

En effet, les fonctions $(x,\check{x})$ forment une sous-algèbre de l'espace L_∞ relatif à $\hat{\mathcal{A}}$, laquelle possède les deux propriétés suivantes:

a) elle permet de séparer les points de $\hat{\mathcal{A}}$;

b) si elle contient une fonction, elle contient aussi la fonction conjuguée.

Il résulte alors du théorème d'approximation de Stone que cette algèbre est partout dense dans L_∞ au sens de la topologie de la convergence uniforme sur $\hat{\mathcal{A}}$.

PROPOSITION 2 - Les algèbres de fonctons du type L_∞ relatives à des espaces localement compacts peuvent être caractérisées par les propriétés suivantes:

a) L_∞ est une algèbre normée complète et commutative;

b) la norme définie dans L_∞ vérifie

$$\|x^2\| = \|x\|^2 \qquad (8)$$

c) L_∞ est munie d'une involution symétrique.

En effet, si une algèbre $\mathcal{A}$ vérifie ces conditions, elle est semi-simple d'après (8) (Chap. II, § 2) et donc isomorphe à une sous-algèbre partout dense de l'algèbre L_∞ relative à $\hat{\mathcal{A}}$; mais (8) implique

$$\|x\| = \sup |(x,\hat{x})| \qquad (9)$$

en sorte que, $\mathcal{A}$ étant complète, on obtient comme fonctions $(x,\hat{x})$ toutes les fonctions de L_∞ : d'où la Proposition.

On verra au Chap. III, § 4, une caractérisation plus subtile de ces algèbres.

2 - Décomposition spectrale des formes unitaires.

Définition 2 - Etant donnée une $*$-algèbre normée, complète et commutative $\mathcal{A}$, on désigne par $\hat{\mathcal{A}}_u$ le sous-ensemble de $\hat{\mathcal{A}}$ formé par les caractères de $\mathcal{A}$ tels que

$$(10) \qquad (x^*, \hat{x}) = \overline{(x, \hat{x})} \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} .$$

Il est clair que $\hat{\mathcal{A}}_u$ est un sous-ensemble fermé de $\hat{\mathcal{A}}$ et peut donc, comme $\hat{\mathcal{A}}$, être considéré comme un espace topologique localement compact; que si $\mathcal{A}$ possède un élément unité, $\hat{\mathcal{A}}_u$ est même compact; et que dans tous les cas, l'espace $(\hat{\mathcal{A}}_\infty)_u$ associé à l'algèbre $\mathcal{A}_\infty$ déduite de $\mathcal{A}$ par adjonction d'un élément unité est homéomorphe au compact déduit de $\hat{\mathcal{A}}_u$ par adjonction d'un point à l'infini. Enfin, $\hat{\mathcal{A}}_u$ peut être vide, ou au contraire confondu avec $\hat{\mathcal{A}}$ tout entier (ce qui revient à dire que $\mathcal{A}$ est symétrique); comme la formation d'exemples de ces cas est évidente, on se dispense de les expliciter.

PROPOSITION 3 - Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre commutative arbitraire; toute forme unitaire élémentaire f définie sur $\mathcal{A}$ et vérifiant $\| f \| = 1$ possède les propriétés suivantes

$$(11) \qquad f(xy) = f(x)f(y) \; ; \quad f(x^*) = \overline{f(x)} \; ,$$

qui sont au surplus caractéristiques.

En effet, soit f une telle forme, définissant une représentation unitaire monogène $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ irréductible de $\mathcal{A}$. Comme les U_x sont deux à deux permutables, l'irréductibilité implique qu'ils se réduisent à des scalaires et, par suite, que $\mathcal{H}$ soit de dimension 0 ou 1 ; la dimension 0 est exclue par le fait que $\| f \| \neq 0$; on peut donc poser

$$(12) \qquad U_x = \chi(x) . 1$$

où la fonction $\chi(x)$ vérifie les conditions (II) puisque $x \to U_x$ est une représentation unitaire de $\mathcal{A}$;on a alors

$$(I3) \qquad f(x) = (U_x X, X) = \chi(x).(X,X) = \chi(x)$$

puisque la condition $\| f \| = I$ implique $(X,X) = I$ ($\S$ I, Prop. II), et f vérifie donc bien les conditions (II).

Réciproquement, soit f une forme linéaire vérifiant (II); f est positive puisque

$$(I4) \qquad f(x^* x) = f(x) f(x^*) = |f(x)|^2 \geqslant 0;$$

de plus (I4) implique la condition (FU_1) du Théorème I, $\S$ I (la constante M correspondante étant par exemple un); quant à (FU_2), elle résulte de

$$(I5) \qquad f(y^* x^* x y) = f(x^* x) f(y^* y) \quad ;$$

par suite, f est unitaire; comme les x tels que $f(x^* x) = 0$ forment un hyperplan de $\mathcal{A}$, la représentation unitaire de $\mathcal{A}$ définie par f est de dimension un, donc irréductible: f est élémentaire. Enfin, $\| f \| = I$ puisque l'on a exactement

$$(I6) \qquad |f(x)|^2 = f(x^* x). \qquad \text{CQFD.}$$

Ce résultat étant démontré, revenons au cas d'une $*$-algèbre normée, complète et commutative $\mathcal{A}$; la Prop. 3 nous montre que les formes unitaires élémentaires définies sur $\mathcal{A}$ ne sont pas autre chose que les caractères appartenant à $\hat{\mathcal{A}}_u$ -et, bien entendu, les formes qui leur sont proportionnelles (on observera qu'il n'est pas nécessaire de supposer des conditions de continuité, puisque tout caractère de $\mathcal{A}$ est, comme on sait, nécessairement continu). Ceci va nous permettre d'élucider complètement, dans le cas où $\mathcal{A}$ est muni d'une involution continue, la structure des formes unitaires sur $\mathcal{A}$.

THEOREME 2 - Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre normée, complète, commutative, munie d'une involution continue; à toute forme unitaire f définie sur $\mathcal{A}$ correspond alors une mesure de Radon positive et bornée μ_f et une seule, portée par l'espace localement compact $\hat{\mathcal{A}}_u$, et telle que l'on ait

$$(I7) \qquad f(x) = \int (x,\hat{x})\, d\mu_f(\hat{x}) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} ;$$

réciproquement, toute mesure de Radon positive et bornée définie sur $\hat{\mathcal{A}}_u$ détermine, au moyen de la formule (I7), une forme unitaire sur $\mathcal{A}$.

Démonstration. I°) Associons à chaque $x \in \mathcal{A}$ la fonction

$$(I8) \qquad f_x(\hat{x}) = (x,\hat{x})$$

que nous considérerons comme définie seulement sur $\hat{\mathcal{A}}_u$ (c'est-à-dire que l'on néglige les caractères non unitaires de $\mathcal{A}$). Ces f_x forment évidemment une sous-algèbre de l'algèbre L_∞ relative à $\hat{\mathcal{A}}_u$, et cette sous-algèbre est partout dense dans L_∞ - on le voit en raisonnant comme dans la démonstration de la Prop. I.

2°) Comme l'involution de $\mathcal{A}$ est supposée continue, toute forme unitaire f sur $\mathcal{A}$ est continue (§ I, Th. 5); en outre, les éléments de l'ensemble P_u° des formes unitaires telles que $\|f\| \leq 1$ sont caractérisés par les conditions

$$(I9) \qquad f(x^*x) \geq 0 \; ; \quad |f(x)|^2 \leq f(x^*x) \leq \|x\|^2$$

(§ I, Th. 4). On en conclut que P_u° peut être identifié à un sous-ensemble convexe et faiblement compact du dual réel de l'espace de Banach réel formé par les éléments hermitiens de $\mathcal{A}$; en combinant cette propriété avec la Prop. 3 et les résultats du § I (Th. 3), il en résulte, en vertu du Théorème de Krein et Milmann, que toute forme unitaire élémen f telle que $\|f\| \leq 1$ est limite faible de formes du type

$$(20) \qquad \alpha_1(x,\hat{x}) + \ldots + \alpha_n(x,\hat{x}_n)$$

où l'on a

(21) $\hat{x}_i \in \hat{A}_u \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad ; \quad \sum \alpha_i \leq 1.$

3°)Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de Radon positives et bornées portées par $\hat{A}_u$;muni de la topologie vague (ou,ce qui revient au même puisqu'il s'agit de mesures bornées,de la topologie faible du dual de l'espace de Banach L_∞ relatif à $\hat{A}_u$)c'est un espace topologique compact.A toute $\mu \in \mathcal{M}$, la formule

(22) $f_\mu(x) = \int (x,\hat{x}) d\mu(\hat{x})$

permet d'associer une forme linéaire f_μ sur A,laquelle est continue,puisque

(23) $|f_\mu(x)| \leq \|\mu\| \sup |(x,\hat{x})| \leq \|\mu\| \, \|x\|$,

positive puisque les $(x^* x,\hat{x})$ sont positifs sur $\hat{A}_u$,et enfin est même unitaire d'après

(24) $|f_\mu(x)|^2 \leq \|\mu\| \int |(x,\hat{x})|^2 d\mu(\hat{x}) = \|\mu\| \int (x^* x,\hat{x}) d\mu(\hat{x}) = \|\mu\| f(x^* x)$

;en définitive,$f \in P_u^\circ$,et on a ainsi défini une application de $\mathcal{M}$ dans P_u°; comme parmi les formes f_μ figurent les formes (20) -correspondant aux mesures discrètes -on voit que l'image de $\mathcal{M}$ dans l'application en question est partout dense dans P_u° au sens de la topologie faible.

4°)Si la mesure μ converge vaguement vers μ_0,il résulte de (22) et du fait que les fonctions $(x,\hat{x})$ appartiennent à l'espace L_∞ sur $\hat{A}_u$,que la forme f_μ converge vers la forme f_{μ_0} au sens de la topologie faible du dual de A ;par conséquent,l'application $\mu \to f_\mu$ de $\mathcal{M}$ dans P_u° est continue pour les topologies envisagées.Il résulte de là que les f_μ constituent un sous-ensemble faiblement compact de P_u°,donc faiblement fermé ;comme cet ensemble est au surplus partout dense dans P_u°,il constitue nécessairement P_u° tout entier :donc toute forme unitaire sur A admet au moins une repré-

sentation sous la forme (22).

5°)Pour montrer que la mesure associée à une forme est unique,il suffit de prouver que,si une mesure μ bornée portée par $\hat{\mathcal{A}}_u$ (mais non nécessairement positive)vérifie

$$(25) \qquad \int (x,\hat{x})d\mu(\hat{x}) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{A} ,$$

elle est nulle;or cela résulte immédiatement du fait que les fonctions $(x,\hat{x})$ sont partout denses dans l'espace L_∞ relatif à $\hat{\mathcal{A}}_u$. CQFD.

Remarque - Le Théorème 2 n'est pas autre chose,bien entendu,qu'une généralisation du résultat correspondant de Bochner(représentation intégrale des fonctions de type positif sur un groupe abélien). Cf Cartan-Godement

Autre remarque - Il serait intéressant de savoir si la continuité de l'involution est essentielle pour assurer le résultat précédent;il ne serait pas étonnant qu'il n'en soit rien.

Cas des algèbres symétriques -Si $\mathcal{A}$ est au surplus symétrique,on peut donner du Théorème 2 une autre démonstration,beaucoup plus courte que la précédente.En effet,toute forme unitaire f vérifie alors(§I,Th.5)

$$(26) \qquad |f(x)| \leq \|f\| \lim \|x^n\|^{1/n} = \sup_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}_u} |(x,\hat{x})|$$

puisque $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}_u$;f(x) apparait donc comme une forme linéaire continue sur l'espace L_∞ ,d'où résulte la représentation de f au moyen d'une mesure bornée sur $\hat{\mathcal{A}}$.

Ce raisonnement n'est pas applicable directement au cas général,car on ignore si

$$\sup_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}_u} |(x,\hat{x})| = \sup_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}} |(x,\hat{x})| \qquad .$$

3 - Un exemple de forme positive non unitaire.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions numériques $x(\lambda)$ d'une variable réelle λ qui possèdent les propriétés suivantes:

a) $x(\lambda)$ est sommable sur $\underline{R}$ pour la mesure de Haar $d\lambda$;

b) la transformée de Fourier de x est elle aussi sommable sur $\underline{R}$.

Il est connu (Cartan-Godement, [ ] ,formule d'inversion de Fourier)que ces fonctions sont continues(presque partout)et qu'elles forment une algèbre pour le produit de composition

$$(27)\quad x.y(\lambda) = \int x(\lambda - \mu)y(\mu)d\mu \quad .$$

Si l'on pose

$$(28)\quad x^*(\lambda) = \overline{x(-\lambda)} \quad ,$$

on définit sur $\mathcal{A}$ une involution.Enfin,en introduisant dans $\mathcal{A}$ l'expression

$$(29)\quad \|x\| = \int |x(\lambda)|d\lambda + \int |\hat{x}(\lambda)|d\lambda \quad ,$$

où $\hat{x}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction x,on constate que $\mathcal{A}$ devient une $*$ -algèbre normée,complète,munie d'une involution continue.

Ceci étant,la formule

$$(30)\quad f(x) = x(0)$$

(qui a un sens puisque les $x \in \mathcal{A}$ sont égales presque partout à des fonctions continues)définit sur $\mathcal{A}$ une <u>forme linéaire continue,positive,qui n'est pas unitaire</u> .La"décomposition spectrale" de cette forme n'est pas autre chose que la formule d'inversion de Fourier -mais ici la mesure associée à f sur l'espace $\hat{R}$ (qui peut être identifié au dual du groupe $\underline{R}$)n'est pas bornée,précisément en raison du fait que n'est pas unitaire.

On va voir dans le N° suivant comment ce fait peut être généralisé de

façon à peu près complète.

4 - Décomposition des formes positives non unitaires.

Soit A une $*$-algèbre normée complète, commutative et munie d'une involution continue. On désigne par f une forme linéaire continue et positive définie sur A.

Lemme a - Quels que soient y et z, la forme

(31) $\quad g(x) = f(yxz)$

est une combinaison linéaire de formes unitaires.

En vertu de l'identité

(32) $\quad 4f(yxz) = f\left[(y+z)^*x(y+z)\right] - f\left[(y-z)^*x(y-z)\right]$

$+if\left[(y-iz)^*x(y-iz)\right] - if\left[(y+iz)^*x(y+iz)\right]$,

il suffit de le prouver dans le cas où $z = y^*$. On sait (§ I, Prop. 5) que g est alors pré-unitaire ; comme on a par ailleurs (FU_2) d'après le § I, Prop. 13 (noter que g est, comme f, comtinue), le lemme est démontré.

Lemme b - A tout couple d'éléments y et z de A est associée une mesure de Radon bornée et unique, portée par $\hat{A}_u$, et telle que l'on ait

(33) $\quad f(yxz) = \int (x,\hat{x})\, d\mu_{y,z}(\hat{x})$ pour tout $x \in A$.

C'est une conséquence immédiate du lemme a et du Théorème 2.

Lemme c - La mesure $\mu_{y,z}$ ne dépend que du produit yz.

Car il en est ainsi de la forme (31) puisque A est commutative.

Lemme d - Quels que soient y, z et y', z', on a

(34) $\quad (yz,\hat{x})\, d\mu_{y',z'}(\hat{x}) = (y'z',\hat{x})\, d\mu_{y,z}(\hat{x})$.

Car les mesures figurant dans (34) ne sont autres que les "transformées de Fourier" des formes

(35) $\quad g(x) = f(y'yxzz')$ et $h(x) = f(yy'xz'z)$,

lesquelles sont visiblement identiques.

Lemme e - Il existe une mesure de Radon positive μ_1 portée par $\hat{A}_u$ et telle que l'on ait

(36) $d\mu_{y,z}(\hat{x}) = (yz,\hat{x})d\mu_1(\hat{x})$ quels que soient y et z.

En effet, soit L l'espace des fonctions continues et à noyau compact sur $\hat{A}_u$; si $F \in L$, il en est de même des fonctions de la forme

(37) $G(\hat{x}) = F(\hat{x}).(yz,\hat{x})$,

et (34) montre que

(38) $G(\hat{x})d\mu_{y'',z''}(\hat{x}) = (y''z'',\hat{x})d\nu_G(\hat{x})$ quels que soient y'' et z''

où ν_G est la mesure définie par (37) et

(39) $d\nu_G(\hat{x}) = F(\hat{x})d\mu_{y,z}(\hat{x})$

La mesure ν_G ne dépend que de la fonction G et non de sa représentation sous la forme (37). En effet, si

(40) $G(\hat{x}) = F'(\hat{x}).(y'z',\hat{x})$

est une autre représentation de G, il lui correspondra la mesure

(41) $d\nu'_G(\hat{x}) = F'(\hat{x})d\mu_{y',z'}(\hat{x})$;

pour laquelle on aura, de même qu'en (38),

(42) $G(\hat{x})d\mu_{y'',z''}(\hat{x}) = (y''z'',\hat{x})d\nu'_G(\hat{x})$ quels que soient y'' et z'';

comparant (38) et (42) il vient

(43) $(y''z'',\hat{x})d\nu_G(\hat{x}) = (y''z'',\hat{x})d\nu'_G(\hat{x})$;

or les fonctions $(y''z'',\hat{x}) = (y'',\hat{x})(z'',\hat{x})$ sont partout denses dans l'espace L_∞ relatif à $\hat{A}_u$; (43) prouve alors l'identité des mesures ν_G et ν'_G .

Toute fonction $G \in L$ est de la forme (37). En effet, soit K un compact en dehors duquel G soit nulle; comme les fonctions $(x,\hat{x})$ sont partout denses dans l'espace L_∞ relatif à $\hat{A}_u$, il existe un x tel que $|(x,\hat{x})|$ soit > 1 sur

K;il est clair qu'on peut alors écrire

$$(44) \quad G(\hat{x}) = F(\hat{x}).(x^* x,\hat{x}) \qquad \text{où } F \in L.$$

<u>La mesure ν_F associée à une fonction $F \in L$ positive est elle-même positive.</u>

En effet,(38) montre que

$$(45) \quad F(\hat{x})d\mu_{x^*,x}(\hat{x}) = (x^* x,\hat{x})d\nu_F(\hat{x}) \quad ;$$

mais les mesures $\mu_{x^*,x}$ sont positives -comme associées à des formes positives -en sorte qu'il en est de même des mesures $(x^* x,\hat{x})d\nu_F(\hat{x})$;or il est facile de voir que les fonctions $(x^* x,\hat{x})$ sont partout denses dans l'ensemble des fonctions positives de L_∞ (si φ est positive et appartient à L_∞,on peut approcher $\sqrt{\varphi}$ par des fonctions $(x,\hat{x})$ en sorte que φ est limite de fonctions $(x^* x,\hat{x})$);par conséquent,la mesure ν_F est elle aussi positive.

Ces préliminaires étant établis,démontrons le lemme e.

Posons

$$(46) \quad I(F) = \int d\nu_F(\hat{x})$$

-ce qui a un sens puisque les mesures considérées jusqu'à maintenant sont toutes bornées.On obtient ainsi une forme linéaire sur L,positive sur L_+ -donc une mesure de Radon positive μ_f,pour laquelle

$$(47) \quad \int d\nu_F(\hat{x}) = \int F(\hat{x})d\mu_f(\hat{x}) \quad ;$$

remplaçons alors F par la fonction G donnée par (37),et tenons compte de (39):il vient

$$(48) \quad \int F(\hat{x})d\mu_{y,z}(\hat{x}) = \int F(\hat{x})(yz,\hat{x})d\mu_f(\hat{x}) \quad ;$$

$F \in L$ étant arbitraire,il en résulte

$$(49) \quad d\mu_{y,z}(\hat{x}) = (yz,\hat{x})d\mu_f(\hat{x}) \quad ,$$

ce qui démontre le lemme e.

Lemme f - Quel que soit $x \in A$, la fonction (x,x) est de carré sommable sur $\hat{A}_u$ pour la mesure μ_f.

En effet, la mesure bornée $\mu_{x^*,x}$ s'écrit, d'après (49):

$$(50) \qquad d\mu_{x^*,x}(\hat{x}) = (x^* x,\hat{x})\,d\mu_f(\hat{x}) = |(x,\hat{x})|^2\, d\mu_f(\hat{x}) \quad .$$

Bien entendu, il résulte aussi de (49) -ou du lemme f -que les fonctions de la forme $(xy,\hat{x})$ sont non seulement de carré sommable, mais même sommables pour μ_f. Si l'on tient compte de la définition (33) des mesures $\mu_{y,z}$, on voit que (49) conduit à la formule

$$(51) \qquad f(yxz) = \int (yxz,\hat{x})\,d\mu_f(\hat{x}),$$

valable quels que soient x,y,z. On peut donc énoncer le résultat suivant:

THEOREME 3 - Soit A une $*$-algèbre normée, complète, commutative et munie d'une involution continue. A toute forme linéaire continue et positive $f(x)$ correspond une mesure de Radon positive unique μ_f portée par l'espace $\hat{A}_u$ et possédant les propriétés suivantes:

a) pour tout $x \in A$, la fonction $(x,\hat{x})$ est de carré sommable pour μ_f;

b) quels que soient les éléments $x,y,z \in A$, on a

$$(52) \qquad f(xyz) = \int (xyz,\hat{x})\,d\mu_f(\hat{x}) \quad .$$

Bien entendu, ce résultat contient comme cas particulier le Théorème 2. Notons par ailleurs que, dans certains cas, on peut aller un peu plus loin et affirmer que l'on

$$(53) \qquad f(xy) = \int (xy,\hat{x})\,d\mu_f(\hat{x})$$

quels que soient x et y ; par exemple, c'est le cas pour l'algèbre suivante: on considère les fonctions $x(\lambda)$ définies sur $\mathbb{R}$, qui sont à la fois continues et sommables pour $d\lambda$; au moyen des opérations définies au N°3, ces fonctions forment une $*$-algèbre; en y introduisant la norme

$$(54) \qquad \|x\| = \int |x(\lambda)|\,d\lambda + \sup_{\lambda} |x(\lambda)| \quad ,$$

on voit que cette algèbre A satisfait aux hypothèses du Théorème 3; l'espace des caractères de A est identifiable à $\mathbb{R}$ (plus précisément au dual du

groupe $\underline{R}$),et ce de la façon suivante:à tout caractère de $\mathcal{A}$ correspond biunivoquement un λ tel que

$$(55) \qquad x \to \hat{x}(\lambda) = \int e^{-i\lambda\mu} x(\mu)d\mu .$$

soit l'homomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\underline{C}$ associé au caractère considéré;les fonctions que nous avions notées $(x,\hat{x})$ jusqu'ici apparaissent donc comme les transformées de Fourier classiques des x.Ceci étant,si l'on considère la forme

$$(56) \qquad f(x) = x(0) \ ,$$

elle est continue et positive sur $\mathcal{A}$,et la mesure μ_f correspondante n'est autre que la mesure de Haar $d\lambda$ sur $\underline{R}$:on voit donc que les transformées de Fourier des $x \in \mathcal{A}$ sont de carré sommable pour celle-ci(ce qui est en fait bien connu,les x en question étant elles-mêmes de carré sommable),et on a ici le droit d'écrire la formule (53) qui,si on l'explicite,donne

$$(57) \qquad \int x(\lambda)y(\lambda)d\lambda = \int \hat{x}(\lambda)\hat{y}(\lambda)d\lambda$$

-c'est-à-dire essentiellement le Théorème de Plancherel.

Bien entendu,des considérations parfaitement analogues valent pour l'exemple du N°3;dans ce cas,la représentation intégrale de la forme f est encore plus parfaite,puisqu'on peut alors écrire une formule qui,avec les notations du Théorème 3,s'exprime comme suit:

toutes les fonctions $(x,\hat{x})$ sont sommables pour μ_f,et on a

$$(58) \qquad f(x) = \int (x,\hat{x})d\mu_f(\hat{x}) \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} .$$

Par contre,(58) est fausse dans l'algèbre dont on a parlé ci-dessus(sinon la transformée de Fourier d'une fonction continue et sommable serait elle-même sommable et continue,ce qui n'est malheureusement pas le cas).

Un autre exemple intéressant est le suivant:soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $x(\lambda)$ définies sur $\underline{R}$ et possédant les propriétés suivantes:

a)x est continue et sommable sur $\underline{R}$ pour la mesure $d\lambda$;

b)la transformée de Fourier

$$\hat{x}(\lambda) = \int e^{-i\lambda\mu} x(\mu) d\mu$$

(on méprise les facteurs 2)est nulle pour $\lambda \leq 0$;

c) x possède une dérivée première continue et bornée sur $\underline{R}$.

Ces fonctions forment un espace de Banach si on y introduit la norme

$$(59) \qquad \| x \| = \int |x(\lambda)| d\lambda + \sup_{\lambda} |x'(\lambda)| \quad ;$$

et,toujours avec les opérations définies au N°3,on obtient une algèbre vérifiant les hypothèses du Théorème 3.(On notera que toutes ces algèbres sont même symètriques au sens de la définition I).

Ceci étant,on définit une forme linéaire continue et positive sur $\mathcal{A}$ en posant

$$(60) \qquad f(x) = x'(0)/i$$

(c'est pour assurer la positivité de cette forme que nous avons imposé la condition b) aux fonctions considérées).L'espace $\hat{\mathcal{A}}_u$ (= $\hat{\mathcal{A}}$ ici)peut être identifié,comme en (55),à R_+ ,et le Théorème 3 signifie ici que f est la transformée de Fourier d'une mesure qui,en l'espèce,est donnée par

$$(6I) \qquad d\mu_f(\lambda) = \lambda \, d\lambda \quad .$$

On peut donc affirmer que les transformées de Fourier des $x \in \mathcal{A}$ sont de carré sommable pour cette mesure(et aussi,naturellement,pour la mesure $d\lambda$ puisque ces x sont de carré sommable pour $d\lambda$).Le rapporteur n'a pas été en mesure de déterminer si,dans le cas présent,on a le droit d'écrire (53) sans restriction ou si,au contraire,on doit se limiter à (52).Il semble probable qu'en appliquant (52) à des z dont la transformée de Fourier tend vers un sur R_+ on parvienne à (53).Plus généralement,on peut se demander si

(53) ne serait pas valable dans tous les cas -en d'autres termes, si le Théorème 3 est donné ici sous sa forme la plus complète. La question est mise au concours.

Signalons enfin que, appliqué à l'algèbre des fonctions centrales (c'est-à-dire invariantes par les automorphismes intérieurs) et sommables d'un groupe localement compact quelconque (non abélien), ou à des sous-algèbres convenables de celle-ci, le Théorème 3 conduit à des résultats qui comprennent comme cas particulier les formules de développement des fonctions centrales suivant les caractères, bien connues dans le cas des groupes compacts (et aussi abéliens) -voir par exemple le livre de Weil .

3 - Théorie des $*$-algèbres normées symétriques.

Pour tout ce §, voir Raikov [4] et Gelfand-Neumark [1].

Dans tout ce §, on désigne par $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre normée, complète, possédant un élément unité, et symétrique - c'est-à-dire vérifiant la condition

(AS) pour tout $x \in \mathcal{A}$, l'élément $x^* x + e$ est inversible.

1 - Propriétés des éléments hermitiens.

On dit qu'un $x \in \mathcal{A}$ est hermitien s'il vérifie

$$(1) \qquad x = x^* .$$

Tout $x \in \mathcal{A}$ est de la forme

$$(2) \qquad x = y + iz$$

où y et z sont hermitiens (et uniques). Il est clair que les éléments hermitiens de $\mathcal{A}$ forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ - qui est même fermé dans $\mathcal{A}$ si l'involution de $\mathcal{A}$ est continue (ce que nous ne supposons pas dans ce N°, contrairement à Raikov).

Définition I - x étant un élément quelconque de $\mathcal{A}$, on désigne par $\mathcal{A}(x)$ l'ensemble des éléments z de $\mathcal{A}$ qui possèdent la propriété suivante:

tout élément y de $\mathcal{A}$ qui est permutable à x est permutable à z.

Nous dirons pour abréger qu'un $z \in \mathcal{A}(x)$ est bipermutable à x.

PROPOSITION I - Pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(x)$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{A}$, commutative et contenant x et e; si en outre x est hermitien, $\mathcal{A}(x)$ est stable par l'involution de $\mathcal{A}$, et constitue une $*$-algèbre symétrique.

Que $\mathcal{A}(x)$ soit une sous-algèbre fermée de $\mathcal{A}$ et contienne x et e, est parfaitement évident; si y et z sont dans $\mathcal{A}(x)$, comme x est permutable à x on voit que y est permutable à x et par suite que z est permutable à y:

$\mathcal{A}(x)$ est donc commutative.

Si en outre $x = x^*$,les y qui permutent à x forment évidemment une sous -algèbre stable par l'involution de $\mathcal{A}$,en sorte qu'il en est de même de $\mathcal{A}(x)$;si $z \in \mathcal{A}(x)$,il est clair que $z^* z + e : \mathcal{A}(x)$ et que $(z^* z + e)^{-1}$ est aussi dans $\mathcal{A}(x)$;par conséquent, $\mathcal{A}(x)$ peut être dans ce cas considérée comme une $*$ -algèbre normée,complète,commutative,symétrique et avec unité.

PROPOSITION 2 - Le spectre de tout élément hermitien de $\mathcal{A}$ est réel.

En effet,la considération de $\mathcal{A}(x)$ permet de se ramener au cas où $\mathcal{A}$ est commutative;la Prop. résulte alors du fait que les nombres

$$(3) \qquad (x,\hat{x}) = \overline{(x^*,\hat{x})} = \overline{(x,\hat{x})}$$

sont réels (§ 2,Théorème I).

Définition 2 - On dit qu'un élément hermitien de $\mathcal{A}$ est positif(resp.strictement positif) si son spectre est positif(resp.strictement positif).

On remarquera que la condition (AS) implique que tous les éléments de la forme $x^* x$ sont positifs ~~-au-moins-dans-le-cas-où-x-=-x---(on-le-voit-en-considérant----(x)-),-et-aussi-dans-le-cas-général-comme-on-va-le-voir~~. En effet,le spectre d'un tel élément ne peut contenir de nombres ≤ 0;car si $-\lambda\bar{\lambda}$ est un tel nombre,l'élément

$$(4) \qquad x^* x - (-\lambda\bar{\lambda})e = \lambda\bar{\lambda}\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^*\left(\frac{x}{\lambda}\right) + e\right)$$

est inversible en vertu de (AS).

PROPOSITION 3 - Pour qu'un x hermitien soit positif,il faut et il suffit que $x + \lambda e$ soit strictement positif pour tout $\lambda > 0$.

Propriété évidente si l'on observe que le spectre de $x + \lambda e$ se déduit de celui de x par la translation λ .

On notera que tout élément hermitien strictement positif est inversible;et que ce n'est pas le cas d'un élément qui est seulement positif.

PROPOSITION 4 - Tout élément hermitien x strictement positif est de la forme $x = y^2$ où y est hermitien strictement positif,et réciproquement.

En effet,soit σ le spectre de x;c'est un sous-ensemble compact de $]0,+\infty[$; on peut donc le séparer de 0 par un contour fermé Γ ,limitant un domaine G dans lequel la fonction analytique $\sqrt{\zeta}$ se décompose en branches uniformes;désignons par $\varphi(\zeta)$ celle de ces branches qui est réelle sur l'axe réel positif,et choisissons pour Γ un contour symétrique par rapport à l'axe réel(fig.I);d'après les résultats du Chap.II, l'intégrale

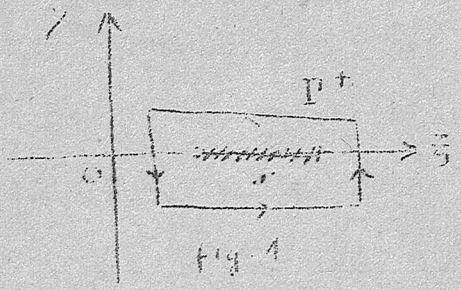


fig 1

$$(5) \qquad y = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\zeta e - x)^{-1}.\varphi(\zeta)d\zeta$$

a un sens et vérifie $x = y^2$ .La fonction $\varphi(\zeta)$ étant réelle sur l'axe réel, l'élément $y \in \mathcal{A}$ est hermitien,et positif puisque son spectre est l'image de celui de x par l'application $\zeta \to \varphi(\zeta)$. CQFD.

Il est sans doute superflu de remarquer que l'élément y ainsi défini est dans $\mathcal{A}(x)$.On le désignera par la suite par

$$(6) \qquad y = x^{1/2}$$

(étant bien entendu que cette notation est réservée exclusivement à celle des racines carrées de x qui est définie par la formule (5)).

PROPOSITION 5 - La somme de deux hermitiens positifs(resp.strictement positifs)est elle-même un élément hermitien positif(resp.strictement positif).

Soient en effet x et y deux hermitiens strictement positifs;x + y est évidemment hermitien,et il faut prouver que $x+y+\lambda e$ est inversible pour tout

$\lambda \geqslant 0$;en remplaçant $y+\lambda e$ par y,on peut se borner à démontrer que x+y est inversible;or on a

$$(7) \quad x + y = x^{I/2}.(e + x^{-I/2}.y.x^{-I/2}).x^{I/2}$$

(noter que x étant inversible il en est de même de $x^{I/2}$,dont on désigne ici l'inverse par $x^{-I/2}$),et tout revient à démontrer que la parenthèse dans (7) est inversible;or en posant $z = y^{I/2}.x^{-I/2}$,celle ci s'écrit $z^* z + e$,d'où la Proposition.

PROPOSITION 6 - Tout élément hermitien x tel que $\|e - x\| < I$ est strictement positif.

En effet,son spectre est contenu dans le cercle

$$(8) \quad |\lambda - I| < I \ .$$

PROPOSITION 7 - x et -x ne peuvent être simultanément hermitiens strictement positifs.

Car sinon le spectre de x serait porté à la fois par $]0,+\infty[$ et par $]0,-\infty[$ donc vide.

Récapitulant les résultats obtenus,on a le

THEOREME I - Soit H^+ le sous-ensemble de $\mathcal{A}$ formé par les éléments hermitiens strictement positifs,et par 0. H^+ possède les propriétés suivantes:

a) H^+ est un cône strictement convexe de l'espace vectoriel normé réel H formé par les éléments hermitiens de $\mathcal{A}$;

b) dans H,le cône H^+ possède des points intérieurs.

A titre de distraction gratuite,on peut encore démontrer les propriétés suivantes:

PROPOSITION 8 - Si x et y sont hermitiens,et si x est strictement positif, $x + iy$ est inversible.

En effet, on a

$$(9) \qquad x + iy = x^{I/2}.(e + ix^{-I/2}.y.x^{-I/2}).x^{I/2} \quad ,$$

ce qui revient à démontrer que la parenthèse est inversible; or elle est de la forme e + iz où z est hermitien: la Prop.2 donne alors le résultat cherché.

PROPOSITION 9 - Si x et y sont hermitiens strictement positifs, le spectre de xy est strictement positif.

En effet, la formule

$$(10) \qquad xy = x^{I/2}.(x^{I/2}yx^{I/2}).x^{-I/2}$$

montre que xy se déduit, par un automorphisme intérieur de l'algèbre $\mathcal{A}$, de l'élément $x^{I/2}yx^{I/2}$ - lequel est hermitien strictement positif comme égal à z^*z, où $z = y^{I/2}x^{I/2}$.

PROPOSITION 10 - Le produit de deux hermitiens strictement positifs qui permutent entre eux est un hermitien strictement positif.

En effet, ce produit est hermitien en vertu de la permutabilité, et strictement positif d'après la Prop.9.

On peut de même démontrer que le produit de deux hermitiens positifs permutables est hermitien positif.

Les méthodes précédentes - dont il est recommandé d'apprécier le caractère particulièrement astucieux - sont dues à Gelfand et Neumark.

2 - Formes linéaires positives sur une *-algèbre symétrique.

PROPOSITION 11 - Soit f une forme linéaire positive (non nécessairement continue) sur $\mathcal{A}$; pour tout hermitien positif x, on a $f(x) \geqslant 0$.

Si x est strictement positif, cela résulte de la Prop.4; dans le cas général, on a donc $f(x + \lambda e) \geqslant 0$ pour tout $\lambda > 0$, d'où immédiatement la Proposition.

PROPOSITION I2 - Toute forme linéaire positive f sur $\mathcal{A}$ vérifie

$$(II) \qquad f(y^* x^* xy) \leq \| x^* x \| . f(y^* y) \quad .$$

D'après la Prop.II, il suffit pour le voir de démontrer que l'élément

$$(I2) \qquad s = \| x^* x \| . y^* y - y^* x^* xy = y^* (\| x^* x \| . e - x^* x) y$$

est hermitien positif. Qu'il soit hermitien est évident; comme par ailleurs le spectre de $x^* x$ est majoré par $\| x^* x \|$, la parenthèse dans (I2) représente un hermitien positif, en sorte que, pour tout $\lambda > 0$, on peut écrire

$$(I3) \qquad \| x^* x \| . e - x^* x + \lambda e = a^* a \ ,$$

d'où

$$(I4) \qquad f\left[y^* (\| x^* x \| e - x^* x + \lambda e) y \right] \geq 0 ,$$

ce qui donne

$$(I5) \qquad \| x^* x \| . f(y^* y) - f(y^* x^* xy) + \lambda f(y^* y) \geq 0$$

et fournit la Prop.I2 en faisant tendre λ vers 0.

THEOREME 2 - Toute forme linéaire ~~een~~ positive sur $\mathcal{A}$ est unitaire, et est en outre continue si l'involution de $\mathcal{A}$ est continue.

En effet, les conditions (FU_1) et (FU_2) du § I sont vérifiées, la première parce que $\mathcal{A}$ possède un élément unité, la seconde en vertu de la Prop.I2. Comme (II) donne en particulier

$$(I6) \qquad |f(x)|^2 \leq f(e) f(x^* x) \leq f(e) \| x^* x \| \ ,$$

on voit que f est continue si $\| x \| = \| x^* \|$.

(La continuité résulte aussi du § I, Théorème 5).

3 - Idéaux maximaux des algèbres symétriques.

Le présent N° peut être considéré comme le sommet provisoire de la théorie des *-algèbres; les résultats en sont dus essentiellemnt à Gelfand et Neumark, dont les méthodes ont été généralisées par Raikov. Notre but est de démontrer le

THEOREME 3 - Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre normée,complète,avec unité,symétrique, et munie d'une involution continue;alors à tout idéal à gauche maximal $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ on peut associer au moins une représentation unitaire irréductible $\{\mathcal{H}, U_x\}$ de $\mathcal{A}$ et un élément $X \in \mathcal{H}$ tel que $\mathcal{M}$ soit l'ensemble des $x \in \mathcal{A}$ qui vérifient l'équation

$$U_x X = 0 \quad . \tag{I7}$$

Démonstration -

Première partie : existence d'une forme linéaire positive f telle que

$$f(x^* x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{M} \; . \tag{I8}$$

Soit H l'ensemble des éléments hermitiens de $\mathcal{A}$;comme on suppose l'involution continue,H est un espace de Banach réel (c'est-à-dire complet).On désigne par $N(\mathcal{M})$ l'ensemble des $x \in H$ qui sont de la forme

$$x = y + y^* \quad \text{avec} \quad y \in \mathcal{M} \; . \tag{I9}$$

On va d'abord prouver que l'adhérence $\overline{N(\mathcal{M})}$ de $N(\mathcal{M})$ ne contient aucun hermitien strictement positif.

Pour le voir,observons tout d'abord que,les hermitiens strictement positifs constituant(Prop.5 et 6) un sous-ensemble ouvert de H,il suffit de prouver notre assertion pour $N(\mathcal{M})$.Or si (I9) est strictement positif,on a

$$y = \frac{x}{2} + iz \quad \text{avec} \quad z = z^* \; , \tag{20}$$

en sorte que y est inversible(PROP.8) -ce qui est absurde puisque $y \in \mathcal{M}$.

Ce point étant démontré,on voit que $\overline{N(\mathcal{M})}$ possède les propriétés suivantes

a) $\overline{N(\mathcal{M})}$ ne rencontre pas la boule $\| x - e \| < 1$ (d'après ce qui précède et la Prop.6);

b)si un hermitien positif x est de la forme

$$x = y + \lambda e \quad \text{avec} \quad y \in \overline{N(\mathcal{M})} \; , \tag{21}$$

on a nécessairement $\lambda \geqslant 0$ -sinon $y = x - \lambda e$ serait strictement positif contrairement à ce qu'on vient de voir.

Considérons maintenant l'ensemble E des éléments de la forme

(22) $\qquad x = y + \lambda e \qquad$ avec $y \in \overline{N(u)}$ et $\lambda \in R$;

de même que $N(u)$ et $\overline{N(u)}$, E est un sous-espace vectoriel de H. Comme d'après la propriété a) de $\overline{N(u)}$ e est extérieur au sous-espace $\overline{N(u)}$, il existe -en vertu du théorème de Hahn-Banach -une forme linéaire continue f définie sur E et vérifiant

(23) $\qquad f(x) = 0$ pour $x \in \overline{N(u)}$; $f(e) = I$.

Pour un élément (22), on aura donc

(24) $\qquad f(x) = f(y + \lambda e) = \lambda$,

et la propriété b) de $\overline{N(u)}$ implique donc:

(25) $\quad f(x) \geqslant 0$ si $x \in E$ est hermitien positif.

En d'autres termes, f est positive sur l'intersection de E et du cône H^+ .

Parvenus à ce point de la démonstration, nous sommes au regret d'introduire la Providence, sous la forme d'un

THEOREME DE KREIN - Soient H un espace de Banach sur R, et H^+ un sous-ensemble de H possédant les propriétés suivantes:

a) H^+ est un cône strictement convexe;

b) H^+ possède des points intérieurs.

Si alors f est une forme linéaire continue définie sur un sous-espace vectoriel E de H, et prenant des valeurs positives sur $H^+ \cap E$, f est la restriction à E d'une forme linéaire continue définie sur tout H et positive sur tout H^+ .

Si nous revenons au problème qui nous occupe, nous voyons que nous sommes

exactement dans les conditions d'application du Théorème de Krein, et que par conséquent on peut affirmer l'existence d'une forme linéaire continue $f(x)$ définie sur H, positive sur H^+, et vérifiant en outre

(26) $f(e) = I$, $f(x) \neq 0$ pour $x = y + y^*$ avec $y \in \mathfrak{N}$.

Si l'on prolonge f à tout $\mathfrak{A}$ en posant

(27) $f(x + iy) = f(x) + if(y)$

il est clair que l'on obtient une forme linéaire positive (donc continue) sur $\mathfrak{A}$.

Si $x \in \mathfrak{N}$, on aura aussi $x^* x \in \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{N}$ est un idéal à gauche), et même $x^* x \in N(\mathfrak{N})$ de façon évidente; par conséquent, on a

(28) $f(x^* x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{N}$,

ce qui achève la première partie de la démonstration.

Noter que, si $\mathfrak{N}$ est maximal (hypothèse dont on ne s'est pas encore servi), (28) caractérise $\mathfrak{N}$, puisque définissant un idéal à gauche distinct de $\mathfrak{A}$ et contenant $\mathfrak{N}$.

Deuxième partie : existence d'une forme unitaire élémentaire f telle que

(29) $f(x^* x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{N}$.

Considérons les formes unitaires f telles que $f(e) \leqslant I$, et qui vérifient (29); elles constituent visiblement un ensemble convexe K, fermé pour la topologie faible du dual de H et borné -donc faiblement compact. De plus, il est clair que

a) $f \in K$ implique $f/f(e) \in K$ si $f(e) \neq 0$;

b) $f \in K$ et $0 \leqslant g \leqslant f$ implique $g \in K$.

Ces propriétés permettent de refaire sur K le raisonnement exposé plus haut à propos de P_u^o (§ I, Théorème 3) -de façon précise, les points extrémaux de K sont des formes élémentaires. Il résulte alors du Théorème de Krein et Milmann que K contient effectivement des formes élémentaires, ce

Krein et Milmann que K contient effectivement des formes élémentaires, ce qui prouve notre assertion.

Pour achever la démonstration, il suffit d'observer que si $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ est la représentation unitaire monogène de $\mathcal{A}$ définie par f, on a

$$(30) \qquad f(x^* x) = (U_{x^* x} X, X) = (U_x X, U_x X) = \| U_x X \|^2 ,$$

et que par suite $\mathcal{M}$ est caractérisé par l'équation $U_x X = 0$.

Corollaire I du Théorème 3 - Toute représentation linéaire algébriquement irréductible de $\mathcal{A}$ est équivalente à une représentation pré-unitaire de $\mathcal{A}$.

Corollaire 2 du Théorème 3 - Tout idéal bilatère primitif de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des $x \in \mathcal{A}$ dont l'image dans une représentation unitaire irréductible convenable est l'opérateur 0.

En effet, un tel idéal est l'annihilateur d'un idéal à gauche maximal, donc l'ensemble des x tels que, pour une représentation unitaire monogène irréductible $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$, on ait

$$(3I) \qquad (U_x U_y X, X) = 0 \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{A} ;$$

les $U_y X$ étant partout denses dans $\mathcal{H}$ et U_x étant continu, (3I) équivaut, comme annoncé, à $U_x = 0$.

Corollaire 3 du Théorème 3 - Pour que $\mathcal{A}$ soit une algèbre simple, il faut et il suffit que toutes ses représentations unitaires irréductibles soient fidèles.

Conséquence évidente du Corollaire 2.

Le corollaire 3 permet de donner un exemple d'une algèbre symétrique qui, bien que possédant une représentation unitaire algébriquement irréductible et fidèle, n'est pas simple; c'est l'algèbre de tous les opérateurs bornés

d'un espace de Hilbert de dimension infinie ;que cette algèbre vérifie les hypothèses du Théorème 3 est évident,de même que l'existence d'une représentation unitaire (et non seulement pré-unitaire)algébriquement irréductible;cependant, $\mathcal{A}$ possède un idéal bilatère fermé non trivial (on peut montrer que c'est du reste le seul),à savoir l'ensemble des opérateurs complètement continus de $\mathcal{A}$ .Quant à la représentation unitaire dont cet idéal est,en vertu du Corollaire 2,l'annihilateur,personne,à la connaissance du rapporteur,n'en a jamais eu la moindre idée:problème mis au concours pour les tératologues.

Remarque - Si $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre normée,compléte, vec unité,dans laquelle le Théorème 3 est vrai, $\mathcal{A}$ est symétrique;car si l'idéal à gauche engendré par un élément de la forme $x^* x + e$ était distinct de $\mathcal{A}$,il existerait une forme linéaire positive f telle que

$$f(e) = I \quad , \quad f(x^* x + e) = 0 \quad ,$$

ce qui est absurde.Donc l'hypothèse faite sur $\mathcal{A}$ d'être symétrique est essentielle pour assurer la validité du Théorème 3.

Bien entendu,les résultats qu'on a obtenus dans ce § posent des problèmes importants,par exemple:l'annihilateur d'une représentation unitaire irréductible est-il réciproquement un idéal primitif?un tel idéal est-il détreminé par une seule représentation unitaire irréductible?Il est sans doute superflu de préciser qu'on ignore tout de ces questions.

Enfin,une conséquence importante(théoriquement tout au moins)du Théorème 3 est la suivante:

THEOREME 4 - Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre normée,complète,avec unité,symétrique et munie d'une involution continue;pour que $\mathcal{A}$ soit faiblement semi-simple, il faut et il suffit que,pour tout $x \neq 0$,il existe une forme linéaire positive f telle que $f(x^* x) \neq 0$; $\mathcal{A}$ est alors $*$-isomorphe à une algèbre autoadjointe d'opérateurs d'un espace de Hilbert.

positive f telle que $f(x^* x) \neq 0$; $\mathcal{A}$ admet alors une représentation unitaire fidèle, et réciproquement.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ce résultat évident.

Remarque - Il ne faudrait pas croire que toute algèbre autoadjointe d'opérateurs d'un espacde de Hilbert soit symétrique; le contre-exemple que voici est dû à Raikov:

soit $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions $f(\lambda)$ définies sur $\underline{R}$ et qui sont de carré sommable pour la mesure $d\lambda$; à toute mesure de Radon bornée μ on peut alors associer son opérateur de composition T_μ défini par

$$T_\mu f(\lambda) = \int f(\lambda - \xi) d\mu(\xi) \quad ;$$

on obtient ainsi une algèbre autoadjointe d'opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$, qui, selon Raikov, n'est pas symétrique (tout en étant complète si l'on norme T_μ au moyen de la masse totale de μ). Bien que le rapporteur n'aie pas examiné en détail cette question, il est à priori évident que les mesures μ telles que $T_\mu^* T_\mu + I$ ne soit pas inversible dans l'algèbre en question doivent comprendre une partie singulière. Au moyen d'une transformation de Fourier, cet exemple revient au suivant: si une fonction

$$\psi(\lambda) = \int e^{i\lambda\xi} d\mu(\xi)$$

est la transformée de Fourier d'une mesure bornée, il n'en est pas nécessairement de même de la fonction $\left(|\psi(\lambda)|^2 + 1\right)^{-1}$ (bien que celle-ci, comme on le sait, coincide sur chaque compact avec la transformée de Fourier d'une mesure bornée).

Terminons en disant qu'on ignore si l'algèbre L^1 d'un groupe localement compact arbitraire est ou non symétrique - la question n'étant résolue (par l'affirmative) que pour les groupes abéliens et les groupes compacts.

4 - Algèbres de Gelfand et Neumark.

Le but de ce § est de donner une caractérisation interne des sous-algèbres fermées et autoadjointes de l'algèbre des opérateurs d'un espace de Hilbert.

1 - Cas des algèbres commutatives.

THEORIME I - Soit A une algèbre normée complète, commutative, possédant un élément unité, et munie d'une involution vérifiant

$$(I) \qquad \|x^* x\| = \|x\| \cdot \|x^*\| ;$$

alors A est métriquement $*$-isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur l'espace compact $\hat{A}$. (Gelfand et Neumark).

(La démonstration exposée ici est due à

Lemme A - Pour tout $x \in A$, on a

$$(2) \qquad \|x\| = \|x^*\| = \lim \|x^n\|^{1/n} .$$

Posons en effet

$$(3) \qquad \lim \|x^n\|^{1/n} = 1/R \leqslant \|x\| ;$$

R est le rayon du plus grand cercle du plan complexe à l'intérieur duquel $e + \lambda x$ soit inversible (CH.II, § 2, Prop.6). Mais dire que $x + \lambda e$ est inversible revient à dire que $x^* + \tilde{\lambda} e$ l'est, ce qui montre que

$$(4) \qquad \lim \|x^n\|^{1/n} = \lim \|(x^*)^n\|^{1/n} \qquad \text{pour tout } x,$$

en sorte que l'on a d'après (I)

$$(5) \qquad \lim \|(x^* x)^n\|^{1/n} = \lim \|x^n\|^{1/n} \cdot \lim \|(x^*)^n\|^{1/n} = 1/R^2$$
$$\leqslant 1/R \cdot \inf (\|x\| , \|x^*\|) .$$

Mais de (I) résulte $\|y^2\| = \|y\|^2$ pour tout y hermitien, d'où par itération

$$(6) \qquad \|y\| = \lim \|y^n\|^{1/n} \qquad \text{pour } y = y^* ;$$

en particulier, on aura

$$(7) \qquad \lim \|(x^* x)^n\|^{I/n} = \|x^* x\| = \|x^*\|\|x\| \quad \cancel{*} \; \cancel{2} \; ,$$

et en comparant avec (5) il vient

$$(8) \qquad \|x^* x\| = \|x^*\|\|x\| = I/R^2 \leq \|x\|^2 \quad ,$$

d'où

$$(9) \qquad \|x^*\| \leq \|x\| \quad \text{et par suite} \quad \|x^*\| = \|x\| \quad ;$$

mais alors (8) donne

$$(10) \qquad I/R^2 = \|x\|^2 \quad ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme A.

<u>Lemme B - Le spectre de tout élément hermitien de $\mathcal{A}$ est réel.</u>

En effet, soit $x = x^*$ un tel élément, et considérons un nombre complexe $\lambda_0 = \rho e^{i\theta}$ tel que $\rho > \|x\|$; alors $(x - \lambda e)^{-I}$ existe au voisinage de λ_0, et la série entière

$$(II) \qquad (x - \lambda_0 e - \lambda e)^{-I} = (x - \lambda_0 e)^{-I} \cdot \sum \lambda^n (x - \lambda_0 e)^{-n}$$

converge, d'après le lemme A, pour

$$(I2) \qquad |\lambda| < R = I/\|(x - \lambda_0 e)^{-I}\| \quad .$$

Posons

$$(I3) \qquad y = (x - \lambda_0 e)(x - \lambda_0 e)^* = (x - \lambda_0 e)(x^* - \bar{\lambda}_0 e) = y^* \quad ;$$

on aura d'après (I) et le lemme A

$$(I4) \qquad \|y^{-I}\| = \|(x - \lambda e)^{-I}\|^2 = I/R^2 \quad ;$$

or on a en explicitant (I3)

$$(I5) \qquad y = \rho^2 (e - 2\frac{x}{\rho}\cos\theta + \frac{x^2}{\rho^2}) = \rho^2 (e - z)$$

où l'on a posé

$$(I6) \qquad z = 2\frac{x}{\rho}\cos\theta - \frac{x^2}{\rho^2} \quad ;$$

pour ρ assez grand, $\|z\|$ sera < 1, donc $\left\| e - \frac{y}{\rho^2} \right\| < I$, en sorte qu'on pourra écrire

$$(I7) \qquad (\frac{y}{\rho^2})^{-I} = \left[e - (e - \frac{y}{\rho^2}) \right]^{-I} = \sum (e - \frac{y}{\rho^2})^n \quad ,$$

et une majoration évidente du développement conduit alors à

$$(18)\qquad \left\| \left(\frac{y}{\rho^2} \right)^{-1} \right\| = \rho^2 \| y^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - \left\| e - \frac{y}{\rho^2} \right\|} \quad ;$$

en comparant avec (14), on en conclut que

$$(19)\qquad R \geqslant \rho (1 - \| z \|)^{1/2} \quad \underline{\text{dès que}} \ \rho \ \underline{\text{est assez grand}} .$$

Ceci étant, soit $\zeta = \alpha + i\beta$ un point du spectre de x, et prénons un nombre complexe $\lambda_0 = \rho e^{i\theta}$ quelconque; en posant $\lambda = -\lambda_0 - (\alpha + i\beta)$, on voit que $x - \lambda_0 e - \lambda e$ ne sera pas inversible, en sorte que l'on aura, avec les notations précédentes

$$(20)\qquad |\lambda|^2 = |\lambda_0 + \alpha + i\beta|^2 \geqslant R^2 \geqslant \rho^2 (1 - \| z \|)$$

pourvu que ρ soit assez grand; enexplicitant cette inégalité, il vient

$$(21)\qquad |\rho e^{i\theta} + \alpha + i\beta|^2 \geqslant \rho^2 \left(1 - \left\| 2\frac{x}{\rho} \cos\theta - \frac{x^2}{\rho^2} \right\|\right) ,$$

d'où l'on tire

$$(22)\qquad \alpha \cos\theta + \beta \sin\theta \geqslant - \left\| x\cos\theta - \frac{x^2}{2\rho} \right\| - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\rho} \quad ;$$

quand $\rho \to \infty$, on a donc

$$(23)\qquad \alpha \cos\theta + \beta \sin\theta \geqslant - \|x\| \, |\cos\theta| ,$$

et θ étant arbitraire, ceci exige $\beta = 0$: d'où le lemme B.

Démonstration du Théorème I - Il résulte immédiatement du Lemme B que est <u>symétrique</u>, et que par suite les fonctions $(x,\hat{x})$ sont partout denses dans l'algèbre des fonctions continues sur $\hat{\mathcal{A}}$; mais le lemme A implique

$$(24)\qquad \| x \| = \sup_{\hat{x}} |(x,\hat{x})|$$

en sorte que, $\mathcal{A}$ étant complète, les $(x,\hat{x})$ constituent <u>toutes</u> les fonctions continues sur $\hat{\mathcal{A}}$; enfin, (24) montre que la correspondance entre x et la fonction $(x,\hat{x})$ est isométrique, donc aussi biunivoque, et le Théorème est démontré.

<u>Une application du Théorème</u> I - Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et considérons dans $\mathcal{H}$ un opérateur linéaire A <u>borné</u> et <u>normal</u> (c'est-à-dire tel que $A^* A = A A^*$).

$A^* A = AA^*$).On peut alors lui associer une algèbre vérifiant les conditions du Théorème I de la façon suivante:on prend la plus petite sous-algèbre fermée de l'algèbre de tous les opérateurs de $\mathcal{H}$ qui contienne à la fois A, A^* et 1 -ou encore,on considère les opérateurs qui sont limites,pour la topologie uniforme,de polynômes en A et A^* .Il est clair que cette algèbre $\mathcal{A}$ est commutative,complète,stable par l'involution naturelle des opérateurs,et qu'elle vérifie bien la condition (I) -propriété classique de la norme considérée ici (et qu'on verra être caractèristique). Par conséquent,cette algèbre est isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur $\hat{\mathcal{A}}$;mais $\mathcal{A}$ possédant les générateurs A et A^* ,il est immédiat de constater que $\hat{\mathcal{A}}$ est canoniquement homéomorphe au spectre de A dans le plan complexe (l'homéomorphisme en question consistant à associer au caractère $\hat{x}$ le nombre complexe $(A,\hat{x})$);par suite, $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur le spectre σ de A.Il est facile de construire explicitement cet isomorphisme;si

$$(25) \qquad A = \int z dE_z$$

est la décomposition spectrale de A -au moyen d'une "décomposition de l'unité" portée par σ -et si $f(z)$ est une fonction continue sur σ ,il lui correspond dans $\mathcal{A}$ l'opérateur donné par

$$(26) \qquad f(A) = \int f(z).dE_z$$

-en d'autres termes,on obtient ainsi toutes les fonctions continues de A.

On notera que la décomposition spectrale (25) pourrait s'obtenir par les considérations du § 2;en effet,si X est un élément arbitraire de $\mathcal{H}$,la formule

$$(27) \qquad \varphi_X(U) = (UX,X)$$

définit évidemment une forme linéaire continue et positive sur $\mathcal{A}$,en sorte que les formes

$$(28) \qquad \varphi_{X,Y}(U) = (UX,Y)$$

apparaissent comme des combinaisons linéaires de formes unitaires sur $\mathcal{A}$; l'espace $\hat{\mathcal{A}}$ étant identifié au spectre σ de A,il résulte alors du Théorème de Bochner l'existence d'une mesure bornée portée par σ ,soit $\mu_{X,Y}$,telle que l'on ait

$$(29) \qquad \varphi_{X,Y}(U) = \int (U,z)\,d\mu_{X,Y}(z)$$

(on désigne par (U,z) les fonctions correspondant aux $(U,\hat{x})$;noter que, d'après la façon dont on a identifié $\hat{\mathcal{A}}$ et σ ,on a

$$(30) \qquad (A,z) = z \qquad \text{et plus généralement} \qquad (A^n A^{*n}, z) = z^n \bar{z}^n \ )$$

$\mu_{X,Y}$ dépend bien entendu de façon bilinéaire hermitienne de X,Y,et vérifie

$$(31) \qquad \| \mu_{X,X} \| \leqslant (X,X) \quad ;$$

si alors $f(z)$ est une fonction de z suffisamment bien constituée -par exemple borelienne et bornée -l'expression

$$(32) \qquad \int f(z)\,d\mu_{X,Y}(z)$$

constitue une forme bilinéaire à peu près hermitienne en X,Y, et continue -d'où un opérateur E_f tel que

$$(33) \qquad \int f(z)\,d\mu_{X,Y}(z) = (E_f X,Y) \qquad \text{quels que soient } X \text{ et } Y \ ;$$

si en particulier f est la fonction caractéristique d'un ensemble borélien,on constate sans peine (en observant que la correspondance $f \to E_f$ est multiplicative) que E_f est un projecteur -ce qui fournit la décomposition spectrale de A.

Le rapporteur est convaincu que cette méthode est de loin la meilleure pour exposer les questions de décomposition spectrale;pour la raison qu'elle

le s'applique,non seulement au cas considéré ici,mais à toutes les algèbres commutatives autoadjointes d'opérateurs -et même,dans une certaine mesure,au cas non commutatif;elle a en outre l'avantage de mettre parfaitement en évidence les relations existant entre les théorèmes de décomposition spectrale et les théorèmes du type de Bochner(relation vue pour la première fois par F.Riesz,semble-t-il).Bien entendu,son inconvénient est de ne pas être élémentaire(puisqu'on fait usage de Krein et Milmann)-mais il semble difficile d'unifier tous les résultats connus dans cet ordre d'idées par des mèthodes élémentaires ...

Revenant aux algèbres de Gelfand et Neumark,nous allons démontrer un résultat important pour la suite;c'est la

PROPOSITION I - Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux algèbres vérifiant les hypothèses du Théorème I;alors tout $*$-isomorphisme algèbrique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ est isométrique.

Soit en effet φ un tel isomorphisme;on peut sans restreindre la généralité supposer que $\varphi(\mathcal{A})$ est partout dense dans $\mathcal{A}'$.A tout caractère $\hat{x}'$ de $\mathcal{A}'$ correspond alors un caractère $\hat{x} = \vartheta(\hat{x}')$ de $\mathcal{A}$ donné par

$$(34) \qquad (\varphi(x),\hat{x}') = (x,\vartheta(\hat{x}')) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A},$$

et le fait que $\varphi(\mathcal{A})$ soit partout dense dans $\mathcal{A}'$ implique que l'application ϑ de $\hat{\mathcal{A}}'$ dans $\hat{\mathcal{A}}$ est biunivoque et continue.La Proposition sera démontrée si l'on prouve que l'image E de $\hat{\mathcal{A}}'$ par cette application est $\hat{\mathcal{A}}$ tout entier(car alors les algèbres de fonctions continues relatives à $\hat{\mathcal{A}}$ et à $\hat{\mathcal{A}}'$ seront métriquement isomorphes).Or cette image est un sous-ensemble compact de $\hat{\mathcal{A}}$ -puisqu'image continue d'un compact;si elle était distincte de $\hat{\mathcal{A}}$,il existerait donc une fonction continue sur $\hat{\mathcal{A}}$,non

identiquement nulle, et prenant la valeur 0 sur E; en d'autres termes, et en vertu du Théorème I, il existerait un $x \neq 0$ de $\mathcal{A}$ tel que

$$(35) \qquad (\varphi(x), \hat{x}') = 0 \quad \text{pour tout} \quad \hat{x}' \in \hat{\mathcal{A}}' ;$$

mais $\mathcal{A}'$ est semi-simple, en sorte que l'on déduit de là $\varphi(x) = 0$ et par conséquent $x = 0$ puisque φ est un isomorphisme : d'où la Proposition.

Remarque - On verra plus loin (Lemme D) que ce résultat s'étend au cas non commutatif.

2 - Cas des algèbres non commutatives.

THEOREME 2 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète, avec unité, symétrique, et munie d'une involution vérifiant les conditions suivantes:

$$(H_1) \qquad \| x^* x \| = \| x \| \, \| x^* \| ;$$

$$(H_2) \qquad \| x^* \| = \| x \| ;$$

alors $\mathcal{A}$ est métriquement $*$-isomorphe à une algèbre autoadjointe (fermée) d'opérateurs d'un espace de Hilbert convenable, et réciproquement.

Démontrons d'abord la réciproque. Soient pour cela $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{M}$ l'algèbre de tous les opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ -munie de son involution naturelle et de la norme habituelle- et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}$, stable par $U \to U^*$ et fermée pour la topologie de $\mathcal{M}$. Il est bien connu que $\mathcal{M}$ et donc $\mathcal{A}$ vérifient (H_1) et (H_2) ; et que $\mathcal{M}$ est symétrique. Pour montrer que $\mathcal{A}$ l'est aussi, il suffit d'observer que, le spectre d'un opérateur hermitien étant réel, est invariant si l'on contracte l'algèbre dans laquelle on considère cet opérateur (Chap. II, § 3, N°); donc si $U \in \mathcal{A}$, le spectre de $U^* U + 1$ sera le même dans $\mathcal{A}$ que dans $\mathcal{M}$: d'où la propriété annoncée.

Soit maintenant $\mathcal{A}$ une algèbre satisfaisant aux hypothèses du Théorème 2.

<u>Lemme</u> C - <u>Toute algèbre satisfaisant aux hypothèses du Théorème</u> 2 <u>est faiblement semi-simple</u>.

En effet, (H_1) implique $\|x^2\| = \|x\|^2$ pour tout élément hermitien x de $\mathcal{A}$;on en déduit par un raisonnement déja exposé de nombreuses fois que le radical faible de $\mathcal{A}$ ne peut contenir d'autre élément hermitien que 0.mais s'il contient un x quelconque,il contient aussi x^*x -d'où x On déduit ~~du lemme~~ Grès ~~(Hs)~~ résultats du

$x = 0$, en vertu de (H_1) et de (H_2).

On déduit du lemme C et des résultats du § 3 que $\mathcal{A}$ admet une représentation unitaire $\{\mathcal{H}, U_x\}$ <u>fidèle</u>.Soit $\mathcal{A}'$ la plus petite algèbre <u>fermée</u> d'opérateurs de $\mathcal{H}$ contenant tous les U_x -c'est-à-dire,l'adhérence de l'ensemble des U_x dans la topologie uniforme des opérateurs.Il est clair que $\mathcal{A}'$ vérifie les conditions du Théorème 2,en sorte que $x \to U_x$ apparait comme un $*$-isomorphisme algèbrique de $\mathcal{A}$ <u>dans</u> $\mathcal{A}'$;le Théorème 2 se réduit dans ces conditions au

<u>Lemme</u> D - <u>Soient</u> $\mathcal{A}$ <u>et</u> $\mathcal{A}'$ <u>deux algèbres vérifiant les conditions du Théorème</u> 2;<u>alors tout</u> $*$-<u>isomorphisme algèbrique de</u> $\mathcal{A}$ <u>dans</u> $\mathcal{A}'$ <u>est isométrique</u> (en sorte que l'image de $\mathcal{A}$ par une telle application est fermée)

En effet,soit φ un isomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$,vérifiant $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$;pour un $x \in \mathcal{A}$,considérons la sous-algèbre fermée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ engendrée par x^*x et e,et soit $\mathcal{B}'$ l'<u>adhérence</u> dans $\mathcal{A}'$ de son image par φ ;il est clair que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont commutatives ,complètes,avec unité,et munies d'involutions vérifiant (H_1); d'après la Proposition 1,on en déduit que φ est isométrique sur $\mathcal{B}$,et par suite que

$$(36) \quad \|\varphi(x^*x)\| = \|x^*x\| \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{A};$$

(36) ,(H_1) et (H_2) démontrent alors le lemme D -et donc le Théorème 2.

Remarque - On peut se demander -comme le font Gelfand et Neumark -si les hypothèses du Théorème 2 sont toutes nécessaires pour assurer sa validité; Gelfand et Neumark pensent que (H_1) doit impliquer (H_2) et le fait que soit symétrique ,ce qui parait en effet vraisemblable si l'on en juge par le cas commutatif;le problème n'a cependant pas été résolu par ces auteurs, ce qui tendrait à prouver qu'il n'est pas dénué d'une certaine difficulté..

3 - Formes positives sur une algèbre de Gelfand et Neumark.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert,et $\mathcal{A}$ une algèbre autoadjointe et fermée pour la topologie uniforme,d'opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ .On a vu que toute forme linéaire positive sur $\mathcal{A}$ est automatiquement continue et unitaire -tout au moins si,ce que nous supposerons, $\mathcal{A}$ contient l'opérateur unité (§ 3,Théorème 2).Le but de ce N° est de montrer comment l'on peut obtenir toutes ces formes (mais nous n'avons aucun résultat général sur la structure de ces formes qui soit comparable au Théorème de Bochner dans le cas commutatif).

On a en effet le résultat très simple suivant:

THEOREME 3 - Soit $\mathcal{A}$ une algèbre autoadjointe et fermée d'opérateurs d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$,possédant un élément unité;toute forme linéaire positive définie sur $\mathcal{A}$ est limite faible de formes du type

$$(37) \qquad g(U) = (UX_1, X_1) + \ldots + (UX_n, X_n)$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des éléments arbitraires de $\mathcal{H}$,et réciproquement.

Que la formule (37) définisse une forme unitaire sur $\mathcal{A}$ est évident;par suite,toute ge limite faible de formes (37) est bien positive sur $\mathcal{A}$ (et donc unitaire).Pour montrer la réciproque,désignons par H l'ensemble des opérateurs hermétiens de $\mathcal{A}$;c'est un espace de Banach réel,et toute forme

linéaire positive sur $\mathcal{A}$ peut être identifiée à un élément du dual réel de H; on obtient ainsi dans ce dual un ensemble convexe et faiblement fermé;il faut démontrer que les formes (37) y sont partout denses pour la topologie faible .

Mais d'après le Théorème de Hahn-Banach, ceci revient (puisque les formes (37) constituent elles mêmes un convexe) à démontrer la propriété suivante: si un $U \in H$ vérifie $f(U) \geqslant 0$ pour toute forme f du type (37), il vérifie aussi $f(U) \geqslant 0$ pour toute forme linéaire positive sur $\mathcal{A}$ .Or dire que $f(U) \geqslant 0$ pour les formes(37) signifie simplement que U est un opérateur hermitien positif;comme toute forme positive f vérifie -par définition - $f(A^* A) \geqslant 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$,on est donc ramené à démontrer le résultat suivant(analogue à la Prop.4 du § 3,mais cependant un peu plus fort):

PROPOSITION 2 - Si $\mathcal{A}$ est une algèbre vérifiant les hypothèses du Théorème 3,et si U est un opérateur hermitien positif appartenant à $\mathcal{A}$,il existe un élément $A \in \mathcal{A}$ tel que $U = A^* A$.

Pour démontrer cette Proposition,il suffit de considérer l'algèbre commutative $\mathcal{B}$,engendrée dans $\mathcal{A}$ par U et 1 ,et l'adhérence $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ de cette algèbre; $\mathcal{C}$ vérifie alors les hypothèses du Théorème I,et est donc isomorphe à une algèbre de fonctions continues;comme U est hermitien positif,son spectre dans $\mathcal{C}$ sera positif d'après une remarque déja faite; donc la fonction associée à U par l'isomorphisme en question sera à valeurs positives,ce qui permet d'en prendre la racine carrée -et démontre la Prop.

L'intérêt du Théorème 3 est de montrer que,pour les algèbres de Gelfand et Neumark,on peut obtenir toutes les représentations unitaires à partir

de la représentation "régulière" de A ,au moyen de produits directs et de passages à la limite .Mais,encore une fois,il serait désirable d'obtenir des résultats plus précis sur la structure de ces algèbres,et en particulier sur la façon dont on peut (éventuellement) décomposer toute représentation unitaire d'une telle algèbre en composantes irréductibles; c'est de problèmes de ce genre que dépend la possibilité d'étendre la transformation de Fourier aux groupes localement compacts généraux.

Une autre application de la théorie exposée dans ce $\S$ est la suivante: considérons une $*$ -algèbre normée complète avec unité,munie d'une involution continue ,soit A ,et désignons par $\hat{A}$ l'ensemble de ses représentations unitaires irréductibles (définies à une équivalence près);il est évidemment important de savoir introduire une topologie sur $\hat{A}$ - il suffit de considérer le cas commutatif pour s'en convaincre.Ceci peut être fait de la manière que voici:

soit $\{\mathcal{H}, U_x\}$ une représentation unitaire quelconque de A ;désignons par une lettre telle que $\mathcal{E}$ cette représentation;on peut lui associer une algèbre de Gelfand et Neumark,à savoir la plus petite algèbre fermée $M_{\mathcal{E}}$ d'opérateurs de $\mathcal{H}$ contenant tous les U_x ;il est clair que toute représentation unitaire irréductible de $M_{\mathcal{E}}$ conduit à une représentation unitaire irréductible de A ,en sorte que l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de $M_{\mathcal{E}}$ peut être identifié à un sous-ensemble $T_{\mathcal{E}}$ de $\hat{A}$;il est possible alors de démontrer que la famille des ensembles $T_{\mathcal{E}}$ ainsi définis sur $\hat{A}$ possède toutes les propriétés de la famille des ensembles fermés d'un espace topologique ,et permet par conséquent d'introduire une topologie sur $\hat{A}$ .Malheureusement,il se produit ici les mêmes difficultés que dans les topologies à la Jacobson,c'est-à-dire que

l'espace topologique $\hat{\mathcal{A}}$ peut fort bien ne pas être séparé -ce qui est d'autant plus malheureux que, comme on le voit facilement, il vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue ($\mathcal{A}$ possède un élément unité). C'est pourquoi nous n'insisterons pas sur cette question. Disons cependant que la notion de "spectre" $\sigma_{\mathcal{D}}$ d'une représentation $\mathcal{D}$ s'applique en particulier aux formes unitaires f définies sur $\mathcal{A}$ -en assimilant une telle forme à la représentation unitaire monogène $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ correspondante; et que ce spectre, comme il résulte du Théorème 3, n'est autre que l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de $\mathcal{A}$ qui sont définies par des formes unitaires (élémentaires) approchables, dans la topologie faible du dual de $\mathcal{A}$, par des formes du type suivant :

$$(38) \qquad g(x) = \sum_i \alpha_i \overline{\alpha}_j f(s_i x s_j^*) + \dots + \sum_k \lambda_k \overline{\lambda}_h f(u_k x u_h^*) ,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres complexes arbitraires, et $s_1, \dots, u_h$ des éléments arbitraires de $\mathcal{A}$; on pourra constater une certaine analogie entre ces résultats et ceux du Chap. II, § 4 sur l'analyse harmonique-analogie d'autant plus frappante que, ici, la "synthèse harmonique" est possible au sens suivant; la forme f est, réciproquement, limite faible de combinaisons linéaires, à coefficients positifs, de formes élémentaires appartenant au spectre de f -c'est-à-dire obtenues comme limites faibles de formes (38). Pour ces questions (encore dans l'enfance) (et dont on ne sait même pas si elles n'y resteront pas éternellement), voir Godement [1].

---

5 - Caractères des * -algèbres.

I - Doubles représentations unitaires et formes centrales positives.

Dans tout ce §, $\mathcal{A}$ désigne une *-algèbre normée complète, avec unité et munie d'une involution continue (ces hypothèses étant destinées à simplifier l'exposé). Comme on l'a vu, les formes unitaires sur $\mathcal{A}$ ne sont autres que les formes linéaires continues et positives.

Définition I. - On dit qu'une forme linéaire $f(x)$ définie sur $\mathcal{A}$ est centrale si elle vérifie la condition

(FLC) $\qquad f(xy) = f(yx)$ quels que soient x et $y \in \mathcal{A}$.

Bien entendu, on s'intéressera ici aux formes positives qui sont centrales - en admettant leur existence, laquelle est une propriété relativement restrictive des algèbres considérées (alors qu'au contraire l'existence de formes unitaires non centrales est un phénomène général dans la pratique).

Soit $f(x)$ une forme unitaire centrale; f définit une représentation unitaire monogène $\{\mathcal{H}, U_x, X\}$ de qu'on peut obtenir, rappelons-le, comme suit: on considère l'idéal à gauche $\mathfrak{m}$ défini par l'équation

$$(I) \qquad f(x^* x) = 0 \ ,$$

et l'espace quotient $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$; sur celui-ci, la formule

$$(2) \qquad (\dot{x}, \dot{y})_f = f(y^* x)$$

permet de définir une structure pré-hilbertienne, d'où par complétion un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lequel $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ est partout dense; si alors on considère la représentation linéaire canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$, on constate que les opérateurs de cette représentation sont bornés pour la structure pré-hilbertienne de $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$, et sont par suite prolongeables à l'espace $\mathcal{H}$ par continuité - ce qui conduit à la représentation unitaire cherchée de $\mathcal{A}$, soit $x \to U_x$; celle-ci admet $\dot{e}$ comme élément générateur puisque l'on a $U_x(\dot{e}) = \dot{x}$,

et f s'exprime par la formule

(3) $\qquad f(x) = (U_x\dot{e},\dot{e})_f$.

Ceci étant, supposons f centrale; alors il est clair que $\mathfrak{m}$ est stable par $x \to x^*$, et est par conséquent un idéal bilatère de $\mathcal{A}$; donc on peut définir dans $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ deux représentations lin aires de $\mathcal{A}$; l'une est définie par la formule

(4) $\qquad T_x(\dot{y}) = \dot{\overline{(xy)}}$,

est une représentation linéaire gauche de $\mathcal{A}$ (Cf. Chapitre I), et conduit à la représentation unitaire $x \to U_x$ dont on vient de parler; l'autre est donnée par

(5) $\qquad T'_x(\dot{y}) = \dot{\overline{(yx)}}$,

et est une représentation linéaire droite de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$; il est clair que les endomorphismes T_x et T'_y sont deu permutables quels que soient x et y; par ailleurs, on aura

(6) $\qquad (T'_{x^*}\dot{y},\dot{z})_f = f(z^* yx^*) = f(x^* z^* y) = f((zx)^* y) = (\dot{y},T'_x\dot{z})_f$,

en sorte que $x \to T'_x$ est aussi une représentation pré-unitaire (droite) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$; comme par ailleurs on a

(7) $\qquad (T'_x\dot{y},T'_x\dot{y})_f = f((yx)^* yx) = f(x^* y^* yx) = f(yxx^* y^*)$

$$\leq f(yy^*)\lim \| (xx^*)^n \|^{1/n} = K_x\cdot(\dot{y};\dot{y})_f ,$$

on voit que les opérateurs T'_x sont, comme les T_x, continus pour la structure pré-hilbertienne de $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$, et sont par suite prolongeables par continuité à l'espace $\mathcal{H}$; on obtient ainsi dans $\mathcal{H}$ une seconde représentation unitaire droite de $\mathcal{A}$, que nous noterons $x \to V_x$, et pour laquelle on a aussi

(8) $\qquad f(x) = (V_x\dot{e},\dot{e})_f$

pour la raison que l'on a même

(9) $\qquad U_x\dot{e} = V_x\dot{e}$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

~~On est ainsi conduit à la notion suivante:~~

Enfin, l'idéal $\mathfrak{N}$ étant invariant par l'involution de $\mathcal{A}$, on peut définir dans l'espace vectoriel $\mathcal{A}/\mathfrak{N}$ un antiautomorphisme involutif S par

(I0) $\quad S(\dot{x}) = \dot{(x^*)}$;

comme on a

(I1) $\quad (S\dot{x}, S\dot{x})_f = f(xx^*) = f(x^*x) = (\dot{x}, \dot{x})_f$,

on voit que S est prolongeable par continuité à l'espace $\mathcal{H}$ et y constitue un automorphisme involutif que nous noterons encore S; si l'on observe que

(I2) $\quad S.T_x\dot{y} = T_{x^*}S\dot{y}$,

on voit que l'on aura de même

(I3) $\quad S.V_{x^*} = U_x.S$ pour tout $x \in \mathcal{A}$,

et on est ainsi conduit à la notion suivante:

Définition 2 - On appelle double représentation unitaire monogène d'une $*$-algèbre $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S, X\}$ constitué par:

a) un espace de Hilbert $\mathcal{H}$;

b) une représentation unitaire gauche $x \to U_x$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$;

c) une représentation unitaire droite $x \to V_x$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$, telle que

(I4) $\quad U_x.V_y = V_y.U_x$ quels que soient x et y ;

d) un antiautomorphisme involutif S de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tel que

(I5) $\quad S.V_{x^*} = U_x.S$ pour tout $x \in \mathcal{A}$;

e) un élément distingué $X \in \mathcal{H}$ vérifiant

(I6) $\quad SX = X$, $\quad U_xX = V_xX$ pour tout $x \in \mathcal{A}$,

et tel que les U_xX soient partout denses dans $\mathcal{H}$. On dit que X est l'élément générateur de la double représentation unitaire monogène considérée.

Bien entendu, on pourrait définir, comme pour les représentations unitaires ordinaires, la notion d'équivalence de deux doubles représentations. Les consi-

dérations qui nous ont conduit à la définition 2 nous amènent naturellement au

THEOREME I - Toute double représentation unitaire monogène $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S, X\}$ de $\mathcal{A}$ est déterminée, à une équivalence près, par la connaissance de la forme linéaire continue, centrale et positive

$$(I7) \qquad f(x) = (U_x X, X) = (V_x X, X) \quad ;$$

inversement, toute forme linéaire continue, centrale et positive f sur $\mathcal{A}$ détermine une double représentation unitaire monogène de $\mathcal{A}$ pour laquelle on a (I7)

Le seul point qui ne soit pas absolument évident dans ce Théorème est que, pour toute double représentation unitaire monogène, la formule (I7) définisse une forme centrale ; mais cela résulte de ce que

$$(I8) \qquad f(xy) = (U_x U_y X, X) = (U_x V_y X, X) = (V_y U_x X, X) = (V_y V_x X, X) = f(yx)$$

De même qu'on a distingué les représentations unitaires monogènes des autres, une théorie complète des doubles représentations obligerait à introduire la notion suivante, plus générale :

Définition 3 - On appelle double représentation unitaire d'une $*$-algèbre $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$ constitué par :

a) un espace de Hilbert $\mathcal{H}$;

b) une représentation unitaire gauche $x \to U_x$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$;

c) une représentation unitaire droite $x \to V_x$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$, vérifiant

$$(I9) \qquad U_x . V_y = V_y . U_x \qquad \text{quels que soient } x \text{ et } y ;$$

d) un antiautomorphisme involutif S de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tel que

$$(20) \qquad S . V_x = U_x . S \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

Donnons tout de suite un exemple particulièrement important pour les applications éventuelles de la théorie:

soit G un groupe localement compact (que nous supposerons unimodulaire pour

simplifier),dx la mesure de Haar sur G (invariante à gauche et à droite),L l'espace des fonctions continues à noyau compact définies sur G.L peut être considéré comme une $*$-algèbre (sans élément unité si G n'est pas discret)en y introduisant les opérations suivantes:

$$(2I) \qquad f*g(x) = \int f(xy^{-I}).g(y)dy \quad ;$$

$$(22) \qquad \tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-I})} \quad ,$$

et un exemple particulièrement simple de forme linéiare positive centrale sur L est la mesure ε formée d'une masse $+I$ placée en e -donnée explicitement par

$$(23) \qquad \varepsilon(f) = f(e).$$

Cette forme conduit effectivement à une double représentation unitaire de L, dont l'importance est capitale(quoique non encore très bien élucidée),à savoir la suivante:soit L^2 l'espace des fonctions de carré sommable pour dx sur G; la double représentation en question s'effectue précisément dans cet espace de Hilbert,et elle est donnée par

$$(24) \qquad U_f g = f*g \quad ; \quad V_f g = g*f \qquad \text{pour } f \in L \text{ et } g \in L^2$$

-en d'autres termes,on parvient ainsi à la double représentation "régulière" de G.Bien entendu,toute mesure centrale et de type positif sur G conduit de même à des doubles représentations unitaires de G,et il y a lieu de croire que ce n'est pas la seule façon d'en obtenir.Par contre,il n'existe pas toujours de doubles représentations monogènes,celles-ci étant liées à l'existence de fonctions centrales et de type positif sur G (pratiquement,il semble que ce ne soit le cas que dans les groupes qui possèdent un voisinage compact de e,invariant par les automorphismes intérieurs de G -c'est-à-dire des groupes dans lesquels il existe des fonctions centrales sommables).

Dans cet exposé,nous nous bornerons à indiquer quelques propriétés importantes des doubles représentations unitaires monogenes,pour la raison qu'on

ignore tout des autres;mais il est hors de doute qu'une étude complète du cas général s'impose.

2 - Propriétés de la relation d'ordre dans l'ensemble des formes unitaires centrales.

Le but de ce N° est de montrer que l'ensemble Z des formes unitaires centrales définies sur $\mathcal{A}$ est,si on le muni de sa relation d'ordre naturelle, un ensemble achevé;ce phénomène (qui,dans le cas commutatif,se ramène,par le théorème de Bochner,à la propriété correspondante des mesures positives sur un espace compact)montre que les formes unitaires centrales ont un comportement plutôt "abélien",ce qui peut se justifier entièrement dans certains cas.

Soit $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S, X\}$ une double représentation unitaire monogène de $\mathcal{A}$,associée à la forme centrale

$$(25) \qquad f(x) = (U_x X, X) = (V_x X, X) \quad ,$$

et soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ qui vérifient

$$(26) \qquad U_x . A = A . U_x \quad , \quad V_x . A = A . V_x \quad .$$

Il est clair qu'ils forment une algèbre autoadjointe,fermée pour la topologie uniforme (et même pour la topologie faible)des opérateurs.Nous allons montrer que cette algèbre est commutative;on se bornera à étudier les $A \in \mathcal{R}$ qui sont hermitiens et vérifient $0 \leqslant A \leqslant 1$:il est clair qu'on ne restreint pas la généralité en se ramenant à ce cas.

Tout d'abord,pour un tel A on a

$$(27) \qquad (A.U_x X, X) = (SX, SAU_x X) = (X, SAU_x SX) = (X, SASV_{x^*} X)$$

d'où

$$(28) \qquad (SAS.V_x X, X) = (X, AU_{x^*} X) = (U_x AX, X) = (AU_x X, X) = (AV_x X, X) \quad ;$$

en remplaçant x par xy,et en tenant compte de (26),on tire de là

$$(29) \qquad SAS = A^* \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{R} \quad .$$

Ceci étant, soient A et B deux éléments arbitraires de $\mathcal{R}$; appliquant (29) à AB, il vient

$$(30) \qquad SABS = (AB)^* = B^*A^* \quad ;$$

mais S étant un antiautomorphisme involutif, on a aussi

$$(31) \qquad SABS = (SAS)(SBS) = A^*B^* \quad ;$$

il en résulte que A^* et B^* sont permutables, dons aussi A et B, et ainsi est prouvé le

THEOREME 2 - Soit $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S, X\}$ une double représentation unitaire monogène de $\mathcal{A}$; alors les opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ qui permutent à la fois aux U_x et aux V_x forment une algèbre commutative.

Il résulte de ce Théorème et de ce qu'on a vu au § 4 sur les *-algèbres commutatives de Gelfand et Neumark, que, dans l'algèbre $\mathcal{R}$, les opérateurs hermitiens forment un espace de Riesz vis-à-vis de la relation d'ordre naturelle qu'on peut définir dans cet ensemble (car ces opérateurs hermitiens forment un espace ordonné isomorphe à l'espace des fonctions continues réelles sur un espace compact convenable). En fait, cet espace de Riesz est achevé ; c'est une propriété classique des systèmes commutatifs d'opérateurs hermitiens, que le lecteur connait déja certainement.

Nous allons déduire de cette remarque la propriété analogue des formes unitaires centrales. Tout d'abord, soient f et g deux telles formes, et supposons $g \leqslant f$; soit $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S, X\}$ la double représentation associée à f. D'après

$$(32) \qquad g(x^*x) \leqslant f(x^*x) = (U_xX, U_xX) \quad ,$$

il existe dans $\mathcal{H}$ un opérateur hermitien H borné, vérifiant

$$(33) \qquad 0 \leqslant H \leqslant 1 \quad , \qquad g(x) = (HU_xX, X) \quad , \qquad HU_x = U_xH$$

(on l'a vu dans un cas plus général au § I) ; du fait que g est centrale, H est en outre permutable aux V_x, comme il résulte de

(34) $(HV_xX,V_yX) = (HU_xX,U_yX) = g(y^*x) = g(xy^*) = (HU_{y^*}X,U_{x^*}X)$

$= (U_{y^*}HX,V_{x^*}X) = (HX,U_yV_{x^*}X) = (HX,V_{x^*}U_yX) = (V_xHX,V_yX)$;

de plus, les U_xX étant partout denses dans $\mathcal{H}$, l'opérateur $H \in \mathcal{R}$ qui correspond à g est parfaitement déterminé par la formule (33), et est une fonction "croissante" de g; réciproquement, tout $H \in \mathcal{R}$ vérifiant $0 \leqslant H \leqslant 1$ est associé à une telle g -à savoir à

(35) $g(x) = (HU_xX,X) = (HV_xX,X)$;

que l'on ait $g \leqslant f$ résulte du § I, et il suffit donc de vérifier que g est centrale -ce qui résulte de

(36) $g(xy) = (HU_xU_yX,X) = (HX,U_{y^*x^*}X) = (SU_{y^*}U_{x^*}X,SHX) = (V_{yx}X,HX)$

$= (HV_{yx}X,X) = (HU_{yx}X,X) = g(yx)$;

en définitive, on voit qu'il existe une correspondance biunivoque et croissante entre:

---les formes unitaires centrales g telles que $g \leqslant f$;

---les opérateurs hermitiens $H \in \mathcal{R}$ tels que $0 \leqslant H \leqslant 1$.

Il en résulte immédiatement que l'ensemble des formes unitaires centrales est réticulé pour la relation d'ordre considérée; et même qu'il est achevé, comme on le voit de la façon suivante: soit (f_ν) une famille de formes centrales majorée par une forme g; dans la double représentation associée à g, les f_ν seront représentées par des opérateurs hermitiens de l'algèbre $\mathcal{R}$ correspondante, tous compris entre 0 et 1 ; ces opérateurs ont donc une borne inférieure qui correspond visiblement à une forme f, borne inférieure des f_ν ; d'où l'on déduit par des raisonnements bien connus l'existence de $\sup(f_\nu)$.

On a donc en définitive le

THEOREME 3 - L'ensemble des formes unitaires centrales définies sur $\mathcal{A}$ est achevé pour la relation d'ordre naturelle $f \leqslant g$.

On peut étendre ce résultat à des algèbres ne possédant pas d'élément unité; c'est ainsi que, sur un groupe localement compact quelconque, les fonctions (et même des choses plus générales comprenant les mesures) centrales de type positif forment un ensemble achevé.

3 - Caractères des $*$-algèbres.

Définition 4 - On dit qu'une double représentation unitaire $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$ de $\mathcal{A}$ est irréductible s'il n'existe aucun sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, autre que $\{0\}$ et $\mathcal{H}$, qui soit invariant par les U_x et les V_x. On dit qu'une forme unitaire centrale f est un caractère de $\mathcal{A}$ si elle définit une double représentation unitaire irréductible de $\mathcal{A}$, et si en outre $f(e) = I$.

Les considérations du N° précédent prouvent sans qu'il soit utile d'insister le résultat suivant:

THEOREME 4 - Les caractères de $\mathcal{A}$ sont les points extrémaux non nuls de l'ensemble convexe formé par les formes unitaires centrales telles que $f(e) \leqslant I$.

Comme cet ensemble convexe est évidemment faiblement fermé dans le dual de $\mathcal{A}$, on déduit de là que toute forme unitaire centrale est limite faible de combinaisons linéaires à coefficients positifs de caractères de $\mathcal{A}$, etc...

De même que les formes élémentaires, les caractères peuvent aussi être définis par le fait que toute forme unitaire centrale qu'ils majorent leur est proportionnelle.

On peut aussi introduire une topologie dans l'ensemble Ω des caractères de $\mathcal{A}$, au moyen de principes analogues à ceux qu'on a employés pour les représentations unitaires irréductibles; mais ici, il est possible de parvenir à un résultat un peu plus satisfaisant -quoiqu'encore imparfait -et ce de la façon suivante.

~~Soit K l'ensemble des formes unitaires centrales f telles que f(e) = I. Appelon~~ ~~partie complète de K tout sous-ensemble / de K possédant les propriétés suivantes~~

Soit K l'ensemble des formes unitaires centrales f telles que $f(e) \leqslant I$. Appelons <u>partie complète</u> tout sous-ensemble $A \subset K$ possédant les propriétés suivantes: a) A est convexe, faiblement fermée, et, avec une forme f, contient toutes les formes $g = \lambda f$ telles que $g(e) \leqslant I$; b) A contient toutes les minorantes de ses éléments dans K.

Il est clair que les points extrémaux non nuls d'une telle partie sont les caractères qu'eele contient; par suite, toute partie complète A définit un sous-ensemble $\sigma(A) = A \cap \Omega$; soit $\mathcal{F}$ la famille de parties de Ω ainsi obtenues. $\mathcal{F}$ contient Ω (correspondant à A = K) et $\emptyset$ (correspondant à $A = \{0\}$); comme toute intersection de parties complètes est visiblement une partie complète, toute intersection d'ensembles de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$; noter que tout point f de Ω définit une partie complète -à savoir l'ensemble des λf, $0 \leqslant \lambda \leqslant I$- et que par suite tout sous-ensemble de Ω réduit à un point est dans $\mathcal{F}$; montrons enfin que la réunion de deux ensembles de $\mathcal{F}$ est encore dans $\mathcal{F}$. Pour cela, soient A et B deux parties complètes, et posons $C = (A + B) \cap K$; il est immédiat de vérifier que C possède la propriété a) des parties complètes; si $h = f + g$ ($f \in A$, $g \in B$, $f(e)+g(e) \leqslant I$) est dans C, et si $h' \leqslant h$, alors on a $h' = f' + g'$ avec

$$f' = \inf(f,h') \quad , \quad g' = \inf(g,h') \quad ,$$

d'où, puisque f' et g' minorent $f \in A$ et $g \in B$, donc sont dans A et B respectivement, il résulte que $h' \in C$: c'est la propriété b) des parties complètes.
Ceci étant, tout élément $h \in \sigma(C)$ sera de la forme $h = f + g$ avec $f \in A$, $g \in B$; comme h est un caractère, il s'ensuit que f et g sont proportionnels à h: donc $h \in \sigma(A) \cup \sigma(B)$, et comme on a trivialement $\sigma(C) \supset \sigma(A) \cup \sigma(B)$, on en conclut que $\sigma(C) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$; ce qui prouve notre assertion.

En conclusion, la famille $\mathcal{F}$ permet de définir sur Ω une topologie pour la-

quelle les ensembles de $\mathcal{F}$ sont précisément les ensembles fermés ;comme tout point de Ω définit un tel sous-ensemble,on voit que cette topologie est relativement séparée (si l'on peut dire);pour être sûr que l'axiome de Hausdorff est vérifié,il faudrait prouver que,étant donnés deux caractères distincts f et g,il existe deux familles complètes A et B telles que $K = A \cup B$,A (resp.B) contenant f(resp.g)mais non g(resp.f),ce qui ne semble pas facile sans hypothèses supplémentaires.

On notera d'autre part que Ω ,ainsi muni d'une topologie,vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue;en effet,soit A_ν une famille de parties complètes,et supposons que les fermés $\sigma(A_\nu)$ forment une famille telle que l'intersection d'un nombre fini quelconque d'entre eux ne soit pas vide;alors une propriété analogue sera vérifiée par les A_ν ,et même par leurs traces A'_ν sur le sous-ensemble (faiblement fermé)de K défini par l'équation f(e) = 1;comme ce sous-ensemble est faiblement compact,il en est de même des A'_ν ,et Borel-Lebesgue implique alors que l'intersection des A'_ν est non vide;donc celle des A_ν est une partie complète non réduite à 0 ,en sorte finalement que l'intersection des $\sigma(A_\nu)$ est non vide: c'est ce qu'on voulait démontrer.

On peut donc affirmer que,si la topologie introduite sur Ω est séparée(au sens de Hausdorff), Ω est nécessairement un espace compact.

Par analogie avec le cas des algèbres commutatives,on pourrait être tenté de munir Ω ,non de la topologie définie ci-dessus,mais simplement de la topologie faible ;ceci serait fort probablement impraticable dans la plupart des cas, pour la raison que Ω n'étant en général pas faiblement fermé,ne serait pas compact pour cette topologie(dans les cas les plus favorables, Ω serait seulement localement compact,ce qui est pénible pour des algèbres possédant un élément unité);il est facile de donner des contre-exemples,en particulier au

moyen des représentations unitaires des groupes discrets;si l'on se borne à celles qui sont de dimension finie,et irréductibles,les caractères(au sens classique du terme:trace divisée par la dimension)de celles-ci correspondent aux caractères de l'algèbre L^1 du groupe(du moins à ceux qui définissent des doubles représentations de dimension finie -car en fait il y en a généralement beaucoup d'autres).

Bien entendu,un moyen de concilier les deux points de vue serait de démontrer que la topologie définie sur Ω par les parties complètes est moins fine que la topologie faible.

Terminons ce N° en montrant comment la notion de caractère se relie à celle de trace.Soit $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S, X\}$ la double représentation définie par un caractère f(x) de $\mathcal{A}$ .Dans l'espace $\mathcal{H}$,soit $\mathcal{R}^g$ l'ensemble des opérateurs bornés qui permutent aux V_x,et $\mathcal{R}^d$ l'ensemble de ceux pui permutent aux U_x.Il est clair que ces deux ensembles sont des algèbres autoadjointes,fermées pour la topologie la plus faible des opérateurs,et contenant l'unité:ce sont des "anneaux d'opérateurs"au sens de von Neumann.De plus,la double représentation considérée étant irréductible,le centre de $\mathcal{R}^g$ ou de $\mathcal{R}^d$ est réduit aux multiples de l'unité (dans le cas général,ce centre n'est autre que l'algèbre $\mathcal{R}$ déjà considérée plus haut);on a donc affaire,dans la terminologie de von Neumann,à des "facteurs".Ceci étant,posons

$$(37) \qquad Sp(A) = (AX,X) \qquad \text{pour } A \in \mathcal{R}^g \text{ ou } A \in \mathcal{R}^d ;$$

on définit ainsi sur $\mathcal{R}^g$ et $\mathcal{R}^d$ une forme linéaire (faiblement)continue,qui est <u>positive</u> :

$$(38) \qquad Sp(A^* A) \geqslant 0,$$

et même <u>strictement positive</u>;car $Sp(A^* A) = 0$ signifie $AX = 0$,d'où,A permutant

(par exemple)aux U_x:

(39) $\qquad U_xAX = AU_xX = 0$;

comme les U_xX sont partout denses dans $\mathcal{H}$,ceci implique $A = 0$.Enfin,$Sp(A)$ est centrale;pour le voir,remarquons d'abord que $\mathcal{R}^3$ contient les U_x;si $A \in \mathcal{R}^3$, on aura

(40) $\quad Sp(AU_x) = (AU_xX,X) = (AV_xX,X) = (V_xAX,X) = (AX,V_{x^*}X) = (AX,U_{x^*}X)$

$= (U_xAX,X) = Sp(U_xA)$,

d'où l'équation $Sp(AB) = Sp(BA)$ dans le cas où $B = U_x$;si maintenant $B \in \mathcal{R}^3$ est quelconque,il existera une suite d'éléments $y \in \mathcal{A}$ tels que

(41) $\qquad BX = \lim U_yX = \lim V_yX$;

(cela résulte du fait que les $U_xX = V_xX$ sont partout denses);on aura alors

(42) $Sp(ABX) = (ABX,X) = \lim (AV_yX,X) = \lim (V_yAX,X) = \lim (AX,V_{y^*}X)$

$= \lim (SV_{y^*}X,SAX) = \lim (U_ySX,SAX) = \lim (U_yX,SAX) = (BX,SAX)$

$= (AX,SBX)$;

mais on a quel que soit x:

(43) $(SBX,U_xX) = (SU_xX,BX) = (V_{x^*}X;BX) = (B^*V_{x^*}X,X) = (V_{x^*}B^*X,X) = (B^*X,U_{x^*}X)$

et donc,puisque les U_xX sont partout denses,

(44) $\qquad SBX = B^*X$;

en portant dans (42),on aura donc

(45) $\quad Sp(AB) = (AX,SBX) = (AX,B^*X) = (BAX,X) = Sp(BA)$,

ce qui prouve notre assertion.

Comme f est un caractère -donc vérifie $f(e) = I$ -on a $(X,X) = I$ et par suite

(46) $\qquad Sp(1) = I$;

en définitive,la fonctionnelle $Sp(A)$ possède toutes les propriétés formelles d'une trace ;et le caractère f peut alors se mettre sous la forme

(47) $\qquad f(x) = Sp(U_x)$,

conformément à ce qui se passe dans les cas classiques(dimension finie)?Les anneaux d'opérateurs $\mathcal{R}^g$ et $\mathcal{R}^d$ que l'on obtient ainsi sont(au moins si les espaces de Hilbert envisagés sont séparables)des "facteurs de classe finie" au sens de von Neumann,et il résulte des travaux de cet auteur (cf.la bibliographie)que,sur un tel facteur,on peut définir une seule trace.Il n'est toutefois pas évident qu'il en soit de même sur ,par exemple,l'algèbre formée par les U_x et leurs limites uniformes,car cette algèbre n'est généralement pas fermée pour la topologie faible des opérateurs; une autre propriété remarquable des facteurs de classe finie est que ce sont des algèbres simples (Gelfand et Neumark [1]),ce qu'on ignore en général pour les U_x par exemple; il y a là des problèmes sur lesquels on ne sait identiquement rien actuellement ~~rien~~,et qui constituent des obstacles pour le moins sérieux-même dans les cas les plus concrets.

4 - Opérations $^\eta$ dans les $*$-algèbres.

Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre vérifiant les hypothèses posées au début de ce § .On appelle opération $^\eta$ dans $\mathcal{A}$ une application linéaire $x \to x^\eta$ de $\mathcal{A}$ sur son centre vérifiant les conditions suivantes:

a) $(x^\eta)^\eta = x^\eta$;b) $(xy)^\eta = (yx)^\eta$;c) $(x^\eta y)^\eta = x^\eta y^\eta$;d)

d) $(x^\eta)^* = (x^*)^\eta$; e) $\| x^\eta \| \leq \| x \|$.

Un exemple simple est le suivant:soit G un groupe localement compact possédant un voisinage compact de e invariant par les automorphismes intérieurs (d'où résulte l'existence d'un système fondamental de tels voisinages);G est nécessairement unimodulaire,et si L^2 est l'espace des fonctions de carré sommable sur G,on peut associer à chaque automorphisme intérieur $x \longrightarrow \sigma(x)$ de G un opérateur unitaire A_σ dans L^2 ,défini par la formule

(48) $\quad A_\sigma f(x) = f[\sigma^{-1}(x)]$;

on obtient ainsi une représentation unitaire du groupe des automorphismes intérieurs de G,et il est clair que les $f \in L^2$ qui sont invariantes par les A_σ ne sont autres que les fonctions centrales (de carré sommable)de G -leur existence en quantité suffisamment grande résulte immédiatement de l'hypothèse faite sur G.Ceci étant,pour une $f \in L^2$,considérons le plus petit convexe fermé de L^2 contenant les $A_\sigma f$;d'après un théorème ergodique bien connu (Birkhoff -Alaoglu [1]),ce convexe contient un seul et unique point $f^\natural$ invariant par les A_σ ,$f^\natural$ étant au surplus la projection orthogonale de f sur le sous-espace des "points fixes" du groupe des A_σ -en d'autres termes,$f^\natural$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace des fonctions <u>centrales</u> de L^2 . Il est facile de voir que,si f est au surplus sommable,il en est de même de $f^\natural$ et que $\|f^\natural\|_1 \leqslant \|f\|_1$:d'où la possibilité de définir une opération $^\natural$ dans l'algèbre L^1 des fonctions sommables sur G ,et on vérifie aisément que cette opération vérifie toutes les conditions imposées au début de ce N°.Dans le cas où G est <u>compact</u>,on retrouve la formule

(49) $\quad f^\natural(x) = \int f(s^{-1}xs)ds$;

dans le cas où G est <u>discret</u>,$f^\natural(x)$ est la moyenne des valeurs de f sur la classe de x ,ou bien est 0 si cette classe est infinie.Les spécialistes des groupes finis reconnaitront ici un procédé connu depuis un certain temps déja.

Dans le cas d'une algèbre quelconque,il résulte des propriétés de l'opération $^\natural$ que,si s est un élément inversible de $\mathcal{A}$,on a

(50) $\quad (s^{-1}xs)^\natural = x^\natural$,

et par suite que $y^\natural = x^\natural$ pour tout élément y du convexe fermé de $\mathcal{A}$ engendré par les $s^{-1}xs$;un cas particulièrement simple est celui où $x^\natural$ appartient à ce

convexe fermé (ce n'est malheureusement pas toujours le cas;par exemple,c'est faux dans l'algèbre L^1 d'un groupe discret, sauf lorsque celui-ci n'a que des classes finies ;par contre,il est possible que ce soit vrai si,au lieu de considérer L^1 ,on envisage l'algèbre de Gelfand et Neumark engendrée dans L^2 par les opérateurs de composition associés aux $f \in L^1$) ;si cette condition est réalisée,on a visiblement

(51) $\qquad f(x) = f(x^4)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$

et toute forme linéaire continue et centrale f ;ces formes constituent donc, dans le dual de $\mathcal{A}$,un sous-espace faiblement fermé qui est isomorphe au dual du centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{Z}$ est bien entendu un sous-espace fermé de $\mathcal{A}$); dans ces conditions,il est immédiat de vérifier que les caractères de $\mathcal{A}$ correspondent biunivoquement aux caractères unitaires de l'algèbre commutative $\mathcal{Z}$,et par suite que l'espace Ω des caractères de $\mathcal{A}$ est compact lorsqu'on le munit de la topologie faible du dual de $\mathcal{A}$;on peut alors étendre aux formes unitaires centrales le théorème de Bochner,et donner ainsi du Théorème 3 une interprétation particulièrement simple.De plus,l'opération ^{4} peut être définie pour les formes linéaires continues définies sur $\mathcal{A}$ au moyen de la formule

(52) $\qquad f^4(x) = f(x^4)$;

on vérifie facilement que si f est unitaire,il en est de même de f^4 ;au surplus,on a le résultat suivant:tout caractère de $\mathcal{A}$ est de la forme f^4 où f est une forme unitaire élémentaire sur $\mathcal{A}$ -phénomène qui,dans les cas classiques,exprime la fabrication d'un caractère au moyen d'une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{A}$ (par contre,on ignore s'il existe une correspondance biunivoque entre deu caractères et représentations unitaires irré-

ductibles de $\mathcal{A}$);on peut même choisir pour f une forme appartenant au spectre du caractère considéré .

Ces considérations s'appliquent en particulier aux groupes "centraux", c'est-à-dire vérifiant la condition suivante:les automorphismes intérieurs appartiennent à un groupe compact d'automorphismes (cette catégorie de groupes comprend notamment:les abéliens,les compacts,et les discrets dont toutes les classes sont finies);bien entendu,les algèbres associées à ces groupes ne possèdent en général pas d'élément unité,mais cette circonstance n'est pas spécialement gènante(au contraire;car elle permet de considérer des formes positives centrales non unitaires,comme on l'a fait aux §§ I et 2);on peut alors généraliser à ces groupes les formules de développement suivant les caractères,bien connues dans les groupes compacts(et abéliens).

Terminons ce § en montrant comment le procédé décrit plus haut dans le cas des groupes peut être généralisé à toutes les doubles représentations unitaires d'une $*$ -algèbre,pour donner une opération $\natural$ dans chacune de celles-ci.Soit $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$ une double représentation unitaire de $\mathcal{A}$,et considérons les éléments "unitaires" de $\mathcal{A}$ -caractérisés par l'équation

$$x^* = x^{-I} \tag{53}$$

(pour en obtenir,on peut par exemple prendre e^{ix} où $x \in \mathcal{A}$ est hermitien). Ils forment manifestement un groupe multiplicatif G,et l'application

$$x \to s^* xs = s^{-I} xs \tag{54}$$

définit,pour chaque $s \in G$,un automorphisme intérieur de $\mathcal{A}$ .Si la double représentation considérée est définie par une forme unitaire centrale,il est alors à peu près évident que ,pour un $s \in G$,l'opérateur $U_s V_{s^*}$ ne dépend que de l'automorphisme définit par s;si on note σ_s cet automorphisme,l'applica-

tion $\sigma_s \to U_s V_{s^*} = U_s V_s^{-1}$ constitue une représentation unitaire du groupe G dans $\mathcal{H}$;les"points fixes" de cette représentation -c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{H}$ qui sont stables par les opérateurs considérés-vérifient

(55) $\qquad U_s Z = V_s Z \qquad$ pour tout $s \in G$,

équation qui est encore valable pour un s arbitraire de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire non nécessairement unitaire)-il suffit de le voir pour un s hermitien,ce qui s'obtient en considérant le "groupe à un paramêtre" formé des $e^{i\lambda s}$;on voit que parmi ces points fixes figure l'élément générateur de la représentation (si cette représentation est monogène).Bien entendu,les Z vérifiant (55) forment un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$,soit $\mathcal{H}^\natural$,qui est invariant par l'antiautomorphisme S .

Ceci étant,pour un $Z \in \mathcal{H}$ arbitraire,les $U_s V_s^{-1} Z$ $(s \in G)$engendrent un convexe fermé dans $\mathcal{H}$ qui,d'après le théorème ergodique de G.Birkhoff,contient un point $Z^\natural$ de $\mathcal{H}^\natural$;$Z^\natural$ est aussi la projection orthogonale de Z sur $\mathcal{H}^\natural$, et peut être caractérisé comme étant le point de norme minimum appartenant au convexe considéré.Si l'on désigne par $E^\natural$ l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathcal{H}^\natural$,on a donc

(56) $\qquad Z^\natural = E^\natural Z \quad .$

Ceci étant,soit A un opérateur borné permutable aux V_x;on va définir $A^\natural$ de la façon suivante:(on suppose la représentation monogène,et on note X son élément générateur):tout d'abord,la condition $U_x X = 0$ implique $U_x = 0$,car alors on a $U_x V_y X = V_y U_x X = 0$,d'où notre assertion puisque les $V_y X$ sont partout denses;posons alors

(57) $\qquad A^\natural U_x X = U_x (AX)^\natural \qquad ;$

on obtient ainsi,d'après la remarque faite à l'instant,une application liné-

aire du sous-espace $\mathcal{L}$ de $\mathcal{H}$ formé par les $U_x X$, dans $\mathcal{H}$; je dis que cette application $A^\natural$ est bornée (donc prolongeable par continuité à tout $\mathcal{H}$) ; en effet, $(AX)^\natural$ appartient au plus petit convexe fermé engendré par les $U_s V_s^{-1} AX$ $(s \in G)$, en sorte que $(AX)^\natural$ est limite forte d'éléments de la forme

$$\sum \alpha_\iota U_{s_i} V_{s_i}^{-1} AX = \sum \alpha_\iota U_{s_i} A V_{s_i}^{-1} X = \sum \alpha_\iota U_{s_i} A U_{s_i}^{-1} X \quad (\alpha_\iota \geq 0, \sum \alpha_\iota = I, s_i \in G);$$

donc $A^\natural U_x X = U_x (AX)^\natural = V_x (AX)^\natural$ sera limite forte des éléments

$$V_x \sum \alpha_\iota U_{s_i} A U_{s_i}^{-1} X = \sum \alpha_\iota U_{s_i} A U_{s_i}^{-1} V_x X = \sum \alpha_\iota U_{s_i} A U_{s_i}^{-1} U_x X \quad ,$$

(ne pas oublier que V_x permute aux U_{s_i} et à A) ; comme les U_{s_i} sont unitaires -donc isométriques- il en résulte que

$$(58) \qquad \| A^\natural U_x X \| \leq \| A \| \cdot \| U_x X \| \quad ,$$

ce qui prouve notre assertion et même que $\| A^\natural \| \leq \| A \|$ puisque les $U_x X$ sont partout denses dans $\mathcal{H}$.

Désignons comme précédemment par $\mathcal{R}$ l'algèbre formée par ces A permutables aux V_x ; il est alors immédiat de constater que $A \to A^\natural$ est une application de $\mathcal{R}$ sur son centre, vérifiant toutes les conditions énoncées au début de ce N°. Dans le cas où la double représentation monogène considérée est <u>irréductible</u>, le sous-espace $\mathcal{H}^\natural$ se réduit aux multiples de X, et l'application $\natural$ prend la forme particulièrement simple que voici :

$$(59) \qquad A^\natural = \mathrm{Sp}(A) . 1 \quad .$$

Il n'est pas invraisemblable de supposer que des considérations de cet ordre sont susceptibles de fournir les instruments nécessaires à une extension de l'analyse harmonique aux groupes localement compacts généraux ; pour ceux-ci, il peut fort bien ne pas exister de doubles représentations <u>monogènes</u>, mais une étude sérieuse des opérateurs définis dans l'espace L^2 et qui permutent aux translations à gauche <u>et</u> à droite s'impose ; comme on l'a dit dans

l'introduction de ce Chapitre, la détermination des représentations unitaires irréductibles du groupe hyperbolique (ou du groupe de Lorentz) par la méthode infinitésimale (Bargmann) repose essentiellement sur la considération des opérateurs différentiels qui permutent avec ces translations (idée qui avait déjà été employée pour les représentations de dimension finie) ; or, un tel opérateur H (en général non borné dans L^2) donne évidemment lieu (par exemple au moyen de sa décomposition spectrale) à des opérateurs bornés invariants à la fois à gauche et à droite (noter que ceux-ci, en général, ne peuvent pas être définis au moyen de fonctions centrales, ce qui complique évidemment la question), et il semble bien que la structure de la $*$-algèbre commutative formée par ces opérateurs joue un rôle prépondérant dans la question. Bien entendu, ceci revient à dire que la façon dont opèrent, sur un groupe, les automorphismes intérieurs permet de déterminer dans une large mesure ses représentations unitaires irréductibles, point de vue qui, lui non plus, n'est pas spécifiquement nouveau ...

En conclusion, on espère avoir montré avec une certaine clarté que la théorie des algèbres normées ne fait que commencer, et pose des problèmes non dénués d'intérêt ; il est sans doute superflu de noter que, dans la pratique, des algèbres non normées s'introduisent aussi (par exemple, pour revenir à la théorie des groupes, la $*$-algèbre d'opérateurs non bornés engendrée, dans l'espace L^2, d'un groupe de Lie, par les transformations infinitésimales invariantes à gauche de ce groupe, et dont la structure dépend naturellement de l'algèbre de Lie correspondante), et qu'une étude sérieuse de ces algèbres mériterait d'être entreprise - même sur des cas très particuliers.

BIBLIOGRAPHIE (Chap.III)

- Birkhoff-Alaoglu - General ergodic theorems (Annals, 41, 1940).
- H.Cartan-R.Godement - Analyse harmonique et théorie de la dualité dans les groupes abéliens localement compacts (Ann. E.N.S., 1947)
- I.Gelfand-M.Neumark - On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space (Rec.Math.de Moscou,12,1943,pp.197-217).
- I.Gelfand-D.Raikov - Irreductible unitary représentations of arbitrary locally bicompact groups (Rec.Math.de Moscou,13,1943,pp.301-316).
- R.Godement [1]- Les fonctions de type positif et la théorie des groupes (Transactions, 63, 1948, pp. 1-84).
- [2] Analyse harmonique dans les groupes centraux (C.R., 225, 1947, pp. 19 - 21 et 221 - 223).
- M. Krein - Sur les fonctionnelles additives positives dans les espaces linéaires normés (Commun.Inst.Math.et Mec.Kharkhoff, série 4, XIV, 1937).
- J. von Neumann - F.J.Murray - On rings of operators (I : Annals, 37, 1936 ; II : Transactions, 41, 1937 ; III : Annals, 41, 1940 ; IV : Annals, 44, 1943).
- D. Raikov - To the theory of normed rings with involution (C.R. Acad. Sc. URSS, LIV, 1946, pp. 387-390).
- I.E. Segal [1] - The group Algebra of a locally compact group (Transactions, 61, 1947, pp. 69 - 105).
- [2] - Unitary representations of rings of operators (Bull. A.M.S., 53, 1947).