ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES
CHAP. III ET IV
(ETAT 6)

Rédaction n° 088

Nombre de pages : 52

Nombre de feuilles : 52

E.V.T Chap 3 et 4

Etat 6

88

M. Schwartz

A 88 2

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES - CHAP. III et IV.

(Etat 6)

On a dans l'ensemble suivi les recommandations du Congrès de Mars 52, et en particulier on s'est efforcé de réduire les développements oratoires des précédentes rédactions, en ne démontrant (à quelques exceptions près...) que des résultats non triviaux ; c'est ce qui explique le peu d'étendue de la présente rédaction... Il est même possible que le rédacteur ait éliminé des propriétés qui, tout en étant triviales, sont néanmoins utiles - c'est ainsi qu'il n'a pas pu se résoudre à parler des formes bilinéaires, dégoûté qu'il était de devoir rompre la courbe harmonieuse d'un étincelant exposé par des considérations aussi vulgaires. Par contre, au Chapitre IV, on a rétabli le théorème de Mackey (topologies τ) après s'être convaincu qu'en ne le faisant pas il serait néanmoins nécessaire d'en parler, à mots couverts, en deux endroits (critère de réflexivité et Théorème de Banach sur les formes linéaires faiblement continues sur les équicontinus). Dans ce Chapitre IV on n'a pas non plus respecté les divisions en §§ préconisées par le Congrès, car en le faisant on eût été conduit à rédiger dix §§ d'une longueur moyenne de deux pages. Enfin, on n'a pas parlé des relations entre homomorphismes ou isomorphismes forts ou faibles que mentionne le rapport SCHWARTZ (p.55 dudit) vu que le rédacteur ne sait pas à quoi ça sert (à SCHWARTZ de l'expliquer).

---

§1 - Espaces tonnelés .

1 - Définition.

Définition 1 - Dans un espace localement convexe E, on appelle tonneau tout ensemble convexe, équilibré, fermé et absorbant (les points de E). On dit que E est tonnelé si tout tonneau dans E est un voisinage de 0 .

Il existe des espaces localement convexes non tonnelés (exer.), mais la Proposition suivante montre que des classes importantes d'espaces localement convexes sont tonnelées:

Proposition 1 - Tout espace localement convexe qui est un espace de Baire est tonnelé.

En effet, soit T un tonneau dans un espace localement convexe E; puisque T est équilibré et absorbe les points de E, E est la réunion des ensembles n.T , n entier positif; puisque T est fermé , l'un au moins de ces ensembles - donc T lui-même - possède un point intérieur si E possède la propriété de Baire; l'intérieur de T ne pouvant se réduire à un seul point on voit donc que T possède un point intérieur $x \neq 0$; puisque T est équilibré, $-x$ est aussi intérieur à T , et puisque T est convexe le point 0 du segment d'extrémités $-x$ et x est aussi intérieur à T, d'où la Proposition.

Corollaire - Tout espace localement convexe métrisable et complet (en particulier tout espace de Banach) est tonnelé.

2 - Propriétés soritales des espaces tonnelés.

Proposition 2 - Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'espaces tonnelés et, pour chaque $i \in I$, soit f_i une application linéaire de E_i dans un espace vectoriel E . Muni de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les applications f_i, E est un espace tonnelé.

Soit en effet T un tonneau dans E; l'image réciproque d'un tonneau par une application linéaire continue étant évidemment un tonneau, on voit que $f_i^{-1}(T)$ est un tonneau dans E_i, donc est un voisinage de 0 dans E_i ; ceci étant vrai pour tout $i \in I$, il s'ensuit que T est un voisinage de 0 dans E.

Corollaire 1 - Tout espace quotient d'un espace tonnelé est tonnelé.

Corollaire 2 - Toute limite inductive d'espaces tonnelés est tonnelée.

Proposition 3 - Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'espaces localement convexes; pour que l'espace localement convexe E, somme directe des E_i, soit tonnelé, il faut et il suffit que chaque E_i le soit.

La condition est nécessaire d'après le Corollaire 1 ci-dessus. Réciproquement, supposons-la vérifiée et, pour toute partie finie H de l'ensemble d'indices I, soit E_H le sous-espace somme directe des E_i, $i \in H$; E s'identifiant à la limite inductive des E_H (Chap. II, §2, n°3 Exemple 2) tout revient à prouver que E_H est tonnelé (Corollaire 2 ci-dessus). Mais soit T un tonneau dans E_H ; il est clair que $T \cap E_i$ est un tonneau dans E_i pour tout $i \in H$, donc est un voisinage de 0 dans E_i, et comme T, étant convexe, contient à une homothétie près la somme directe des ensembles $T \cap E_i$, $i \in H$, on voit bien que T est un voisinage de 0 dans E_H.

Remarque - Un sous-espace fermé d'un espace tonnelé E n'est pas nécessairement tonnelé, sauf bien entendu s'il admet un supplémentaire topologique dans E.

---

§2 - Ensembles bornés.

1 - Définition des dits.

Définition 1 - On dit qu'une partie A d'un espace localement convexe E est bornée si elle est absorbée par tout voisinage de 0 dans E.

Cela signifie que, pour tout voisinage V de 0, il existe un nombre λ tel que $A \subset \lambda . V$. Par exemple, tout ensemble réduit à un point est borné - cette propriété figure en effet dans les axiomes des espaces vectoriels topologiques.

Si la topologie de E est définie par un ensemble Γ de semi-normes, une condition nécessaire et suffisante pour que $A \subset E$ soit bornée est que chaque semi-norme $p \in \Gamma$ soit bornée sur A, comme le lecteur le vérifiera aisément. En particulier, si E est un espace normé, une partie A de E est bornée lorsqu'elle est contenue dans une boule, et seulement dans ce cas

Remarque - On voit donc que, dans un espace normé E, il existe un système fondamental de voisinages de 0 formé d'ensembles bornés. Il est facile de voir que cette propriété caractérise les espaces normés (Exercice).

2 - Propriétés des ensembles bornés.

Il est tout d'abord clair que toute partie d'une partie bornée de E est elle-même bornée. Pour qu'une partie d'un sous-espace vectoriel M de E soit bornée dans M, il faut et il suffit qu'elle le soit dans E.

Si A et B sont deux parties bornées de E et si V est un voisinage de 0 dans E, on a des relations de la forme $A\subset\alpha.V$, $B\subset\beta.V$; si V est convexe et équilibré on peut évidemment supposer α et β positifs, et on a alors $A\cup B\subset\gamma.V$ où $\gamma=\max(\alpha,\beta)$; par suite:

Proposition 1 - La réunion de deux ensembles bornés est un ensemble borné

Soient maintenant A un ensemble borné dans E, et V un voisinage de 0 dans E; V contient un voisinage convexe, équilibré et fermé W, et l'on a une relation de la forme $A\subset\alpha.W$; il s'ensuit immédiatement que l'ensemble $\alpha.W$ (et donc aussi $\alpha.V$) contient l' enveloppe convexe, équilibrée et fermée de A; donc:

Proposition 2 - L'enveloppe convexe, équilibrée et fermée d'un ensemble borné est un ensemble borné.

La Proposition 2 implique évidemment que l'adhérence d'un ensemble borné est bornée.

Proposition 3 - Dans un espace localement convexe séparé, tout ensemble pré-compact est borné; en particulier, toute suite de Cauchy est bornée.

Soient en effet A une partie pré-compacte de E, et V un voisinage de 0 ; A étant pré-compact, on a une relation $A\subset F+V$ ou F est une partie finie -donc bornée - de E ; écrivant que B est contenu dans un ensemble de la forme $\lambda.V$, on trouve immédiatement une relation $A\subset\alpha.V$, d'où la Proposition.

Proposition 4 - Pour qu'une partie A d'un espace localement convexe E soit bornée, il faut et il suffit que, pour toute suite (x_n) de points de A et toute suite (λ_n) de scalaires convergent vers 0, la suite $(\lambda_n x_n)$ converge vers 0.

En effet, si A est borné et si V est un voisinage convexe et équilibré de 0, on a une relation $A\subset\alpha.V$ avec $\alpha>0$, et d'autre part on a $|\lambda_n|<1/\alpha$ pour n assez grand; on a donc $\lambda_n x_n\in V$ pour n assez grand, d'ou la nécessité de la condition énoncée.

Par ailleurs, si A n'est pas borné, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que A ne soit contenu dans aucun des ensembles $n.V$ $(n\in\underline{N})$, d'où des $x_n\in A$ tels que $\frac{1}{n}x_n\notin V$ pour tout n ; la condition énoncée n'est donc pas vérifiée lorsque A n'est pas borné.

3 - Image par une application continue.

Proposition 5 - Soit $E=\prod E_i$ le produit d'une famille quelconque d'es-

<u>paces localement convexes; soit</u> f <u>une application continue de</u> E <u>dans un espace localement convexe</u> F, <u>telle que l'on ait</u> ~~$f((x_i))$ xxxx $f((x_i))$~~ $f(\lambda x) = \lambda^s f(x)$ <u>pour un nombre</u> $s > 0$; <u>alors, quels que soient les ensembles bornés</u> $B_i \subset E_i$, f <u>applique</u> $B = \prod B_i$ <u>sur une partie bornée de</u> F.

Soient en effet (λ_n) une suite de scalaires tendant vers 0, et $(x_n) = ((x_{n,i}))$ une suite de points de B ; tout revient (Prop.4) à montrer que la suite de terme général $\lambda_n f(x_n)$ converge vers 0. Pour cela, on peut évidemment supposer les λ_n positifs, ce qui permet d'écrire $\lambda_n f(x_n) = f(y_n)$ ou y_n est le point de E de composantes $\lambda_n^{1/s}.x_{n,i}$; puisque s est positif, la suite $(\lambda_n^{1/s})$ converge vers 0, et puisque les $x_{n,i}$ restent (pour i donné) dans l'ensemble borné B_i, on voit que, pour chaque i, la suite $\lambda_n^{1/s}.x_{n,i}$ converge vers 0 dans E_i ; donc la suite (y_n) converge vers 0 dans E; puisque f est continue et vérifie visiblement $f(0) = 0$ on en conclut que $\lim_{n\infty} f(y_n) = 0$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 1</u> - <u>Soient</u> E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>et</u> F <u>des espaces localement convexes,</u> f <u>une application multilinéaire continue de</u> $\prod E_i$ <u>dans</u> F, B_i <u>une partie bornée de</u> E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; <u>alors</u> f <u>applique</u> $\prod B_i$ <u>sur une partie bornée de</u> F.

<u>Corollaire 2</u> - <u>L'image d'un ensemble borné par une application linéaire continue est un ensemble borné.</u>

<u>Corollaire 3</u> - <u>Soit</u> $E = \prod E_i$ <u>un produit quelconque d'espaces localement convexes; pour qu'une partie</u> B <u>de</u> E <u>soit bornée, il faut et il suffit que pour tout</u> i, $pr_i(B)$ <u>soit bornée dans</u> E_i .

La nécessité de la condition résulte du Corollaire 2; si par ailleurs cette condition est vérifiée, la Prop.5 appliquée à l'application identique de E dans E montre que l'ensemble $\prod pr_i(B)$ est borné, donc aussi B qui en est une partie.

<u>Corollaire 4</u> - <u>Si</u> A <u>et</u> B <u>sont deux parties bornées d'un espace localement convexe</u> E, <u>il en est de même de</u> A+B.

A+B est en effet l'image de $A \times B$ par l'application $(x,y) \rightarrow x+y$.

4 - <u>Ensembles bornés dans une limite inductive.</u>

<u>Proposition 6</u> - <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe, limite inductive d'une suite croissante de sous-espaces fermés</u> E_n ; <u>pour qu'une partie</u> B <u>de</u> E <u>soit bornée dans</u> E, <u>il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans un</u> E_n, <u>et bornée dans cet</u> E_n .

Puisque la topologie induite sur chaque E_n par celle de E est identique à la topologie donnée sur E_n (Chap.II, §2, Prop.2), la condition de l'énoncé est suffisante. Soit maintenant B une partie de E qui ne soit contenue dans aucun E_n ; dans la suite $E_1, E_2, \ldots$ désignons par F_1 le premier E_n rencontrant B, puis par F_2 le premier E_n rencontrant $B-F_1$, et ainsi de suite (la construction se poursuit indéfiniment d'après l'hypothèse faite); pour chaque n, CHOISISSONS un point x_n de $B \cap F_{n+1}$ non contenu dans F_n, et posons $y_n = x_n/n$; nous allons prouver que y_n ne converge pas vers 0, ce qui établira évidemment la Proposition. Pour cela, nous CHOISISSONS un voisinage convexe V_1 de 0 dans F_1 ; puisque $y_1 \in F_2$ n'est pas dans V_1 il EXISTE (Chap.II, §2, Lemme 1) un voisinage convexe V_2 de 0 dans F_2 ne contenant pas y_1 et vérifiant $V_2 \cap F_1 = V_1$; poursuivant indéfiniment la construction, on construit pour chaque n un voisinage convexe V_n de 0 dans F_n, qui ne contient pas y_{n-1} et vérifie $V_n \cap F_{n-1} = V_{n-1}$; ceci fait, la réunion V des V_n est un voisinage de 0 dans E puisque $V \cap F_n = V_n$ est un voisinage de 0 dans F_n pour tout n ; par ailleurs, il est clair que V ne contient aucun y_n, ce qui démontre notre assertion.

4 - Espaces quasi-complets.

Définition 2 - Un espace localement convexe E est dit quasi-complet lorsque toute partie fermée et bornée de E est complète (pour la structure uniforme induite par celle de E).

Un espace complet est quasi-complet, mais la réciproque est inexacte - bien qu'elle soit valable lorsqu'il s'agit d'espaces métrisables, puisqu'on peut alors se limiter à considérer des suites de Cauchy, lesquelles sont bornées (Prop.3). Tout sous-espace fermé d'un espace quasi-complet est quasi-complet; la Prop.6 montre d'autre part que la limite inductive d'une suite d'espaces quasi-complets est quasi-complète.

Proposition 7 - Tout produit d'espaces quasi-complets est quasi-complet.

Si en effet $E = \prod E_i$ où chaque E_i est quasi-complet, et si B est une partie fermée et bornée de E, alors $\overline{pr_i(B)}$ est fermé et borné, donc complet, pour tout i ; par suite B est contenu dans l'espace complet $\prod \overline{pr_i(B)}$, donc est lui-même complet.

Proposition 8 - Soient M un sous-espace d'un espace localement convexe E, et f une application linéaire continue de M dans un espace quasi-complet F; supposons que tout point de E soit adhérent à une partie bornée de M; alors f se prolonge d'une façon et d'une seule en une application linéaire continue de E dans F.

En effet, M est partout dense dans E, de sorte que f admet un prolongement unique en une application linéaire continue $\hat{f}$ de E dans le complété $\hat{F}$ de F ; par ailleurs, pour $x \in E$, soit B une partie bornée de M à laquelle x soit adhérent; il est clair que $f(x)$ est adhérent à $f(B)$; mais $f(B)$ étant borné et F quasi-complet, l'adhérence de $f(B)$ dans $\hat{F}$ est contenue dans F ; donc $\hat{f}$ applique E dans F, ce qui démontre la Proposition.

---

§3 - Espaces d'applications linéaires continues.

1 - Les espaces $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

Soient E un ensemble quelconque, $\mathfrak{S}$ une famille de parties de E, et F un groupe topologique abélien, noté additivement. L'ensemble F^E de toutes les applications de E dans F peut être muni de façon canonique, covariante, explicite, fonctorielle, katalogisierbar et naturelle d'une structure de groupe abélien additif; par ailleurs, on peut le munir de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles de $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}$-topologie) : si $u \in F^E$, on obtient un système fondamental de voisinages de u dans la $\mathfrak{S}$-topologie en choisissant un voisinage V de 0 dans F, une partie M de $\mathfrak{S}$, et en considérant l'ensemble $T(u,V,M)$ formé des $v \in F^E$ telles que

$$v(x)-u(x) \in V \text{ pour tout } x \in M;$$

si W est un voisinage de 0 dans F, tel que $W+W \subset V$ et que $W = -W$, il est visible que, quels que soient $u,v \in F^E$ et $M \in \mathfrak{S}$ on a

$$T(u,W,M)-T(v,W,M) \subset T(u-v,V,M) ,$$

en sorte que la $\mathfrak{S}$-topologie est compatible avec la loi de groupe de F^E.

Lorsque F est un espace localement convexe, F^E est un espace vectoriel; nous allons démontrer la Proposition suivante (forcément, ça ne peut pas être la précédente):

Proposition 1 - Soient E un ensemble, $\mathfrak{S}$ une famille de parties de E, F un espace localement convexe, H un sous-espace vectoriel de F^E. Pour que la $\mathfrak{S}$-topologie soit compatible avec la structure vectorielle de H il faut et il suffit que tout ensemble $u(M)$ $(u \in H,\ M \in \mathfrak{S})$ soit borné dans F ; muni de la $\mathfrak{S}$-topologie, H est alors localement convexe.

Considérons en effet les voisinages $T(u,V,M)$ définis plus haut, et en particulier les $T(V,M) = T(0,V,M)$; les ensembles $T(V,M) \cap H$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans H, et sont convexes et équilibrés lorsque les V correspondants le sont; puisque la $\mathfrak{S}$-topologie est compatible avec la structure de groupe additif de H, il est donc nécessaire et suffisant, pour qu'elle soit compatible avec la structure vectorielle de H, que les ensembles $T(V,M) \cap H$ soient absorbants dans H (Chap. II, §2, N° 1); or cela signifie évidemment que, pour tout $u \in H$, tout $M \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage V de 0 dans F, on a une relation de la forme $u(M) \subset \lambda V$; cela démontre la Proposition.

Corollaire - Soient E et F deux espaces localement convexes, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles de $\mathfrak{S}$, $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace localement convexe.

Etant donnés deux espaces localement convexes E et F, et un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E, nous désignerons toujours par $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'espace localement convexe obtenu en munissant $\mathcal{L}(E,F)$ de la $\mathfrak{S}$-topologie. Les cas les plus importants sont les suivants:

1) $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties finies de E ; on obtient alors sur $\mathcal{L}(E,F)$ la topologie de la convergence simple;

2) $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties compactes de E; on obtient alors sur $\mathcal{L}(E,F)$ la topologie de la convergence compacte;

3) $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de E; on obtient alors sur $\mathcal{L}(E,F)$ la topologie de la convergence bornée.

Soit Γ un ensemble de semi-normes définissant la topologie de F, et posons

$$p_M(u) = \sup_{x \in M} p(u(x))$$

pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $M \in \mathfrak{S}$; il est alors facile de vérifier que chaque fonction p_M est une semi-norme sur $\mathcal{L}(E,F)$, et que les semi-normes ainsi obtenues définissent, quand M varie dans $\mathfrak{S}$ et p dans Γ ; la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathcal{L}(E,F)$. Si en particulier E et F sont des espaces normés et si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de E, alors parmi les semi-normes p_M figure la <u>norme</u>

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| \quad ;$$

on vérifie facilement que cette norme, à elle seule, suffit à définir la topologie de la convergence bornée sur $\mathcal{L}(E,F)$, qui, muni de cette topologie, est donc lui aussi un espace vectoriel normé.

2 - <u>Condition pour que</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>soit séparé.</u>

<u>Proposition</u> 2 - <u>Soient</u> E <u>et</u> F ($F \neq 0$) <u>deux espaces localement convexes séparés et</u> $\mathfrak{S}$ <u>une famille de parties bornées de</u> E. <u>Pour que l'espace</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>soit séparé, il faut et il suffit que la réunion des ensembles de</u> $\mathfrak{S}$ <u>soit totale dans</u> E.

Considérons en effet comme au n°1 les voisinages $T(V,M)$ de 0 dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$; si une application u appartient à leur intersection, on a $u(M) \subset V$ quels que soient $M \in \mathfrak{S}$ et le voisinage V de 0 dans F ; F étant séparé, il vient donc $u(M) = 0$, d'où $u = 0$ si la réunion des $M \in \mathfrak{S}$ est totale dans E ; ceci démontre que la condition de l'énoncé est suffisante.

Supposons maintenant que les $M \in \mathfrak{S}$ engendrent un sous-espace fermé $H \neq E$; d'après le théorème de Hahan-Banach, il existe sur E une forme linéaire continue non identiquement nulle f, qui s'anulle sur H (ceci parce que E est séparé); choisissant dans F un vecteur non nul a, on voit immédiatement que l'application $u : x \to f(x)a$ définit un élément non nul de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ qui appartient à tous les voisinages $T(V,M)$; la condition de l'énoncé est donc aussi nécessaire.

3 - <u>Relations entre</u> $\mathcal{L}(E,F)$ <u>et</u> $\mathcal{L}(\hat{E},F)$.

Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, F étant supposé complet, et soit $\hat{E}$ le complété de E. Si l'on associe à chaque application linéaire continue u de E dans F son unique prolongement continu $\hat{u}$ à $\hat{E}$ on obtient évidemment un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\hat{E},F)$. Soit de plus $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, et soit $\hat{\mathfrak{S}}$ l'ensemble des adhérences dans $\hat{E}$ des ensembles de $\mathfrak{S}$; les éléments de $\hat{\mathfrak{S}}$ sont encore des parties bornées de $\hat{E}$, de sorte qu'on peut considérer les deux espaces localement convexes $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ et $\mathcal{L}_{\hat{\mathfrak{S}}}(\hat{E},F)$.

Si on identifie comme ci-dessus ces deux espaces, il est clair que la $\hat{\mathfrak{S}}$-topologie est plus fine que la $\mathfrak{S}$-topologie; nous allons montrer qu'en fait ces deux topologies sont identiques. En effet, un système fondamental de voisinages de 0 dans la $\hat{\mathfrak{S}}$-topologie est formé des ensembles $T(W,N)$, où W désigne un voisinage de 0 dans $\hat{E}$ et où $N \in \hat{\mathfrak{S}}$; on peut évidemment se borner aux voisinages W qui sont fermés, c'est-à-dire supposer $W = \overline{V}$ où V est un voisinage de 0 dans E , et d'autre part poser $N = \overline{M}$ où $M \in \mathfrak{S}$;cela dit, la relation $u(M) \subset V$ pour un $u \in \mathcal{L}(E,F)$ implique visiblement $u(N) \subset W$, de sorte que $T(W,N) \supset T(V,M)$, et ceci établit notre assertion.

Par exemple, si E est <u>normé</u> , la topologie de la convergence bornée sur $\mathcal{L}(E,F)$ est identique à celle de la convergence bornée sur $\mathcal{L}(\hat{E},F)$: toute partie bornée de $\hat{E}$ est en effet contenue dans l'adhérence d'une partie bornée de E (à savoir une boule). Mais il n'en est pas nécessairement de même lorsque E est quelconque(même si E est métrisable).

4 - <u>Ensembles bornés dans</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

<u>Proposition</u> 3 - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement convexes et</u> $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties bornées de</u> E; <u>pour qu'une partie</u> H <u>de</u> $\mathcal{L}(E,F)$ <u>soit bornée pour la</u> $\mathfrak{S}$<u>-topologie, il faut et il suffit que, pour tout</u> $M \in \mathfrak{S}$, <u>l'ensemble des</u> $u(x)$ $(u \in H,\ x \in M)$ <u>soit borné dans</u> F.

En effet, il est clair que la relation $H \subset \lambda.T(V,M)$ est équivalente à la relation " $u(x) \in \lambda V$ quels que soient $u \in H$ et $x \in M$ " .

Il résulte de la Proposition précédente que, si $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ sont deux ensembles de parties bornées de E, tels que $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$, alors tout ensemble $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ borné pour la $\mathfrak{S}'$-topologie l'est à fortiori pour la $\mathfrak{S}$-topologie (cela résulte aussi de ce que la $\mathfrak{S}$-topologie est ??????? fine que la $\mathfrak{S}'$-topologie). Nous allons maintenant montrer que, dans des cas importants, le fait pour un ensemble $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ d'être borné dans une $\mathfrak{S}$-topologie est indépendant de $\mathfrak{S}$ (pourvu que l'on se limite à des ensembles $\mathfrak{S}$ contenant toutes les parties finies de E):

<u>Théorème</u> 1 - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement convexes séparés,</u> $\mathfrak{S}$ <u>l'ensemble des parties bornées, convexes, équilibrées et complètes de</u> E. <u>Toute partie</u> H <u>de</u> $\mathcal{L}(E,F)$ <u>qui est bornée pour la topologie de la convergence simple est bornée pour la</u> $\mathfrak{S}$<u>-topologie</u>.

Soient en effet V un voisinage convexe, équilibré et fermé de 0 dans F et M un élément de $\mathfrak{S}$; tout revient à montrer l'existence d'un scalaire λ tel que l'on ait $u(M) \subset \lambda V$ pour tout $u \in H$; posant

$$T = \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$$

nous sommes ramené à prouver que $M \subset \lambda T$ pour un λ convenablement choisi. Or d'après les hypothèses faites sur V, il est clair que T est convexe, équilibré et fermé; d'autre part, puisque H est borné pour la topologie de la convergence simple, l'existence d'un λ tel que $M \subset \lambda T$ est évidente lorsque M est un ensemble fini; autrement dit, T est absorbant , donc est un tonneau dans E (§1,Déf.1). Par conséquent, le Théorème sera une conséquence du résultat suivant:

Lemme 1 - Soit T un tonneau dans un espace localement convexe séparé E; T absorbe toute partie convexe, équilibrée, bornée et complète de E.

Soit en effet M une telle partie de E. Remplaçant au besoin E par le sous-espace engendré par M on se ramène au cas où M engendre E ; mais M étant convexe et équilibré, cela veut dire que M est absorbant. Ceci dit, et M étant convexe, équilibré et absorbant, on peut considérer les ensembles λM comme formant un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie localement convexe $\mathcal{T}$ sur E , et il est immédiat de voir que E, muni de $\mathcal{T}$, est normable (§2,n°1,Remarque). D'autre part, M étant borné pour la topologie donnée de E, on voit que $\mathcal{T}$ est plus fine que celle-ci, en sorte que toute partie de E qui est complète pour la topologie donnée l'est aussi pour $\mathcal{T}$; en particulier, M est complet pour $\mathcal{T}$; muni de $\mathcal{T}$,E est donc un espace normé quasi-complet, donc complet -autrement dit, est un espace de Banach, donc un espace tonnelé (§1,Prop.1). Mais la comparaison des deux topologies utilisées sur E montre que T est un tonneau non seulement pour la première, mais aussi pour $\mathcal{T}$; donc T est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$, ce qui prouve que T absorbe M puisque M est borné pour $\mathcal{T}$; d'ou le Lemme.

Corollaire 1 - Soient E et F deux espaces localement convexes séparés. Si E est quasi-complet, toute partie de $\mathcal{L}(E,F)$, bornée pour la topologie de la convergence simple, est bornée pour toute $\mathfrak{S}$ -topologie.

En effet, soit M une partie bornée quelconque de E ; l'enveloppe convexe, équilibrée et fermée N de M est encore bornée(§2,Prop.2) et est complète puisque E est quasi-complet, de sorte que N appartient à la famille $\mathfrak{S}$ de l'énoncé du Théorème 1 - d'où immédiatement le Corollaire.

Corollaire 2 - Soient E et F deux espaces de Banach, H un ensemble d'applications linéaires continues de E dans F; si l'on a

$$\sup_{u \in H} \|u(x)\| < +\infty$$

pour tout $x \in E$, on a aussi

$$\sup_{u \in H} \|u\| < +\infty \quad .$$

5 - Parties équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$.

Soient E un espace topologique, F un espace uniforme, et H un ensemble d'applications de E dans F. Rappelons (Top.Gén.,...) que H est équicontinu en un point x de E si, pour tout entourage V dans $F \times F$, il existe un voisinage U de x dans E tel que $y \in U$ implique $(u(x),u(y)) \in V$ pour tout $u \in H$. Si de plus la topologie de E est déduite d'une structure uniforme, on dit que H est uniformément équicontinu sur E lorsqu'à tout entourage V dans $F \times F$ correspond un entourage U dans $E \times E$ tel que $(x,y) \in U$ implique $(u(x),u(y)) \in V$ pour tout $u \in H$.

Lorsque E et F sont des espaces vectoriels topologiques et H une partie de $\mathcal{L}(E,F)$, il est clair que les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

1) H est équicontinu au point 0 de E;

2) H est équicontinu en tout point de E;

3) H est uniformément équicontinu sur E;

de plus, chacune de ces propriétés signifie que, pour tout voisinage V de 0 dans F, il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $x \in U$ implique $u(x) \in V$ pour tout $u \in H$.

Proposition 4 - Supposons F séparé, et soit H une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$; soit $\bar{H}$ l'ensemble des limites simples d'applications $u \in H$; alors $\bar{H}$ est formé d'applications linéaires continues de E dans F, et est équicontinu.

Supposons en effet qu'une application u de E dans F soit limite simple d'applications linéaires de E dans F; quels que soient le voisinage V de 0 dans F et les points x,y de E, il existe une application linéaire v de E dans F telle que V contienne les vecteurs $u(x)-v(x)$, $u(y)-v(y)$ et

$u(x+y)-v(x+y)$; puisque v est linéaire, il s'ensuit que $u(x+y)-u(x)-u(y)$ appartient à $V-V-V$; V étant arbitraire et F séparé, on en conclut que $u(x+y) = u(x)+u(y)$; on démontrerait de même que $u(\lambda x) = \lambda u(x)$, et finalement on voit que toute limite simple d'applications linéaires est linéaire. Supposons en outre que u soit limite simple d'éléments de H; si V est un voisinage fermé de 0 dans F et U un voisinage de 0 dans E tel que $x \in U$ implique $v(x) \in V$ pour toute $v \in H$, il est clair qu'à la limite $x \in U$ implique aussi $u(x) \in V$; donc u est continue et comme le voisinage U est indépendant de $u \in \bar{H}$ on voit que $\bar{H}$ est équicontinu, d'où la Proposition.

Proposition 5 - Soient E et F deux espaces localement convexes et H une partie équicontinue de $\mathscr{L}(E,F)$. Les structures uniformes suivantes coincident sur H: 1) celle de la convergence simple dans une partie totale de E; 2) celle de la convergence simple dans E; 3) celle de la convergence uniforme sur toute partie pré-compacte de E.

Etant données les relations évidentes existant entre ces trois structures uniformes, tout revient à prouver que, si une partie de $H \times H$ est un entourage pour la structure uniforme 3) c'est aussi un entourage pour toute structure uniforme 1). Autrement dit, tout revient à prouver que, étant donnés un voisinage V de 0 dans F, une partie totale E_o de E et une partie précompacte M de E, il existe un voisinage W de 0 dans F et une famille finie (x_i) de points de E_o tels que , si $u,v \in H$ vérifient $u(x_i)-v(x_i) \in W$ pour tout i, on ait aussi $u(x)-v(x) \in V$ pour tout $x \in M$. Tout d'abord, il est clair que la structure uniforme 1) ne change pas si l'on remplace E_o par le sous-espace vectoriel qu'il engendre, de sorte qu'on peut supposer E_o partout dense dans E. Cela fait, choisissons W de telle sorte que $W+W+W \subset V$, et soit U un voisinage de 0 dans E tel que $x \in U$ implique $u(x) \in W$ pour tout $u \in H$. E_o étant partout dense dans E, les $x+U$, $x \in E_o$, forment un reccuvrement de E, de sorte qu'il existe une famille finie (x_i) de points de E_o telle que M soit recouvert par les x_i+U; si $u,v \in H$ et $x \in M$, il existe alors un i tel que $x-x_i \in U$, d'ou $u(x)-u(x_i) \in W$ et $v(x)-v(x_i) \in W$; si donc u et v sont tels que $u(x_j)-v(x_j) \in W$ pour tout j on aura $u(x)-v(x) \in W+W+W \subset V$ pour tout $x \in M$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire - Soient E et F deux espaces localement convexes, H une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$. Supposons qu'il existe une suite partout dense dans E, et que F soit métrisable; alors H est métrisable pour la structure uniforme de la convergence simple.

En effet, soient (x_n) une suite partout dense dans E, d une distance définissant la topologie de F, et, pour $u,v \in \mathcal{L}(E,F)$, posons $d_n(u,v) = d(u(x_n),v(x_n))$; les d_n sont des écarts sur $\mathcal{L}(E,F)$ qui, d'après la Proposition 5, définissent sur H la structure uniforme de la convergence simple - d'où le Corollaire.

6 - Le théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 2 - Soient E et F deux espaces localement convexes. Toute partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$ est bornée pour toute $\mathfrak{S}$-topologie. Si en outre E est tonnelé, toute partie simplement bornée de $\mathcal{L}(E,F)$ est équicontinue.

(on dit que $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ est simplement bornée si H est bornée pour la topologie de la convergence simple).

Soient en effet H une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$, M une partie bornée de E, V un voisinage de 0 dans F, U un voisinage de 0 dans E tel que $x \in U$ implique $u(x) \in V$ pour tout $u \in H$; il existe λ tel que $M \subset \lambda U$ d'où résulte immédiatement que l'ensemble des $u(x)$, $u \in H, x \in M$, est contenu dans λV ; donc H est bornée pour la topologie de la convergence bornée.

Supposons maintenant E tonnelé, et soit H une partie simplement bornée de $\mathcal{L}(E,F)$; pour montrer que H est équicontinu, il suffit de faire voir que, pour tout voisinage V de 0 dans F, l'ensemble

$$T = \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$$

est un voisinage de 0 dans E. Or, on peut supposer V convexe, équilibré et fermé, auquel cas T possède évidemment les mêmes propriétés; de plus, H étant simplement borné, l'ensemble des $u(x)$, $u \in H$, est, pour chaque $x \in E$, absorbé par V, d'où résulte immédiatement que T est absorbant. Donc T est un tonneau ce qui achève la démonstration.

Corollaire (Banach-Steinhaus) - Soient E un espace tonnelé, F un espace localement convexe séparé, Φ un filtre sur $\mathcal{L}(E,F)$ qui converge simplement vers une application u_o de E dans F. Supposons soit que Φ contienne une partie simplement bornée de $\mathcal{L}(E,F)$, soit que Φ admette une base dénombrable. Alors u_o est une application linéaire continue de E dans F et Φ converge vers u_o uniformément sur toute partie pré-compacte de E.

Si Φ contient une partie simplement bornée H de $\mathcal{L}(E,F)$, u_o est limite simple d'éléments de H; puisque H est équicontinu (Théorème 2) on voit que u_o est une application linéaire continue de E dans F et que Φ converge vers u_o uniformément sur toute partie pré-compacte de E: cela résulte des Propositions 4 et 5.

Supposons maintenant Φ à base dénombrable; alors u_o est limite simple d'une suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$; mais puisque $\lim_{n\infty} u_n(x)$ existe pour tout $x \in E$ on voit (Prop.3) que l'ensemble des u_n est équicontinu; donc, comme dans le cas précédent, u_o est une application linéaire continue de E dans F. En outre, soit (H_n) une base dénombrable de Φ et considérons une partie pré-compacte M de E, ainsi qu'un voisinage V de 0 dans F; pour montrer que Φ converge vers u_o uniformément sur M tout revient à prouver que, pour n assez grand, on a $u(x)-u_o(x) \in V$ quels que soient $u \in H_n$ et $x \in M$; or s'il n'en était pas ainsi il existerait pour chaque n un $u_n \in H_n$ tel que l'application $v_n = u_n - u_o$ vérifie $v_n(M) \not\subset V$ -ce qui est impossible car la suite v_n, convergent simplement vers 0, converge vers 0 uniformément sur M d'après le premier cas examiné(cette suite est simplement bornée).

7 - Conditions pour que $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit complet ou quasi-complet.

Théorème 3 - Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, contenant toutes les parties finies de E? Pour que $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit quasi-complet il faut que F soit quasi -complet ~~il faut que F soit quasi-complet,~~ et cette condition est aussi suffisante lorsque E est tonnelé. Lorsque E est quelconque et F quasi-complet, toute partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$, simplement fermée, est complète pour toute $\mathfrak{S}$ -topologie.

Supposons que $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit quasi-complet, désignons par f une forme linéaire continue non identiquement nulle sur E, et associons à chaque $a \in F$ l'élément u_a de $\mathcal{L}(E,F)$ donné par $u_a(x) = f(x)a$. On définit ainsi un isomorphisme $a \to u_a$ de l'aspace vectoriel F sur un sous-espace V de $\mathcal{L}(E,F)$; il est évident que V est fermé pour la topologie de la convergence simple, donc aussi pour la $\mathfrak{S}$-topologie puisque $\mathfrak{S}$ contient toute partie finie de E; donc V est ~~XXXXXXXXXX~~ quasi-complet pour la $\mathfrak{S}$-topologie; pour montrer que F est lui-même quasi-complet, il suffit donc d'établir que l'application $a \to u_a$ est un homéomorphisme(lorsqu'on munit V de la $\mathfrak{S}$-topologie). Or cette application étant linéaire, il suffit de faire voir qu'elle est bicontinue au point $a = 0$ de F ; or si a converge vers 0 dans F, $f(x)a$ converge vers 0 uniformément sur toute partie bornée M de E - ceci parce que $f(M)$ est borné - et en particulier sur toute $M \in \mathfrak{S}$: d'où la continuité de $a \to u_a$; si réciproquement u_a converge vers 0 uniformément sur tout $M \in \mathfrak{S}$, on voit (puisque $\mathfrak{S}$ contient les parties finies de E) que $u_a(x) = f(x)a$ converge vers 0 pour tout $x \in E$; choisissant x de telle sorte que $f(x) \neq 0$ on en conclut que a converge vers 0 dans F, d'où notre assertion.

Supposons maintenant E tonnelé, F quasi-complet, et soit H une partie de $\mathcal{L}(E,F)$, fermée et bornée dans une $\mathfrak{S}$-topologie. Soit Φ un filtre de Cauchy sur H pour la $\mathfrak{S}$-topologie. Puisque $\mathfrak{S}$ contient les parties finies de E, l'application $u \to u(x)$ de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ dans F est continue pour chaque $x \in E$, donc est uniformément continue parce que linéaire, donc transforme Φ en un filtre de Cauchy $\Phi(x)$ sur l'ensemble <u>borné</u> $H(x)$, ensemble des $u(x)$ où $u \in H$; comme F est quasi-complet, $\Phi(x)$ converge vers un point $u_0(x) \in F$ -autrement dit, Φ converge simplement vers une application u_0 de E dans F; puisque H est simplement borné et E tonnelé, le théorème de Banach-Steinhaus montre que u_0 est une application linéaire continue de E dans F et il est clair que Φ, étant un filtre de Cauchy pour la $\mathfrak{S}$-topologie, converge vers u_0 pour la même topologie ; comme H est fermé pour cette topologie, on a donc $u_0 \in H$, de sorte que H est complet, ce qui établit que $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est quasi-complet

Supposons maintenant E quelconque et F quasi-complet, et soit H une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$, fermée pour la topologie de la convergence simple. Soit Φ un filtre de Cauchy sur H relativement à cette topologie; H étant équicontinu donc simplement borné, le raisonnement précédent montre encore que Φ converge simplement vers une application

u_0 de E dans F; d'après la Prop.4 on a $u_0 \in H$, ce qui prouve que H est complète pour la topologie de la convergence simple. Le théorème est donc entièrement démontré.

<u>Corollaire</u> - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach; muni de la topologie de la convergence bornée</u>, $\mathcal{L}(E,F)$ <u>est un espace de Banach</u>.

On sait en effet d'une part que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace normé, et d'au tre part (d'après le Théorème précédent) que $\mathcal{L}(E,F)$ est quasi-complet; il suffit donc d'observer qu'un espace normé quasi-complet est complet pour obtenir le Corollaire.

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE IV (Etat 6)

Théorie de la dualité.

---

1 - Dualité faible.

1 - <u>Espaces en dualité faible</u>.

Soient E et E' deux espaces vectoriels sur un même corps K. On dit que E et E' sont <u>en dualité faible</u> lorsqu'on s'est donné une forme bilinéaire sur $E \times E'$ (forme que nous désignerons par $\langle x,x' \rangle$) satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(DF 1) : <u>quel que soit</u> $x \in E$ <u>non nul</u>, <u>il existe un</u> $x' \in E'$ <u>tel que</u> $\langle x,x' \rangle \neq 0$;

(DF 2) : <u>quel que soit</u> $x' \in E'$ <u>non nul</u>, <u>il existe un</u> $x \in E$ <u>tel que</u> $\langle x,x' \rangle \neq 0$.

Cette définition met en évidence la parfaite symétrie existant entre E et E' ; elle montre aussi que, si l'on identifie chaque $x' \in E'$ à la forme linéaire $x \rightarrow \langle x,x' \rangle$ sur E, on obtient un isomorphisme de E' sur un sous-espace du dual E^* de E (espace de toutes les formes linéaires sur E) ; de même, E s'identifie à un sous-espace du dual de E'.

Lorsque E est de dimension finie, E' s'identifie à E^* tout entier ; dans le cas contraire, il existerait en effet (Algèbre, Chap. III, ...) un $x \in E$ non nul tel que $\langle x,x' \rangle = 0$ pour tout $x' \in E'$, contrairement à l'axiome (DF 1).

Voici un exemple important d'espaces en dualité faible. Soit E un espace vectoriel localement convexe sur R ou sur C ; désignons par E' l'ensemble des formes linéaires <u>continues</u> sur E, et, pour $x \in E$ et $x' \in E'$, désignons par $\langle x,x' \rangle$ la valeur en x de la forme linéaire x' ; alors il est clair que $\langle x,x' \rangle$ est une forme bilinéaire sur $E \times E'$, qui satisfait trivialement à (DF 2) et, d'après le théorème de Hahn-Banach, à (DF 1) ; on a donc de cette façon une dualité faible entre E et E'. On dit que E' est le <u>dual topologique</u> de E (le dual de E, i.e. l'ensemble de toutes les formes linéaires, continues ou non, sur E , étant appelé, lorsque des confusions pourraient surgir, le <u>dual algèbrique</u> de E).

2 - <u>Topologies faibles</u>.

<u>Définition 1</u> - <u>Soient</u> K <u>un corps topologique séparé et</u> E,E' <u>deux espaces vectoriels en dualité faible sur</u> K . <u>On appelle topologie faible sur</u> E <u>la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires</u> $x \rightarrow \langle x,x' \rangle$, $x' \in E'$.

Bien entendu, on ne peut parler de topologie faible sur un espace E qu'après avoir établi une dualité faible entre E et un autre espace E', et on verra plus loin que cette topologie dépend de facon essentielle de E' (considéré comme ensemble de formes linéaires sur E). Il est par ailleurs clair que la topologie faible sur E est compatible avec la structure vectorielle de E , et fait de E un espace vectoriel topologique <u>séparé</u> sur K . Enfin, on peut évidemment définir de la même façon une topologie faible sur E' en permutant dans la Définition 1 les rôles de E et de E' ; cette remarque s'applique du reste à tous les résultats et définitions de ce § , et ne sera pas répétée (na!).

Certains géomètres ont inventé une notation pour désigner la topologie faible sur E , à savoir $\sigma(E,E')$. Nous nous efforcerons de l'éviter.

Etant donnés des points $x'_1,\ldots,x'_n$ de E' en nombre fini, et un voisinage U de 0 dans K , l'ensemble $W(x'_1,\ldots,x'_n;U)$ formé des $x \in E$ tels que $\langle x,x'_i \rangle \in U$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ est évidemment un voisinage de 0 dans E ;

on obtient ainsi un système fondamental de voisinages de 0 pour la topolo-gie faible de E . On observera que ce voisinage contient un sous-espace vectoriel de codimension finie, à savoir le sous-espace défini par les équations $\langle x, x'_i \rangle = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et que, si K est discret (cas que nous n'excluons pas) ces sous-espaces sont eux-mêmes des voisinages de 0 dans E . Cette remarque va nous conduire au résultat suivant :

Théorème 1. Pour qu'une forme linéaire sur E soit faiblement continue, il faut et il suffit qu'elle soit définie par un élément de E' (c'est-à-dire donnée par $x \to \langle x, x' \rangle$ avec $x' \in E'$).

Soient en effet f une forme linéaireffaiblement continue sur E , et U un voisinage de 0 dans K, distinct de K (l'existence de U résulte du fait que K est séparé). $\overset{-1}{f}(U)$ étant un voisinage de 0 dans E contient un sous-espace F de E défini par un nombre fini d'équations $\langle x, x'_i \rangle = 0$ $(x'_i \in E')$; puisque f(F) est contenu dans U , donc distinct de K , f s'annule identiquement sur F ; comme F est de codimension finie, ceci prouve (Alg. Chap.II, §   ) que f(x) est une combinaison linéaired des formes $x \to \langle x, x'_i \rangle$; le Théorème 1 résulte trivialement de là.

Corollaire - Soient E un espace vectoriel sur K , E'_1 et E'_2 deux sous-espaces vectoriels du dual algèbrique E^* de E ; pour que ces sous-espaces déterminent sur E la même topologie faible, il faut et il suffit qu'ils soient identiques.

3 - Sous-espaces orthogonaux.

Soient E et E' deux espaces en dualité faible sur un corps K . Nous dirons qu'une partie A de E et une partie B de E' sont orthogonales si l'on a $\langle x, x' \rangle = 0$ quels que soient $x \in A$ et $x' \in B$.

Si M et N sont deux sous-espaces orthogonaux de E et E' respectivement il est clair que, pour tout $x' \in N$, l'expression $\langle x, x' \rangle$ ne dépend que de la classe de x modulo M ; donc on peut écrire $\langle x,x'\rangle = \langle \tilde{x}, x'\rangle$ en désignant par $x \to \tilde{x}$ l'application canonique de E sur l'espace E/M, et alors $\langle \tilde{x},x'\rangle$ devient une forme bilinéaire sur $(E/M)\times N$; nous allons rechercher à quelles conditions cette forme définit une dualité faible entre E/M et N . Pour cela, il est nécessaire et suffisant que les axiomes (DF 1) et (DF 2) soient vérifiés, ce qui se traduit évidemment par les deux conditions suivantes : 1) si $x'\in N$ est tel que $\langle \tilde{x},x'\rangle=0$ pour tout $\tilde{x}$, alors $x'=0$; 2) si $\tilde{x}$ est tel que $\langle \tilde{x},x'\rangle = 0$ pour tout $x'\in N$, alors $\tilde{x} = 0$. La première de ces conditions est toujours vérifiée puisque par hypothèse E et E' sont en dualité faible. La seconde est équivalente à la suivante : les $x\in M$ sont <u>caractérisés</u> par la propriété que $\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout $x'\in N$. Nous sommes donc amenés à résoudre le problème suivant : <u>à quelles conditions un sous-espace de E peut-il être défini par un système d'équations linéaires associées à des éléments de E' ?</u>

<u>Théorème 2</u> - <u>Soient</u> E <u>et</u> E' <u>deux espaces en dualité faible sur un corps topologique séparé</u> K , <u>et</u> M <u>un sous-espace de</u> E . <u>Pour qu'il existe un ensemble</u> N <u>d'éléments de</u> E' <u>tel que</u> M <u>puisse être défini par le système d'équations linéaires</u> $\langle x,x'\rangle = 0$, $x'\in N$, <u>il faut et il suffit que</u> M <u>soit faiblement fermé</u>.

La nécessité de la condition étant claire, tout revient à montrer que, si M est faiblement fermé, alors on peut le définir par un système d'équations de la forme $\langle x,x'\rangle = 0$, $x'\in E'$; autrement dit, il faut prouver que si $x\in E$ n'est pas dans M , il existe un $x'\in E'$ vérifiant $\langle x,x'\rangle \neq 0$ et $\langle y,x'\rangle =0$ pour tout $y\in M$. Or M étant faiblement fermé il existe un voisinage faible de x qui ne rencontre pas M ; ce voisinage est de la forme $x+V$ où V est un voisinage faible de 0 dans E .

Mais un tel voisinage V contient comme on l'a vu un sous-espace F défini par un nombre <u>fini</u> d'équations de la forme $\langle z, x'_i \rangle = 0$ $(x'_i \in E')$; désignant par G le sous-espace de E' engendré par les x'_i, et par $z \to \tilde{z}$ l'application canonique de E sur E/F on voit déjà, d'après les raisonnements que nous avons exposés ci-dessus, que $\langle \tilde{z}, x' \rangle = \langle z, x' \rangle$ établit une dualité faible entre E/F et G ; puisque E/F est en outre de dimension ~~fax~~ finie, G s'identifie donc au dual (algèbrique) de E/F. Cela dit, le fait que $x+F$ ne rencontre pas M montre que, dans E/F, $\tilde{M}$ ne contient pas $\tilde{x}$; d'après la théorie de la dualité dans les espaces de dimension finie, il existe donc une forme linéaire f sur E/F qui s'annule sur $\tilde{M}$ mais non en $\tilde{x}$; donc il existe un $x' \in G$ qui vérifie $\langle x, x' \rangle \neq 0$ et $\langle y, x' \rangle = 0$ pour tout $y \in M$, ce qui achève la démonstration.

Voici quelques conséquences de ce théorème. Soient M un sous-espace de E, M^0 l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\langle x, x' \rangle = 0$ pour tout $x \in M$; alors le sous-espace M^{00}, ensemble des $x \in E$ tels que $\langle x, x' \rangle = 0$ pour tout $x' \in M^0$, n'est autre que <u>l'adhérence faible</u> de M. En effet, si $\overline{M}$ est l'adhérence faible de M dans E, le Théorème 2 montre que $\overline{M} = (\overline{M})^{00}$ mais il est évident que $(\overline{M})^0 = M^0$.

D'autre part, soient M et N deux sous-espaces orthogonaux de E et E' ; d'après ce qu'on a vu, la forme bilinéaire $\langle x, x' \rangle$ définit, par passage au quotient, une dualité faible entre E/M et N si et seulement si M est défini par le système d'équations $\langle x, x' \rangle = 0$, $x' \in N$; cela veut dire que $M = N^0$, autrement dit : que M est faiblement fermé et que N est faiblement partout dense dans M^0.

Lorsque ces conditions sont réalisées, la dualité entre E/M et N permet de définir une topologie faible sur E/M ; d'autre part, on peut aussi munir E/M de la topologie quotient de la topologie faible de E. Il faut remarquer qu'en général ces deux topologies sont <u>distinctes</u> ; en effet, les formes linéaires sur E/M qui sont continues pour cette topologie quotient correspondent de façon évidente (i.e. canonique) aux formes linéaires sur E qui sont faiblement continues et s'annulent sur M - autrement dit, ce sont les formes linéaires $\tilde{x} \to \langle x,x' \rangle$ avec $x' \in M^o$; par contre, les formes linéaires faiblement continues sur E/M sont (Théorème 1) de la forme $\tilde{x} \to \langle x,x' \rangle$ avec $x' \in N$, et comme N peut être strictement plus petit que M^o on voit bien que les deux topologies considérées sur E/M ne peuvent coincider que si $N = M^o$.

Si la condition $N = M^o$ est réalisée, il est facile de voir que les deux topologies définies ci-dessus sur E/M coïncident effectivement ; voir l'état antérieur ainsi que l'état ultérieur.

§ 2 - Dual topologique d'un espace localement convexe.

1 - <u>Définition, topologies faibles</u>.

<u>Définition 1</u> - <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe réel ou complexe</u> ; <u>on appelle dual topologique de</u> E, et on note E', <u>le sous-espace du dual algèbrique de</u> E <u>formé des formes linéaires continues sur</u> E.

Dans toute la suite de ce Chapitre, nous noterons $\langle x,x' \rangle$ (pour $x \in E$ et $x' \in E'$) la valeur en x de la forme linéaire x'. Comme on l'a déjà dit au § 1, il résulte du théorème de Hahn-Babach que la forme bilinéaire $\langle x,x' \rangle$ satisfait aux conditions (DF 1) et (DF 2), donc permet d'établir entre E et E' une dualité faible, et en particulier de définir sur E et sur E' des <u>topologies faibles</u>. Quand il y aura lieu d'éviter des confusions (ce qui n'est pas toujours souhaitable...) on qualifiera de <u>forte</u> la topologie donnée sur E ; cette terminologie est justifiée dans une certaine mesure par le fait que la topologie faible de E est moins fine que la topologie forte. On observera que, jusqu'à nouvel ordre, aucune autre topologie que la topologie faible n'est définie sur E' ; ce n'est que plus tard qu'on introduira sur E' d'autres topologies. Il est immédiat de vérifier que les topologies faibles sur E et E' sont <u>localement convexes</u> (c'est le cas toutes les fois qu'on a deux espaces en dualité faible sur R ou C).

Les théorèmes 1 et 2 du § 1 nous permettent d'énoncer les résultats suivants :

<u>Théorème 1</u> - <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe réel ou complexe</u> ; <u>toute forme linéaire fortement continue sur</u> E <u>est faiblement continue</u>, <u>et réciproquement</u> ; <u>tout sous-espace fortement fermé de</u> E <u>est faiblement fermé et réciproquement</u>, <u>et un tel sous-espace est défini par un système d'équations de la forme</u> $\langle x,x'\rangle=0$, $x'\in E'$; <u>toute forme linéaire faiblement continue sur</u> E' <u>est de la forme</u> $x'\rightarrow\langle x,x'\rangle$, $x\in E$, <u>tout sous-espace faiblement fermé de</u> E' <u>est défini par un système d'équations de la forme</u> $\langle x,x'\rangle= 0$, $x\in E$.

Soit V un sous-espace vectoriel fermé (fortement ou faiblement) de E ; d'après le théorème précédent, V est défini par des équations de la forme $\langle x,x'\rangle=0$, $x'\in E'$; il est intéressant de remarquer que ce résultat est aussi une conséquence du théorème de Hahn-Banach (Chap. II, § 3, Corollaire 3 de la Prop. 4). Nous allons maintenant montrer que ce même théorème permet d'étudier plus généralement les ensembles convexes.

2 - Dual d'un sous-espace, d'un espace quotient.

Soit M un sous-espace fermé d'un espace localement convexe E ; d'après le théorème de Hahn-Banach, toute forme linéaire continue sur M se prolonge en une forme linéaire continue sur E tout entier, donc est de la forme $x \to \langle x,x' \rangle$ avec $x' \in E'$, et réciproquement. Il s'ensuit aussitôt que, si l'on considère M comme espace localement convexe (pour la topologie induite par celle de E) la topologie faible de M est identique à la topologie induite par la topologie faible de E. De plus, si M^o désigne le sous-espace des $x' \in E'$ orthogonaux à M, il est clair que le dual topologique de M s'identifie canoniquement à E'/M^o.

En échangeant dans le résultat précédent E et E' ainsi que M et M^o on voit aussi que le dual topologique de l'espace E/M s'identifie à M^o.

3 - Ensembles semi-polaires et ensembles polaires.

Définition 2 - Soit M une partie d'un espace vectoriel réel E, en dualité faible avec un espace E' ; on appelle semi-polaire de M l'ensemble $M^{\cup}$ des $x' \in E'$ tels que l'on ait $\langle x,x' \rangle \leq 1$ pour tout $x \in M$.

On définit de même $M^{\cup\cup}$ comme étant l'ensemble des $x \in E$ tels que $\langle x,x' \rangle \leq 1$ pour tout $x' \in M^{\cup}$.

Lorsque M est un sous-espace de E, on a évidemment $M^{\cup} = M^o$, ensemble des $x' \in E'$ orthogonaux à M, et alors $M^{\cup\cup} = M^{oo}$ est l'adhérence faible de M dans E (§ 1,n°3). Nous nous proposons maintenant de caractériser tous les ensembles $M \subset E$ tels que $M = M^{\cup\cup}$.

Pour cela, il faut tout d'abord observer que $M^{\cup}$ et donc aussi $M^{\cup\cup}$ sont dans tous les cas des parties convexes, faiblement fermées, contenant 0. Réciproquement, soit M une partie convexe, faiblement fermée et contenant 0 de E ; si $x \in E$ n'est pas dans M, il existe (d'après le théorème de Hahn-Banach appliqué à E muni de la topologie faible) un hyperplan fermé V qui sépare strictement x de M , d'où résulte immédiatement l'existence d'un $x' \in E'$ vérifiant $\langle x,x'\rangle > 1$ et $\langle y,x'\rangle \leqslant 1$ pour tout $y \in M$; donc x n'est pas dans $M^{\cup\cup}$, et comme on a de toute façon $M \subset M^{\cup\cup}$ on parvient au résultat suivant :

Proposition 1 - Soient E et E' deux espaces en dualité faible sur R , et soit M une partie de E ; pour que l'on ait $M = M^{\cup\cup}$, il faut et il suffit que M soit convexe, faiblement fermée et contienne 0 .

Lorsque M ne vérifie pas nécessairement ces conditions, $M^{\cup\cup}$ est l'enveloppe convexe faiblement fermée de M et de 0 ; il suffit pour le voir d'observer que $M^{\cup\cup}$ ne change pas si l'on substitue à M cette enveloppe.

Le cas le plus important est celui où E est un espace localement convexe et E' son dual topologique ; pour utiliser la Proposition 1 , on tient souvent compte du résultat suivant :

Proposition 2 - Dans un espace localement convexe (réel ou complexe) tout ensemble convexe fortement fermé est faiblement fermé, et réciproquement.

Dans le cas réel, un ensemble convexe fortement fermé est en effet une intersection de demi-espaces fortement fermés ; mais un tel demi-espace est aussi faiblement fermé en raison du théorème 1 . Le cas complexe se ramène au précédent par restriction du corps des scalaires ; enfin, la réciproque est triviale.

Soit maintenant M une partie équilibrée d'un espace localement convexe réel E ; si un $x' \in E'$ vérifie $\langle x,x'\rangle \leqslant 1$ pour tout $x \in M$, il est clair qu'on a en fait $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in M$; ceci nous conduit à introduire la notion que voici :

<u>Définition 3 - Soit</u> M <u>une partie d'un espace vectoriel</u> E <u>en dualité faible sur</u> R <u>ou</u> C <u>avec un espace</u> E' ; <u>on appelle polaire de</u> M <u>l'ensemble</u> M^o <u>des</u> $x' \in E'$ <u>tels que l'on ait</u> $|\langle x,x'\rangle| \leq 1$ <u>pour tout</u> $x \in M$.

On notera que lorsque M est un sous-espace de E , M^o se réduit bien à l'ensemble des x' orthogonaux à M . Dans le cas général, il est éviden que M^o (et donc aussi M^{oo}) sont des ensembles convexes, équilibrés faiblement fermés et contenant 0, et que M^{oo} contient M . Il est aussi évident que M^{oo} ne change pas si l'on substitue à M son enveloppe convexe, équilibrée et faiblement fermée.

Lorsque le corps des scalaires est R , on a vu que $M^o = M^\cup$ dès que M est équilibrée, en sorte qu'on a aussi dans ce cas $M^{oo} = M^{\cup\cup}$ puisque de toute façon M^o est équilibré. La Proposition 1 montre donc que M^{oo} est identique à l'enveloppe convexe équilibrée faiblement fermée de M . Ce résultat est encore valable lorsque le corps de base est C (mais la façon dont a été rédigé le Chap.II ne permet pas de le montrer trivialement). Pour le voir, il suffit de montrer que $M = M^{oo}$ lorsque M est convexe, équilibré et faiblement fermé. Or, désignons par $\tilde{E}$ l'espace vectoriel réel obtenu à partir de E par restriction du corps de base à R ; et désignons par $\tilde{E}'$ l'ensemble des formes linéaires sur $\tilde{E}$ qui sont de la forme $x \longrightarrow$ partie réelle de $\langle x,x'\rangle$, avec $x' \in E'$; en posant $\langle x,\tilde{x}'\rangle$ = partie réelle de $\langle x,x'\rangle$, on a une application canonique et linéaire-réelle de E' sur $\tilde{E}'$, et par ailleurs on définit ainsi comme on le vérifie aisément une dualité faible entre $\tilde{E}$ et $\tilde{E}'$; la topologie faible correspondante sur $\tilde{E}$ est du reste identique à celle qui est définie par la dualité faible entre E et E', de sorte que M , considéré comme partie de $\tilde{E}$, est encore convexe, équilibré et faiblement fermé. D'après la Prop.1 appliquée au couple $\tilde{E}, \tilde{E}'$ on a donc $M = M^{\cup\cup}$;

mais $M^{\cup}$ s'identifie à l'ensemble des $x' \in E'$ tels que l'on ait partie réelle de $\langle x,x' \rangle \leqslant 1$ pour tout $x \in M$; comme M est stable par les homothéties $x \to \lambda x$ avec λ complexe de module $\leqslant 1$, cela équivaut à $|\langle x,x' \rangle| \leqslant 1$; donc $M^{\cup}$ s'identifie à M^{o} ; pour la même raison $M^{\cup\cup}$ s'identifie à M^{oo}, et on a bien comme annoncé $M = M^{oo}$. Finalement :

<u>Proposition 3</u> - <u>Soient</u> E <u>et</u> E' <u>deux espaces en dualité faible sur</u> R <u>ou</u> C <u>et soit</u> M <u>une partie de</u> E . <u>Alors</u> M^{oo} <u>est l'enveloppe convexe, équilibrée, faiblement fermée de</u> M .

Pour terminer ces considérations sur les polaires, notons que si une partie M de E est la réunion d'une famille M_α , alors M^o est l'intersection des $(M_\alpha)^o$; en utilisant la Prop.2 le lecteur (ou le futur rédacteur; qu'il soit béni et pris en pitié) montrera par le même raisonnement que si M est l'intersection des M_α alors M^o est l'enveloppe convexe, équilibrée et faiblement fermée de la réunion des $(M_\alpha)^o$.

<u>4 - Polaire d'un ensemble faiblement borné.</u>

<u>Proposition 4</u> - <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe et</u> E' <u>son dual topologique ; pour qu'une partie</u> M <u>de</u> E' <u>soit faiblement bornée il faut et il suffit que</u> M^o <u>soit un tonneau dans</u> E .

Tout d'abord, E' muni de la topologie faible n'est pas autre chose que l'espace des applications linéaires continues de E dans le corps de base, espace muni de la topologie de la convergence simple ; pour exprimer qu'une partie M de E' est faiblement bornée, on peut donc appliquer le critère général relatif aux parties bornées d'un espace $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ (Chap.III, § 3,Prop.2), ce qui donne immédiatement la condition nécessaire et suffisante que voici :

$$\sup_{x' \in M} |\langle x,x' \rangle| \leqslant +\infty$$

pour tout $x \in E$. Cela dit, considérons M^o ; c'est une partie convexe, équilibrée et faiblement fermée de E ; c'est donc aussi un ensemble fortement fermé (Prop.2) ; pour exprimer que M^o est un tonneau dans E (muni de sa topologie forte) il suffit donc d'exprimer que M^o est absorbant, autrement dit que pour tout $x \in E$ il existe un nombre $k > 0$ tel que $x \in k.M^o$; or cette condition signifie évidemment qu'on a $|\langle x,x'\rangle| \leq k$ pour tout $x' \in M$, ce qui démontre la Proposition.

5 - Ensembles équicontinus dans E'.

Proposition 5 - Soient E un espace localement convexe et M une partie de E' ; pour que M soit équicontinu, il faut et il suffit que M^o soit un voisinage de 0 dans E ..

Si M^o est un voisinage de 0 dans E, il en est de même de $\varepsilon.M^o$ quel que soit $\varepsilon > 0$, de sorte que, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un voisinage V de 0 dans E (à savoir $\varepsilon.M^o$) tel que $x \in V$ implique $|\langle x,x'\rangle| \leq \varepsilon$ pour tout $x' \in M$; la condition de l'énoncé est donc suffisante. Réciproquement, si M est équicontinu, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $x \in V$ implique $|\langle x,x'\rangle| \leq 1$ pour tout $x' \in M$; on a alors $V \subset M^o$, ce qui prouve que M^o lui-même est un voisinage de 0 dans E .

Proposition 6.- Toute partie équicontinue et faiblement fermée de E' est faiblement compacte.

Soit en effet M une partie équicontinue et faiblement fermée de E' ; soit ϕ un ultrafiltre sur M . Puisque M^o est un voisinage de 0 et donc un tonneau dans E , M est faiblement borné (Prop.4), en sorte que pour chaque $x \in E$ l'application $x' \to \langle x,x'\rangle$ de M dans le corps de base est bornée. Par suite, cette application possède une limite $u(x)$ suivant ϕ . Il est clair que l'application $x \to u(x)$ est limite simple d'applications appartenant à M , donc (Chap.III, § 3, Prop.3) est une

une application linéaire continue de E dans le corps de base puisque M est équicontinue ; on a donc $u(x) = \langle x, x'_0 \rangle$ pour un $x'_0 \in E'$ qui est faiblement adhérent à M, donc dans M, et il est clair que ϕ converge faiblement vers x'_0, ce qui prouve que M est faiblement compact.

Théorème 2 - Soit E un espace tonnelé ; soit M une partie faiblement fermée de E' ; les propriétés suivantes sont équivalentes :
1° M est faiblement bornée ; 2° M est équicontinue ; 3° M est faiblement compacte.

Si M est faiblement bornée, M^0 est un tonneau dans E (Prop.4), donc est un voisinage de 0 dans E puisque E est tonnelé, en sorte que M est équicontinue (Prop.5) et donc aussi faiblement compacte (Prop.6) ; comme toute partie faiblement compacte de E' est faiblement bornée (Chap.III, § 2,Prop.3) on a donc les implications

$$1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 1^\circ$$

qui démontrent le Théorème.

Corollaire du Théorème 2 - Dans le dual topologique d'un espace tonnelé, l'enveloppe convexe faiblement fermée d'un ensemble faiblement compact est faiblement compacte.

En effet, l'enveloppe convexe faiblement fermée d'une partie équicontinue de E' est équicontinue (que E soit ou non tonnelé).

Remarque - Le Théorème 2 n'est valable que pour les espaces tonnelés ; si en effet un espace E le vérifie, et si T est un tonneau dans E, alors T^0 est faiblement borné (Prop.4) donc équicontinu par hypothèse, en sorte que T^{00} est un voisinage de 0 dans E ; mais T étant convexe, équilibré et fermé on a $T^{00}=T$, d'où notre assertion.

6 - Cas des espaces de Banach.

Soit E un espace de Banach. Le corps de base K étant lui aussi un espace de Banach, on peut définir sur $E' = \mathcal{L}(E,K)$ une norme par la relation

$$\| x' \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} |\langle x,x' \rangle| \quad ;$$

à cette norme correspond sur E' la topologie de la convergence uniforme sur toute partie bornée de E (topologie "forte" de E').

Il est clair que toute partie fortement bornée de E' l'est à fortiori faiblement. Il est clair aussi que la boule unité de E' - ensemble des x' tels que $\| x' \| \leqslant 1$ - est faiblement fermée (c'est en effet le polaire de la boule unité de E). Comme tout espace de Banach est tonnelé (Chap.III, § 1, Corollaire de la Prop.1), le Théorème 2 ci-dessus conduit donc au résultat suivant : la boule unité du dual d'un espace de Banach est faiblement compacte.

On remarquera que, dans le dual topologique E' d'un espace de Banach E, toute partie équicontinue B est contenue dans une boule de E' (car le polaire d'une boule de E est, d'après la définition de la norme sur E', une boule de E') ; on ne restreint donc pas la généralité du Théorème 2 pour les espaces de Banach en l'énoncant comme nous l'avons fait plus haut (c'est-à-dire uniquement pour la boule unité de E', et non pour toute partie bornée et faiblement fermée de E').

7 - Parties faiblement bornées de E .

Soit E un espace localement convexe. Puisqu'on a défini sur E , outre la topologie "forte" (i.e. la topologie donnée) une topologie "faible", on peut considèrer aussi bien des ensembles faiblement bornés que des ensembles fortement bornés dans E . Il est clair qu'une partie M de E est faiblement bornée si, et seulement si chaque forme linéaire continue sur E est bornée sur M . Il est évident que toute partie fortement bornée de E l'est aussi faiblement. Réciproquement :

<u>Théorème 3</u> - <u>Dans un espace localement convexe, tout ensemble faiblement borné est fortement borné</u>.

Désignons par $\mathfrak{S}$ la famille des parties de E' qui sont convexes, équilibrées, faiblement bornées et faiblement complètes, et munissons E de la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme sur les ensembles de $\mathfrak{S}$. Puisque E s'identifie à l'ensemble des formes linéaires faiblement continues sur E' (Théorème 1) on peut affirmer (Chap.III, § 3, Théorème 1) que toute partie de E qui est bornée pour la topologie de la convergence simple sur E' est aussi bornée pour $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$. Autrement dit, toute partie faiblement bornée de E est bornée pour $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$.

Or soit V un voisinage convexe, équilibré et fermé de 0 dans E. L'ensemble V^0 est convexe, équilibré, faiblement fermé et équicontinu (Prop.5) donc faiblement compact (Prop.6) donc faiblement complet ; par suite $V^0 \in \mathfrak{S}$; il s'ensuit que $V^{00}=V$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$; tout ensemble faiblement borné dans E est par suite absorbé par V, ce qui établit le théorème 3.

8 - <u>Topologies compatibles avec une dualité faible</u>.

(Cette question a été rejetée par le Congrès de Mars 52 ; le rédacteur l'a rétablie après s'être convaincu qu'en l'omettant on s'obligerait à reproduire deux fois la démonstration du théorème de Mackey, à savoir : 1° pour démontrer le théorème sur les formes linéaires faiblement continues sur les équicontinus ; 2° pour démontrer le critère de réflexivité ; en outre, on s'est aussi convaincu que "cà ne coûte pas plus cher"...)

Soient E et E' deux espaces en dualité faible sur R ou C ; on dit qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur E est <u>compatible</u> avec la dualité entre E et E' si E, muni de $\mathcal{T}$, admet E' comme dual topologique (étant entendu qu'on considère E' comme ensemble de formes linéaires sur E). Nous allons caractériser ces topologies :

<u>Théorème</u> 4 (Mackey) - <u>Soient</u> E <u>et</u> E' <u>deux espaces vectoriels en dualité faible sur</u> R <u>ou</u> C ; <u>pour qu'une topologie localement convexe sur</u> E <u>soit compatible avec la dualité faible entre</u> E <u>et</u> E', <u>il faut et il suffit que ce soit la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties, convexes, équilibrées et faiblement compactes de</u> E', <u>ensemble dont la réunion soit tout</u> E'.

La nécessité de la condition est évidente : si E' s'identifie au dual de E muni d'une topologie $\mathcal{T}$, toute partie équicontinue de E' (relativement à $\mathcal{T}$) est relativement faiblement compacte (Prop.6) ; si donc on désigne par $\mathfrak{S}$ la famille des ensembles V^o, où V est un voisinage quelconque de 0 pour $\mathcal{T}$, on voit que les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont convexes, équilibrés, faiblement compacts, et ont pour réunion E' ; d'autre part, $\mathcal{T}$ n'est autre que la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme sur les ensembles de $\mathfrak{S}$, car la famille $\mathfrak{S}$ étant stable par homothétie et filtrante croissante, on obtient un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ en prenant les polaires des ensembles de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire les ensembles V^{oo} où V est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$; mais on peut se borner évidemment aux voisinages V qui sont convexes, équilibrés et fermés pour $\mathcal{T}$ (donc aussi faiblement fermés) en sorte qu'alors $V^{oo} = V$, ce qui démontre notre assertion.

Réciproquement, désignons par $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties convexes, équilibrées, faiblement compactes de E', dont la réunion soit E' tout entier, et munissons E de la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme sur les ensembles de $\mathfrak{S}$. Puisque tout $K \in \mathfrak{S}$ est faiblement compact, l'expression $\langle x,x' \rangle$ reste bornée quand x' parcourt K, de sorte que $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ est compatible avec la structure vectorielle de E (Chap.III, §3, n°1) et est localement convexe. Nous désignerons par $E_{\mathfrak{S}}$ l'espace E muni de cette topologie. Puisque la réunion des $K \in \mathfrak{S}$ est tout E', il est clair que, pour tout $x' \in E'$, $x \to \langle x,x' \rangle$ est une forme linéaire continue sur $E_{\mathfrak{S}}$, de sorte que E' s'identifie canoniquement à une partie du dual topologique $E'_{\mathfrak{S}}$ de $E_{\mathfrak{S}}$; il nous reste à montrer que $E' = E'_{\mathfrak{S}}$.

Tout d'abord, l'enveloppe convexe de la réunion de deux parties convexes et faiblement compactes A et B de E' est elle-même faiblement compacte (car c'est l'image du compact $I \times A \times B$ par l'application faiblement continue $(\alpha, x',y') \to \alpha . x' +(1-\alpha)y'$, où I est le segment $[0,1]$ de R) ; ceci permet de supposer que la famille $\mathfrak{S}$ est filtrante croissante. On peut aussi la supposer invariante par homothétie, pour une raison analogue. Il résulte de là que l'on peut se ramener au cas où les ensembles K^o, $K \in \mathfrak{S}$, forment un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$. Ceci dit, soit $x' \in E'_{\mathfrak{S}}$; $x \to \langle x,x' \rangle$ étant continue pour $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$, il existe d'après ce qui précède un ensemble $K \in \mathfrak{S}$ tel que $x \in K^o$ implique $|\langle x,x' \rangle| \leqslant 1$; cela veut dire que $x' \in K^{oo}$, où K^{oo} désigne le polaire de K^o dans $E'_{\mathfrak{S}}$; or K étant convexe et équilibré, la théorie de la dualité appliquée au couple $E,E'_{\mathfrak{S}}$ montre que K^{oo} est l'adhérence faible de K dans $E'_{\mathfrak{S}}$; puisque K est faiblement compact dans E' et puisque l'immersion de E' dans $E'_{\mathfrak{S}}$ est évidemment un homéomorphisme pour les topologies faibles, K est faiblement compact, donc faiblement fermé dans $E'_{\mathfrak{S}}$; donc $K^{oo} = K$, de sorte que $x' \in K \subset E'$, ce qui achève de prouver que $E'_{\mathfrak{S}} = E'$.

Le théorème 4 montre que, parmi les topologies compatibles avec la dualité faible entre E et E', il existe une topologie <u>minimale</u> - la topologie faible - et une topologie <u>maximale</u> - celle de la convergence uniforme sur <u>toutes</u> les parties convexes, équilibrées et faiblement compactes de E' ; cette dernière topologie est appelée la <u>topologie de Mackey</u> de l'espace E en dualité faible avec E' ; les topologies compatibles avec la dualité faible ne sont autres que les topologies localement convexes <u>intermédiaires entre la topologie faible et la topologie de Mackey</u>. Il est clair que la topologie de Mackey sur E est <u>caractérisée</u> par la propriété suivante : pour qu'une partie convexe, équilibrée et faiblement fermée de E' soit faiblement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit équicontinue pour la topologie de Mackey sur E ; on voit donc, en utilisant le Théorème 2, que si E est un espace <u>tonnelé</u> sa topologie est identique à la topologie de Mackey déterminée par la dualité entre E et son dual topologique E', ou encore : <u>si</u> E <u>et</u> E' <u>sont deux espaces en dualité faible</u>, <u>il existe au plus une topologie d'espace tonnelé sur</u> E <u>qui soit compatible avec la dualité faible entre</u> E <u>et</u> E', à savoir la topologie de Mackey (mais celle-ci n'est pas toujours tonnelée).

9 - <u>Une caractérisation des formes linéaires faiblement continues sur</u> E'.

Comme le montre le Théorème 1, toute forme linéaire faiblement continue sur le dual topologique E' d'un espace localement convexe E est de la forme $x' \rightarrow \langle x,x' \rangle$ avec $x \in E$. Nous allons démontrer le théorème suivant, dû à Banach :

<u>Théorème 5</u> - <u>Soient</u> E <u>un espace localement convexe</u> complet <u>et</u> E' <u>son dual topologique</u> ; <u>pour qu'une forme linéaire sur</u> E' <u>soit faiblement continue</u>, <u>il suffit qu'elle soit faiblement continue sur toute partie équicontinue de</u> E' .

Désignons par F l'ensemble des formes linéaires sur E' qui sont faiblement continues sur toute partie équicontinue de E' ; il est clair que F est un espace vectoriel en dualité faible avec E', et que E s'identifie canoniquement à un sous-espace de F . D'autre part, soit $\mathfrak{S}$

l'ensemble des parties équicontinues de E' et munissons F de la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme sur les ensembles de $\mathfrak{S}$; puisque l'adhérence faible d'un ensemble équicontinu dans E' est encore équicontinue et est faiblement compacte, toute forme linéaire $u \in F$ est bornée sur tout $B \in \mathfrak{S}$, de sorte que la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ est compatible avec la structure vectorielle de F , et que F , muni de cette topologie, est localement convexe. On obtient du reste un système fondamental de voisinages de 0 dans F en prenant les polaires des ensembles $B \in \mathfrak{S}$ (ceci parce que $\mathfrak{S}$ est filtrant croissant et stable par homothétie) ; cela montre d'après la Prop.5 que E (muni de sa topologie forte) s'identifie <u>topologiquement</u> à un sous-espace de F, sous-espace nécessairement fermé puisque E est supposé être complet.

Pour montrer que $E = F$, il suffit donc de faire voir que E est partout dense dans F . Or puisque la dualité entre F et E' induit une dualité entre E et E', le théorème de Hahn-Banach montre déjà que E est <u>faiblement</u> partout dense dans F . Tout revient donc à prouver que E est faiblement fermé dans F , donc, d'après la Prop.2, à montrer que E' s'identifie au dual topologique de F, ou encore que la topologie de F est compatible avec la dualité faible entre F et E' ; mais cela résulte (Théorème 4) du fait que les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont équicontinus donc relativement faiblement compacts d'après la Proposition 6 .

<u>Corollaire du Théorème 5</u> - <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach</u> ; <u>pour qu'une forme linéaire sur</u> E' <u>soit faiblement continue sur</u> E', <u>il suffit qu'elle le soit sur la boule unité de</u> E'.

En effet, toute partie équicontinue de E' est contenue à une homothétie près dans la boule unité de E' ($n^o 6$) .

Remarque - Si E est espace de Banach de type dénombrable, la boule unité de E' est métrisable pour la topologie faible (Chap. III, § 3, Corollaire de la Prop. 4) ; donc pour vérifier qu'une forme linéaire $u(x')$ sur E' est faiblement continue, il suffit de vérifier que, pour toute suite x'_n convergent faiblement vers une limite x' on a $u(x') = \lim_{n \infty} u(x'_n)$.

§ 3 - Topologie forte sur le dual topologique d'un espace localement convexe.

1 - Définition de la topologie forte.

Définition 1 - Soient E un espace localement convexe et E' son dual topologique ; on appelle topologie forte sur E' la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E .

Comme on l'a vu au Chap. III, § 3, cette topologie est compatible avec la structure vectorielle de E', et est localement convexe. Puisque toute réunion finie de parties bornées de E est encore bornée, ainsi que tout homothétique d'une partie bornée, on obtient un système fondamental de voisinages "forts" de 0 dans E' en prenant les polaires des parties bornées de E .

Lorsque E est un espace de Banach, il est immédiat de vérifier que la topologie forte de E' n'est autre que celle qui est définie par la norme déjà définie au § 2, n°6 .

Proposition 1. Le dual topologique d'un espace de Banach E est complet pour la topologie forte (donc est un espace de Banach).

Soit en effet ϕ un filtre de Cauchy sur E' muni de la topologie forte : quel que soit l'ensemble borné $B \subset E$, il existe un $M \in \phi$ tel que B^0 contienne M à une translation près. Cela montre évidemment que pour tout $x \in E$, $\lim_{\phi} \langle x,x' \rangle = u(x)$ existe ; $u(x)$ est une forme linéaire sur E, et puisque ϕ vérifie le critère de Cauchy pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E on voit que, sur toute partie bornée de E, $u(x)$ est limite uniforme de formes linéaires continues sur E. Il s'ensuit aussitôt que u est <u>bornée sur toute partie bornée de</u> E ; or E étant un espace de Banach possède des voisinages de 0 qui sont bornés ; donc u est bornée sur au moins un voisinage de 0, et est par suite continue. On peut donc écrire $u(x) = \langle x,x'_0 \rangle$ pour un $x'_0 \in E'$ qui est évidemment la limite de ϕ, d'où la Proposition.

<u>Remarque</u> - Il existe en dehors des espaces de Banach, des espaces localement convexes E possédant la propriété suivante : pour qu'une application linéaire de E dans un espace localement convexe F soit continue, il faut et <u>il suffit</u> qu'elle transforme toute partie bornée de E en une partie bornée de F. Il est clair que la Prop.1 s'étend à ces espaces.

2 - <u>Ensembles fortement bornés</u>.

Soit M une partie de E' ; pour qu'elle soit fortement bornée, il faut et il suffit que, pour tout ensemble borné $B \subset E$, le polaire B^o absorbe M ; comme on peut se limiter aux ensembles B qui sont convexes, équilibrés et fermés, il revient au même de dire que M^o <u>absorbe toute partie</u> E. Puisque M^o est convexe, équilibré, fermé, et puisque la propriété en question exige déjà que M^o absorbe les points de E, on voit que M^o est un tonneau dans E. Si donc E est tonnelé, M^o est un voisinage de 0 dans E (et ceci dès que M est <u>faiblement</u> bornée) donc absorbe tout ensemble borné par définition de ceux-ci ; donc :

Proposition 2 - Dans le dual topologique d'un espace tonnelé, tout ensemble faiblement borné est fortement borné.

Cette Proposition est encore vraie sous d'autres hypothèses ; en particulier :

Proposition 2 bis - Dans le dual topologique d'un espace quasi-complet tout ensemble faiblement borné est fortement borné.

Cette Proposition résulte directement du Chap.III, § 3, Corollaire du Théorème 1.

3 - Espaces réflexifs.

On appelle bidual d'un espace localement convexe E le dual topologique de l'espace E' muni de la topologie forte, autrement dit l'espace des formes linéaires fortement continues sur E'. On désigne ce bidual par E".

Si l'on associe à chaque $x \in E$ la forme linéaire $x' \to \langle x, x' \rangle$ on définit évidemment un isomorphisme $x \to \tilde{x}$ de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel E" ; nous identifierons toujours E à un sous-espace de E" au moyen de cet isomorphisme. On dit que E est réflexif lorsque $E = E''$, autrement dit lorsque toute forme linéaire fortement continue sur E' est faiblement continue. Il existe des espaces non réflexifs, en particulier des espaces de Banach ; il existe aussi des catégories importantes d'espaces réflexifs (voir le Livre des Distributions).

Avant d'étudier en général le bidual d'un espace localement convexe, nous allons démontrer un critère de réflexivité qui fera comprendre pourquoi il existe des espaces non réflexifs :

Théorème 1 - Pour qu'un espace localement convexe E soit réflexif, il faut et il suffit que toute partie bornée et faiblement fermée de E soit faiblement compacte.

Supposons en effet $E = E''$ et soit B une partie bornée et faiblement fermée de E ; B est faiblement fermée dans E", et par ailleurs équicontinue (en tant qu'ensemble de formes linéaires continues sur E') puisque B^o est un voisinage fort de 0 dans E' ; donc (§ 2, Prop. 6) B est faiblement compacte.

Si d'autre part toute partie bornée et faiblement fermée de E est faiblement compacte, on voit que la topologie forte de E' est la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties convexes, équilibrées et faiblement compactes de E (à savoir les parties convexes, équilibrées, bornées et fermées de E) ; donc (§ 2, Théorème 4) elle est compatible avec la dualité faible entre E' et E, ce qui prouve que E est réflexif.

<u>Corollaire du Théorème 1</u> - <u>Pour qu'un espace de Banach</u> E <u>soit réflexif il faut et il suffit que la boule unité de E soit faiblement compacte</u>.

Un critère équivalent de réflexivité est le suivant :

<u>Proposition 3</u> - <u>Pour qu'un espace localement convexe</u> E <u>soit réflexif il faut et il suffit que</u>, <u>dans</u> E', <u>tout sous-espace fortement fermé soit faiblement fermé</u>.

En effet, la réflexivité de E signifie par définition que toute forme linéaire fortement continue sur E' est faiblement continue, autrement dit que tout hyperplan fortement fermé est faiblement fermé (dans E') ; la Prop. 3 résulte immédiatement de là.

<u>Proposition 4</u> - <u>Le dual topologique d'un espace réflexif est tonnelé pour la topologie forte</u> .

En effet, soient E un espace réflexif et T une partie convexe, équilibrée, fortement fermée et absorbante dans E' - autrement dit, un tonneau pour la topologie forte de E'. Puisque E est réflexif et T convexe T est aussi faiblement fermé, c'est donc un tonneau pour la topologie faible de E', d'où résulte (2, Prop. 3) que $T = T^{oo}$; mais puisque T est absorbante, T^o est faiblement borné dans E , donc aussi fortement borné, en sorte que T est le polaire d'une partie bornée de E ; donc T est un voisinage fort de 0 dans E', ce qui établit la Proposition.

<u>Proposition 5</u> - <u>Tout sous-espace fermé d'un espace réflexif est réflexif</u>.

Soit en effet M un sous-espace fermé d'un espace localement convexe E ; pour qu'une partie B de M soit bornée et faiblement fermée (relativement à M) il faut et il suffit qu'elle soit bornée et faiblement fermée dans E puisque les topologies forte et faible de M sont induites par les topologies correspondantes de E ; donc M vérifie la condition du Théorème 1 dès que E la vérifie, d'où la Proposition.

4 - <u>Espaces complètement réflexifs</u>.

Un espace réflexif E est dit <u>complètement réflexif</u> si la topologie de E est identique à la topologie forte de E", c'est-à-dire à celle de la convergence uniforme sur les parties fortement bornées de E'.

<u>Proposition 6</u> - <u>Pour qu'un espace réflexif</u> E <u>soit complètement réflexif il faut et il suffit qu'il soit tonnelé</u>.

La nécessité de la condition résulte aussitôt de la Proposition 4 . Réciproquement, supposons-la vérifiée ; on obtient un système fondamental de voisinages forts de 0 dans E" en prenant les ensembles B^o, où B est une partie fortement bornée de E', autrement dit ($n^o 2$) en prenant dans E muni de sa topologie initiale les <u>tonneaux</u> qui absorbent les parties bornées de E ; donc tout voisinage fort de 0 dans E" est aussi un voisinage de 0 dans E ; la réciproque étant évidente (même si E n'est pas tonnelé) la Proposition est démontrée.

<u>Proposition 7</u> - <u>Le dual fort d'un espace complètement réflexif est complètement réflexif</u>.

En effet, E' est tonnelé pour la topologie forte (Prop.4), donc tout revient à établir que E' est réflexif, autrement dit (Théorème 1) que toute partie B de E', fortement bornée et faiblement fermée, est faiblement compacte ; mais cela résulte du fait que, E étant tonnelé, B est équicontinue (§ 2, Théorème 2).

La Proposition 6 est un cas particulier d'un résultat valable pour tous les espaces tonnelés, réflexifs ou non :

Proposition 8 - Soit E un espace tonnelé ; alors la topologie de E est identique à celle de la convergence uniforme sur les parties fortement bornées de E'.

La démonstration de cette Proposition est identique, à des modifications triviales près, à celle de la Proposition 8, et repose sur la propriété suivante des espaces tonnelés (propriété qui appartient d'ailleurs à d'autres catégories d'espaces localement convexes) : tout tonneau dans E qui absorbe les parties bornées de E est un voisinage de 0 .

Dans le cas des espaces de Banach, on peut améliorer la Proposition 8 comme suit :

Proposition 9 - Soit E un espace de Banach ; l'application canonique de E dans E" est isométrique.

Soit en effet un $x \in E$; si l'on identifie x à un élément de E" , sa norme dans E" est donnée par $\sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle x,x'\rangle|$; donc tout revient à prouver qu'on a

$$\|x\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle x,x'\rangle| .$$

Or soit H le sous-espace fermé de E constitué par les multiples scalaires de x ; il existe évidemment une forme linéaire continue u sur H telle que $u(x) = \|x\|$, et il est clair que la norme de u (en tant que forme linéaire continue sur l'espace de Banach H) est égale à l'unité ; d'après la forme analytique du théorème de Hahn-Banach (Chap.II, §6, Théorème 1) il existe donc une forme linéaire continue sur E , de norme 1, prenant la valeur $\|x\|$ au point x ; il s'ensuit aussitôt que

$$\|x\| \leqslant \sup_{\|x'\| \leqslant 1} |\langle x, x' \rangle| \quad ;$$

comme l'inégalité opposée est évidente, la Proposition est démontrée.

5 - Espaces de Montel.

On appelle espace de Montel tout espace localement convexe tonnelé dans lequel tout ensemble fermé et borné est compact. Il est clair que tout espace de Montel est complètement réflexif. On remarquera qu'un espace de Banach ne peut être un espace de Montel que si sa boule unité est fortement compacte, c'est-à-dire (Chap.I,) que s'il est de dimension finie.

Proposition 10 - Soit E un espace de Montel ; les topologies forte et faible de E coincident sur toute partie bornée de E .

En effet, soit B une partie bornée de E (qu'on supposera fermée, ce qui ne restreint évidemment pas la généralité) ; B est compacte pour la topologie forte de E ; mais la topologie faible de E induit sur B une topologie moins fine que la topologie forte ; puisque toute application continue et biunivoque d'un espace compact est un homéomorphisme, la Proposition est démontrée.

Corollaire - Soit ϕ un filtre à base dénombrable sur un espace de Montel E ; pour que ϕ soit fortement convergent, il faut et il suffit que ϕ converge faiblement.

Soit en effet (A_n) une base de ϕ , et supposons que ϕ converge faiblement vers un $x \in E$; quel que soit $x_n \in A_n$, la suite x_n converge faiblement vers x , donc est faiblement bornée, donc est fortement bornée (§ 2, Théorème 3) donc (Proposition 10) converge fortement vers x , ce qui établit évidemment le Corollaire.

Proposition 11 - Le dual fort d'un espace de Montel E est un espace de Montel.

Puisque E est réflexif, E' est tonnelé (Prop.4). Soit maintenant B une partie fermée et bornée de E' ; puisque E est tonnelé, B est équicontinue (§ 2,Théorème 2) en sorte que sur B la topologie faible coïncide avec celle de la convergence compacte dans E (Chap.III, § 3,Prop.4), c'est-à-dire, puisque toute partie fermée et bornée de E est compacte et réciproquement, avec la topologie forte de E' ; puisque B est faiblement compacte (§ 2,Théorème 2) on voit donc que B est aussi fortement compacte, ce qui démontre la Proposition.

6 - Un exemple d'espace de Montel.

Désignons par I l'intervalle compact $[0,1]$ de R , et par E l'espace vectoriel des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur I .

Pour chaque $x \in E$ et chaque entier $n \geqslant 0$, nous poserons

$$p_n(x) = \sup_{t \in I} \left| x^{(n)}(t) \right| \quad ;$$

il est clair qu'on définit ainsi sur E une famille dénombrable de semi-normes (et même de normes), ce qui permet d'introduire une topologie sur E , à savoir celle qui est définie par ces semi-normes ; E devient ainsi un espace localement convexe séparé et métrisable (puisque les p_n sont en infinité dénombrable), et il est évident que, pour qu'une suite $x_p \in E$ converge vers 0 dans E , il faut et il suffit que, pour chaque entier $n \geqslant 0$ la suite des dérivées n-èmes $x_p^{(n)}(t)$ converge vers 0 uniformément sur I . Il est par ailleurs facile de voir que E est complet (donc tonnelé ; Chap.III, § 1,Prop.1) en utilisant les théorèmes sur les suites de fonctions dérivables qui convergent uniformément ainsi que leurs dérivées.

Nous allons montrer que E est un <u>espace de Montel</u>. Soit en effet B un ensemble borné dans E ; puisque E est métrisable, tout revient à prouver que toute suite $x_p \in B$ contient une suite partielle convergent vers un $x \in E$. Mais B étant borné il est clair qu'on a

$$\sup_{x \in B} p_n(x) = M_n < +\infty$$

pour chaque n ; pour tout n et tout x B , on a donc

$$\left| x^{(n)}(t') - x^{(n)}(t'') \right| = \left| \int_{t'}^{t''} x^{(n+1)}(u)du \right| \leqslant M_{n+1} \cdot \left| t' - t'' \right|$$

quels que soient t' et $t'' \in I$; donc pour chaque n l'ensemble des fonctions $x^{(n)}$, $x \in B$, est <u>uniformément équicontinu</u> sur I ; de là et du théorème d'Arzela (Top. Gén., Chap. X, ...) résulte qu'on peut extraire de la suite donnée x_p une première suite partielle $x_{p_{o,i}}$ qui converge uniformément sur I vers une fonction limite x_o, puis de la première suite partielle une seconde suite partielle $x_{p_{1,i}}$ telle que les $x'_{p_{1,i}}$ convergent uniformément vers une fonction limite x_1, et ainsi de suite indéfiniment ; si l'on considère la suite diagonale $x_{p_{i,i}}$ on voit immédiatement que pour chaque n les dérivées $x^{(n)}_{p_{i,i}}$ convergent uniformément sur I vers la fonction x_n ; il s'ensuit que $x_o \in E$, que $x_n = x_o^{(n)}$, et que les $x_{p_{i,i}}$ convergent dans E vers x , ce qui démontre notre assertion.

Des exemples plus généraux, mais analogues au précédent, seront étudiés en détail au Livre des Distributions.

§ 4 - Continuité forte et continuité faible.

1 - Transposée d'une application faiblement continue.

Soient E, E' et F, F' deux couples d'espaces vectoriels en dualité faible sur un corps K, et soit u une application linéaired de E dans F. On dit que u est transposable (relativement aux dualités faibles données) s'il existe une application linéaire v de F' dans E' telle que l'on ait

(1) $$\langle u(x), y' \rangle = \langle x, v(y') \rangle$$

quels que soient $x \in E$ et $y' \in F'$. C'est évidemment toujours le cas lorsque E' est le dual algèbrique de E et F' le dual algèbreique de F, et alors v n'est autre que la transposée de u au sens défini en Algèbre. Dans le cas général, si l'on identifie E' et F' à des sous-espaces des duals algèbriques E^* et F^* de E et F, une condition nécessaire et suffisante pour que u soit transposable est que sa transposée ${}^t u$ (application de F^* dans E^*) applique F' dans E' ; l'application v définie plus haut est alors la restriction de ${}^t u$ à F'. Pour cette raison, nous désignerons le plus souvent par ${}^t u$ l'application en question de F' dans E' - mais cette notation est un abus de langage (A. Roussel, Le festin de l'Araignée).

<u>Proposition 1 - Soient</u> E, E' <u>et</u> F, F' <u>deux couples d'espaces en dualité faible sur un corps topologique</u> K <u>séparé</u> X ; <u>pour qu'une application linéaire</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>soit transposable, il faut et il suffit qu'elle soit faiblement continue.</u>

En effet, si u est transposable la relation (1) montre que, pour tout $y' \in F'$, l'expression $\langle u(x), y' \rangle$ est fonction faiblement continue de $x \in E$, en sorte que si x converge faiblement vers x_0 le vecteur $u(x)$ converge faiblement vers $u(x_0)$; d'où la nécessité de la condition. Réciproquement, supposons u faiblement continue ; alors pour chaque

$y' \in F'$ l'expression $\langle u(x), y' \rangle$ est une forme linéaire faiblement continue par rapport à x, donc (§ 1, Théorème 1) de la forme $\langle x, v(y') \rangle$ où $v(y') \in E'$; reste à montrer que $y' \to v(y')$ est une application linéaire de F' dans E', ce qui est trivial.

Il résulte évidemment de la Prop. 1 que, si une application linéaire u de E dans F est faiblement continue, il en est de même de l'application ${}^t u$ de F' dans E'.

<u>Proposition 2</u> - <u>Soit</u> u <u>une application transposable de</u> E <u>dans</u> F ; <u>pour que</u> $u(E)$ <u>soit faiblement partout dense dans</u> F, <u>il faut et il suffit que</u> ${}^t u$ <u>soit biunivoque</u>.

En effet, les $y' \in F'$ orthogonaux au sous-espace $u(E)$ sont caractérisés par la relation $\langle x, {}^t u(y') \rangle = 0$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire par ${}^t u(y') = 0$; la Prop. 2 résulte donc du § 1, Théorème 2.

2 - <u>Continuité faible et continuité forte</u>.

Soient maintenant E et F deux espaces localement convexes séparés sur R ou C ; nous désignerons par E' et F' leurs duals topologiques, et ferons la convention que les topologies faibles sur E et F sont relatives à la dualité entre E et E', F et F', les topologies initiales de E et F étant comme dans les §§ précédents qualifiées de fortes.

<u>Théorème 1</u> - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement convexes séparés</u> ; <u>pour qu'une application linéaire de</u> E <u>dans</u> F <u>soit fortement continue, il faut, et il suffit si</u> E <u>est tonnelé, qu'elle soit faiblement continue</u> ; <u>sa transposée est faiblement et fortement continue</u> ; <u>si</u> F <u>est réflexif, toute application linéaire fortement continue de</u> F' <u>dans</u> E' <u>est faiblement continue</u>.

Supposons u fortement continue ; alors, pour tout $y' \in F'$, la forme linéaire $x \to \langle u(x), y' \rangle$ est fortement continue, donc faiblement continue, ce qui prouve la continuité faible de u . Réciproquement, supposons u faiblement continue et E tonnelé ; soit V un voisinage fort de 0 dans F , que nous pouvons supposer convexe, équilibré et fermé ; $\overset{-1}{u}(V) = T$ est convexe et équilibré, et faiblement fermé puisque u est faiblement continue et V fortement donc faiblement fermé ; comme T est convexe il est donc aussi fortement fermé ; en outre, V étant absorbant dans F , T est absorbant dans E ; on voit donc que T est un tonneau dans E , donc un voisinage de 0 dans E , et ceci prouve la continuité forte de u .

Montrons maintenant que si u est continue, sa transposée ${}^t u$ est fortement continue ; pour cela, soit W un voisinage fort de 0 dans F' ; on peut supposer que $W = B^{\circ}$, où B est une partie bornée de E ; on a alors évidemment ${}^t u^{-1}(W) = u(B)^{\circ}$; comme u(B) est borné dans F , $u(B)^{\circ}$ est un voisinage fort de 0 dans F', d'où la propriété annoncée.

Supposons enfin F réflexif, et soit v une application fortement continue de F' dans E'. Comme F est réflexif, toute forme linéaire fortement continue sur F' l'est aussi faiblement ; c'est en particulier le cas des formes $y' \to \langle x, v(y') \rangle$ pour chaque $x \in E$, et ceci démontre évidemment que v est faiblement continue.

<u>Remarque</u> - Lorsque E n'est pas tonnelé, la continuité faible de u n'entraîne pas nécessairement sa continuité forte ; il est toutefois facile de voir que la continuité forte de u subsiste sous une hypothèse plus large. En effet, reprenons un voisinage V de 0 dans F , convexe, équilibré et fermé. On a $V = V^{\circ\circ}$; il s'ensuit immédiatement que $T = \overset{-1}{u}(V)$ est le polaire de ${}^t u(V^{\circ})$; mais V° est équicontinu et faiblement fermé, donc faiblement compact, en sorte qu'il en

50

est de même de ${}^t u(V^o)$, image de V^o par l'application faiblement continue ${}^t u$; par suite, on peut dans tous les cas affirmer que $u^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 dans E <u>muni de la topologie de Mackey</u>. Donc si la topologie forte de E est identique à la topologie de Mackey de E (ce qui est le cas lorsque E est tonnelé), on peut encore affirmer que toute application linéaire faiblement continue de E est aussi fortement continue.

Autre remarque - Lorsque E et F sont métrisables et complets, le fait que toute application faiblement continue de E dans F soit fortement continue résulte aussi du théorème du graphe fermé.

3 - <u>Topologie faible sur</u> $\mathcal{L}(E,F)$.

Etant donnés deux espàces localement convexes E et F, considérons l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires fortement continues de E dans F , ainsi que le produit tensoriel $E \otimes F'$ de E et du dual topologique F' de F . Comme on l'a (peut-être) vu en Algèbre, Chap.III, on peut définir de façon canonique une forme bilinéaire sur le produit direct de ces deux espaces en imposant à cette forme de vérifier la relation

$$\langle u, x \otimes y' \rangle = \langle u(x), y' \rangle$$

quels que soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$ et $y' \in F'$. On définit ainsi une <u>dualité faible</u> entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $E \otimes F'$; en effet, il est tout d'abord évident que si un $u \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifie $\langle u, x \otimes y' \rangle = 0$ quels que soient x et y', alors $u(x)=0$ pour tout x , d'où $u=0$ en sorte que la première condition pour obtenir une dualité faible est vérifiée ; d'autre part, supposons qu'un élément $\sum x_i \otimes y_i'$ de $E \otimes F'$ soit "orthogonal" à tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$; étant donnés des $y_i \in F$ arbitraires (mais en nombre fini n, égal au nombre des y_i'), il existe toujours un $u \in \mathcal{L}(E,F)$ qui applique chaque x_i sur y_i - tout au moins si les x_i sont linéairement indépendants, ce qu'on peut évidemment supposer ;

il vient alors la relation $\sum \langle y_i, y'_i \rangle = 0$ et comme les y_i sont arbitraires ceci prouve que $y'_i = 0$ pour tout i , d'où la seconde condition de la dualité faible.

Les considérations précédentes permettent donc de définir sur $\mathcal{L}(E,F)$ une <u>topologie faible</u>, à savoir celle qu'on déduit de la dualité canonique entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $E \otimes F'$; il est clair que cette topologie est <u>la moins fine rendant continues par rapport à</u> u <u>toutes les formes linéaires</u> $u \to \langle u(x), y' \rangle$ $(x \in E, y' \in F')$; c'est aussi la topologie de la convergence simple lorsqu'on munit F de sa topologie faible (ce qui permet d'appliquer à la topologie faible sur $\mathcal{L}(E,F)$ les résultats démontrés au Chap.III pour la topologie de la convergence simple).

<u>Proposition 3</u> - <u>Toute partie faiblement bornée de</u> $\mathcal{L}(E,F)$ <u>est bornée pour la topologie de la convergence simple forte</u>.

En effet, dire qu'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ est faiblement bornée c'est dire (Chap.III, § 3, Prop.3) que, pour tout $x \in E$, l'ensemble H(x) des u(x), $u \in H$, est faiblement borné dans F ; d'autre part, dire que H est borné pour la topologie de la convergence simple forte c'est dire que H(x) est fortement borné dans F ; comme toute partie faiblement bornée de F est aussi fortement bornée (§ 2, Théorème 3) la Proposition est démontrée.

<u>Théorème 2</u> - <u>Soient</u> E <u>un espace tonnelé et</u> F <u>un espace réflexif</u>. <u>Toute partie faiblement bornée de</u> $\mathcal{L}(E,F)$ <u>est faiblement relativement compact</u>

Soit en effet H une partie faiblement bornée de $\mathcal{L}(E,F)$; d'après la Prop.3, H est aussi simplement bornée, donc, puisque E est tonnelé, est équicontinu (Chap.III, § 3, Théorème 2). Ceci dit, soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur H ; puisque H(x) est, pour tout $x \in E$, faiblement borné dans F donc faiblement relativement compact (§ 3, Théorème 1), l'expression

$$u_0(x) = \lim_{\mathcal{U}} u(x)$$

existe pour tout $x \in E$, et il est clair que $x \to u_0(x)$ est une application linéaire de E dans F. Puisque H est équicontinu, on peut, pour tout voisinage W de 0 dans F, trouver un voisinage V de 0 dans E tel que $x \in V$ implique $u(x) \in W$ pour tout $u \in H$; supposant W convexe et fermé - donc faiblement fermé - on voit que $x \in V$ implique $u_0(x) \in W$, de sorte que l'application u_0 est continue ; il est alors clair que, dans l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la topologie faible, l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ converge vers u_0, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u> - Le résultat précédent est évidemment une généralisation du Théorème 1 du § 3.

Considérons par exemple le cas où $E = F$ est un espace de Banach réflexif. Une partie H faiblement bornée de $\mathcal{L}(E,E)$ est alors bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de E - ceci en raison du fait que, si E est quasi-complet, toute partie simplement bornée de $\mathcal{L}(E,F)$ est bornée pour toute $\mathfrak{S}$-topologie (Chap. III, § 3, Corollaire 1 du Théorème 1), de sorte qu'on a

$$\sup_{u \in H} \| u \| < + \infty ,$$

la réciproque étant bien entendu évidente. Le Théorème 2 est donc dans ce cas équivalent au résultat suivant :

<u>Corollaire du Théorème 2</u> - <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach</u> réflexif ; <u>la boule unité de</u> $\mathcal{L}(E,E)$ <u>est faiblement compacte</u>.
