LIVRE VII
DIFFERENTIELLES
CHAPITRE I (ETAT 2)
DIFFERENTIELLES

Rédaction n° 086

Nombre de pages : 75

Nombre de feuilles : 75

Livre VII Différentielles

Chap I. Etat 2

86

LIVRE VII

D I F F E R E N T I E L L E S

CHAPITRE I (Etat 2)

DIFFÉRENTIELLES

§1. Différentielles premières.

1. Fonctions tangentes. Nous considérerons dans ce chapitre des espaces vectoriels normés par rapport au corps $\mathbf{R}$ des nombres réels ou au corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes ; lorsque nous ne préciserons pas le corps des scalaires des espaces considérés, il sera sous-entendu que les résultats énoncés sont valables dans les deux cas. La norme d'un point x d'un espace normé E sera toujours désignée par $\|x\|$.

Définition 1. *Soient E et F deux espaces normés, f et g deux applications d'une partie ouverte A de E dans F. En un point $x_0 \in A$, on dit que f et g sont tangentes si $f(x_0)=g(x_0)$, et si $\|f(x)-g(x)\|/\|x-x_0\|$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 en restant dans $A \cap \complement\{x_0\}$.*

Il est immédiat que cette définition ne fait intervenir que les *topologies* de E et de F, et non les *normes* qui servent à les définir ; car, si on remplace les normes considérées sur E et F par des normes équivalentes, le rapport $\|f(x)-g(x)\|/\|x-x_0\|$ est multiplié par une fonction scalaire $\theta(x)$ telle que $\sup\limits_{x \in A} \theta(x) < +\infty$ et $\inf\limits_{x \in A} \theta(x) > 0$.

On appelle *accroissement* de la fonction f au point x_0 l'application $h \rightarrow f(x_0+h)-f(x_0)$, définie dans $A-x_0$ (qui est un voisinage ouvert de 0 dans E) ; cette fonction se note aussi $h \rightarrow \Delta f(x_0;h)$ ou $\Delta_{x_0} f$. Dire que deux fonctions f et g sont tangentes au point x_0 équivaut à dire que $f(x_0)=g(x_0)$ et que les accroissements $\Delta_{x_0} f$ et $\Delta_{x_0} g$ sont des fonctions tangentes au point $h=0$.

Deux fonctions f et g tangentes à une même troisième u en un point x_0 sont tangentes en ce point, car on a

$$\|f(x)-g(x)\|/\|x-x_0\| \leqslant \|f(x)-u(x)\|/\|x-x_0\| + \|g(x)-u(x)\|/\|x-x_0\| .$$

2. Différentielle première d'une fonction. Définition 2. Soient E et F deux espaces normés, f une application continue d'une partie ouverte A dans F . On dit que f est différentiable au point $x_0 \in A$, s'il existe une application linéaire u de E dans F , tangente au point 0 à l'accroissement $\Delta_{x_0} f$. Une telle application linéaire u est appelée différentielle première (ou simplement différentielle) de f au point x_0 .

Autrement dit, si on pose $\delta(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-u(h)$, le rapport $\|\delta(h)\|/\|h\|$ doit tendre vers 0 quand h tend vers 0 en restant dans $A-x_0$ et en restant $\neq 0$; cela signifie donc que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une boule $\|h\| \leqslant r$ contenue dans $A-x_0$ et telle que la condition $\|h\| \leqslant r$ entraîne $\|\delta(h)\| \leqslant \varepsilon\|h\|$.

Proposition 1. Une fonction différentiable en un point admet en ce point une seule différentielle, qui est une application linéaire continue (dans l'espace où est définie la fonction donnée).

En effet, si en un point x_0 une fonction différentiable f admettait deux différentielles u et v , u et v seraient tangentes au point 0 ; autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existerait $r > 0$ tel que $\|h\| \leqslant r$ entraîne $\|u(h)-v(h)\| \leqslant \varepsilon\|h\|$; mais comme u et v sont linéaires, cette relation a lieu, non seulement pour $\|h\| \leqslant r$, mais pour h quelconque dans E , d'où, en faisant tendre ε vers 0 , $u(h)=v(h)$ pour tout $h \in E$.

En second lieu, montrons que la différentielle u de f au point x_0 est continue ; comme f est continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que $\|h\| \leqslant r$ entraîne $\|f(x_0+h)-f(x_0)\| \leqslant \varepsilon$; d'autre part, comme f est différentiable, on a aussi (pour un r convenable) $\|f(x_0+h)-f(x_0)-u(h)\| \leqslant \varepsilon \|h\|$ pour $\|h\| \leqslant r$; donc, on a, pour tout h tel que $\|h\| \leqslant r$, $\|u(h)\| \leqslant \varepsilon(1+\|h\|) \leqslant \varepsilon(1+r)$; la fonction linéaire u , étant bornée dans la boule $\|h\| \leqslant r$, est continue.

La valeur, pour $h \in E$, de la différentielle d'une fonction f au point $x_0 \in A$, se note $df(x_0;h)$, le vecteur h s'appelant souvent l'accroissement de la variable x ; la différentielle elle-même, c'est-à-dire l'application $h \to df(x_0;h)$, se notera $d_{x_0} f$, ou simplement df si aucune confusion ne peut en résulter ; pour tout $x_0 \in A$ où la fonction f est différentiable, la différentielle $d_{x_0} f$ est un élément de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F ; la norme $\|d_{x_0} f\|$ de cette différentielle est la norme définie dans $\mathcal{L}(E,F)$ (voir Livre VI,chap.III), c'est-à-dire que $\|d_{x_0} f\| = \sup_{\|h\| \leqslant 1} \|df(x_0;h)\|$.

Si f est différentiable au point x_0, pour qu'une fonction g définie et continue dans un voisinage de x_0 soit tangente à f au point x_0 , il faut et il suffit évidemment que g soit différentiable au point x_0, et ait une différentielle égale à celle de f en ce point.

En particulier, si deux fonctions coïncident dans un voisinage d'un point x_0 , et si l'une d'elles est différentiable en ce point, il en est de même de l'autre et les différentielles sont égales ; autrement dit, la notion de différentielle a un caractère local.

Exemples. 1) Prenons pour E le corps des scalaires $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), pour F un espace normé quelconque sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Si f est une application d'une partie ouverte A de E dans F , différentiable au point $\xi_0 \in A$, $u = d_{\xi_0} f$ sa différentielle en ce point, u est une application linéaire de $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$) dans F , donc de la forme $\xi \rightarrow a\xi$; avec $a \in F$. Dire que $\dfrac{\|f(\xi_0+\xi)-f(\xi_0)-u(\xi)\|}{|\xi|}$ tend vers 0 avec ξ signifie aussi, dans le cas considéré, que $\dfrac{f(\xi_0+\xi)-f(\xi_0)-u(\xi)}{\xi}$ tend vers 0 dans F , ou encore que $\dfrac{f(\xi_0+\xi)-f(\xi_0)}{\xi}$ tend vers $\underline{a}$. En d'autres termes, dire que f est <u>différentiable</u> au point ξ_0 équivaut à dire que f est <u>dérivable</u> au point ξ_0 , et on a $f'(\xi_0)=a$, donc $df(\xi_0;\xi)=f'(\xi_0).\xi$

La norme $\|d_{\xi_0} f\|$ de la différentielle de f n'est autre que la norme $\|f'(\xi_0)\|$ de la dérivée au point ξ_0 (dans l'espace F).

2) Une application <u>constante</u> d'une partie ouverte A de E dans F est différentiable en tout point $x_0 \in A$, et sa différentielle est <u>nulle</u> en tous ces points.

3) Si u est une application <u>linéaire</u> continue de E dans F , on a, quels que soient $x_0 \in E$ et $h \in E$, $u(x_0+h)-u(x_0)=u(h)$, donc u est différentiable en tout point $x_0 \in E$, et on a $du(x_0;h)=u(h)$.

En particulier, désignons par e l'application <u>identique</u> de E sur lui-même ; on a $de(x_0;h)=h$ quels que soient x_0 et h . En raison de cette relation, on note souvent dx l'accroissement h de la variable x . En particulier, lorsque E est le corps des scalaires (R ou C), on a, avec cette notation, pour une fonction f dérivable au point ξ_0 ,

$df(\xi_0; d\xi) = f'(\xi_0)d\xi$.

4) Supposons que E soit un <u>anneau normé complet</u> ayant un élément unité ; on sait alors (<u>Top.gén.</u>,chap.VII) que l'ensemble A des points x inversibles est ouvert (et non vide), et que l'application $x \rightarrow x^{-1}$ est continue dans A . Montrons que cette application est <u>différentiable</u> en tout point $x_0 \in A$. En effet, on a $(x_0+h)^{-1}-x_0^{-1} = x_0^{-1}((1+hx_0^{-1})^{-1}-1)$,

et on sait (<u>loc.cit</u>.) que, pour tout y assez petit, on a

$\|(1+y)^{-1}-1+y\| \leqslant \frac{\|y\|^2}{1-\|y\|}$; on a donc

$$\|(x_0+h)^{-1}-x_0^{-1}x_0^{-1}hx_0^{-1}\| \leqslant \|x_0^{-1}\|^3 . \frac{\|h\|^2}{1-\|h\| . \|x_0^{-1}\|}$$

ce qui prouve la proposition, et montre que la différentielle de x^{-1} au point x_0 est $h \rightarrow x_0^{-1}hx_0^{-1}$.

Ce raisonnement s'applique en particulier lorsque $E = \mathcal{L}(F)$ est l'anneau des endomorphismes d'un espace normé <u>complet</u> F . Plus généralement, si E et F sont deux espaces normés complets, A l'ensemble des <u>isomorphismes</u> de E sur F , on sait que si A n'est pas vide, c'est une partie <u>ouverte</u> de l'espace normé $\mathcal{L}(E,F)$ et que $u \rightarrow u^{-1}$ (où u^{-1} désigne, par abus de langage, l'application réciproque de l'isomorphisme u) est une application continue de A dans $\mathcal{L}(F,E)$. Le raisonnement précédent montre encore que cette application est <u>différentiable</u> en tout point $u_0 \in A$, et a pour différentielle $v \rightarrow u_0^{-1} \circ v \circ u_0^{-1}$.

La notion de différentielle est essentiellement relative au corps des scalaires des espaces normés qui interviennent. Si E et F sont deux espaces normés sur le corps $\mathbb{C}$, ils sont munis aussi d'une structure d'espace normé par rapport au corps $\mathbb{R}$ (Livre VI, chap.I); une application f de E dans F qui est différentiable quand on considère E et F comme des espaces vectoriels par rapport à $\mathbb{C}$, l'est a fortiori (et a même différentielle) quand on considère E et F comme des espaces vectoriels par rapport à $\mathbb{R}$; mais <u>la réciproque est inexacte</u>, car f peut admettre une différentielle u pour la structure réelle, telle que u <u>ne soit pas linéaire</u> pour la structure complexe (autrement dit, on peut avoir $u(\lambda h)=\lambda u(h)$ pour tout λ réel, mais $u(\lambda h)\neq\lambda u(h)$ pour certaines valeurs complexes de λ).

Par exemple, l'application $z \to \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ sur lui-même est différentiable pour la structure vectorielle réelle de $\mathbb{C}$, et sa différentielle est l'application $h \to \bar{h}$; mais cette application n'est pas linéaire pour la structure vectorielle complexe. Nous reviendrons en détail sur cette question au Livre IX .

3. Propriétés des différentielles. Proposition 2. Soient E et F deux espaces normés, f et g deux applications continues d'un voisinage A d'un point $x_0 \in E$ dans F . Si f et g sont différentiables au point x_0 , il en est de même de $f+g$ et de λf (quel que soit le scalaire λ), et on a

(1) $$d_{x_0}(f+g) = d_{x_0} f + d_{x_0} g$$

(2) $$d_{x_0}(\lambda f) = \lambda d_{x_0} f .$$

En effet, si on pose $\delta(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-df(x_0;h)$, $\delta'(h) = g(x_0+h)-g(x_0)-dg(x_0;h)$, $\|\delta(h)\| / \|h\|$ et $\|\delta'(h)\| / \|h\|$ tendent vers 0 avec $h \neq 0$, donc il en est de même de $\|\delta(h)+\delta'(h)\| / \|h\| \leqslant (\|\delta(h)\| + \|\delta'(h)\|) / \|h\|$. Démonstration analogue pour l'identité (2).

On peut interprèter cette proposition de la façon suivante : désignons par $\mathcal{D}_{x_0}$ l'ensemble des applications d'une partie de E dans F , définies et continues dans un voisinage de x_0 (qui dépend de la fonction considérée), et différentiables au point x_0. La prop.2 prouve que cet ensemble est un espace vectoriel ($f+g$ étant définie sur l'intersection des parties de E où f et g sont respectivement définies), et que l'application $f \to d_{x_0} f$ est une application linéaire de cet espace vectoriel dans l'espace $\mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 3. Soient E,F,G trois espaces normés, f (resp.g) une application continue d'un voisinage A d'un point $x_0 \in E$ dans F (resp.G).

<u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont différentiables au point</u> x_0 , <u>il en est de même de l'application</u> $x \to (f(x),g(x))$ <u>de</u> A <u>dans l'espace produit</u> $F \times G$ <u>et réciproquement</u> ; <u>on a</u> $d_{x_0}(f,g)=(d_{x_0}f, d_{x_0}g)$.

La démonstration est immédiate, en prenant par exemple pour norme de (x,y) dans $F \times G$ la plus grande des normes $\|x\|$, $\|y\|$.

<u>Théorème 1</u> (théorème des fonctions composées). <u>Soient</u> E,F,G, <u>trois espaces normés</u>, f <u>une application continue d'un voisinage</u> A <u>d'un point</u> $x_0 \in E$ <u>dans</u> F , g <u>une application continue d'un voisinage</u> B <u>du point</u> $y_0=f(x_0) \in F$ <u>dans</u> G . <u>Si</u> f <u>est différentiable au point</u> x_0 <u>et</u> g <u>différentiable au point</u> y_0 , <u>la fonction composée</u> $\varphi=g\circ f$ (qui est définie et continue dans un voisinage de x_0) <u>est différentiable au point</u> x_0 , <u>et on a</u>

$$d\varphi(x_0;h)=dg(f(x_0);df(x_0;h)) \tag{3}$$

En d'autres termes, la différentielle $d_{x_0}(g\circ f)$ est la <u>composée</u> $(d_{f(x_0)}g)\circ(d_{x_0}f)$ de la différentielle de g et de celle de f .

Posons
$$\delta(h) = \Delta f(x_0;h)-df(x_0;h)$$
$$\delta'(k) = \Delta g(f(x_0);k)-dg(f(x_0);k)$$

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que $\|h\| \leqslant r$ (resp. $\|k\| \leqslant r$) entraîne $\|\delta(h)\| \leqslant \varepsilon\|h\|$ (resp. $\|\delta'(k)\| \leqslant \varepsilon\|k\|$).

On peut écrire
$$\Delta\varphi(x_0;h)=dg(f(x_0);\Delta f(x_0;h))+\delta'(\Delta f(x_0;h)) =$$
$$= dg(f(x_0);df(x_0;h))+dg(f(x_0);\delta(h))+\delta'(\Delta f(x_0;h))$$

Posons $a=\|d_{x_0}f\|$, $b=\|d_{f(x_0)}g\|$. On a
$$\|dg(f(x_0);\delta(h))\| \leqslant b\,\|\delta(h)\|$$

donc, pour $\|h\| \leqslant r$, $\|dg(f(x_0);\delta(h))\| \leqslant b\varepsilon\|h\|$.

D'autre part, pour $\|h\| \leqslant r$,
$$\|\Delta f(x_0;h)\| \leqslant \|df(x_0;h)\| + \|\delta(h)\| \leqslant (a+\varepsilon)\|h\|$$

Si on suppose en outre que $\|h\| \leqslant r/(a+\varepsilon)$, on voit donc que

$$\| \mathcal{N}'(\Delta f(x_0;h))\| \leqslant \varepsilon(a+\varepsilon)\|h\|$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1. Soient E et F deux espaces normés sur le corps $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) f une application continue d'un voisinage de $\xi_0 \in \mathbb{R}$ (resp. $\xi_0 \in \mathbb{C}$) dans E , g une application continue d'un voisinage de $f(\xi_0) \in E$ dans F . Si f est dérivable au point ξ_0 , et g différentiable au point $f(\xi_0)$, la fonction composée $g \circ f = \varphi$ est dérivable au point ξ_0 , et on a

$$\varphi'(\xi_0) = dg(f(\xi_0);f'(\xi_0)) \tag{4}$$

Corollaire 2. Soient E,F,G trois espaces normés, u une application linéaire continue de E dans F , f une application continue d'un voisinage du point $b=a+u(x_0) \in F$ dans G . Si f est différentiable au point b , la fonction $g(x)=f(a+u(x))$ est différentiable au point x_0 ,et on a

$$dg(x_0;h) = df(a+u(x_0);u(h)) . \tag{4 bis}$$

4. Fonctions continument différentiables. Théorème 2 (théorème des accroissements finis). Soient E et F deux espaces normés, f une application continue dans F d'un voisinage du segment joignant deux points x_0 , x_0+h de E . Si f est différentiable en tout point de ce segment, on a

$$\|\Delta f(x_0;h)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|df(x_0+th;h)\| \tag{5}$$

Considérons en effet la fonction $\varphi(t)=f(x_0+th)$ dans l'intervalle $[0,1]$; c'est une application composée de f et de l'application $t \to x_0+th$ de l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ sur le segment d'extrémités x_0 et x_0+h ; par application du cor.1 du th.1, on voit que φ est dérivable en tout point de $[0,1]$, et qu'on a $\varphi'(t)=df(x_0+th;h)$. Appliquons à $\varphi(t)$ le théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle (Fonct.var.réelle,chap.I) ; il vient

$$\|\varphi(1)-\varphi(0)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|\varphi'(t)\|$$

ce qui n'est autre que la formule (5).

En introduisant la norme de la différentielle de f , la formule (5) donne l'inégalité

$$(6) \qquad \| \Delta f(x_0;h) \| \leqslant \| h \| . \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| d_{x_0+th} f \|$$

Corollaire. Soit f une application continue d'une partie ouverte A de E dans F . Si f a une différentielle nulle en tout point de A , f est constante dans toute composante connexe de A .

En effet, si le segment d'extrémités a,b est contenu dans A , la formule (5) prouve que f(a)=f(b). On en conclut par récurrence qu'on a aussi f(a)=f(b) si a et b peuvent être joints par une ligne brisée contenue dans A . Comme deux points d'une même composante connexe de A peuvent toujours être joints par une telle ligne (Esp.vect.Top., chap.I), le corollaire est démontré.

La définition de la différentielle exprime que la différence $f(x_0+h)-f(x_0)-df(x_0;h)$ est "infiniment petite" par rapport à h . Le théorème des accroissements finis permet en outre de limiter la différence $f(x+h)-f(x)-df(x_0;h)$ pour tout x voisin de x_0 et tout h assez petit, en supposant f différentiable dans un voisinage de x_0 :

Proposition 4. Soit f une fonction différentiable en tout point d'un ensemble ouvert A contenant le segment joignant deux points x,x+h . Pour tout point $x_0 \in A$, on a

$$(7) \qquad \| f(x+h)-f(x)-df(x_0;h) \| \leqslant \| h \| . \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| d_{x+th} f - d_{x_0} f \|$$

En effet, si on pose $g(y)=f(x+y)-df(x_0;y)$, g est différentiable en tout point du segment joignant les points 0 et h , et on a $d_y g = d_{x+y} f - d_{x_0} f$; la formule (7) résulte donc de l'application à la fonction g de la formule (6) .

En posant $x_1=x$, $x_2=x+h$, et en désignant par S le segment joignant x_1 et x_2 , la formule (7) s'écrit encore, plus symétriquement

$$(8) \qquad \| f(x_2)-f(x_1)-df(x_0;x_2-x_1) \| \leqslant \| x_2-x_1 \| . \sup_{z \in S} \| d_z f - d_{x_0} f \|$$

__Définition 3__. __Soit f une application continue d'une partie ouverte A d'un espace normé__ E __dans un espace normé__ F . __On dit que__ f __est continument différentiable en un point__ $x_0 \in A$ __si f est différentiable en tout point__ x __d'un voisinage de__ x_0 , __et si l'application__ $x \to d_x f$ __de ce voisinage dans__ $\mathcal{L}(E,F)$ __est continue au point__ x_0 .

En d'autres termes, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que la relation $\| x-x_0 \| \leqslant r$ entraîne que $d_x f$ existe et que $\| d_x f - d_{x_0} f \| \leqslant \varepsilon$ la norme étant celle de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ (c'est-à-dire qu'on a $\| df(x;h)-df(x_0;h) \| \leqslant \varepsilon \| h \|$ quel que soit $h \in E$).

D'après le th.1, si f est continument différentiable au point x_0 et g continument différentiable au point $f(x_0)$, la fonction composée $g\,f$ est continument différentiable au point x_0 .

__Proposition 5__ . __Soit f une fonction différentiable en tout point d'un voisinage d'un point__ x_0 . __Pour que__ f __soit continument différentiable au point__ x_0 , __il faut et il suffit que__

$$(9) \qquad \lim_{(y,z) \to (x_0,x_0)} \| f(y)-f(z)-df(x_0;y-z) \| / \| y-z \| = 0$$

La condition est en effet __nécessaire__ d'après la formule (8) : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour $\| x-x_0 \| \leqslant r$, $d_x f$ existe et $\| d_x f - d_{x_0} f \| \leqslant \varepsilon$; la formule (8) montre que, pour $\| y-x_0 \| \leqslant r$ et $z-x_0 \quad r$, on a $f(y)-f(z)-df(x_0;y-z) \quad \varepsilon \quad y-z$.

La condition est __suffisante__ ; supposons en effet que, pour $\| y-x_0 \| < r$, $\| z-x_0 \| < r$, on ait $\| f(y)-f(z)df(x_0;y-z) \| \leqslant \varepsilon \| y-z \|$; on peut d'autre part, pour un y donné, déterminer r'_y tel que, pour

$\|z-y\| \leqslant r'_y$, on ait $\|f(z)-f(y)-df(y;z-y)\| \leqslant \varepsilon \|y-z\|$; quel que soit h tel que $\|h\| \leqslant r'_y$, on a donc

$$\|df(y;h)-df(x_0;h)\| \leqslant 2\varepsilon \|h\|$$

c'est-à-dire $\|d_y f - d_{x_0} f\| \leqslant 2\varepsilon$; cette relation ayant lieu pour tout y tel que $\|y-x_0\| < r$, la proposition est démontrée.

Lorsque f est une fonction d'une variable scalaire, dire que f est continument différentiable en un point ξ_0 signifie que la dérivée $f'(\xi)$ est continue au point ξ_0 ; la proposition 5 montre que, pour une fonction dérivable dans un voisinage de ξ_0 , cette condition équivaut à la suivante :

$$\lim_{(\eta,\xi)\to(\xi_0,\xi_0)} \frac{f(\eta)-f(\xi)}{\eta-\xi} = f'(\xi_0) \tag{10}$$

5. Différentielles partielles. Soit f une application d'une partie ouverte A d'un espace normé E dans un espace normé F , et soit H un sous-espace vectoriel de E ; la restriction de f à la variété linéaire affine x_0+H de E définit une application $y \to f(x_0+y)$ d'un voisinage de 0 du sous-espace H dans F ; il résulte immédiatement de la définition 2 que si f est différentiable au point x_0 , l'application $y \to f(x_0+y)$ est différentiable au point $0 \in H$, et que la différentielle de cette fonction est la restriction à H de la différentielle $h \to df(x_0;h)$.

Considérons en particulier le cas où E est le produit $E_1 \times E_2$ de deux espaces normés ; on peut supposer que la norme dans E d'un point (x_1,x_2) $(x_1 \in E_1, x_2 \in E_2)$ est prise égale à $\|x_1\| + \|x_2\|$. Si f est une application d'une partie ouverte A de E dans un espace normé F , différentiable au point $a=(a_1,a_2)$, chacune des applications partielles $x_1 \to f(x_1,a_2)$, $x_2 \to f(a_1,x_2)$ est différentiable aux points $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$ respectivement ; les différentielles de ces deux fonctions sont respectivement les applications partielles

$$h \to df(a_1,a_2;h,0)$$

$$k \to df(a_1,a_2;0,k)$$

de la différentiable $(h,k) \to df(a_1,a_2;h;k)$; on dit que ce sont les <u>différentielles partielles</u> de f au point (a_1,a_2), et on les note $h \to d_1f(a_1,a_2;h)$, $k \to d_2f(a_1,a_2;k)$, ou encore $d_{1;a_1,a_2}f$, $d_{2;a_1,a_2}f$. Comme $(h,k)=(h,0)+(0,k)$, on a en outre identiquement

(11) $$df(a_1,a_2;h,k)=df(a_1,a_2;h,0)+df(a_1,a_2;0,k)$$

c'est-à-dire

(12) $$d_{a_1,a_2}f = d_{1;a_1,a_2}f + d_{2;a_1,a_2}f$$

On dit parfois que $d_{a_1,a_2}f$ est la <u>différentielle totale</u> de f au point (a_1,a_2) ; cette différentielle est donc la <u>somme des différentielles partielles</u> de f au même point.

Réciproquement :

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit f une application continue d'une partie ouverte</u> A <u>de</u> $E=E_1\times E_2$ <u>dans un espace</u> F . <u>En un point</u> $(a_1,a_2)\in A$, <u>on suppose que</u> : 1° <u>la différentielle</u> $d_{1;a_1,a_2}f$ <u>de l'application partielle</u> $x_1 \to f(x_1,a_2)$ <u>existe</u> ; 2° <u>en tout point</u> (x_1,x_2) <u>d'un voisinage</u> $V\subset A$ <u>de</u> (a_1,a_2) , <u>la différentielle</u> $d_{2;x_1,x_2}f$ <u>de l'application partielle</u> $y_2 \to f(x_1,y_2)$ <u>existe et l'application</u> $(x_1,x_2)\to d_{2;x_1,x_2}f$ <u>de</u> V <u>dans</u> $\mathcal{L}(E_2,F)$ <u>est continue au point</u> (a_1,a_2) . <u>Dans ces conditions</u>, f <u>est différentiable au point</u> (a_1,a_2) <u>et sa différentielle en ce point est donnée par la formule</u> (12) .

On peut écrire

$$f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1,a_2)=(f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1+h,a_2))+(f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2))$$

Nous allons évaluer chacun des deux termes du second membre. Si on pose

$$f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1+h,a_2)=d_2f(a_1+h,a_2;k)+\delta_2(h,k)$$

on a, d'après la prop.4

$$\| \delta_2(h,k) \| \leqslant \| k \| \cdot \sup_{\|z\| \leqslant \|k\|} \| d_{2;a_1+h,a_2+z}f - d_{2;a_1+h,a_2}f \|$$

Comme, par hypothèse, $(x_1,x_2) \rightarrow d_{2;x_1,x_2}f$ est continue au point (a_1,a_2), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que $\|h\| + \|k\| \leqslant r$ entraîne $\|\delta_2(h,k)\| \leqslant \varepsilon \|k\|$.

En second lieu, si

$$f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2) = d_1f(a_1,a_2;h) + \delta_1(h)$$

l'existence de la différentielle $d_{1;a_1,a_2}f$ implique qu'on peut supposer r choisi de sorte que $\|h\| + \|k\| \leqslant r$ entraîne $\|\delta_1(h)\| \leqslant \varepsilon \|h\|$.

On peut écrire

$$f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1,a_2)=d_1f(a_1,a_2;h)+d_2f(a_1,a_2;k)+\delta_1(h)+\delta_2(h,k)+\delta_3(h,k)$$

avec $\delta_3(h,k)= d_2f(a_1+h,a_2;k)-d_2f(a_1,a_2;k)$. Mais l'hypothèse de la continuité de $(x_1,x_2) \rightarrow d_{2;x_1,x_2}f$ implique encore qu'on peut supposer r choisi de sorte que $\|h\| + \|k\| \leqslant r$ entraîne $\|\delta_3(h,k)\| \leqslant \varepsilon \|k\|$.

Finalement $\|\delta_1(h)+\delta_2(h,k)+\delta_3(h,k)\| \leqslant \varepsilon(\|h\|+2\|k\|) \leqslant 2\varepsilon(\|h\|+\|k\|)$ ce qui démontre le théorème.

2

<u>Remarque</u>. L'<u>existence</u> des différentielles partielles au point (a_1,a_2), et même dans tout un voisinage de ce point, ne suffit pas davantage pour assurer que f soit différentiable; il ne suffit pas davantage de supposer que ces différentielles partielles sont continues par rapport à <u>chacune</u> des variables x_1,x_2 dans un voisinage de (a_1,a_2) (voir exerc. 2).

Plus généralement, soit E le produit $\prod_{i=1}^{n} E_i$ de n espaces normés et f une application d'une partie ouverte A de E dans un espace normé F. En un point $a=(a_i) \in A$, on désigne par $h_j \rightarrow d_jf((a_i);h_j)$ ou par $d_{j;a}f$, la différentielle de l'application partielle $x_j \rightarrow f(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n)$ au point a_j (si cette différentielle existe), et on l'appellera la **différentielle partielle** d'indice j de f au point a. Si f est différentiable au point a , on voit comme ci-dessus que ses différentielles partielles existent, et qu'on a

(13) $$d_a f = \sum_{i=1}^{n} d_{i;a} f$$

Réciproquement, le th.3 entraîne le corollaire suivant :

Corollaire. Supposons qu'au point a la différentielle $d_{1;a}f$ existe, et que, pour chacun des indices k tels que $2 \leqslant k \leqslant n$, la différentielle $d_{k;x}f$ existe en tout point de la forme $x=(x_1,x_2,..,x_k,a_{k+1},..,a_n)$ où $(x_1,..,x_k)$ parcourt un voisinage V_k de $(a_1,..,a_k)$, et que l'application $x \to d_{k;x}f$ est continue dans ce voisinage ; alors f est différentiable au point a , et on a la relation (13) .

Il suffit de raisonner par récurrence sur n, en considérant f comme fonction des deux variables $y=(x_1,..,x_{n-1})$ et x_n , et en appliquant à cette fonction le th. 3 .

En particulier, si chacune des applications $x \to d_{k;x}f$ est continue dans un voisinage de x , f est **continument différentiable** dans ce voisinage.

Proposition 6. Soient E,F,G,H quatre espaces normés, f (resp. g) une application continue d'un voisinage A d'un point $x_0 \in E$ dans F (resp. G) $(y_1,y_2) \to u(y_1,y_2)$ une application continue d'un voisinage du point $(f(x_0),g(x_0)) \in F \times G$ dans H . Si f et g sont différentiables au point x_0 , et u différentiable au point $(f(x_0),g(x_0))$, l'application composée $x \to u(f(x),g(x))$ est différentiable au point x_0 ; si on la désigne par φ , on a

(14) $$d\varphi(x_0;h)=d_1u(f(x_0),g(x_0);df(x_0;h))+d_2u(f(x_0),g(x_0);dg(x_0;h))$$

C'est une conséquence immédiate du th.1, de la prop.3 et de la formule (12) .

On généralise immédiatement cette proposition au cas où u est une application définie dans un voisinage d'un point d'un produit d'un nombre quelconque d'espaces normés.

Considérons une application bilinéaire continue $(x,y) \to u(x,y)$ d'un produit $E \times F$ de deux espaces normés dans un espace normé G. Chacune des applications partielles $x \to u(x,y)$, $y \to u(x,y)$, étant linéaire et continue, est différentiable (n°2), et on a $d_1u(x,y;h)=u(h,y)$, $d_2u(x,y;k)=u(x,k)$; en vertu de la continuité de u, il existe $a>0$ tel que, quels que soient $x \in E$, $y \in F$, $\|u(x,y)\| \leqslant a\|x\| . \|y\|$, d'où $\|d_{1;x,y}u\| \leqslant a\|y\|$, $\|d_{2;x,y}u\| \leqslant a\|x\|$; les deux applications $(x,y) \to d_{1;x,y}u$, $(x,y) \to d_{2;x,y}u$ sont des applications linéaires continues de $E \times F$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ et $\mathcal{L}(F,G)$ respectivement. Le th.3 est par suite applicable, et on en conclut que u est différentiable en tout point $(x,y) \in E \times F$, et qu'on a

(15) $$du(x,y;h,k) = u(h,y)+u(x,k) .$$

La prop.6 donne le résultat suivant :

Proposition 7. Soient E,F,G,H quatre espaces normés, f (resp. g) une application continue d'un voisinage A d'un point $x_0 \in E$ dans F (resp. G), u une application bilinéaire continue de $F \times G$ dans H ; si f et g sont différentiables au point x_0, il en est de même de l'application composée $x \to u(f(x),g(x))$, et si on désigne par φ cette application, on a

(16) $$d\varphi(x_0;h)=u(df(x_0;h),g(x_0))+u(f(x_0),dg(x_0;h))$$

Lorsque E est le corps des scalaires, on retrouve la formule donnant la dérivée de $\xi \to u(f(\xi),g(\xi))$ (voir Livre IV).

En particulier, supposons que E soit un <u>anneau normé</u> ; l'application bilinéaire $(x,y) \to xy$ de $E \times E$ dans E est continue, donc différentiable, et on a

$$d(xy) = (dx)y + x(dy) .$$

6. <u>Dérivées partielles. Matrice jacobienne</u>. Considérons une application continue f d'une partie ouverte A de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) dans un espace normé quelconque F sur le corps $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) ; en un point $a=(a_i)$ l'application partielle $x_i \to f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,\ldots,a_n)$ est différentiable si sa dérivée existe ; on sait (Livre IV) que cette dérivée (dite <u>dérivée partielle d'indice</u> i de f au point a) se note $D_i f(a)$, ou $f_i'(a)$, ou (si aucune confusion n'en résulte) $f'_{x_i}(a)$ ou enfin $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$; la différentielle partielle d'indice i de f au point a est la fonction linéaire $h_i \to D_i f(a).h_i$; pour que l'application $x \to d_{i;x}f$ de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) dans $\mathcal{L}(\mathbb{R},F)$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbb{C},F)$) soit continue dans un voisinage de a, il faut et il suffit que l'application $x \to D_i f(x)$ de ce voisinage dans F soit continue. L'application du corollaire du th.3 donne donc la proposition suivante :

<u>Proposition 8</u>. <u>Si les n dérivées partielles d'une fonction f de n variables réelles</u> (resp. <u>complexes</u>) <u>existent et sont continues dans un voisinage d'un point</u> $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, f <u>est continument différentiable au point a, et on a</u>

$$df(a_1,\ldots,a_n;dx_1,dx_2,\ldots,dx_n) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)dx_i \tag{17}$$

Supposons maintenant que l'on ait aussi $F=\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{C}^m$) ; alors l'application f est déterminée par la donnée des m applications composées $f_j = pr_j \circ f$ de A dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) ; d'après la prop.3, pour que f soit différentiable au point a, il faut et il suffit que chacune des m fonctions scalaires f_j le soit ; la prop.8 montre donc que f

sera différentiable au point a si chacune des mn dérivées partielles (scalaires) $D_i f_j$ existe et est continue dans un voisinage de a ; la différentielle de f sera alors l'application linéaire

$$(dx_i)_{1 \leq i \leq n} \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} D_i f_j(a) dx_i \right)_{1 \leq j \leq m}$$

Autrement dit, la matrice de df , rapportée aux bases canoniques de E et F , est la matrice à n lignes et m colonnes $(D_i f_j(a))$, qu'on appelle <u>matrice jacobienne</u> de f au point a . Lorsque m=n , le déterminant $\left| D_i f_j(a) \right|$ de cette matrice s'appelle <u>déterminant fonctionnel</u> ou <u>jacobien</u> de f (ou des n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$) au point a ; on le note parfois (lorsqu'aucune confusion n'est possible) $\dfrac{\partial (f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial (a_1, a_2, \ldots, a_n)}$.

Le théorème des fonctions composées se traduit en termes de matrices jacobiennes, de la manière suivante : soient f_j $(1 \leq j \leq m)$ m applications dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) d'un voisinage du point $a=(a_i)$ de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) , différentiables en ce point ; soient g_k $(1 \leq k \leq p)$ p applications dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) d'un voisinage du point $b=(f_j(a))$ de $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{C}^m$), différentiables en ce point ; désignons par h_k les p fonctions composées $x \longrightarrow g_k(f_1(x), \ldots, f_m(x))$; elles sont différentiables au point a , et on a la relation entre matrices jacobiennes

(18) $$(D_i h_k(a)) = (D_i f_j(a))(D_j g_k(b))$$

d'où en particulier, lorsque m=n=p , la relation entre jacobiens

$$\left| D_i h_k(a) \right| = \left| D_i f_j(a) \right| \cdot \left| D_j g_k(b) \right|$$

<u>Remarques</u>. 1) Dans la définition de la différentielle d'une fonction f en un point x_0 , nous avons supposé cette fonction définie dans un <u>voisinage</u> de x_0 . On peut généraliser cette définition en supposant seulement f définie dans un ensemble A contenant x_0 et tel que x_0 ne soit pas un point isolé de A ; la plupart des propositions de ce paragraphe s'étendent à ce cas plus général.

On notera seulement que la différentielle n'est plus nécessairement unique dans ce cas : le raisonnement de la prop.1 montre seulement que ses valeurs sont bien déterminées dans le plus grand sous-espace vectoriel H de E tel que l'intersection de H et de $A-x_0$ soit un voisinage de 0 dans H ; de même, c'est seulement dans H qu'on peut affirmer que la différentielle soit continue. Enfin, le théorème des accroissements finis et ses conséquences ne sont valables pour deux points de A que si le segment joignant ces points est contenu dans A.

2) La définition de la différentielle s'étend aussi au cas où les espaces normés considérés E et F ont pour corps des scalaires un <u>corps valué</u> commutatif quelconque (avec la condition $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; $|\lambda|$ étant la valeur absolue du scalaire λ) ; on vérifiera aisément que les propriétés de la différentielle <u>qui ne dépendent pas du théorème des accroissements finis</u>, s'étendent encore dans ce cas.

<u>Exercices</u>. 1) Soit f la fonction définie dans R^2 par les conditions $f(x,y)=r^2\sin(1/r)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$, avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et $f(0,0)=0$; montrer que f est différentiable en tout point de R^2 , mais non continument différentiable au point $(0,0)$.

2) Soit f la fonction définie dans R^2 par les conditions $f(x,y)=(xy/r)\sin(1/r)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$, avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et $f(0,0)=0$; montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies pour tout point (x,y) et sont chacune fonction continue de x et fonction continue de y en tout point, mais que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$ (considérer la fonction composée $f(x,tx)$, pour une valeur fixe de t) .

3) Soit f la fonction définie dans R^2 par les conditions suivantes : $f(x,y)=0$ pour $y \leqslant x^2$ ou $y \geqslant 3x^2$; $f(x,2x^2)=x$; enfin, pour chaque valeur de x , $f(x,y)$ est linéaire dans chacun des intervalles $[x^2,2x^2]$ et $[2x^2,3x^2]$. Montrer que, pour toute valeur des paramètres (a,b) , $f(at,bt)$ a une dérivée nulle au point $t=0$, mais que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

4) Soit f une application continue d'un voisinage A d'un point x_o d'un espace normé E dans un espace normé F . On dit que f est <u>quasi-différentiable</u> au point x_o s'il existe une application linéaire u de E dans F , ayant la propriété suivante : pour toute application continue φ de $[0,1]$ dans E , telle que $\varphi(0)=x_o$ et que $\varphi'(0)$ existe, l'application $t \to f(\varphi(t))$ admet une dérivée pour $t=0$, égale à $u(\varphi'(0))$. L'application linéaire u est appelée <u>quasi-différentielle</u> de f au point x_o . Montrer que si f est quasi-différentiable au point x_o , elle admet une seule quasi-différentielle. Etendre aux quasi-différentielles les prop. 2 et 3 et les th.1 et 2 .

5) a) Si une application continue f d'un voisinage A d'un point $x_o \in E$ dans F est différentiable au point x_o , elle est quasi-différentiable en ce point et sa quasi-différentielle est égale à sa différentielle.

b) Si E a un nombre <u>fini</u> de dimensions, et si f est quasi différentiable en un point $x_o \in E$, f est différentiable en ce point (raisonner par l'absurde : si (x_n) est une suite de points tendant vers x_o , telle que

$$\| f(x_n)-f(x_o)-u(x_n-x_o) \| \geqslant \alpha \| x_n-x_o \|$$

(u quasi-différentielle de f , α fixe > 0), extraire de la suite (x_n) une suite partielle telle que si on pose $x_n-x_o=z_n \| x_n-x_o \|$, z_n tende vers une limite, et $(\| x_n-x_o \|)$ soit une suite décroissante ;

définir alors une application continue φ de $[0,1]$ dans E telle que $\varphi(0)=x_0$, que $\varphi'(0)$ existe, mais que l'application $t \to f(\varphi(t))$ n'ait pas une dérivée égale à $u(\varphi'(0))$ au point $t=0$).

c) Soit E l'espace des suites bornées (x_n) de nombres réels n'ayant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$, la norme d'une telle suite étant $\sup_{n \in N} |x_n|$. Soit f l'application de E dans lui-même qui, à la suite (x_n) fait correspondre (y_n) , où $y_n = \frac{1}{n} \text{Arc tg}\, n^2 x_n$. Montrer que f est continue à l'origine et quasi-différentiable en ce point, mais que sa quasi-différentielle n'est pas une application linéaire continue de E dans lui-même. En déduire que f n'est pas différentiable à l'origine.

6) Soit K un espace compact, E l'espace des fonctions numériques continues dans K , la norme d'une fonction $x \in E$ étant $\|x\| = \sup_{t \in K} |x(t)|$. On pose $f(x) = \|x\|$.

a) Montrer que, pour que f soit quasi-différentiable en un point x_0 , il faut et il suffit que la fonction $|x_0|$ atteigne son maximum en un seul point t_0 de K ; la quasi-différentielle de f au point x_0 est alors la fonction $u(h)=h(t_0)$ si $x_0(t_0) > 0$, $u(h)=-h(t_0)$ si $x_0(t_0) < 0$ (Pour voir que la condition est nécessaire, supposant que $|x_0|$ atteigne son maximum en deux points distincts t_0, t_1 , considérer une fonction continue $y \in E$, à valeurs comprises entre 0 et 1 , égale à 1 en t_0 , à 0 en t_1 , et examiner ce que devient l'expression $(\|x_0+\lambda y\| - \|x_0\|)/\lambda$ lorsque λ tend vers 0 par valeurs positives ou par valeurs négatives. Pour voir que la condition est suffisante, soit $\lambda \to z_\lambda$ une application continue de $[0,1]$ dans E , ayant une dérivée $\underline{a}$ pour $\lambda=0$; montrer d'abord, à l'aide de la compacité de K , que si t_λ est un point où la fonction $|x_0(t)+z_\lambda(t)|$ atteint son maximum, t_λ tend vers t_0 lorsque λ tend vers 0) .

b) Montrer sur un exemple que f peut être quasi-différentiable en un point x_o sans être différentiable en ce point.

7) Soit E l'espace des suites (x_n) de nombres réels telles que $\sum_n |x_n|^p < +\infty$ $(p>1)$, la norme d'une telle suite étant $(\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Soit f la fonction définie dans E, telle que $f(x) = \sum_n |x_n|^p$ pour $x = (x_n) \in E$; montrer que f est différentiable en tout point $x \in E$ et qu'on a $df(x;h) = \sum_n p(\mathrm{sg}\, x_n)|x_n|^{p-1} h_n$ pour tout $h = (h_n) \in E$ (utiliser la formule des accroissements finis pour la fonction $|t|^p$; distinguer deux cas suivant que $p \leqslant 2$ ou $p \geqslant 2$; dans le premier cas, utiliser l'inégalité $|t+k|^{p-1} \leqslant |t|^{p-1} + |k|^{p-1}$; dans le second, majorer la différence $|t+k|^{p-1} - |t|^{p-1}$ à l'aide de la formule des accroissements finis, et utiliser l'inégalité de Hölder pour les exposants $q = p/2$ et $q' = p/(p-2)$).

8) Soit f une application continue d'une partie ouverte A de $E = E_1 \times E_2$ dans un espace F. Pour qu'en un point $(a_1, a_2) \in A$ la fonction f soit différentiable, il faut et il suffit que : 1° les différentielles partielles $d_{1;a_1,a_2} f$ et $d_{2;a_1,a_2} f$ existent ; 2° on ait

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2)}{\|h_1\| + \|h_2\|} = 0$$

§ 2. Différentielles des fonctions implicites.

1. Réciproque d'une transformation différentiable. Soient E et F deux espaces normés, f un homéomorphisme d'une partie ouverte A de E sur une partie ouverte B de F, g l'homéomorphisme réciproque de f ; si, en un point $x_o \in A$, f est différentiable et a pour différentielle u, et si g est de même différentiable au point $f(x_o)$ et a pour différentielle v, il résulte du théorème des fonctions composées (§ 1, th. 1) que $v \circ u$ est

est l'application identique de E sur lui-même et $u \circ v$ l'application identique de F sur lui-même ; autrement dit, u est un isomorphisme de E sur F , et v l'isomorphisme réciproque.

Nous allons montrer que réciproquement, si en un produit $x_0 \in E$ la différentielle d'une application continument différentiable f d'un voisinage de x_0 dans F est un isomorphisme de E sur F , f est un homéomorphisme d'un voisinage de x_0 sur une partie ouverte de F .

Nous commencerons par examiner un cas particulier.

Proposition 1. Soit E un espace normé complet, f une application continue d'un voisinage A de l'origine 0 dans E telle que $f(0)=0$. Si f est continument différentiable au point 0 et a pour différentielle au point 0 l'application identique de E sur lui-même, il existe un voisinage ouvert V de 0 tel que $f(V)$ soit ouvert dans E , et que f soit un homéomorphisme de V sur $f(V)$; en outre, si g est l'application réciproque de $f(V)$ sur V , g est différentiable au point 0 et a pour différentielle en ce point l'application identique.

Posons $\varphi(x)=x-f(x)$; on a $d\varphi(x;h)=h-df(x;h)$, donc en particulier $d\varphi(0;h)=0$. Comme φ est continument différentiable au point 0 , il résulte du th. des accroissements finis (§ 1,th.2) que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que, pour $\|x\|<r$ et $\|x'\|<r$, on ait

$$\|\varphi(x')-\varphi(x)\| \leqslant \varepsilon\|x'-x\| . \tag{1}$$

Comme E est complet, on sait alors (Livre VI) que, si S désigne la boule ouverte $\|y\|<(1-\varepsilon)r$, $f(x)=x-\varphi(x)$ est un homéomorphisme de $\overset{-1}{f}(S)$ sur S ; en outre, si g est l'homéomorphisme réciproque, on a

$$\|g(y)\| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\|y\| \tag{2}$$

pour tout $y \in S$. D'après (1) et (2), on a donc

$$\|g(y)-y\| \leqslant \varepsilon\|g(y)\| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\|y\|$$

pour $\|y\| \leqslant (1-\varepsilon)r$; comme ε est arbitraire, cela prouve que g est différentiable au point 0 , et que $dg(0;k)=k$.

<u>Théorème 1</u>. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces normés complets</u>, f <u>une application dans</u> F <u>d'une partie ouverte</u> A <u>de</u> E . <u>On suppose que f soit continue dans</u> A , <u>continument différentiable dans un voisinage d'un point</u> $x_0 \in A$, <u>et que sa différentielle en ce point soit une application biunivoque de</u> E <u>sur</u> F . <u>Dans ces conditions, il existe un voisinage ouvert</u> V <u>de</u> x_0 <u>tel que</u> f(V) <u>soit ouvert dans</u> F , <u>et que</u> f <u>soit un homéomorphisme de</u> V <u>sur</u> f(V) ; <u>en outre, l'homéomorphisme réciproque</u> g <u>est continument différentiable au point</u> $y_0=f(x_0)$, <u>et sa différentielle en ce point est l'application réciproque de</u> $d_{x_0}f$.

Rappelons d'abord (Livre VI) que, si u est une application linéaire biunivoque et continue de l'espace complet E sur l'espace complet F , u est <u>bicontinue</u>, autrement dit est un isomorphisme de E sur F . En outre, dans l'espace normé complet $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F , l'ensemble des isomorphismes de E sur F est <u>ouvert</u>, et l'application $v \to v^{-1}$ est <u>continue</u> dans cet ensemble.

Si on pose $u_x = d_x f$, on voit donc que, dans un voisinage de x_0 , u_x est un isomorphisme de E sur F , et que $x \to u_x^{-1}$ est une application continue de ce voisinage dans $\mathcal{L}(F,E)$.

Considérons alors la fonction $\varphi(t)=f(x_0+u_{x_0}^{-1}(t))-f(x_0)$, définie dans le voisinage $u_{x_0}(A-x_0)$ de 0 dans F , et prenant ses valeurs dans F . D'après le th. des fonctions composées, φ est différentiable dans un voisinage de 0 , et a pour différentielle $d\varphi(t;h)=df(x_0+u_{x_0}^{-1}(t);u_{x_0}^{-1}(h))$; φ est donc continument différentiable au point 0 , et on a $\varphi(0)=0$, $d\varphi(0;h)=h$. La prop.1 lui est applicable, et il existe donc un voisinage ouvert W de 0 dans F tel que $\varphi(W)$ soit ouvert dans F et que φ soit un homéomorphisme de W sur $\varphi(W)$; l'application $x \to f(x)$

n'est autre que l'application composée $x \to y_0+\varphi(u_{x_0}(x-x_0))$ f est donc un homéomorphisme du voisinage ouvert $V=x_0+u_{x_0}^{-1}(W)$ de x_0 sur un voisinage ouvert de y_0 , et si ψ est l'homéomorphisme réciproque de φ , l'homéomorphisme réciproque de f est $y \to g(y)=u_{x_0}^{-1}(\psi(y-y_0))+x_0$. Comme ψ est différentiable à l'origine et que $d\psi(0;h)=h$, on a, en vertu du th. des fonctions composées, $dg(y_0;h)=u_{x_0}^{-1}(h)$. Enfin, la remarque initiale prouve que le raisonnement fait au point x_0 peut-être répété en tout point x d'un voisinage de x_0 , ce qui prouve que en tout point correspondant $y=f(x)$, g est différentiable et a pour différentielle u_x^{-1} ; nous avons vu que cette différentielle est fonction continue de x , donc fonction continue de y dans un voisinage convenable de y_0.

<u>Remarques</u>. 1) L'hypothèse que E et F sont <u>complets</u> est indispensable pour la validité de la prop.1 (et a fortiori du th.1). Prenons en effet pour E l'espace des polynomes à coefficients réels, définis dans l'intervalle compact $[0,1]$, normé par $\|x\| = \sup_{0\leq t\leq 1}|x(t)|$. On sait que E n'est pas complet. La fonction $f(x) = x-x^2$ vérifie toutes les conditions de la prop.1, comme on le constate sans peine ; mais ce n'est pas un homéomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 , car si on pose $y=x-x^2$, on a $1-4y=(2x-1)^2$, et il existe des polynomes y aussi voisins qu'on veut de 0 pour lesquels $1-4y$ n'est pas le carré d'un autre polynome (par exemple aucun polynome y de degré impair ne peut satisfaire à cette condition).

2) La prop.1 perd également sa validité si on y suppose seulement que f est différentiable dans un voisinage de 0 , sans que sa différentielle soit continue au point 0 . C'est ce que montre l'exemple suivant : E étant le corps des nombres réels, on pose $f(0)=0$ et pour $x \neq 0$

$$f(x) = x + x^2 \cos \frac{\pi}{x}$$

La fonction f est bien différentiable en tout point, et on a $f'(0)=1$; mais f n'est pas un homéomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0, car elle n'est monotone dans aucun voisinage de 0 ; on vérifie aussitôt en effet que, pour tout entier $k > 0$, on a

$$f(\frac{1}{2k}) > f(\frac{1}{2k-1}) \quad \text{et} \quad f(\frac{1}{2k}) > f(\frac{1}{2k+1})$$

2. Différentiabilité par rapport aux paramètres. Proposition 2. Soient E, F, G trois espaces normés, E et G étant complets ; soit f une application dans G d'une partie ouverte A de $E \times F$. On suppose que f soit continue dans A, et continument différentiable dans un voisinage d'un point $(a_1, a_2) \in A$. En outre, on suppose que la différentielle partielle $d_{1;a_1,a_2} f$ soit une application biunivoque de E sur G. Il existe alors un voisinage U de a_1 dans E, un voisinage V de a_2 dans F, un voisinage W de $f(a_1, a_2)$ dans G, tels que pour tout $x_2 \in V$, l'application partielle $x_1 \rightarrow f(x_1, x_2)$ soit un homéomorphisme de U sur un voisinage de $f(a_1, a_2)$ contenant W ; si $y \rightarrow g(y, x_2)$ désigne l'homéomorphisme réciproque, g est une application continument différentiable de $W \times V$ dans E.

Reprenons les raisonnements précédents, en considérant d'abord le cas où $E=G$ $a_1=0$, $a_2=0$, $f(a_1,a_2)=0$, et où $d_{1;a_1,x_2} f$ est l'application identique de E sur lui-même pour tout x_2 appartenant à un voisinage V_0 de 0 dans F. Raisonnant comme dans la prop. 1, posons $\varphi(x_1, x_2) = x_1 - f(x_1, x_2)$; on a $d_1\varphi(0, x_2; h) = 0$ quel que soit $x_2 \in V_0$; comme φ est continument différentiable, on en conclut comme plus haut qu'on a

$$\|\varphi(x_1', x_2) - \varphi(x_1, x_2)\| \leqslant \varepsilon \|x_1' - x_1\|$$

quels que soient $\|x_1\|<r$, $\|x_1'\|<r$ et <u>quel que soit</u> $\|x_2\|<r$.

Alors (Livre VI), l'application partielle $x_1 \to f(x_1,x_2)$ est un homéomorphisme de la boule U : $\|x_1\|<\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}\, r$ sur un voisinage ouvert de 0 contenant la boule W : $\|y\|<(1-2\varepsilon)r$. En outre (Livre VI), si V désigne la boule $\|x_2\|<r$ dans F , l'application réciproque $g(y,x_2)$ de l'homéomorphisme précédent est <u>continue</u> dans $W\times V$ (comme limite uniforme de fonctions continues).

Passons au cas général. Posons $u_{x_2}=d_{1;a_1,x_2}f$; u_{x_2} est inversible quel que soit x_2 dans un voisinage V_o de a_2 , et l'application $x_2 \to u_{x_2}^{-1}$ est continue. Si on pose

$$\varphi(t,x_2) = f(a_1+u_{x_2}^{-1}(t),x_2) - f(a_1,x_2)$$

la fonction φ répond aux conditions du cas particulier précédemment examiné ; il existe donc un voisinage U' de 0 dans G , un voisinage V' de a_2 dans F , un voisinage W' de 0 dans G , tels que, pour tout $x_2\in V'$, $t\to\varphi(t,x_2)$ soit un homéomorphisme de U' sur un voisinage ouvert de 0 dans G contenant W' ; en outre, l'application réciproque $\psi(z,x_2)$ est continue dans $W'\times V'$. On en conclut que $x_1\to f(x_1,x_2)$ est un homéomorphisme de $U''=a_1+u_{x_2}^{-1}(U')$ sur un voisinage ouvert de $f(a_1,x_2)$ contenant $W''=f(a_1,x_2)+W'$. Comme $u_{x_2}^{-1}$ dépend continument de x_2 , on peut (Livre VI) trouver un voisinage assez petit V de a_2 tel que, pour tout $x_2\in V$, U" contienne un voisinage fixe U de a_1 , et que $x_1\to f(x_1,x_2)$ soit un homéomorphisme de U sur un voisinage de $y_o=f(a_1,a_2)$ contenant un voisinage fixe W de ce point ; enfin, il est clair que l'homéomorphisme réciproque

$$g(y,x_2) = a_1+u_{x_2}^{-1}(\psi(y-y_o,x_2))$$

est continu dans $W\times V$.

Montrons maintenant qu'au point (y_0,a_0), g est différentiable par rapport à x_2 ; posons pour simplifier $u=u_{a_2}=d_{1;a_1,a_2}f$, et $v=d_{2;a_1,a_2}f$. Comme g est continue, $h=g(y_0,a_2+k)-g(y_0,a_2)$ tend vers 0 avec k ; pour k assez petit, on a donc, d'après la définition de g, $y_0=f(a_1+h,a_2+k)=f(a_1,a_2)$. Mais on peut écfire

(3) $$0=f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1,a_2)=u(h)+v(k)+\delta(h,k)$$

et pour tout ε, il existe r tel que si $\|h\|\leqslant r$ et $\|k\|\leqslant r$ on ait $\|\delta(h,k)\|\leqslant\varepsilon(\|h\|+\|k\|)$; il existe donc r' tel que $\|k\|\leqslant r'$ entraîne $\|h\|\leqslant r$ et $\|k\|\leqslant r$, donc $\|\delta(h,k)\|\leqslant\varepsilon(\|h\|+\|k\|)$. Or, u est par hypothèse un isomorphisme de E sur G ; il existe donc un nombre $m>0$ tel que $\|u(h)\|\geqslant m\|h\|$ pour tout h ; d'autre part v est une forme linéaire continue dans F, donc il existe $b>0$ tel que $\|v(k)\|\leqslant b\|k\|$ pour tout k. Supposons alors qu'on ait pris $\varepsilon<\frac{m}{2}$; les relations précédentes et la relation (3) entraînent que, pour $\|k\|\leqslant r'$, on a

$$m\|h\|\leqslant\|u(h)\|\leqslant\|v(k)\|+\|\delta(h,k)\|\leqslant b\|k\|+\varepsilon(\|h\|+\|k\|)$$

donc $$\frac{m}{2}\|h\|\leqslant(m-\varepsilon)\|h\|\leqslant(b+\frac{m}{2})\|k\|$$

Cela étant, on tire de la relation (3) que

$$h=-u^{-1}(v(k))-u^{-1}(\delta(h,k))$$

et, pour $\|k\|\leqslant r'$, on a

$$\|u^{-1}(\delta(h,k))\|\leqslant\frac{1}{m}\|\delta(h,k)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{m}(\|h\|+\|k\|)\leqslant\frac{2\varepsilon}{m^2}(b+m)\|k\|$$

Comme ε est arbitraire, cela prouve bien que $d_{2;y_0,a_2}g$ existe et est égale à $-u^{-1}\circ v$.

Enfin, le raisonnement précédent peut être répété en tout point (x_1,x_2) assez voisin de (a_1,a_2) ; si on pose $d_{1;x_1,x_2}f=u_{x_1,x_2}$, et $d_{2;x_1,x_2}f=v_{x_1,x_2}$, il prouve que $d_{2;y,x_2}g$ existe et est égale à

$$-u^{-1}_{x_1,x_2}\circ v_{x_1,x_2}$$

où il faut remplacer x_1 par $g(y,x_2)$. Comme par hypothèse f est continument différentiable dans un voisinage de (a_1,a_2), et que l'application $(u,v)\to u^{-1}\circ v$ est continue, on voit que l'application $(y,x_2)\to d_{2;y,x_2}g$ est continue dans un voisinage de (y_0,a_2). D'autre part, on a $d_{1;y,x_2}g = u^{-1}_{x_1,x_2}$, donc $(y,x_2)\to d_{1;y,x_2}g$ est aussi continue dans un voisinage de (y_0,a_2), ce qui prouve finalement que g est continument différentiable dans un voisinage de ce point (§ 1, th.3).

3. Fonctions implicites. Théorème 2. Soient E, F, G trois espaces normés, E et G étant complets ; soit f une application dans G d'une partie ouverte A de $E\times F$. On suppose que f soit continue dans A, et continument différentiable dans un voisinage d'un point $(a_1,a_2)\in A$, tel que $f(a_1,a_2)=0$; on suppose en outre que la différentielle partielle $d_{1;a_1,a_2}f$ soit une application biunivoque de E sur G. Il existe alors un voisinage U de a_1 dans E et un voisinage V de a_2 dans F tels que, pour tout $x_2\in V$, il existe un $x_1\in U$ et un seul tel que $f(x_1,x_2)=0$; si $\varphi(x_2)$ désigne cette valeur de x_1, φ est une application continument différentiable de V dans E.

En effet, avec les notations de la prop.2, pour tout $x_2\in V$, l'application $x_1\to f(x_1,x_2)$ est un homéomorphisme de U sur un voisinage de 0 ; en particulier, il existe une seule valeur de x_1 telle que $f(x_1,x_2)=0$, et cette valeur n'est autre que $g(0,x_2)$; le théorème est donc une conséquence immédiate de la prop.2.

4. Cas des espaces à un nombre fini de dimensions. Il est facile de traduire les résultats qui précèdent lorsque les espaces vectoriels qui interviennent ont un nombre fini de dimensions (et sont par suite complets ipso facto). Comme une application linéaire de E sur F ne peut être biunivoque que si E et F ont même nombre de dimensions, on peut se borner

à appliquer le th.1 lorsque E et F sont identiques à R^n (resp. C^n) ; on obtient alors l'énoncé suivant :

Proposition 3. Soient f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n fonctions réelles (resp. complexes) de n variables réelles (resp. complexes), définies dans une partie ouverte A de R^n (resp. C^n) et admettant des dérivées partielles continues dans un voisinage d'un point $a=(a_i) \in A$. Si le jacobien $\boxed{D_i f_j(a)}$ n'est pas nul, l'application $(x_1,..,x_n) \to (f_i(x_1,...,x_n))$ est un homéomorphisme f d'un voisinage ouvert V de a sur un voisinage ouvert de $(f_i(a))$; si $g=(g_i)$ désigne l'homéomorphisme réciproque, les fonctions g_i admettent des dérivées partielles continues dans un voisinage de $(f_i(a))$, et en tout point de V, le jacobien $\boxed{D_i g_j(f(x))}$ est inverse de $\boxed{D_i f_j(x)}$.

Le th.2 se traduit de même de la façon suivante :

Proposition 4. Soient $f_i(x_1,...,x_n; t_1,t_2,..,t_p)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n fonctions réelles (resp. complexes) de n+p variables réelles (resp. complexes), définies dans une partie ouverte A de $R^n \times R^p$ (resp. $C^n \times C^p$), et admettant des dérivées partielles continues dans un voisinage d'un point $c=(a_1,..,a_n;b_1,...,b_p)$ de A tel que $f_i(a_1,..,a_n;b_1,..,b_p)=0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Si le jacobien $\dfrac{\partial(f_1,f_2,..,f_n)}{\partial(x_1,x_2,..,x_n)}$ n'est pas nul au point c, il existe un voisinage U de $(a_1,..,a_n)$ dans R^n (resp. C^n) et un voisinage V de $(b_1,...,b_p)$ dans R^p (resp. C^p) tels que, pour tout point $(t_1,...,t_p) \in V$, il existe un point $(x_1,...,x_n) \in U$ et un seul satisfaisant aux n relations $f_i(x_1,...,x_n;t_1,...,t_p)=0$; en outre, si on pose $x_i=g_i(t_1,...,t_p)$, les fonctions g_i sont continument différentiables dans V.

En outre, si $\underline{A}$ désigne la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, où on remplace x_i par $g_i(t_1,..,t_p)$, et $\underline{B}$ la matrice jacobienne à p lignes et n colonnes ~~xx~~ $\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_k}\right)$, où on fait la même substitution, la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial g_i}{\partial t_k}\right)$ à p lignes et n colonnes est égale à $\underline{BA}^{-1}$.

5. Fonctions indépendantes. Définition 1. Soient $f_1,\dots,f_n$ n fonctions à valeurs réelles (resp. complexes) définies dans un voisinage d'un point a d'un espace normé E. On dit que ces n fonctions sont dépendantes au voisinage de a s'il existe une fonction réelle (resp. complexe) g de n variables réelles (resp. complexes), continument différentiable dans un voisinage du point $(f_i(a))$, dont la différentielle en ce point n'est pas nulle, et telle qu'on ait identiquement

$$g(f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x))=0 \tag{4}$$

dans un voisinage de a. Dans le cas contraire, les n fonctions f_i sont dites indépendantes au voisinage de a.

Lorsqu'on suppose les f_i continument différentiables, nous allons voir que, sous certaines conditions, l'examen du système des n formes linéaires $d_x f_i$ au voisinage du point a permet de décider si les f_i sont ou non dépendantes au voisinage de ce point.

Théorème 3. 1°) Si les fonctions continument différentiables $f_1,..,f_n$ sont dépendantes au voisinage d'un point a, le rang du système des n formes linéaires $d_x f_i$ est $<n$ en tout point de ce voisinage.

2°) Si E est complet, et si, en tout point x d'un voisinage de $a \in E$, le rang du système de formes linéaires $d_x f_i$ est égal à un même nombre $p<n$, les fonctions $f_1,\dots,f_n$ sont dépendantes au voisinage de a.

1) En différentiant l'identité (4), on obtient, d'après le théorème des fonctions composées

$$\sum_{i=1}^{n} D_i g(f_1(x),\ldots,f_n(x)).d_x f_i = 0$$

Comme au point $(f_i(a))$ une des dérivées partielles $D_i g$ n'est pas nulle, cette dérivée n'est pas nulle non plus dans un voisinage de ce point, et par suite les différentielles $d_x f_i$ forment un système lié en tout point de ce voisinage.

2) Supposons, pour fixer les idées, que les formes linéaires $d_x f_1,\ldots,d_x f_p$ soient indépendantes pour $x=a$; comme elles sont fonctions continues de x , elles sont encore indépendantes pour tout point d'un voisinage de a (Livre VI), et comme le rang du système des n formes est toujours égal à p dans un voisinage de a , les formes $d_x f_{p+1},\ldots,d_x f_n$ sont, en tout point de ce voisinage, égales à des combinaisons linéaires de $d_x f_1,\ldots,d_x f_p$. Posons $u_i = d_a f_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; l'application linéaire $h \rightarrow (u_1(h),\ldots,u_p(h))$ est une application de E sur R^p (resp. C^p) ; il existe donc un sous-espace V à p dimensions de E tel que l'application précédente, restreinte à V , soit un isomorphisme de V sur R^p (resp. C^p) ; soit W le sous-espace fermé de E , intersection des p hyperplans $\overset{-1}{u_i}(0)$, supplémentaire de V ; on sait que tout point de E se met d'une seule manière sous la forme $h = y(h)+z(h)$, où $y(h)\in V$, $z(h)\in W$, et que les applications linéaires y et z sont continues dans E .

Considérons alors l'espace complet $F = W \times R^p$ (resp. $W \times C^p$), et l'application qui, à tout $x \in E$, fait correspondre le point $\varphi(x)=(z(x),f_1(x),\ldots,f_p(x))$; φ est continument différentiable dans un voisinage de a ; pour $x=a$, sa différentielle s'obtient par l'application du théorème des différentielles partielles (§1, th.3 et prop.6) ; compte tenu du choix de W , on voit que cette différentielle n'est autre que l'application linéaire

$h \to (z(h), u_1(y(h)), u_2(y(h)), \ldots, u_p(y(h)))$, et par suite c'est un <u>isomorphisme</u> de E sur F . Le th.1 montre donc que φ est un homéomorphisme d'un voisinage de a sur un voisinage du point $b=(z(a), f_1(a), \ldots, f_p(a))$; soit $\psi(v, t_1, \ldots, t_p)$ l'homéomorphisme réciproque, qui est continument différentiable. On a donc identiquement dans un voisinage de a

$$x = \psi(z(x), f_1(x), \ldots, f_p(x))$$

et par suite

$$(5) \qquad f_{p+1}(x) = \theta(z(x), f_1(x), \ldots, f_p(x))$$

où $\theta = f_{p+1} \circ \psi$ est continument différentiable au voisinage de b .

En différentiant l'identité (5), il vient une relation de la forme

$$(6) \qquad df_{p+1}(x;h) = \sum_{i=1}^{p} g_i(x) df_i(x;h) + w(z(x), \ldots, f_p(x); z(h))$$

où $k \to w(v, t_1, \ldots, t_p; k)$ est la différentielle partielle de θ par rapport à v , et les g_i des fonctions scalaires de x ; comme par hypothèse, $d_x f_{p+1}$ est une combinaison linéaire de $d_x f_1, \ldots, d_x f_p$, on tire de (6) une identité en h et x de la forme

$$(7) \qquad w_x(z(h)) = \sum_{i=1}^{p} e_i(x) df_i(x;h)$$

où on a posé $w_x(z(h)) = w(z(x), f_1(x), \ldots, f_p(x); z(h))$, et où les $e_i(x)$ sont des fonctions scalaires de x . Mais une telle identité n'est possible que si les $e_i(x)$ sont identiquement nuls dans un voisinage de x , sans quoi, en prenant $h \in V$, c'est-à-dire $z(h)=0$, on en conclurait que dans V les formes linéaires $d_x f_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ sont dépendantes, contrairement à l'hypothèse. On a donc identiquement $w_x(z(h))=0$; comme z(h) parcourt W quand h parcourt E , et que φ est un homéomorphisme d'un voisinage de a sur un voisinage de b , on a aussi $w(z, t_1, \ldots, t_p; k)=0$ quel que soit $k \in W$ et quel que soit le point $(z, t_1, \ldots, t_p)$ dans un voisinage de b ; mais cela entraîne que, dans ce voisinage, θ <u>ne dépend pas de</u> z , ce qui établit le théorème.

Remarques. 1) La seconde partie de la démonstration montre, d'une façon plus précise, que lorsque le rang du système des formes $d_x f_i$ est égal à $p<n$ en tout point d'un voisinage de a , chacune des $n-p$ fonctions $f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_n$ s'exprime, dans ce voisinage, sous forme d'une fonction continument différentiable de $f_1, f_2, \dots, f_p$.

2) Si, en tout point d'un voisinage de a , le rang du système des formes $d_x f_i$ est $<n$, mais dépend du point considéré, il existe un voisinage U de a tel que, dans tout voisinage V contenu dans U , le maximum du rang du système des formes $d_x f_i$ soit un nombre $q<n$ indépendant de V . Si x est un point de V où ce maximum est atteint, il existe un voisinage de x dans lequel le rang du système des formes $d_y f_i$ est partout égal à q , comme on le voit en prenant au point x q de ces formes formant un système libre : elles forment encore un système libre au voisinage de x , d'après la continuité des $d_y f_i$, ce qui montre que dans ce voisinage, le rang du système des formes $d_y f_i$ est au moins égal à q , donc est égal à q d'après la définition de ce nombre. En d'autres termes, l'ensemble des points x où le rang du système des $d_x f_i$ atteint son maximum q , est un ensemble <u>ouvert</u> auquel a est <u>adhérent</u>. En tout point x de cet ensemble, il existe donc un voisinage de x dans lequel les f_i sont dépendantes ; on peut donc dire que, dans tout voisinage de a , il existe un ensemble ouvert dans lequel les f_i sont dépendantes, mais cet ensemble ouvert ne contient pas nécessairement <u>a</u> (voir exerc.3).

Le cas le plus intéressant pour les applications du th.3 est celui où E est un espace à un nombre <u>fini</u> m de dimensions, qu'on peut supposer identique à $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{C}^m$) ; on a alors $d_x f_i = \sum_{j=1}^{m} D_j f_i . dx_j$; dire que ce système de formes linéaires est de rang $p<n$ équivaut à dire que

la matrice jacobienne $(D_i f_j)$ à m lignes et n colonnes est de rang $p<n$, ou encore que tous les déterminants d'ordre $>p$ extraits de cette matrice sont nuls, un des déterminants d'ordre p n'étant pas nul. On voit donc que si, en un point, la matrice jacobienne d'un système de n fonctions est de rang n , les fonctions sont indépendantes au voisinage de ce point ; en particulier, si $m=n$, et si le jacobien des n fonctions f_i est $\neq 0$ en un point, ces fonctions sont indépendantes en ce point.

Réciproquement, si la matrice jacobienne d'un système de n fonctions est de rang <u>fixe</u> $<n$ en <u>tout point</u> d'un voisinage de a , les fonctions sont dépendantes au voisinage de ce point ; si on sait seulement que ce rang est toujours $<n$, mais peut dépendre du point considéré dans le voisinage de a , on peut seulement dire que a est adhérent à l'ensemble des points au voisinage desquels les fonctions sont dépendantes (exer.3). En particulier, si $m<n$, l'ensemble des points au voisinage desquels les n fonctions sont dépendantes est un <u>ensemble ouvert partout dense</u> dans l'ensemble où sont définies les n fonctions.

Bien entendu, le fait qu'en <u>un point</u> la matrice jacobienne soit de rang $<n$ n'entraîne nullement que les n fonctions soient dépendantes en aucun point voisin du point considéré, ni a fortiori en ce point. Par exemple, les fonctions de deux variables réelles $f(x,y)=x^2-y^2$, $g(x,y)=xy$ ont leur jacobien égal à x^2+y^2 , donc nul au point (0,0), mais en aucun autre point ; elles sont donc indépendantes en tout point.

<u>Exercices</u>. 1) Soit f une application continument différentiable d'un voisinage A d'un point a d'un espace normé E , dans un espace normé F . Si au point a la différentielle de f est un isomorphisme

de E dans F , il existe un voisinage V de a tel que f soit un homéomorphisme de V sur f(V).

2) Soient E et F deux espaces normés complets, A un voisinage de a E , f une application continument différentiable de A dans F . Si au point a la différentielle de f est une application linéaire de E sur F , il existe un voisinage ouvert V de a tel que f(V) soit un voisinage ouvert de f(a) dans F .

3) On considère les fonctions, définies dans $\mathbb{R}$: $x(t)=t^3$, $y(t)=t^2$ si $t \geqslant 0$, $y(t)=0$ si $t<0$; elles sont continument différentiables en tout point de $\mathbb{R}$, mais il n'existe aucune fonction f continument différentiable au voisinage du point (0,0) de $\mathbb{R}^2$, ayant une différentielle non nulle en ce point, et telle qu'on ait identiquement $f(x(t),y(t))=0$ dans un voisinage de 0 .

§ 3. Différentielles d'ordre supérieur.

1. Différentielle seconde. Soient E et F deux espaces normés, f une application dans F d'une partie ouverte A de E . Supposons f continument différentiable dans A ; l'application $x \rightarrow d_x f$ est alors une application continue de A dans l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de A dans E . Supposons qu'en un point $x_0 \in A$, cette application soit différentiable, et désignons par $k \rightarrow u_k$ sa différentielle en ce point ; cette différentielle est donc (§ 1, prop.1) une application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E,F)$, et par suite il existe un nombre $a>0$ tel que $\|u_k\| \leqslant a.\|k\|$ quel que soit $k \in E$. D'après la définition de $\mathcal{L}(E,F)$, u_k est, pour chaque valeur de k , une application linéaire continue de E dans F ; par suite $(h,k) \rightarrow u_k(h)$ est une application bilinéaire de $E \times E$ dans F , et cette application est continue car on a, en vertu de la définition de la norme dans $\mathcal{L}(E,F)$,

37

$\|u_k(h)\| \leqslant \|u_k\| \cdot \|h\| \leqslant a\|h\| \cdot \|k\|$.

D'autre part, d'après la définition de la différentielle, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que la relation $\|k\| \leqslant r$ entraîne

$$\| d_{x_0+k}f - d_{x_0}f - u_k \| \leqslant \varepsilon \|k\|$$

c'est-à-dire, d'après la définition de la norme dans $\mathcal{L}(E,F)$

$$\| df(x_0+k;h) - df(x_0;h) - u_k(h) \| \leqslant \varepsilon \|h\| \cdot \|k\|$$

Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante :

Définition 1. Soient E et F deux espaces normés, f une application continument différentiable d'une partie ouverte A de E dans F . On dit que f est deux fois différentiable en un point $x_0 \in A$ s'il existe une application bilinéaire v de $E \times E$ dans F telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que la relation $\|k\| < r$ entraîne, pour tout $h \in E$

(1) $$\| df(x_0+k;h) - df(x_0;h) - v(h,k) \| \leqslant \varepsilon \|h\| \cdot \|k\|$$

Une telle application v est appelée différentielle seconde bilinéaire de f au point x_0 .

Cette définition entraîne aussitôt que v est identique à l'application bilinéaire $(h,k) \to u_k(h)$, et par suite que la différentielle seconde bilinéaire, si elle existe, est unique et continue ; en effet, la relation (1) étant valable pour tout $h \in E$, équivaut, d'après la définition de la norme dans $\mathcal{L}(E,F)$, à

$$\| d_{x_0+k}f - d_{x_0}f - v_k \| \leqslant \varepsilon \|k\|$$

en désignant par v_k l'application linéaire (nécessairement continue) $h \to v(h,k)$; mais cette relation signifie que $k \to v_k$ est précisément la différentielle de l'application $x \to d_x f$ au point x_0 .

On notera que, comme toutes les fonctions de h qui figurent au premier membre de (1) sont linéaires, il revient au même de supposer la relation (1) vérifiée pour tout $h \in E$ ou seulement pour tout h tel que $\|h\| \leqslant r$.

La valeur, pour $(h,k) \in E \times E$, de la différentielle seconde bilinéaire d'une fonction f au point x_0 , se note $d^2f(x_0;h,k)$; la <u>différentielle seconde bilinéaire</u> elle-même, c'est-à-dire l'application $(h,k) \to d^2f(x_0;h,k)$, se note $d^2_{x_0} f$, ou simplement d^2f si aucune confusion n'en peut résulter ; pour tout $x_0 \in A$ où f est deux fois différentiable, la différentielle $d^2_{x_0} f$ est un élément de <u>l'espace</u> $\mathcal{L}_2(E,F)$ <u>des applications bilinéaires continues de</u> $E \times E$ <u>dans</u> F ; la <u>norme</u> $\| d^2_{x_0} f \|$ de cette différentielle est la norme définie dans $\mathcal{L}_2(E,F)$ (Livre VI), c'est-à-dire que $\| d^2_{x_0} f \| = \sup_{\|h\| \leq 1, \|k\| \leq 1} \| d^2f(x_0;h,k) \|$.

<u>Exemples</u>. 1) Prenons pour E le corps des scalaires. Si une application f d'une partie ouverte A de E dans F est continument différentiable, on sait (§1) qu'en tout point $\xi \in A$, sa différentielle est $df(\xi,\zeta) = f'(\xi).\zeta$; on peut ici identifier $\mathcal{L}(E,F)$ à F et l'application $\xi \to d_\xi f$ à f' ; pour que f soit deux fois différentiable au point ξ_0 , il faut et il suffit donc que la dérivée seconde $f''(\xi_0)$ existe ; la différentielle seconde bilinéaire au point ξ_0 est alors l'application $(h,k) \to f''(\xi_0)hk$.

Plus généralement, si E est un espace à n dimensions sur le corps des scalaires, qu'on peut identifier à $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$), la différentielle d'une fonction f définie dans une partie ouverte de E , à valeurs dans F , est l'application $(h_i) \to \sum_{i=1}^{n} D_i f(x).h_i$; on peut ici identifier $\mathcal{L}(E,F)$ à F^n , et l'application $x \to d_x f$ à $x \to (D_i f(x))$; pour que f soit deux fois différentiable au point x_0 , il faut et il suffit donc (§1,prop.3) que chacune des fonctions $D_i f$ soit différentiable en ce point ; la différentielle seconde bilinéaire de f au point x_0 est alors l'application

$$((h_i),(k_i)) \to \sum_{i,j=1}^{n} D_j(D_i f(x_0))h_i k_j \quad .$$

2) Une application <u>linéaire</u> continue u de E dans F est deux fois différentiable et a une différentielle <u>nulle</u> en tout point : on a en effet $d_x u = u$ (élément constant de $\mathcal{L}(E,F)$) quel que soit $x \in E$. Réciproquement, si une application deux fois différentiable f de E dans F a une différentielle seconde bilinéaire nulle en tout point, sa différentielle première est une application linéaire u <u>indépendante de</u> x (§ 1, cor. du th.2) ; la différentielle première de f-u est donc nulle, ce qui, par application du même corollaire, entraîne que f est une application <u>linéaire affine</u> $x \to a+u(x)$, où a est constant.

2. <u>Différentielle seconde complète</u>. Soit f une application continument différentiable d'une partie ouverte A de E dans F . L'application $(x,h) \to df(x;h)$ est une application continue de $A \times E$ dans F ; si f est deux fois différentiable au point $x_0 \in A$, l'application $(x,h) \to df(x,h)$ est <u>différentiable</u> en tout point (x_0,h) de $A \times E$ (h quelconque). En effet, la différentielle partielle de cette application par rapport à h existe en tout point (x,h) de $A \times E$ et est égale à l'application $\ell \to df(x;\ell)$, et l'application $x \to d_x f$ est continue dans A , donc $(x,h) \to d_x f$ est continue dans $A \times E$. D'autre part, la différentielle partielle par rapport à x de l'application $(x,h) \to df(x,h)$ existe en tout point (x_0,h) et est égale à l'application $k \to d^2f(x_0;h,k)$ d'après (1) ; l'application du th.3 du §1 prouve la proposition et montre que la différentielle de $(x,h) \to df(x;h)$ au point (x_0,h) est l'application

$$(2) \qquad (k,\ell) \to d^2f(x_0;h,k)+df(x_0;\ell)$$

On dit que cette application est la <u>différentielle seconde complète</u> de f au point (x_0,h) .

L'existence de cette différentielle est donc une conséquence de celle de la différentielle seconde bilinéaire. Inversement, si l'application $(x,h) \to df(x;h)$ est différentiable au point (x_0,h) quel que soit $h \in E$, la fonction f n'est pas nécessairement deux fois différentiable au point x_0 (voir exerc.2). Elle l'est toutefois lorsque E a un nombre fini de dimensions, car alors l'application $(x,h) \to df(x;h)$ n'est autre que

$$(x,h_1,..,h_n) \to \sum_{i=1}^{n} D_i f(x).h_i$$

et en donnant à tous les h_i sauf un la valeur 0, on voit que la condition pour que cette application soit différentiable au point (x_0,h) pour tout h, est que $x \to D_i f(x)$ soit différentiable au point x_0 pour tous les indices i ; mais cela entraîne que f est deux fois différentiable au point x_0.

Le résultat que nous venons d'obtenir résout le problème du calcul de la différentielle seconde bilinéaire d'une fonction composée :

Proposition 1. Soient E,F,G trois espaces normés, f une application continument différentiable d'un voisinage d'un point $x_0 \in E$ dans F, g une application continument différentiable d'un voisinage du point $y_0=f(x_0)$ dans G. Si f est deux fois différentiable au point x_0 et g deux fois différentiable au point y_0, la fonction composée $\varphi = g \circ f$ est deux fois différentiable au point x_0, et on a

(3) $$d^2\varphi(x_0;h,k)=d^2g(f(x_0);df(x_0,h),df(x_0;k))+dg(f(x_0);d^2f(x_0;h,k))$$

En effet, on a (§1,th.1) $d\varphi(x;h)=dg(f(x));df(x;h))$. La différentielle partielle $d^2\varphi(x_0;h,k)$ est la différentielle partielle par rapport à x de $d\varphi(x;h)$; si on pose $u=f(x)$, $v=df(x;h)$ on a $d\varphi(x;h)=dg(u;v)$. En appliquant le théorème des fonctions composées et la formule (2) à cette fonction de x, il vient $d^2\varphi(x_0;h,k)=d^2g(u;v\ ,du)+dg(u;dv)$, où il faut remplacer du et dv par $du(x_0;k)$ et $dv(x_0;k)$ respectivement, ce qui donne bien la formule (3) .

On voit en outre que la différentielle seconde complète de φ est $(k,\ell) \longrightarrow d^2g(f(x_0);df(x_0;h),df(x_0;k))+dg(f(x_0);d^2f(x_0;h;k)+df(x_0;\ell))$. Autrement dit, elle s'obtient en remplaçant, dans la différentielle seconde complète de g au point $f(x_0)$, l'accroissement h par $df(x_0;h)$, l'accroissement k par $df(x_0;k)$, et l'accroissement ℓ par la différentielle seconde complète de f au point (x_0,h) .

Corollaire 1. Soient E et F deux espaces normés sur le corps $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) f une application continue d'un voisinage de $\xi_0 \in \mathbb{R}$ (resp. $\xi_0 \in \mathbb{C}$) dans E , g une application continument différentiable d'un voisinage de $f(\xi_0)$ dans F . Si f admet une dérivée seconde au point ξ_0 , et si g est deux fois différentiable au point $f(\xi_0)$, la fonction composée $g\circ f = \varphi$ admet au point ξ_0 une dérivée seconde

$$\varphi''(\xi_0)=d^2g(f(\xi_0);f'(\xi_0),f'(\xi_0))+dg(f(\xi_0);f''(\xi_0))$$

Corollaire 2. Soient E,F,G trois espaces normés, u une application linéaire continue de E dans F , f une application continument différentiable d'un voisinage du point $b=a+u(x_0)\in F$ dans G . Si f est deux fois différentiable au point b , la fonction $g(x)=f(a+u(x))$ est deux fois différentiable au point x_0 , et on a

$$d^2g(x_0;h,k) = d^2f(a+u(x_0);u(h),u(k)) . \tag{4}$$

En effet, on a $du(x_0;h)=u(h)$ et $d^2u(x_0;h,k) = 0$.

3. Propriétés des différentielles secondes. Proposition 2. Soient E et F deux espaces normés, f une application continument différentiable d'un voisinage de $x_0 \in E$ dans F . Si f est deux fois différentiable au point x_0 , et si on pose $\Delta^2f(x_0;h,k)= \Delta f(x_0+k;h)- \Delta f(x_0;h)=f(x_0+h+k)-f(x_0+k)-$ $-f(x_0+h)+f(x_0)$ (différence seconde de f au point x_0), pour tout $\varepsilon>0$,

il existe $r>0$ tel que les conditions $\|h\| \leqslant r$ et $\|k\| \leqslant r$ entraînent

(5) $$\| \Delta^2 f(x_0;h,k) - d^2f(x_0;h,k) \| \leqslant \varepsilon \,.\, (\|h\| + \|k\|)^2$$

Par hypothèse, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $r>0$ tel que les relations $\|h\| \leqslant r$, $\|k\| \leqslant r$ entraînent

(6) $$\| df(x_0+k;h) - df(x_0;h) - d^2f(x_0;h,k) \| \leqslant \varepsilon \|h\| \,.\, \|k\|$$

Considérons la fonction de la variable réelle t , définie pour $0 \leqslant t \leqslant 1$: $\varphi(t) = f(x_0+th+k) - f(x_0+th)$; on a $\Delta^2 f(x_0;h,k) = \varphi(1) - \varphi(0)$. D'autre part, on a $\varphi'(t) = df(x_0+th+k;h) - df(x_0+th;h)$. Si on suppose h et k fixes, tels que $\|h\| \leqslant \frac{r}{2}$, $\|k\| \leqslant \frac{r}{2}$, et qu'on applique (6) en y remplaçant successivement k par $th+k$ et par th , il vient, en faisant la différence

$$\| df(x_0+th+k;h) - df(x_0+th;h) - d^2f(x_0;h,th+k) + d^2f(x_0;h;th) \| \leqslant 2\varepsilon \|h\| \,.\, (\|th\| + \|k\|)$$

et, tenant compte de ce que d^2f est bilinéaire

$$\| df(x_0+th+k;h) - df(x_0+th;h) - d^2f(x_0;h,k) \| \leqslant 2\varepsilon \|h\| (\|h\| + \|k\|)$$

Cela s'écrit encore

$$\| \varphi'(t) - d^2f(x_0;h,k) \| \leqslant 2\varepsilon \|h\| (\|h\| + \|k\|)$$

Par application du théorème des accroissements finis, il vient

(7) $$\| \varphi(1) - \varphi(0) - d^2f(x_0;h,k) \| \leqslant 2\varepsilon \|h\| (\|h\| + \|k\|)$$

c'est-à-dire

(8) $$\| \Delta^2 f(x_0;h,k) - d^2f(x_0;h,k) \| \leqslant 2\varepsilon \|h\| (\|h\| + \|k\|)$$

ce qui entraîne l'inégalité (5) .

Cette proposition entraîne le théorème fondamental suivant :

Théorème 1. Si une fonction f est deux fois différentiable au point $x_0 \in E$, on a identiquement

(9) $$d^2f(x_0;h,k) = d^2f(x_0;k,h)$$

(autrement dit, la différentielle seconde bilinéaire est une application bilinéaire <u>symétrique</u> de $E \times E$ dans F) .

D'après l'homogénéité d'une forme bilinéaire, il suffit de démontrer la relation (9) pour $\|h\| = \|k\| = 1$. Pour tout $\lambda > 0$, on a évidemment $\Delta^2 f(x_0; \lambda h, \lambda k) = \Delta^2 f(x_0; \lambda k, \lambda h)$. On déduit alors de la prop.2 que

$$\lambda^2 \| d^2 f(x_0;h,k) - d^2 f(x_0;k,h) \| \leqslant 4\varepsilon\lambda^2$$

où ε tend vers 0 avec λ ; d'où le théorème, en divisant par λ^2 les deux membres et faisant tendre λ vers 0 .

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> f <u>est deux fois différentiable au point</u> x_0 , <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $r > 0$ <u>tel que</u> $\|h\| \leqslant r$, $\|k\| \leqslant r$ <u>entraînent</u>

(5 bis) $$\| \Delta^2 f(x_0;h,k) - d^2 f(x_0;h,k) \| \leqslant \varepsilon \|h\| . \|k\|$$

En effet, il existe $r > 0$ tel que $\|h\| \leqslant r$, $\|k\| \leqslant r$ entraînent, d'après (8)

$$\| \Delta^2 f(x_0;h,k) - d^2 f(x_0;h,k) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|h\| (\|h\| + \|k\|)$$

Si $\|h\| \leqslant \|k\|$, on peut remplacer le second membre par $\varepsilon \|h\| . \|k\|$ qui en est un majorant ; sinon, d'après (9), on remarque que le second membre ne change pas quand on y permute h et k , et par suite on a dans tous les cas l'inégalité (5 bis).

Supposons en particulier que E soit un espace à n dimensions, identifié à $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) : si on tient compte de la forme de la différentielle seconde de f dans ce cas, on voit que le th.1 entraîne le corollaire suivant :

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> f <u>une application continûment différentiable d'un voisinage de</u> $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (resp. $x_0 \in \mathbb{C}^n$) <u>dans un espace normé</u> F . <u>Si, au point</u> x_0 , <u>chacune des n dérivées partielles</u> $D_i f$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>est différentiable, on a</u>

(10) $$D_iD_jf(x_o) = D_jD_if(x_o)$$

pour tout couple d'indices i,j .

On dit que $D_iD_jf(x_o)$ est la dérivée partielle seconde d'indices i et j de f au point x_o ; on la note encore $D^2_{ij}f(x_o)$, ou $f''_{ij}(x_o)$ ou (si aucune confusion n'en résulte) $f''_{x_ix_j}(x_o)$, ou enfin $\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} f(x_o)$.

Si on ne suppose pas les D_if différentiables au point x_o , les dérivées secondes $D_i(D_jf(x_o))$ peuvent toutes exister, sans satisfaire aux relations (10) (exerc.3) .

La prop.2 montre que l'existence de la différentielle seconde en un point suffit pour limiter la différence seconde en ce point. Si on suppose en outre que la différentielle seconde existe en tout point assez voisin de x_o , on a le résultat plus précis :

Proposition 3. Soit f une fonction deux fois différentiable en tout point d'un ensemble ouvert A contenant le parallélogramme P formé des points $x+uh+vk$ $(0 \leqslant u \leqslant 1 \,,\; 0 \leqslant v \leqslant 1)$. Pour tout point $x_o \in A$, on a

(11) $$\| \Delta^2 f(x;h,k) - d^2f(x_o;h,k) \| \leqslant \|h\| \,.\, \|k\| \,.\, \sup_{z \in P} \| d^2_z f - d^2_{x_o} f \|$$

Considérons en effet la fonction

$$g(y) = f(x+y+k) - f(x+y) - d^2f(x_o;y,k)$$

et appliquons-lui le théorème des accroissements finis (§ 1, th.2) lorsque y décrit le segment d'extrémités 0 et h . On a

$$\|g(h)-g(0)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} \|dg(uh;h)\|$$

Mais on a $g(h)-g(0) = \Delta^2 f(x_o;h,k) - d^2f(x_o;h,k)$, et

$$dg(z;h) = df(x+z+k;h) - df(x+z;h) - d^2f(x_o;h,k)$$

et en appliquant de nouveau à la fonction $t \to df(x+z+t;h) - d^2f(x_o;h,t)$ le théorème des accroissements finis lorsque t décrit le segment d'extrémités 0 et k , on a

$$\| dg(z;h) \| \quad \sup_{0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1} \| d^2 f(x+uh+vk;h,k) - d^2 f(x_0 : h,k) \|$$

pour $z = uh$ quelconque ; d'où la formule (11), en introduisant la norme de la différentielle seconde.

Etant donnée une application f d'une partie ouverte A de E dans F , deux fois différentiable en tout point de A , on dit que f est <u>deux fois continument différentiable</u> au point $x_0 \in A$, si l'application $x \to d_x^2 f$ de A dans $\mathcal{L}_2(E,F)$ est continue au point x_0 .

<u>Proposition 4</u>. <u>Soit une fonction deux fois différentiable en tout point d'un voisinage d'un point</u> x_0 . <u>Pour que f soit deux fois continument différentiable au point</u> x_0 , <u>il faut et il suffit que</u>

$$\text{(12)} \qquad \lim \frac{\| f(y+z-x) - f(y) - f(z) + f(x) - d^2 f(x_0; y-x, z-x) \|}{\| y-x \| \cdot \| z-x \|} = 0$$

<u>lorsque le point</u> (x,y,z) <u>tend vers</u> (x_0, x_0, x_0) .

La condition est <u>nécessaire</u> d'après la formule (11), car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que la relation $\| x - x_0 \| \leqslant r$ entraîne $\| d_x^2 f - d_{x_0}^2 f \| \leqslant \varepsilon$; d'après (11), pour $\| h \| \leqslant \frac{r}{2}$ et $\| k \| \leqslant \frac{r}{2}$, on aura

$$\| \Delta^2 f(x;h,k) - d^2 f(x_0;h,k) \| \leqslant \varepsilon \| h \| \cdot \| k \| .$$

La condition est <u>suffisante</u> ; supposons en effet que, pour $\| x - x_0 \| \leqslant r$, $\| h \| \leqslant r$, $\| k \| \leqslant r$, on ait $\| \Delta^2 f(x;h,k) - d^2 f(x_0;h,k) \| \leqslant \varepsilon \| h \| \cdot \| k \|$. D'après la prop.2, on peut d'autre part, pour un x donné, déterminer $r'_x > 0$ tel que $\| h \| \leqslant r'_x$ et $\| k \| \leqslant r'_x$ entraînent $\| \Delta^2 f(x;h,k) - d^2 f(x;h,k) \| \leqslant \varepsilon (\| h \| + \| k \|)^2$; pour h et k tels que $\| h \| \leqslant \min(r, r'_x)$ et $\| k \| \leqslant \min(r, r'_x)$, on aura donc

$$\| d^2 f(x;h,k) - d^2 f(x_0;h,k) \| \leqslant \varepsilon (\| h \| \cdot \| k \| + (\| h \| + \| k \|)^2)$$

En vertu de l'homogénéité des applications bilinéaires $d_x^2 f$ et $d_{x_0}^2 f$, on en déduit que, pour $\| h \| = \| k \| = 1$, on a

$$\| d^2 f(x;h,k) - d^2 f(x_0;h,k) \| \leqslant 5\varepsilon$$

c'est-à-dire $\| d^2_x f - d^2_{x_0} f \| \leqslant 5\varepsilon$ pour $\| x-x_0 \| \leqslant r$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Il se peut qu'il existe une application bilinéaire continue u de $E \times E$ dans F telle que, pour tout ε , on ait

$$\| \Delta^2 f(x_0;h,k)-u(h,k) \| \leqslant \varepsilon(\| h \| + \| k \|)^2$$

pour $\| h \|$ et $\| k \|$ assez petits, sans pour cela que la fonction f soit deux fois différentiable au point x_0 ; il se peut même que f ne soit pas différentiable aux points voisins de x_0. C'est ce qu'on vérifie par exemple lorsque E est le corps $\mathbb{R}$, et f la fonction numérique $x^3 g(x)$, où g est une fonction continue n'admettant de dérivée en aucun point ; f n'a alors de dérivée première qu'au point 0 ; en outre on a , lorsque x et y tendent vers 0

$$\lim\ (f(x+y)-f(x)-f(y))/(|x|+|y|)^2 = 0$$

comme on le vérifie aussitôt.

On dit dans ce cas que la fonction bilinéaire u est la différentielle seconde directe de f au point x_0 .

Lorsque E est l'espace à n dimensions $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), pour que f soit deux fois continument différentiable en un point x_0 , il faut et il suffit, d'après l'expression de $d^2 f$, que les $n(n+1)/2$ dérivées secondes $D^2_{ij} f$ soient continues en ce point.

4. Différentielles secondes partielles. Soit f une fonction continument différentiable définie dans une partie ouverte A d'un espace produit $E_1 \times E_2$; on sait (§1) que sa différentielle

$$d_{x_1,x_2} f = d_{1;x_1,x_2} f + d_{2;x_1,x_2} f$$

et que les applications $(x_1,x_2) \to d_{1;x_1,x_2} f$ et $(x_1,x_2) \to d_{2;x_1,x_2} f$ sont continues dans A . Si f est deux fois différentiable au point $a=(a_1,a_2)$, chacune des deux applications précédentes est différentiable en ce point, car on a

$$d_1f(x_1,x_2;h)-d_1f(a_1,a_2;h)=df(x_1,x_2;h,0)-df(a_1,a_2;h,0)$$

et par suite

$$\| d_1f(a_1+k_1,a_2+k_2;h)-d_1f(a_1,a_2;h)-d^2f(a_1,a_2;(h,0),(k_1,k_2)) \|$$
$$\leqslant \varepsilon \|h\| . (\|k_1\| + \|k_2\|)$$

pour k_1 et k_2 assez petits. Les quatre applications bilinéaires

$$(h_1,k_1) \to d^2f(a_1,a_2;(h_1,0),(k_1,0)) = d^2_{11}f(a_1,a_2;h_1,k_1)$$
$$(h_1,k_2) \to d^2f(a_1,a_2;(h_1,0),(0,k_2)) = d^2_{21}f(a_1,a_2;h_1,k_2)$$
$$(h_2,k_1) \to d^2f(a_1,a_2;(0,h_2),(k_1,0)) = d^2_{12}f(a_1,a_2;h_2,k_1)$$
$$(h_2,k_2) \to d^2f(a_1,a_2;(0,h_2),(0,k_2)) = d^2_{22}f(a_1,a_2;h_2,k_2)$$

sont appelées les <u>différentielles secondes partielles</u> de f ; $d^2_{11}f$ n'est autre que la différentielle seconde de l'application partielle $x_1 \to f(x_1,a_2)$ au point a_1 , et $d^2_{22}f$ la différentielle seconde de $x_2 \to f(a_1,x_2)$ au point a_2 ; en outre, en écrivant l'identité (th.1)

$$d^2f(a_1,a_2;(h_1,0),(0,h_2)) = d^2f(a_1,a_2;(0,h_2),(h_1,0))$$

il vient

$$(13) \qquad d^2_{21}f(a_1,a_2;h_1,h_2) = d^2_{12}f(a_1,a_2;h_2,h_1)$$

ce qui montre que les différentielles secondes $d^2_{12}f$ et $d^2_{21}f$ ne sont pas essentiellement distinctes : on exprime cette propriété en disant qu'on peut <u>intervertir l'ordre des différentiations partielles</u> ; on voit en outre (prop.2) que, pour $h_1 \in E_1$ et $h_2 \in E_2$ assez petits, on a

$$\| f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(a_1,a_2)-d^2_{21}f(a_1,a_2;h_1,h_2) \|$$
$$\leqslant \varepsilon(\|h_1\| + \|h_2\|)^2$$

ε ayant été pris arbitrairement petit.

Nous avons supposé jusqu'ici que f était deux fois différentiable.

Plus généralement, supposons que les différentielles premières partielles $d_{1;x_1,x_2}f$ et $d_{2;x_1,x_2}f$ existent et soient fonctions continues de (x_1,x_2) dans un voisinage de (a_1,a_2). Si l'application $(x_1,x_2) \to d_{1;x_1,x_2}f$ admet au point (a_1,a_2) une différentielle partielle par rapport à x_1 , $k_1 \to u_{k_1}$, l'application $(h_1,k_1) \to u_{k_1}(h_1)$ n'est autre que la différentielle seconde de l'application partielle $x_1 \to f(x_1,a_2)$ au point a_1 ; on l'écrira encore $(h_1,k_1) \to d^2_{11}f(a_1,a_2;h_1,k_1)$ ou $d^2_{11;a_1,a_2}f$. Si l'application $(x_1,x_2) \to d_{1;x_1,x_2}f$ admet une différentielle partielle par rapport à x_2 , $k_2 \to v_{k_2}$, v_{k_2} est un élément de $\mathcal{L}(E_1,F)$ et l'application $k_2 \to v_{k_2}$ de E_2 dans $\mathcal{L}(E_1,F)$ est continue, donc on voit comme au n°1 que l'application bilinéaire $(h_1,k_2) \to v_{k_2}(h_1)$ est continue dans $E_1 \times E_2$; on la note encore $(h_1,h_2) \to d^2_{21}f(a_1,a_2;h_1,k_2)$ ou $d^2_{21;a_1,a_2}f$. Notations analogues pour les deux autres différentielles partielles secondes de f . Cela étant, le th. des différentielles partielles (§ 1,th.3) montre que, si $d^2_{11;a_1,a_2}f$ existe, et si, dans un voisinage de (a_1,a_2) l'application $(x_1,x_2) \to d^2_{21;x_1,x_2}f$ est continue, l'application $(x_1,x_2) \to d_{1;x_1,x_2}f$ sera différentiable au point (a_1,a_2) ; de même, si $d^2_{22;a_1,a_2}f$ existe, et si l'application $(x_1,x_2) \to d^2_{12;x_1,x_2}f$ est continue au voisinage de (a_1,a_2), l'application $(x_1,x_2) \to d_{2;x_1,x_2}f$ est différentiable au point (a_1,a_2) ; enfin, si toutes ces conditions sont remplies f est <u>deux fois différentiable</u> au point (a_1,a_2), ce qui entraîne en particulier l'identité (13) pour les différentielles secondes partielles. Mais nous allons voir qu'en fait cette identité subsiste sans supposer l'existence des différentielles secondes $d^2_{11}f$ et $d^2_{22}f$:

<u>Proposition 5. Si, dans un voisinage de</u> (a_1,a_2) <u>f est continument différentiable, et si l'application</u> $x_2 \rightarrow d_{1;x_1,x_2}f$ <u>est continument différentiable dans ce voisinage, l'application</u> $x_1 \rightarrow d_{2;x_1,a_2}f$ <u>est différentiable au point</u> a_1 , <u>et on a la relation</u> (13)

Considérons en effet la fonction

$$g(x_1)=f(a_1+x_1,a_2+h_2)-f(a_1+x_1,a_2)-d^2_{21}f(a_1,a_2;x_1,h_2)$$

et appliquons-lui le théorème des accroissements finis lorsque x_1 varie sur le segment d'extrémités 0 et h_1 . On a

$$\|g(h_1)-g(0)\| \leqslant \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} dg(uh_1;h_1)$$

Mais $dg(y_1;h_1)=d_1f(a_1+y_1,a_2+h_2;h_1)-d_1f(a_1+y_1,a_2;h_1)-d^2_{21}f(a_1,a_2;h_1,h_2)$ donc une deuxième application du théorème des accroissements finis donne

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\|dg(uh_1;h_1)\| \leqslant \sup_{0\leqslant u\leqslant 1,\,0\leqslant v\leqslant 1}\|d^2_{21}(a_1+uh_1,a_2+vh_2;h_1,h_2)-$$
$$-d^2_{21}(a_1,a_2;h_1,h_2)\| \leqslant \varepsilon\,\|h_1\|\cdot\|h_2\|$$

si h_1 et h_2 sont assez petits, d'après la continuité de $(x_1,x_2)\longrightarrow d^2_{21;x_1;x_2}f$. On a donc, pour h_1 et h_2 assez petits

$$\|f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)+f(a_1,a_2)-d^2_{21}f(a_1,a_2;h_1,h_2)\|$$
$$\leqslant \varepsilon\,\|h_1\|\cdot\|h_2\|$$

Mais d'après la définition de la différentielle première, pour h_2 assez petit, on a

$$\|f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)-d_2f(a_1+h_1;a_2;h_2)\| \leqslant \varepsilon'\,\|h_2\|$$
$$\|f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-d_2f(a_1,a_2;h_2)\| \leqslant \varepsilon''\,\|h_2\|$$

ε' et ε'' tendant vers 0 avec h_2 . Laissant h_1 fixe (assez petit) et remplaçant h_2 par th_2 dans ces trois inégalités, h_2 restant fixe et t variant de 0 à 1 , il vient

$$\| t d_2 f(a_1+h_1, a_2; h_2) - t d_2 f(a_1, a_2; h_2) - t d^2_{21} f(a_1, a_2; h_1, h_2) \| \leqslant$$
$$\leqslant |t| (\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon \|h_1\|) \|h_2\|$$

ε' et ε'' tendant vers 0 avec t ; en divisant cette inégalité par $|t|$, puis faisant tendre t vers 0 , on obtient

$$\|d_2 f(a_1+h_1, a_2; h_2) - d_2 f(a_1, a_2; h_2) - d^2_{21} f(a_1, a_2; h_1, h_2)\| \leqslant \varepsilon \|h_1\| . \|h_2\|$$

pour h_1 et h_2 assez petits ; mais cela signifie que l'application $x_1 \to d_{2;x_1,a_2} f$ est différentiable au point a_1 , et que sa différentielle $k_1 \to u_{k_1}$ est telle que $u_{k_1}(h_2) = d^2_{21} f(a_1, a_2; k_1, h_2)$, d'où l'identité (13) .

Corollaire. Soit f une application d'un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (resp. $x_0 \in \mathbb{C}^n$) dans un espace normé F . Si les dérivées partielles $D_i(D_j f)$ et $D_j(D_i f)$ existent et sont continues par rapport à (ξ_i, ξ_j) dans un voisinage de (ξ_{io}, ξ_{jo}) , elles sont égales dans ce voisinage.

Un exemple de ce corollaire est fourni par la fonction $g(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^y f(u,v)dv \right) du$ de deux variables réelles, f étant continue dans un voisinage de (0,0). On a $\frac{\partial g}{\partial x} = \int_0^y f(x,v)dv$, puis $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = f(x,y)$; d'autre part, par dérivation sous le signe $\int$, il vient $\frac{\partial g}{\partial y} = \int_0^x f(u,y)du$, donc $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = f(x,y)$. Mais les dérivées secondes $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ n'existent en général que si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent elles-mêmes

5. Différentielles secondes des fonctions implicites. Avec les notations du th.2 du § 2, on a vu que la fonction implicite $\varphi(x_2)$ définie par la relation $f(x_1, x_2) = 0$ est une application continument différentiable dans un voisinage du point a_2 , et si on pose $d\varphi(x_2; h) = u_{x_2}(h)$, on a l'identité en x_2 et h

$$d_1 f(\varphi(x_2), x_2; u_{x_2}(h)) + d_2 f(\varphi(x_2), x_2; h) = 0$$

et le premier membre de cette identité étant une fonction linéaire continue de h , on peut aussi l'écrire sous la forme

(14) $$g(x_2,u_{x_2})+ d_{2;\varphi(x_2),x_2}f = 0$$

où, pour tout x_2 voisin de a_2 , $g(x_2,u_{x_2})$ est l'élément $h \to d_1f(\varphi(x_2),x_2;u_{x_2}(h))$ de $\mathcal{L}(E_2,F)$. On va en déduire que si f est deux fois continument différentiable au point (a_1,a_2) , φ est deux fois continument différentiable au point a_2 . En effet, l'application $(x_2,u) \to g(x_2,u)$ de $E_2 \times \mathcal{L}(E_2,F)$ dans $\mathcal{L}(E_2,F)$ est alors continument différentiable au voisinage de (a_2,u_{a_2}), et sa différentielle partielle par rapport à u lui est identique, donc inversible par hypothèse ; en outre, l'application $x_2 \to d_{2;\varphi(x_2),x_2}f$ est aussi continument différentiable. Si alors on considère l'application $x_2 \to u_{x_2}$ comme une fonction implicite définie par la relation (14), le th.2 du § 2 prouve que c'est une fonction différentiable au point a_2 . En pratique, la différentielle seconde de φ s'obtiendra comme suit : on a identiquement $f(\varphi(x_2),x_2)=0$ dans un voisinage de a_2 ; la différentielle seconde de cette fonction de x_2 est donc nulle au point a_2 , ce qui donne, par application de la prop.1 et en vertu de la définition des différentielles secondes partielles, la relation

$$\begin{aligned} d^2_{11}f(a_1,a_2;d\varphi(a_2,h),d\varphi(a_2,k)) &+ d^2_{21}f(a_1,a_2;d\varphi(a_2,h),k) + \\ &+ d^2_{12}f(a_1,a_2;h,d\varphi(a_2,k))+ d^2_{22}f(a_1,a_2;h,k) + \\ &\quad + d_1f(a_1,a_2;d^2\varphi(a_2;h,k)) = 0 \end{aligned}$$

d'où on tire $d^2\varphi(a_2;h,k)$ en utilisant le fait que l'application linéaire u_{a_1,a_2} est inversible.

6. Différentielles d'ordre quelconque. On généralise aisément par récurrence la définition de la différentielle seconde bilinéaire. Supposons définie en tout point x d'un voisinage d'un point x_o, la différentielle $(n-1)$-ème multilinéaire de f, application multilinéaire continue de E^{n-1} dans F, notée $(h_1,\ldots,h_{n-1}) \to d^{n-1}f(x;h_1,\ldots,h_{n-1})$ ou $d_x^{n-1}f$. Cette application est un élément de l'espace normé $\mathcal{L}_{n-1}(E,F)$ des applications multilinéaires continues de E^{n-1} dans F. Supposons en outre que l'application $x \to d_x^{n-1}f$ soit continue au voisinage de x_o. On dit alors que f est n fois différentiable au point x_o s'il existe une application multilinéaire v de E^n dans F telle que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que la relation $\|h_n\|\leqslant r$ entraîne, quels que soient $h_1,h_2,\ldots,h_{n-1}$ dans E

$$(15)\qquad \|d^{n-1}f(x_o+h_n;h_1,\ldots,h_{n-1})-d^{n-1}f(x_o;h_1,\ldots,h_{n-1}) -v(h_1,h_2,\ldots,h_n)\| \leqslant \varepsilon \|h_1\|\cdot\|h_2\|\ldots\|h_n\|$$

Une telle application v est appelée différentielle n-ème multilinéaire de f au point x_o.

On déduit aussitôt de (15) que l'application multilinéaire de degré $n-1$, $(h_1,\ldots,h_{n-1}) \to v(h_1,\ldots,h_{n-1},h_n)$ est continue pour tout h_n assez petit ; en la désignant par v_{h_n}, (15) s'écrit, en tenant compte de la définition de la norme dans $\mathcal{L}_{n-1}(E,F)$

$$\| d^{n-1}_{x_o+h_n}f - d^{n-1}_{x_o}f - v_{h_n}\| \leqslant \varepsilon \|h_n\|$$

et prouve par suite que l'application $h_n \to v_{h_n}$ n'est autre que la différentielle au point x_o de l'application $x \to d_x^{n-1}f$ de E dans $\mathcal{L}_{n-1}(E,F)$. On en déduit que cette différentielle est unique et fonction continue de h_n, et par suite que v est une application multilinéaire continue de E^n dans F. On note sa valeur, pour $(h_i)\in E^n$, par $d^nf(x_o;h_1,\ldots,h_n)$; la différentielle n-ème multilinéaire se note

$d^n_{x_0} f$, ou simplement $d^n f$ si aucune confusion n'en résulte ; c'est un élément de <u>l'espace</u> $\mathcal{L}_n(E,F)$ <u>des applications multilinéaires continues de</u> E^n <u>dans</u> F ; la <u>norme</u> $d^n_{x_0} f$ est égale à $\sup_{\|h_i\| \leq 1} \| d^n f(x_0;h_1,\ldots,h_n) \|$.

La différentielle n-ème multilinéaire d'une fonction composée se calcule de proche en proche à l'aide du th.1 du § 1, comme nous l'avons montré pour la différentielle seconde.

<u>Proposition 6</u>. <u>La différentielle n-ème multilinéaire</u> $(h_1,\ldots,h_n) \to d^n f(x_0;h_1,h_2,\ldots,h_n)$ <u>est une application multilinéaire symétrique</u>.

Nous le démontrerons par récurrence sur n , la proposition étant établie pour $n=2$ (th.1). Si on donne à $h_1,\ldots,h_{n-2}$ des valeurs fixes, et qu'on pose $g(x)=d^{n-2}f(x;h_1,\ldots,h_{n-2})$, on a $d^n f(x_0;h_1,\ldots,h_n) = d^2 g(x_0;h_{n-1},h_n)$, comme il résulte de l'inégalité (15). D'après le th.1 appliqué à g , on a donc

$$d^n f(x_0;h_1,\ldots,h_{n-2},h_{n-1},h_n) = d^n f(x_0;h_1,\ldots,h_{n-2},h_n,h_{n-1})$$

On montrerait de même qu'on peut permuter h_i et h_n , quel que soit l'indice $i<n$. D'autre part, on peut permuter les $n-1$ premiers arguments de $d^n f$ car, par hypothèse, cela ne change pas la fonction $x \to d^{n-1}f(x;h_1,\ldots,h_{n-1})$ dont $d^n f$ (considérée comme fonction de h_n) est la différentielle première. Toute permutation des n arguments de $d^n f$ revenant à permuter h_n et un h_i d'indice $\leq n$, puis à faire une permutation arbitraire des $n-1$ premiers arguments dans la fonction multilinéaire obtenue, la proposition est démontrée.

On démontre aussi sans peine les analogues des prop.2 et 3 , que nous n'aurons pas à utiliser (cf. exerc. 4).

Lorsqu'une fonction n fois différentiable f est définie dans un espace produit de p espaces normés E_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$, on définit comme ci-dessus la notion de <u>différentielle n-ème partielle</u> : soient $h_i = (h_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant p}$ n accroissements quelconques de $x = (x_j)$. Pour toute suite $(j_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de n indices appartenant à l'intervalle $[1,p]$, on désigne par $d^n_{j_1 j_2 \ldots j_n} f(a_1, \ldots, a_p; h_{1 j_1}, h_{2 j_2}, \ldots, h_{n j_n})$ la différentielle n-ème de f au point (a_j), dans laquelle on remplace chacun des accroissements h_i par le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, à l'exception de celle d'indice j_i, égale à celle $h_{i j_i}$ de h_i ; on obtient une fonction multilinéaire des n arguments $h_{k j_k}$, qu'on appelle <u>différentielle n-ème partielle d'indices</u> $j_1, \ldots, j_n$ au point (a_j). Considérée comme fonction de $h_{n j_n}$, cette différentielle n'est autre que la différentielle première au point a_{j_n} de l'application

$$x_{j_n} \to d^{n-1}_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1}} f(a_1, \ldots, x_{j_n}, \ldots, a_n; h_{1, j_1}, \ldots, h_{n-1, j_{n-1}})$$

comme il résulte de la relation (15). La prop.6 montre en outre que si, dans l'expression $d^n_{j_1 \ldots j_n} f(a_1, \ldots, a_n; h_{1 j_1}, \ldots, h_{n j_n})$ on permute d'une manière quelconque les indices j_k, l'expression ne change pas. Enfin, la différentielle n-ème de f est la somme des différentielles partielles correspondant à toutes les p^n suites distinctes (j_k).

En particulier si $E = \mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{C}^p$), on a

$$d^n f(a_1, \ldots, a_p; h_1, \ldots, h_n) = \sum_{(j_k)} D^n_{j_1 j_2 \ldots j_n} f(a_1, \ldots, a_p) h_{1 j_1} \ldots h_{n j_n}$$

où $D^n_{j_1 \ldots j_n} f$ est la <u>dérivée partielle n-ème d'indices</u> (j_k) de f au point (a_j), définie par récurrence comme égale à $D_{j_n}(D^{n-1}_{j_1 \ldots j_{n-1}} f)$. Deux dérivées partielles qui se déduisent l'une de l'autre par permutation de leurs indices sont égales. Aussi, si r_k est le nombre d'indices égaux à k (pour $1 \leqslant k \leqslant p$) dans la suite (j_i), on écrit d'ordinaire la dérivée partielle correspondant à cette suite d'indices

$D_1^{r_1} D_2^{r_2} \ldots D_p^{r_p} f$ ou, si aucune confusion n'en résulte, $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+\cdots+r_p}}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \ldots \partial x_p^{r_p}} f$.

7. Différentielles polynomes. Soit f une fonction n fois différentiable au point $x_0 \in E$; si, dans la différentielle n-ème multilinéaire $d^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n)$, on donne une même valeur h à tous les accroissements h_i , on obtient une application polynome de degré n de E^n dans F (Livre VI), $h \to d^n f(x_0; h, h, \ldots, h)$, qu'on note aussi simplement $h \to d^n f(x_0; h)$ et qu'on appelle différentielle polynome n-ème de f au point x_0 .

On peut aussi définir cette différentielle par récurrence : pour un accroissement h fixe, considérons l'application $x \to d^{n-1}(x;h)$ d'un voisinage de x_0 dans F ; cette fonction est différentiable au point x_0 , et si on donne à l'accroissement qui figure dans sa différentielle en ce point la valeur h , on obtient $d^n f(x_0; h)$.

Comme la différentielle multilinéaire n-ème est symétrique (prop.6), la donnée de la différentielle polynome détermine entièrement la différentielle multilinéaire : si on remplace h par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i$, où les h_i sont n vecteurs quelconques, et les λ_i des scalaires arbitraires, $d_n f(x_0; h)$, considérée comme fonction des n scalaires λ_i , est une fonction polynome de degré n , et le coefficient de $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ dans le développement de cette fonction est égal à $n! d^n f(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Ce fait permet de simplifier le calcul de la différentielle multilinéaire d'une fonction, en calculant sa différentielle polynome, qui est souvent formellement plus commode.

Par exemple si f est définie dans un produit de p espaces E_j , la différentielle polynome de f est égale à la somme des p^n différentielles partielles $d^n_{j_1 j_2 .. j_n} f(x_0; h_{j_1}, h_{j_2}, .., h_{j_n})$, si on a posé $h=(h_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$; toutes les fonctions de h ainsi obtenues, correspondant à des suites (j_k) qui ne diffèrent que par l'ordre des termes, sont *égales* ; si r_i est le nombre des termes de la suite (j_k) égaux à i pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on désigne ces fonctions par la notation $d_1^{r_1} d_2^{r_2} .. d_p^{r_p} f(x_0; h_1, .., h_p)$.

Cette notation permet de définir les *opérateurs différentiels polynomes* . Etant donné un polynome homogène de degré n , par rapport aux p variables scalaires ξ_i , $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum a_{r_1 r_2 .. r_p} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \dots \xi_p^{r_p}$ $(\sum_{i=1}^{p} r_i = n)$, où les coefficients $a_{r_1 r_2 .. r_p}$ sont des scalaires, l'opérateur différentiel noté $\varphi(d_1, .., d_p) = \sum a_{r_1 r_2 .. r_p} d_1^{r_1} d_2^{r_2} \dots d_p^{r_p}$ est par définition la fonction Φ qui, à toute fonction n fois différentiable f au point x_0 , fait correspondre la fonction polynome de $h=(h_i)$

$$\Phi . f = \sum a_{r_1 r_2 .. r_p} d_1^{r_1} d_2^{r_2} \dots d_p^{r_p} f(x_0; h_1, h_2, .., h_p)$$

Avec cette notation, l'expression de la différentielle polynome n-ème de f au point x_0 en fonction de ses différentielles partielles n-èmes, s'écrit simplement

$$d^n f = (d_1 + d_2 + \dots + d_p)^n . f \tag{16}$$

6. *Différentielle polynome complète*. On aboutit de même à un résultat de forme simple pour le calcul des différentielles d'une fonction composée, en introduisant les *différentielles polynomes complètes*.

En premier lieu, la différentielle polynome complète d'ordre 2 est, par définition, la différentielle seconde complète définie ci-dessus (considérée comme fonction de h, k et ℓ), dans laquelle on donne une *même valeur* dx aux accroissements h et k , et une valeur d^2x à l'accroissement ℓ ; autrement dit, c'est l'application

$$(dx, d^2x) \longrightarrow d^2 f(x_0; dx, dx) + df(x_0; d^2x)$$

D'après cette définition, on peut dire aussi que c'est la différentielle de la fonction $df(x;dx)$ de x et dx, prise pour la valeur (x_0,dx) de la variable, et où on remplace l'accroissement de x par dx, l'accroissement de dx par d^2x.

Plus généralement, supposons définie la différentielle polynome complète d'ordre $n-1$ au point x, fonction de x et de $n-1$ vecteurs dx, $d^2x,..,d^{n-1}x$, de la forme

$$(17)\quad \bar{d}^{n-1}f(x;dx,d^2x,..,d^{n-1}x) = \sum c_{\alpha_1\alpha_2..\alpha_k} d^kf(x;d^{\alpha_1}x,d^{\alpha_2}x,..,d^{\alpha_k}x)$$

où pour chaque indice $k\leqslant n-1$, la suite $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ parcourt l'ensemble des suites d'entiers croissantes telles que $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = n-1$ et où $c_{\alpha_1\alpha_2..\alpha_k}$ est un entier >0, le coefficient de chacun des termes en $d^{n-1}f(x;dx,dx,..,dx)$ et $df(x;d^{n-1}x)$ étant égal à 1. La différentielle polynome n-ème au point x_0 est par définition la différentielle première au point $(x_0,dx,d^2x,..d^{n-1}x)$ de $\bar{d}^{n-1}f$, dans laquelle on remplace l'accroissement de x par dx, celui de d^kx par $d^{k+1}x$ pour $1\leqslant k\leqslant n-2$, et enfin l'accroissement de $d^{n-1}x$ par un nouveau vecteur d^nx. La différentielle du terme $d^kf(x;d^{\alpha_1}x,d^{\alpha_2}x,...,d^{\alpha_k}x)$ de la somme (17), dans laquelle on fait la substitution précédente, n'est autre que

$$d^{k+1}f(x;dx,d^{\alpha_1}x,..,d^{\alpha_k}x)+\sum_{i=1}^{k} d^kf(x;d^{\alpha_1}x,..,d^{\alpha_{i-1}}x,d^{\alpha_i+1}x,d^{\alpha_{i+1}}x,..,d^{\alpha_k}x)$$

On voit donc que la définition pourra se poursuivre par récurrence. On notera que la différentielle polynome d'ordre n se déduit de la différentielle polynome complète en y annulant tous les accroissements $d^2x,...,d^nx$.

<u>Proposition 7. Si f est n fois différentiable au point x_0, et si g est n fois différentiable au point $f(x_0)$, la fonction composée</u> $\varphi = g\circ f$ <u>est n fois différentiable au point x_0, et on a</u>

$$(18) \qquad \overline{d}^n\varphi(x_0;dx,..,d^nx) = \overline{d}^n g(f\ ;\ \overline{d}f,\ \overline{d}^2f,\dots,\overline{d}^nf)$$

La proposition étant vraie pour $n=1$ se démontre par récurrence sur n : le passage de $n-1$ à n est une conséquence immédiate du théorème des fonctions composées (§ 1, th. 1) et de la définition de la différentielle polynome complète donnée ci-dessus.

Corollaire. La différentielle polynome n-ème de φ est donnée par la formule

$$(19) \qquad d^n\varphi(x_0;dx) = \overline{d}^n g(f(x_0);df(x_0;dx),d^2f(x_0;dx),\dots,d^nf(x_0;dx))$$

Cette formule permet de généraliser le raisonnement fait au n°5 , et on voit de cette façon que si une fonction implicite $g(x_2)$ est définie par la relation $f(x_1,x_2)=0$, où f est n fois différentiable au point (a_1,a_2), g est n fois différentiable au point a_2 , et sa différentielle polynome n-ème s'obtient par récurrence en égalant à 0 la différentielle n-ème polynome de la fonction identiquement nulle $f(g(x_2),x_2)$; nous laissons au lecteur les détails du raisonnement.

9. Formule de Taylor. Proposition 8. Soit f une fonction n fois différentiable au point x_0 . Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que la relation $\|h\| \leqslant r$ entraîne

$$(20) \qquad \left\| f(x_0+h)-f(x_0)-df(x_0;h)-\frac{1}{2!}\,d^2f(x_0;h)-\dots-\frac{1}{n!}\,d^nf(x_0;h)\right\| \leqslant \varepsilon\,\|h\|^n$$

En effet, d'après la définition de la différentielle n-ème multilinéaire, il existe $r>0$ tel que les relations $\|h\| \leqslant r$, $\|k\| \leqslant r$ entraînent

$$(21) \qquad \left\| d^{n-1}f(x_0+k;h,h,..,h)-d^{n-1}f(x_0;h,..,h)-d^nf(x_0;h,h,..,h,k)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\ \|h\|^{n-1}\,\|k\|$$

Considérons la fonction de la variable réelle t , $\varphi(t)=f(x_0+th)$ définie pour $0 \leqslant t \leqslant 1$; elle est par hypothèse $n-1$ fois continument dérivable en tout point t de $[0,1]$, et n fois dérivable au point $t=0$;

en outre, on a, d'après la formule (19) $\varphi^{(k)}(t)=d^kf(x_0+th;h)$ pour $k\leqslant n-1$, $\varphi^{(n)}(0)=d^nf(x_0;h)$. Remplaçant k par th dans (21), il vient

$$\| \varphi^{(n-1)}(t)-\varphi^{(n-1)}(0)-t\varphi^{(n)}(0)\| \leqslant \varepsilon\, t\|h\|^n$$

d'où, par application de la formule de Taylor à la fonction $\varphi(t)$ (Livre IV)

$$\|\varphi(1)-\varphi(0)-\varphi'(0)-\frac{1}{2!}\varphi''(0)-\ldots-\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{n!}\|h\|^n$$

ce qui n'est autre que la formule (20), où on a remplacé ε par $\frac{\varepsilon}{n!}$.

Si on suppose que la fonction f soit n fois différentiable dans un voisinage de x_0 , on peut préciser le second membre de la formule (20). Dans ce cas, φ est n fois dérivable dans l'intervalle $[0,1]$; on a par suite (Livre IV)

$$\|\varphi(1)-\varphi(0)-\frac{1}{1!}\varphi'(0)-\frac{1}{2!}\varphi''(0)-\ldots-\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)\|\leqslant\frac{1}{n!}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|\varphi^{(n)}(t)-\varphi^{(n)}(0)\|$$

d'où

$$(22)\quad \|f(x_0+h)-f(x_0)-df(x_0;h)-\frac{1}{2!}d^2f(x_0;h)-\ldots-\frac{1}{n!}d^nf(x_0;h)\|\leqslant\frac{1}{n!}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|d^nf(x_0+th;h)-d^nf(x_0;h)\|$$

Exercices. 1) Soit f une fonction différentiable dans un voisinage d'un point $x_0\in E$; on suppose que, pour tout $h\in E$ l'application $x\to df(x;h)$ est différentiable au point x_0 , et on désigne par $k\to u_h(k)$ sa différentielle en ce point. Montrer qu'on a $u_h(k)=u_k(h)$ quels que soient h et k (se ramener au cas où E a deux dimensions, et appliquer le th.1). En déduire que, pour tout $k\in E$, l'application $h\to u_h(k)$ est fonction linéaire continue de h . Si E est complet, conclure de là que l'application bilinéaire $(h,k)\to u_h(k)$ est continue dans $E\times E$, et que f est continument différentiable au point x_0 (cf. Livre VI, chap. , § , exerc.) .

2) Soit E l'espace des suites (x_n) de nombres réels n'ayant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$, la norme $\|x\|$ d'une telle suite étant $\sup_n |x_n|$. On définit une application f de E dans E en se donnant, pour chaque n, une application f_n de R dans R, telle que $f_n(0)=0$ pour tout n, et considérant l'application $(x_n) \to (f_n(x_n))$.

a) Ecrire la condition pour que f soit différentiable au point $x=0$. Pour que f soit continument différentiable en ce point, il faut et il suffit que la suite $(f'_n(0))$ existe et soit bornée, et que la suite (f'_n) soit également continue dans un voisinage de 0 dans R.

b) Si f est différentiable dans un voisinage de 0 dans E et si, pour tout n, $f''_n(0)$ existe, l'application $x \to df(x;h)$ est différentiable pour $x=0$, quel que soit $h \in E$; montrer que ces conditions peuvent être remplies sans que f soit continument différentiable au point 0. Montrer également que, si $k \to u_h(k)$ désigne la différentielle de $x \to df(x;h)$, la fonction bilinéaire $(h,k) \to u_h(k)$ peut ne pas être continue dans $E \times E$.

c) Soit $\hat{E}$ le complété de E, espace des suites (x_n) de nombres réels telles que $\lim_{n\to\infty} x_n=0$, avec la norme $\|x\| = \sup_n |x_n|$. On définit encore une application f de $\hat{E}$ dans $\hat{E}$ en se donnant une suite (f_n) d'applications de R dans R telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=0$ pour toute suite (x_n) tendant vers 0. Montrer que l'application $x \to df(x;h)$ peut être différentiable au point $x=0$ pour tout $h \in E$, sans que f soit deux fois différentiable au point $x=0$ (prendre par exemple les f_n telles que $f'_n(x) = x/(1+nx)$).

3) Pour $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, on définit la fonction scalaire $f(x,y)$ de la façon suivante : $f(0,0)=0$; pour $y \leqslant x^2$, $f(x,y)=xy - \frac{y^2}{2x}$ pour $y \geqslant x^2$,

$f(x,y) = \frac{x^3}{2}$; montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en tout point, et qu'au point (0,0), les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent, mais $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \neq \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$.

4) Soit f une fonction n fois différentiable au point $x_0 \in E$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que les n inégalités $\| h_i \| \leqslant r$ entraînent

$$\| \Delta^n f(x_0;h_1,..,h_n) - d^n f(x_0;h_1,..,h_n) \| \leqslant \varepsilon \| h_1 \| . \| h_2 \| \ldots \| h_n \|$$

(raisonner par récurrence à partir du corollaire du th.1 : si, pour $h_1,\ldots,h_{n-p}$ fixes, on considère la fonction $g_p(x) = d^{n-p} f(x;h_1,..,h_{n-p})$ démontrer par récurrence sur p que

$$\| \Delta^p g_p(x_0;h_{n-p+1},..,h_n) - d^n f(x_0;h_1,..,h_n) \| \leqslant \varepsilon \| h_1 \| \ldots \| h_n \|$$

pour $\| h_i \| \leqslant r$).

Généraliser de même à f l'inégalité (11).

§ 4. Formes différentielles.

1. Expressions différentielles. Définition 1. Soient E et F deux espaces normés, A une partie ouverte de E ; on appelle expression différentielle d'ordre p (ou, par abus de langage, différentielle d'ordre p) une application u de $A \times E^p$ dans F , telle que, pour tout $x \in A$, l'application partielle

$$(h_1,h_2,..,h_p) \longrightarrow u(x;h_1,h_2,..,h_p)$$

soit une application p-linéaire continue de E^p dans F .

Par extension, une expression différentielle d'ordre 0 sera simplement une application u de A dans F .

Une forme différentielle d'ordre p est par définition une expression différentielle d'ordre p à valeurs dans le corps des scalaires.

Si f est une application p fois différentiable de A dans F , il résulte du §3 que sa différentielle p-ième $d^p f$ est une expression différentielle au sens ci-dessus ; mais la réciproque est en général inexacte.

Par exemple, si $E = \mathbf{R}^2$, et si $a(x,y)$ et $b(x,y)$ sont deux fonctions scalaires continument différentiables dans une partie ouverte de E, l'expression différentielle du premier ordre $a(x,y)h+b(x,y)k$ (à valeurs dans $\mathbf{R}$) n'est la différentielle d'une fonction scalaire f que si $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$, puisqu'alors f est nécessairement deux fois différentiable (§ 3).

La somme de deux expressions différentielles d'ordre p, à valeurs dans le même espace F, est évidemment encore une expression différentielle d'ordre p. Il en est de même du produit d'une expression différentielle d'ordre p par une fonction scalaire définie dans A. Plus généralement, soient $u_1, u_2, .., u_k$ des expressions différentielles définies dans $A \subset E$, d'ordres respectifs $p_1, .., p_k$, prenant leurs valeurs respectivement dans des espaces $F_1, \dots, F_k$; soit d'autre part φ une application k-linéaire continue de $\prod_i F_i$ dans un espace normé G ; l'application composée $\varphi \circ (u_1, .., u_k)$ de $A \times E^p$ dans G, où $p = \sum_{i=1}^{k} p_i$, est une expression différentielle d'ordre p à valeurs dans G.

En particulier, si u est une expression différentielle d'ordre p, à valeurs dans F, v une forme différentielle d'ordre q, le produit vu est une expression différentielle d'ordre $p+q$, à valeurs dans F.

Définition 2. Soit u une expression différentielle d'ordre p définie dans une partie ouverte A de E ; soit f une application différentiable d'une partie ouverte B d'un espace normé G dans A. On appelle transformée de u par l'application f l'expression différentielle d'ordre p, définie dans B

$$y(k_1, k_2, .., k_p) \to u(f(y), df(y;k_1), df(y;k_2), \dots, df(y;k_p))$$

On dit aussi que cette expression différentielle provient de u par le "changement de variables" $x=f(y)$.

La notion de <u>transformée</u> d'une expression différentielle est <u>transitive</u> : si g est une application différentiable d'une partie ouverte C d'un espace normé H dans B , v la transformée de u par l'application f , w la transformée de v par l'application g , w est aussi transformée de u par l'application composée $f \circ g$, d'après le th. des fonctions composées (§1, th.1).

2. <u>Différentielle d'une expression différentielle</u>. Soit u une expression différentielle d'ordre p définie dans une partie ouverte A d'un espace normé E , et prenant ses valeurs dans un espace normé F . Pour cela $x \in A$, désignons par u_x l'application p-linéaire continue

$$(h_1,..,h_p) \longrightarrow u(x;h_1,..,h_p)$$

On définit ainsi une application $x \longrightarrow u_x$ de A dans l'espace normé $\mathcal{L}_p(E,F)$ des applications p-linéaires continues de E^p dans F .

On dit que l'expression différentielle u est <u>différentiable</u> en un point $x_0 \in A$, si l'application $x \longrightarrow u_x$ est différentiable au point x_0; soit $h \longrightarrow v_{x_0;h}$ la différentielle de cette application au point x_0 ; on a donc, par définition, pour tout $\varepsilon > 0$

$$(1) \qquad \| u_{x_0+h} - u_{x_0} - v_{x_0;h} \| \leqslant \varepsilon \| h \|$$

pour tout h assez voisin de 0 . D'après la défnition de la norme dans $\mathcal{L}_p(E,F)$, cette relation équivaut à

$$(2) \qquad \| u(x_0+h;h_1,..,h_p) - u(x_0;h_1,..,h_p) - v_{x_0;h}(h_1,..,h_p) \| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \| h \| . \| h_1 \| .... \| h_p \|$$

pour h et les h_i assez petits. On en conclut aussitôt que l'application $(p+1)$-linéaire de E^{p+1} dans F

$$(h,h_1,...,h_p) \longrightarrow v_{x_0;h}(h_1,h_2,...,h_p)$$

est <u>continue</u>. Si u est différentiable en tout point d'une partie ouverte $B \subset A$, on appelle <u>différentielle</u> de u , et on note du ,

<u>l'expression différentielle d'ordre</u> $p+1$ $(x,h,h_1,\dots,h_p) \to v_{x;h}(h_1,\dots h_p)$

On notera d'après (2) que, si on donne à $h_1,\dots,h_p$ des valeurs <u>fixes</u>, la différentielle de l'application $x \to u(x;h_1,\dots,h_p)$ de E dans F n'est autre que l'application $h \to du(x;h;h_1,\dots,h_p)$. Mais réciproquement, cette différentielle peut exister pour tout système de valeurs fixes des h_i, sans que u soit différentiable (cf. § 3, exerc. 2). Toutefois, lorsque E est de dimension finie, les deux propriétés sont équivalentes, car elles reviennent toutes deux à la différentiabilité des <u>coefficients</u> $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$ de l'expression différentielle u.

2

<u>Proposition 1</u>. <u>Soit</u> u <u>une expression différentielle d'ordre</u> p, <u>différentiable dans une partie ouverte</u> $A \subset E$; <u>soit</u> v <u>la transformée de</u> u <u>par une application deux fois différentiable</u> f <u>de</u> $B \subset G$ <u>dans</u> A ; <u>l'expression différentielle</u> v <u>est différentiable dans</u> B <u>et on a</u>

$$(3)\quad dv(y;k;k_1,\dots,k_p) = du(f(y);df(y;k);df(y;k_1),\dots,df(y;k_p)) + \\ + \sum_{i=1}^{p} u(f(y);df(y;k_1),\dots,df(y;k_{i-1}),d^2f(y;k_i,k),df(y;k_{i+1}),\dots, \\ \dots,df(y;k_p)) .$$

Remarquons pour cela que, si pour $1 \leqslant i \leqslant p$, w_i est une application linéaire continue de G dans E, et si on désigne par $u(x;w_1,\dots,w_p)$ l'application multilinéaire continue de G^p dans F $(k_1,\dots,k_p) \to u(x;w_1(k_1),\dots,w_p(k_p))$, l'application $(w_1,w_2,\dots,w_p) \to u(x;w_1,w_2,\dots,w_p)$ est une application multilinéaire continue de $(\mathcal{L}(G,E))^p$ dans $\mathcal{L}_p(G,F)$, car on a

$$\|u(x;w_1(k_1),\dots,w_p(k_p))\| \leqslant \|u_x\| \cdot \|w_1(k_1)\| \dots \|w_p(k_p)\| \leqslant \\ \leqslant \|u_x\| \cdot \|w_1\| \dots \|w_p\| \cdot \|k_1\| \dots \|k_p\|$$

ce qui équivaut à $\|u(x;w_1,\dots,w_p)\| \leqslant \|u_x\| \cdot \|w_1\| \dots \|w_p\|$ d'après la définition de la norme dans $\mathcal{L}(G,E)$ et dans $\mathcal{L}_p(G,F)$.

En outre, d'après l'hypothèse sur u , l'application $(x,w_1,..,w_p) \to u(x;w_1,..,w_p)$ dans $A \times (\mathcal{L}(G,E))^p$ est continue, et l'application partielle $x \to u(x;w_1,..,w_p)$ différentiable dans A , en vertu de (2). Il résulte alors du théorème des différentielles partielles (§ 1,th.3) que l'application $(x,w_1,..,w_p) \to u(x;w_1,...,w_p)$ est différentiable dans $A \times (\mathcal{L}(G,E))^p$ et a pour différentielle

$$(dx,dw_1,..,dw_p) \to du(x;dx;w_1,..,w_p)+\sum_{i=1}^{p} u(x;w_1,..,w_{i-1},dw_i,w_{i+1},..,w_p)$$

Cela étant, l'application $y \to v_y$ de B dans $\mathcal{L}_p(G,F)$ n'est autre que la <u>composée</u> de $(x,w_1,..,w_p) \to u(x;w_1,..,w_p)$ et de l'application $y \to (f(y),d_yf,d_yf,..,d_yf)$ de B dans $A \times (\mathcal{L}(G,E))^p$; la formule (3) résulte alors immédiatement de l'application du théorème des fonctions composées, et de la définition de d^2f .

2 Il faut donc noter qu'en général, dv <u>n'est pas la transformée</u> de du par l'application f ; il en est ainsi toutefois si f est <u>linéaire affine</u>, car alors sa différentielle seconde est nulle.

Soient u et v deux expressions différentielles d'ordres respectifs p et q définies dans une partie ouverte $A \subset E$, prenant respectivement leurs valeurs dans les espaces normés F et G ; soit d'autre part $(x,y) \to [x.y]$ une application bilinéaire continue de $F \times G$ dans un espace normé H ; on sait (n°1) que $[u.v]$ est alors une expression différentielle d'ordre p+q , à valeurs dans H ; en outre, si u et v sont <u>différentiables</u> dans A , il en est de même de $w=[u.v]$, et on a

$$d\,[u.v] = [du.v] + [u.dv] \tag{4}$$

en vertu de la relation $w_x = [u_x.v_x]$, et de la prop.7 du § 1 .

On généralise aussitôt cette formule à une fonction multilinéaire quelconque d'expressions différentielles.

Si, dans une partie ouverte A de E , une expression différentielle u est différentiable, et si l'expression du est aussi différentiable, on dit que u est <u>deux fois différentiable</u>, et la différentielle de du se note d^2u ; c'est une expression différentielle d'ordre p+2

$$(x,h,k,h_1,\dots,h_p) \to d^2u(x;h;k;h_1,\dots,h_p)$$

telle que, pour les h_i fixes, l'application

$$(h,k) \to d^2u(x;h;k;h_1,\dots,h_p)$$

soit la différentielle seconde de l'application $x \to u(x;h_1,\dots,h_p)$; cette différentielle étant <u>symétrique</u> en h et k (§ 3, th. 1), on a identiquement

$$d^2u(x;h;k;h_1,\dots,h_p) = d^2u(x;k;h;h_1,\dots,h_p) \ . \tag{5}$$

<u>3. Expressions différentielles alternées</u>. <u>Définition 3. On dit qu'une expression différentielle u d'ordre p , définie dans $A \subset E$, est alternée (ou antisymétrique) si, pour tout $x \in A$, l'application multilinéaire $(h_1,\dots,h_p) \to u(x;h_1,\dots,h_p)$ est alternée, c'est-à-dire si on a identiquement</u> $u(x;h_{\sigma(1)},h_{\sigma(2)},\dots,h_{\sigma(p)}) = \varepsilon_\sigma u(x;h_1,\dots,h_p)$ <u>pour toute permutation</u> $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

Si u est une expression différentielle <u>quelconque</u>, son <u>antisymétrisée</u> $v(x;h_1,\dots,h_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma u(x;h_{\sigma(1)},h_{\sigma(2)},\dots,h_{\sigma(p)})$ est évidemment une expression différentielle alternée.

La transformée par une application différentiable quelconque d'une expression différentielle alternée est encore une expression différentielle alternée.

Soit u une expression différentielle alternée d'ordre p ; si on la suppose différentiable dans $A \subset E$, sa différentielle $du(x;h;h_1,\dots,h_p)$ est antisymétrique par rapport aux p variables $h_1,\dots,h_p$, mais non par rapport aux p+1 variables $h,h_1,\dots,h_p$ en général .

On obtient de nouveau une expression alternée en <u>antisymétrisant</u> cette différentielle par rapport aux $p+1$ variables $h, h_1, \ldots, h_p$; mais comme elle est déjà antisymétrique par rapport aux p variables h_i, il revient au même, au facteur $p!$ près, de donner la définition suivante :

<u>Définition 4</u>. <u>On appelle différentielle extérieure d'une expression différentielle alternée u d'ordre p, supposée différentiable, l'expression différentielle alternée d'ordre</u> $p+1$

$$(6) \quad \vartheta u(x;h,h_1,\ldots,h_p) = du(x;h;h_1,\ldots,h_p) - \sum_{i=1}^{p} du(x;h_i;h_1,\ldots,h_{i-1},h,h_{i+1},\ldots,h_p) .$$

Il est immédiat que la différentielle extérieure de la <u>somme</u> de deux expressions alternées (de même ordre) u et v, est égale à $\vartheta u + \vartheta v$.

<u>Théorème 1</u>. <u>La différentielle extérieure de la transformée v d'une expression différentielle alternée u par une application deux fois différentiable f, est identique à la transformée par f de la différentielle extérieure</u> ϑu.

On a en effet, par la définition 4 et la formule (3)

$$\begin{aligned}
\vartheta v(y;k,k_1,\ldots,k_p) &= \vartheta u(f(y),df(y;k),df(y;k_1),\ldots,df(y;k_p)) + \\
&+ \sum_{i=1}^{p} u(f(y);df(y;k_k),\ldots,df(y;k_{i-1}),d^2f(y;k_i,k),df(y;k_{i+1}),\ldots,df(y;k_p)) \\
&- \sum_{i\neq j} u(f(y);df(y;k_1),\ldots,df(y;k_{j-1}),df(y;k),df(y;k_{j+1}),\ldots, \\
&\qquad \ldots,df(y;k_{i-1}),d^2f(y;k_i,k_j),df(y;k_{i+1}),\ldots,df(y;k_p)) \\
&- \sum_{i=1}^{p} u(f(y);df(y;k_1),\ldots,df(y;k_{i-1}),d^2f(y;k;k_i),\ldots,df(y;k_p)) .
\end{aligned}$$

Or, il est immédiat que dans cette expression, la seconde et la quatrième somme se détruisent, d'après la symétrie de la différentielle seconde ; d'autre part, en vertu de cette symétrie et du fait que u est alternée, on a

$$u(f(y);df(y,k_1),..,df(y;k_{j-1}),d^2f(y;k_j,k_i),df(y;k_{j+1}),....,$$
$$...,df(y;k_{i-1}),df(y;k),df(y;k_{i+1}),...,df(y;k_p)) =$$
$$= -u(f(y);df(y;k_1),..,df(y;k_{j-1}),df(y;k),df(y;k_{j+1}),....,$$
$$...,df(y;k_{i-1}),d^2f(y;k_i,k_j),df(y;k_{i+1}),..,df(y;k_p))$$

et par suite la seconde somme est nulle, ce qui établit le théorème.

Théorème 2. Soit u une expression différentielle alternée deux fois différentiable dans une partie ouverte A de E ; on a

(7) $$\vartheta(\vartheta u) = 0 \ .$$

Si on pose $\vartheta u = v$, on a, par définition

$$\vartheta\vartheta u(x;k,h,h_1,...,h_p) = \vartheta v(x;k,h,h_1,...,h_p) =$$
$$= dv(x;k;h,h_1,...,h_p) - dv(x;h;k,h_1,...,h_p)$$
$$- \sum_{i=1}^{p} dv(x;h_i;h,h_1,..,h_{i-1},k,h_{i+1},...,h_p)$$
$$= d^2u(x;k;h;h_1,...,h_p) - \sum_{i=1}^{p} d^2u(x;k;h_i;h_1,...,h_{i-1},h,h_{i+1},...,h_p)$$
$$-d^2u(x;h;k;h_1,..,h_p) + \sum_{i=1}^{p} d^2u(x;h;h_i;h_1,...,h_{i-1},k,h_{i+1},...,h_p)$$
$$- \sum_{i=1}^{p} d^2u(x;h_i;h;h_1,...,h_{i-1},k,h_{i+1},..,h_p)$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} d^2u(x;h_i;k;h_1,...,h_{i-1},h,h_{i+1},...,h_p)$$
$$+ \sum_{i\neq j} d^2u(x;h_i;h_j;h_1,..,h_{j-1},h,h_{j+1},..,h_{i-1},k,h_{i+1},..,h_p)$$

Or, tous les termes de cette somme se détruisent deux à deux, en raison de la symétrie de la différentielle seconde $d^2u(x;h;k;h_1,..,h_p)$ par rapport à h et k , et le fait que c'est une fonction alternée par rapport aux h_i .

4. Primitive extérieure d'une expression différentielle alternée. Le th.2 montre que si une expression différentielle alternée v d'ordre $p+1$ est la différentielle extérieure d'une expression différentielle alternée u d'ordre p , dans un ensemble ouvert A , on a identiquement $\vartheta v=0$ (en supposant u deux fois différentiable, donc v différentiable).

On dit que u est une primitive extérieure de v dans A . Réciproquement :

Théorème 3. Soit v une expression différentielle alternée d'ordre $p+1$, définie et différentiable dans une boule V : $\|x-a\| \leqslant r$, et telle que $\vartheta v=0$ identiquement dans V . Il existe une primitive extérieure u de v dans la boule V , deux fois différentiable, donnée par la formule

$$u(x;h_1,..,h_p) = \int_0^1 t^p v(a+t(x-a);x-a,h_1,...,h_p)dt \quad (8)$$

On a en effet, pour $x+h \in V$

$$u(x+h;h_1,..,h_p)-u(x;h_1,...,h_p) =$$
$$= \int_0^1 t^p(v(a+t(x+h-a);x-a,h_1,..,h_p)-v(a+t(x-a);x-a,h_1,..,h_p))dt +$$
$$+\int_0^1 t^p v(a+t(x-a);h,h_1,...,h_p)dt$$

Dans la première intégrale, si on remplace la différence par $dv(a+t(x-a);th;x-a,h_1,..,h_p)$, on obtient au second membre une expression qui, d'après la définition de dv , diffère du premier membre de moins de

$$\varepsilon \|h\| . \|x-a\| . \|h_1\| ... \|h_p\| \int_0^1 t^{p+1}dt \leqslant \varepsilon\, r \|h\|.\|h_1\|...\|h_p\|$$

pour h assez petit.

Par suite, u est différentiable dans V , et on a

$$du(x;h;h_1,..,h_p)= \int_0^1 t^{p+1}dv(a+t(x-a);h;x-a,h_1,..,h_p)dt +$$
$$+\int_0^1 t^p v(a+y(x-a);h,h_1,...,h_p)dt .$$

Formons maintenant ϑu ; il vient (déf.4), compte tenu du fait que v est alternée

$$\vartheta u(x;h,h_1,..,h_p) = \int_0^1 t^{p+1}dv(a+t(x-a);h;x-a,h_1,..,h_p)dt -$$
$$-\sum_{i=1}^{p}\int_0^1 t^{p+1}dv(a+t(x-a);h_i;x-a,h_1;x-a,h_1,..,h_{i-1},h,h_{i+1},..,h_p)dt$$
$$+(p+1)\int_0^1 t^p v(a+t(x-a);h,h_1,..,h_p)dt .$$

Mais l'hypothèse que $\vartheta v=0$ entraîne que la somme des deux premiers termes est égale à

$$\int_0^1 t^{p+1}dv(a+t(x-a);x-a;h,h_1,...,h_p)dt$$

Or, si on pose $\varphi(t)=t^{p+1}v(a+t(x-a);h,h_1,\dots,h_p)$, le th. des fonctions composées montre que

$$\varphi'(t)=t^{p+1}dv(a+t(x-a);x-a;h,h_1,\dots,h_p)+(p+1)t^p v(a+t(x-a);h,h_1,\dots,h_p)$$

On a donc $\vartheta u(x;h,h_1,\dots,h_p)=\int_0^1 \varphi'(t)dt=\varphi(1)-\varphi(0)=v(x;h,h_1,\dots,h_p)$

C.Q.F.D.

Corollaire 1. Toute primitive extérieure de v dans la boule V est de la forme $u+\vartheta w$, où w est une forme alternée d'ordre $p-1$ deux fois différentiable dans V .

En effet, si u' est une autre primitive extérieure de v , on a $\vartheta(u'-u)=0$ dans V , et comme $u'-u$ est différentiable dans V , il existe d'après le th.3 une primitive extérieure w d'ordre $p-1$ de $u'-u$, d'où le corollaire.

Corollaire 2. Pour qu'une expression différentielle u d'ordre 1 , définie et différentiable dans une boule V : $\|x-a\|<r$, soit la différentielle d'une fonction f , il faut et il suffit que l'on ait identiquement en $x\in V$, $h\in E$, $k\in E$

$$du(x;k;h) = du(x;h;k) .$$

C'est le cas particulier du th.3 correspondant à $p=0$.

On notera en outre que, si u est la différentielle d'une fonction f dans un domaine, toute autre primitive de u dans ce domaine est de la forme $f+a$, a étant une constante quelconque.

2 Remarque. Dans le th.3, on ne peut remplacer la boule V par un domaine quelconque dans E . Considérons par exemple, dans R^2 , la forme différentielle $u = \dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, définie et différentiable dans le domaine R_2^* , complémentaire du point $(0,0)$; on vérifie immédiatement que, si $\omega(x,y)$ désigne la mesure de l'angle que fait la demi-droite d'origine $(0,0)$ et passant par (x,y) avec le

avec le demi-axe des abscisses, la forme précédente est égale à $d\omega$ dans le domaine D complémentaire du demi-axe positif des abscisses.

On en conclut que, dans R_2^*, u n'est pas différentielle d'une fonction scalaire, car une telle fonction devrait être égale à $\omega(x,y)+a$ dans D, et par suite ne pourrait être continue dans R_2^*, puisque ω n'a pas de limite en un point du demi-axe positif (cf. Livre VIII).

5. Formes différentielles alternées. Tout ce qui précède s'applique en particulier aux formes différentielles alternées, c'est-à-dire aux expressions différentielles alternées prenant leurs valeurs dans le corps des scalaires.

On sait que, si u et v sont deux formes multilinéaires alternées, d'ordres respectifs p et q, définies sur un même espace vectoriel E, on appelle produit extérieur de u par v, et on note $u \wedge v$ la forme multilinéaire d'ordre $p+q$ obtenue en divisant par $p!q!$ la forme antisymétrisée du produit (ordinaire) uv. Il revient au même de poser

$$(9) \quad (u\wedge v)(h_1,\ldots,h_{p+q}) = u(h_1,\ldots,h_p)\wedge v(h_{p+1},\ldots,h_{p+q}) =$$
$$= \sum(-1)^{\nu}\, u(h_{i_1},\ldots,h_{i_r},h_{j_1},\ldots,h_{j_{p-r}})\,v(h_{k_1},\ldots,h_{k_{p-r}},h_{\ell_1},\ldots,h_{\ell_{q-p+r}})$$

où la somme du second membre est étendue à tous les couples formés d'une suite strictement croissante $(i_s)_{1\leqslant s\leqslant r}$ d'indices appartenant à $[1,p]$, et d'une suite strictement croissante $(j_t)_{1\leqslant t\leqslant p-r}$ d'indices appartenant à $[p+1,p+q]$; $(k_s)_{1\leqslant s\leqslant p-r}$ désignant la suite strictement croissante complémentaire de de (i_s) dans $[1,p]$, $(\ell_t)_{1\leqslant t\leqslant q-p+r}$ la suite strictement croissante complémentaire de (j_t) dans $[p+1,p+q]$; enfin, ν est le nombre d'inversions de la permutation σ de $[1,p+q]$ telle que $\sigma(n)=i_n$ pour $1\leqslant n\leqslant r$, $\sigma(n)=j_{n-r}$ pour $r+1\leqslant n\leqslant p$,

72

$\sigma(n)=k_{n-p}$ pour $p+1 \leqslant n \leqslant 2p-r$, $\sigma(n)=\ell_{n-2p+r}$ pour $2p-r+1 \leqslant n \leqslant p+q$;
il est immédiat d'ailleurs qu'on a

$$\nu = (p-r)^2 + \sum_{s=1}^{p-r}(r-(k_s-s)) + \sum_{t=1}^{q-p+r}(p-r-(\ell_t-t))$$

Cela étant :

<u>Théorème 4.</u> <u>Soient</u> u <u>une forme différentielle alternée d'ordre</u> p v <u>une forme différentielle alternée d'ordre</u> q , <u>définies et différentiables dans une partie ouverte</u> A <u>de</u> E . <u>La forme alternée</u> $u \wedge v$ <u>d'ordre</u> $p+q$ <u>est différentiable dans</u> A , <u>et on a</u>

(10) $$\vartheta(u \wedge v) = (\vartheta u) \wedge v + (-1)^p u \wedge (\vartheta v)$$

Tout d'abord, l'application $(x, y) \rightarrow xy$ étant une application bilinéaire continue dans $R \times R$, uv est différentiable dans A , et on a $d(uv)=du.v+u.dv$ d'après la formule (4) ; d'après (9), on a donc

(11) $$d(u \wedge v) = du \wedge v + u \wedge dv$$

étant entendu que dans les produits extérieurs du second membre, les différentielles du (resp. dv) sont considérées comme formes multilinéaires par rapport à $h_1, .., h_p$ (resp. $h_{p+1}, .., h_{p+q}$) mais <u>non</u> par rapport à la nouvelle variable h_o introduite par différentiation.

Posons $w(h_o; h_1, .., h_{p+q}) = du(x; h_o; h_1, .., h_p) \wedge v(x; h_{p+1}, ..., h_{p+q})$
Pour former $\vartheta(u \wedge v)$, nous devons, d'après (11), former l'expression

(12) $$\sum_{\lambda=0}^{p+q} (-1)^{\lambda}\, w(h_\lambda; h_o, h_1, .., h_{\lambda-1}, h_{\lambda+1}, .., h_{p+q})$$

et l'expression analogue provenant de $u \wedge dv$. Si nous posons $h'_j=h_{j-1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant \lambda$, et $h'_j=h_j$ pour $\lambda+1 \leqslant j \leqslant p+q$, le terme correspondant à l'indice λ dans la somme (12) n'est autre, d'après (9) que

(13) $$(-1)^{\lambda} \sum (-1)^{\nu}\, du(x; h_\lambda; h'_{i_1}, .., h'_{i_r}, h'_{j_1}, .., h'_{j_{p-r}}) v(h'_{k_1}, .., h'_{k_{p-r}}, h'_{\ell_1}, ..., h'_{\ell_{q-p+r}})$$

D'autre part, on a

(14) $$\vartheta u(x;h_o,h_1,..,h_p)\wedge v(x;h_{p+1},..,h_{p+q}) =$$
$$\sum(-1)^{\nu'}\vartheta u(x;h_{i'_1},..,h_{i'_{r'}},h_{j'_1},..,h_{j'_{p+1-r'}})v(x;h_{k'_1},..,h_{k'_{p+1-r'}},h_{\ell'_1},..,h_{\ell'_{q-p-1+r'}})$$

Si on remplace ϑu par son expression, on obtient des termes de deux sortes : les uns de la forme

(15) $$(-1)^{\nu'+\mu}du(x;h_{i'_\mu};h_{i'_1},..,h_{i'_{\mu-1}},h_{i'_{\mu+1}},..,h_{i'_{r'}},h_{j'_1},....,h_{j'_{p+1-r'}})v(x;h_{k'_1},..,h_{\ell'_{q-p-1+r'}})$$

les autres de la forme

(16) $$(-1)^{\nu'+r'+\mu}du(x;h_{j'_\mu};h_{i'_1},..,h_{i'_{r'}},h_{j'_1},..,h_{j'_{\mu-1}},h_{j'_{\mu+1}},....,h_{j'_{p+1-r'}})v(x;h_{k'_1},..,h_{\ell'_{q-p-1+r'}})$$

Groupons alors, dans la somme (14), les termes (15) et les termes (16) pour lesquels l'indice i'_μ (resp. j'_μ) est égal à un indice donné λ ($0\leq\lambda\leq p+q$) ; la somme ainsi obtenue est égale à l'expression (13) ; considérons en effet le terme (15) pour lequel $r'=r+1$, et pour lequel la suite

$$(h_{i'_1},..,h_{i'_{\mu-1}},h_{i'_{\mu+1}},..,h_{i'_{r+1}},h_{j'_1},...,h_{j'_{p-r}},h_{k'_1},...,h_{\ell'_{q-p+r}})$$

est identique à la suite

$$(h'_{i_1},..,h'_{i_r},h'_{j_1},..,h'_{j_{p-r}},h'_{k_1},...,h'_{\ell_{q-p+r}})$$

Le nombre d'inversions ν de cette dernière suite est évidemment égal à $\nu'-(i'_\mu-\mu)=\nu'-\lambda+\mu$, donc $(-1)^{\nu'+\mu}=(-1)^{\nu+\lambda}$, les signes coïncident bien dans (13) et (15). De même, considérons le terme (16) pour lequel la suite

$$(h_{i'_1},..,h_{i'_{r'}},h_{j'_1},..,h_{j'_{\mu-1}},h_{j'_{\mu+1}},..,h_{j'_{p+1-r'}},h_{k_1},...,h_{\ell'_{q-p-1+r'}})$$

est identique à la suite

$$(h'_{i_1},..,h'_{i_r},h'_{j_1},..,h'_{j_{p-r}},h'_{k_1},..,h'_{k_{p-r}},h'_{\ell_1},...,h'_{\ell_{q-p+r}})$$

ce qui est possible, car on a $\lambda > p$ donc $h'_{j_1}=h_p$ ou $h'_{\ell_1} = h_p$; dans le premier cas, on prendra $r'=r+1$ et $i'_{r'}=p$, dans le second $r'=r$ et $k'_{p+1-r} = p$. Le nombre d'inversions ν est alors égal à $\nu'-(j'_\mu +r'-\mu)= \nu'-\lambda-r'+\mu$ donc $(-1)^{\nu'+r'+\mu}=(-1)^{\nu+\lambda}$, les signes coïncident encore.

On montrerait de la même façon que l'expression provenant de $u \wedge dv$ est égale à $(-1)^p u \wedge \vartheta v$, d'où le théorème.

Le cas le plus important en pratique est celui où les espaces normés considérés sont des espaces de dimension <u>finie</u> par rapport au corps des scalaires K . Supposons par exemple que $E=K^n$; l'espace dual admet pour base les n formes linéaires $x \to \xi_i$, où ξ_i désigne la coordonnée d'indice i de x ; cette forme linéaire étant sa propre différentielle (pour toute valeur de x), on la désigne, dans la théorie des formes différentielles, par la notation $d\xi_i$. Toute forme différentielle d'ordre 1 s'écrit donc $\omega(x;dx)=a_1(x)d\xi_1+a_2(x)d\xi_2+..+a_n(x)d\xi_n$ où les a_i sont n fonctions scalaires ; pour que ω soit p fois différentiable, il faut et il suffit que les a_i soient p fois différentiables.

On sait en outre que l'espace des formes multilinéaires alternées d'ordre p admet pour base les $\binom{n}{p}$ produits extérieurs des formes constituant une base du dual de E (rangées par ordre strictement croissant); toute forme différentielle alternée d'ordre p peut donc s'écrire d'une seule manière sous la forme

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(x)\, d\xi_{i_1} \wedge d\xi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\xi_{i_p} \tag{17}$$

la somme étant étendue à toutes les suites strictement croissantes de p indices, et les $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$ étant des fonctions scalaires ; pour que la forme soit q fois différentiable, il faut et il suffit que les $a_{i_1 \dots i_p}$ le soient.

On a $\vartheta(d\xi_i)=0$ d'après le th.2 ; par récurrence, le th.4 montre alors que $\vartheta(d\xi_{i_1}\wedge d\xi_{i_2}\wedge\ldots\wedge d\xi_{i_p})=0$; on en conclut que, pour la forme (17), on a, d'après le th.4

$$\vartheta\omega = \sum da_{i_1 i_2 \ldots i_p}\wedge d\xi_{i_1}\wedge d\xi_{i_2}\wedge\ldots\wedge d\xi_{i_p}$$

Il arrive souvent que, dans une partie ouverte A de E , on considère en chaque point x , un système de n formes différentielles d'ordre 1 , $\omega_i(x;dx)$, constituant une <u>base</u> du dual de E , quel que soit x ; si $\omega_i(x;dx) = \sum a_{ij}(x)d\xi_j$, cela signifie que le déterminant $\left|a_{ij}(x)\right|$ ne s'annule pas dans A ; on peut par suite écrire réciproquement $d\xi_i = \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(x)\omega_j$; si les a_{ij} sont p fois différentiables, il en est de même des β_{ij} . Toute forme différentielle alternée d'ordre p s'écrit d'une seule manière

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} b_{i_1 i_2\ldots i_p}(x)\omega_{i_1}\wedge\omega_{i_2}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_p}$$

En général, on n'aura plus $\vartheta\omega_i=0$; le th.4 montre par récurrence qu'on a en général

$$\vartheta\omega = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} db_{i_1\ldots i_p}\wedge\omega_{i_1}\wedge\omega_{i_2}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_p}$$
$$+\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} b_{i_1\ldots i_p}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_{k-1}}\wedge\vartheta\omega_{i_k}\wedge\omega_{i_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_p}$$

<u>Exercice</u>. Pour qu'une expression différentielle d'ordre n u , supposée différentiable, soit la différentielle d'ordre n d'une fonction, il faut et il suffit qu'elle soit <u>symétrique</u> par rapport aux n accroissements h_i , et qu'on ait

$$du(x;h;h_1,\ldots,h_n)=du(x;h_1;h,h_2,\ldots,h_n)$$

(raisonner par récurrence sur n , en utilisant le th.3) .
