RÉDACTION N° 84

COTE HCR 003

TITRE TOPOLOGIA BOURBACHICA

FONDS HENRI CARTAN

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 24

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 24

CONSULTABLE ULTERIEUREMENT

TOPOLOGIA BOURBACHICA.

Table des matières du rapport.

Iè partie. Topologie générale.

Définitions topologiques générales, par une métrique, par les adhérances, par les voisinages, par les ensembles ouverts. Fonctions continues. - Compacité et bicompacité ; cas des espaces métriques (continuité uniforme). - Fonctions continues à valeurs réelles. - Espaces fonctionnels.

Annexe à la Iè partie. (pour l'usage privé de Bourbaki; non destiné à l'insertion).

Les divers systèmes d'axiomes des espaces topologiques, avec tableau des règles de passage de l'un à l'autre et des équivalences entre axiomes.

IIè partie. Le degré topologique.

Fonctions numériques d'une variable numérique : homéomorphie entre intervalles, fonctions monotones, leur inversion. - Notion de connexion et notion de courbe, comme première généralisation de ce qui précède. - Notion de degré topologique : représentations à une dimension (droites et cercles) : extension à n dimensions, variétés à n dimensions, théorèmes fondamentaux sur le degré topologique. - Applications (théorème d'existence de Kronecker ; champs de vecteurs). - Théorème de Jordan (méthode Leray). - Extension du théorème de Kronecker aux espaces de Banach, d'après Leray. - Appendices (nombres d'intersection et coefficients d'enlacement dans E^n ; notion de dimension).

- Note sur une question importante mise au concours.

- Suite -

III^è partie. Espaces de recouvrement et groupe de Poincaré.

Notion de connexion : ses deux aspects (par l'impossi--bilité d'une décomposition / par la possibilité de joindre deux points par une courbe). - Etude des représentations localement homéomorphes. - Définition des recouvrements ; propriétés. - Recouvrement universel, groupe de Poincaré, espaces simplement connexes ; correspondance entre les recouvrements et les sous-groupes du groupe de Poincaré. - Principe de monodromie et étude du prolongement analytique. - Critères suffisants pour qu'une représentation localement homéomorphe soit ~~en~~ un recouvrement.

IV^è partie. Topologie combinatoire : surfaces.

Triangulation, complexe à n dimensions. - Complexes et multiplicités à deux dimensions. - Détermination combinatoire du groupe fondamental d'un complexe. - Groupe de Betti à une dimension. - Etude et classification des surfaces closes et de quelques types de surfaces ouvertes.

Appendice. Groupes de Betti pour toutes les dimensions, leur invariance. - Formule d'Euler-Poincaré ; caractéristique. - Indice d'un champ de vecteurs sur une multiplicité.

Observations critiques de C. Chevalley sur les I^è et II^è parties.

TOPOLOGIA BOURBACHICA. $I^{ère}$ partie. Topologie générale.

(On suppose que les notions de limite, point en contact avec un ensemble (= point de la fermeture ou adhérence $\bar{A}$ de A), ensemble fermé et ouvert, ont été définies sur la droite ; également, la racine carrée).

Rappel des notions de limite, etc. sur la droite (v. plus haut). Dans E^n: notion de limite (chaque coordonnée tendant vers une limite) ; retrouvée par la notion de distance : critère de Cauchy, exprimé au moyen de $\sum | x_i' - x_i |$ et de la distance ordinaire ; théorème de Bolzano-Weierstrass pour une suite bornée. Point en contact avec un ensemble (il existe une suite de points de l'ensemble, distincts ou non, qui tend vers le point considéré), ensembles fermés et ouverts ; notion de voisinage ("une propriété est remplie dans un voisinage de ...") : équivalence, à ces divers points de vue, de la distance et de $\sum |x_i'-x_i|$. Un laïus scurrile sur la nécessité de donner des définitions applica-bles à des ensembles plus généraux (ensembles de droites ; ensemble des positions d'un corps mobile = ensemble des déplacements; ensembles de fonctions ; ...). Axiomes généraux de la distance ($M_{I,II,III,IV}$, cf. annexe) : points en contact, ensembles ouverts et fermés, notion de voisinage, dans les espaces métriques. Axiomes I, II, III, IV des espaces (O), (F), (A), comme théorèmes (v. annexe). Axiomes de sépa-ration (Hausdorff, régulier, normal, complètement normal, v.de Possel), comme théorèmes. Critère de Cauchy, notion d'espace métrique complet ; possibilité de compléter un espace métrique non complet.

Laïus scurrile sur la nécessité de s'affranchir des notions métriques. Notion fondamentale : point en contact avec un ensemble ; axiomes (A). Passage de (A) à (F) et de (F) à (O), axiomes (F) et (O)

....

comme théorèmes (v. annexe). Inversement, règles de passage de (F) à (A), de (O) à (A), comme théorèmes. Autre définition d'une topologie par des voisinages ; règle de passage de (V) à (A) ; comme cas parti--culier, au moyen d'une base : règle de (B) à (A) ; axiomes (V) et (B), d'où axiomes (A) comme théorèmes ; règle de passage de (V) à (O), comme théorème. Condition pour l'équivalence de deux systèmes de voisinages (ou deux bases) ; exemples.

Notion d'homéomorphisme : correspondance biunivoque conservant les relations topologiques.

Topologie induite dans un sous-espace.

Exemples nombreux de topologies : En, espaces projectifs, réels et complexes, espaces de l'inversion, plan de la variable complexe. Homéomorphie entre le plan de la variable complexe et la sphère, l'espace de l'inversion et S^3 (dans la topologie induite par E^4), Ensemble des droites de l'espace : homéomorphie avec un sous-ensemble de l'espace projectif P^5. Ensemble des positions d'un corps solide. Tore dans E^3, et définition intrinsèque par (x, y) mod. 1. Etc. Partout, on se servira des différents modes de définition possibles (métriques, bases, systèmes de voisinages, etc.). Existence d'une <u>base dénombrable</u> dans E^n et tous les exemples indiqués (" IIte Abzählbarkeit ").

Fonctions continues, diverses définitions : 1) si p est en contact avec A, f(p) est en contact avec f(A) ; - 2) si V est un voisinage de f(p), il y a un voisinage U de p tel que f(U) soit contenu dans V ; - 3) les images inverses d'ensembles ouverts sont des ensembles ouverts. Equivalence (cf. de Possel).

.....

Théorème fondamental : fonctions continues de fonctions continues. Application : on démontre que $x + y$, xy, x/y sont continues dans E^2, donc toutes les fonctions rationnelles sont continues dans E^n.

Compacité.

Rappel de Bolzano-Weierstrass pour les suites ; th. de Bolzano-W. pour les ensembles : notion et existence des points d'accumulation. Théorème de Borel-Lebesgue dénombrable. Théorème de Borel-Lebesgue général, par la base dénombrable : définition de bicompact, par les recouvrements ouverts (et complémentairement par les familles fermées). Exemples d'ensembles et d'espaces bicompacts : S^n, ensemble des posi--tions d'un corps ayant un point fixe, etc. Théorème d'Alexandroff : tout espace localement bicompact peut-être, d'une manière et d'une seule, rendu bicompact par l'adjonction d'un seul point (point à l'infini). Exemples.

Fonctions continues sur un bicompact : l'image par une fonction continue de tout bicompact est bicompacte ; l'image par une fonction continue de tout ensemble fermé bicompact (l'ensemble des valeurs de la fonction étant un espace de Hausdorff) est un ensemble fermé (pas vrai sans hypothèse bicompact : exemple) ; une correspondance biunivoque, continue dans un sens, sur un bicompact, est une homéomorphie.

Théorèmes sur les espaces bicompacts métriques : pour tout recouvrement par des ensembles ouverts, il y a ε tel que toute sphère de rayon $<\varepsilon$ soit entièrement contenue dans un ensemble de la famille recouvrante ; - pour tout système fini d'ensembles fermés, il y a ε tel que, chaque fois qu'un ensemble de diamètre $<\varepsilon$ a des points communs avec certains ensembles du système, ceux-ci aient nécessaire--ment au moins un point commun (important pour la théorie de la dimen--sion).

Continuité uniforme de toute fonction continue sur un bicompact métrique (l'espace des valeurs étant aussi métrique). Application : prolonger par continuité à $\bar{A}$ une fonction donnée sur A : condition triviale (continuité en tout point de $\bar{A}$), mais aussi la condition : continuité uniforme sur A, l'espace des valeurs étant supposé complet, c'est-à-dire avoir un critère de Cauchy.

<u>Fonctions à valeurs numériques réelles</u> (plus généralement, valeurs dans E^m).

Fonctions continues : atteignent leurs bornes sur un compact. Pour une fonction quelconque, lim. sup. et inf.; nouvelle définition de la continuité en un point. Cas de la variable réelle, limites à gauche et à droite (par la topologie induite sur un intervalle ouvert).

9

Il est possible de compléter, d'un ensemble fermé quelconque F à tout l'espace, une fonction continue numérique donnée sur F (se borner au cas d'un espace métrique ?).

<u>Espaces fonctionnels</u>.

Topologisation de l'espace des fonctions continues (espace des valeurs supposé métrique). Convergence uniforme (= l'espace fonctionnel est complet en même temps que l'espace des valeurs). Ensembles fonctionnels compacts : familles également continues.

Autre point de vue : suite de fonctions considérée comme fonction dans un espace produit (le produit de l'espace de la variable par l'ensemble de tous les entiers complété par un élément à l'infini); convergence uniforme sur un bicompact = continuité suivant les deux variables x et n. Extension : quand la variable est dans un espace non bicompact, (ou bien en <u>un point</u> de l'espace de la variable) con-tinuité suivant x et n = (par définition) convergence continue (notion due à Carathéodory). Convergence continue dans un ensemble ouvert de E^n = convergence uniforme dans tout ensemble fermé compact intérieur.

Annexe à la $I^{è}$ partie.

Tableau des axiomes topologiques.

(O) Par les ensembles ouverts (notés Ω) : on se donne une famille d'ensembles Ω.

I. Toute réunion de Ω_α est un Ω.

I'. L'ensemble vide O est un Ω.

II. Toute intersection $\Omega \cap \Omega'$ est un Ω.

III. L'espace ("ensemble fondamental") $\mathcal{E}$ est un Ω.

IV. Quel que soit le point p, $\complement p = \mathcal{E} - p$ est un Ω.

(F) Par les ensembles fermés (notés F) : on se donne une famille d'ensembles F.

I. Toute intersection de F_α est un F.

I'. $\mathcal{E}$ est un F.

II. Toute réunion $F \cup F'$ est un F.

III. L'ensemble vide O est un F.

IV. $\{p\}$ (ensemble composé du seul point p) est un F quel que soit p.

(N.B. Le signe $\cup$ note la réunion)

(A) Par des adhérences (notées par une barre) : à tout ensemble A on fait correspondre un ensemble $\overline{A}$.

Ia. $A \subset \overline{A}$. Ib. $A \subset B \rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

Ic. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

II. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

III. $\overline{O} = O$.

IV. $\overline{\{p\}} = \{p\}$.

(V) Par les voisinages (notés V(p)) : on se donne pour tout point p une famille (éventuellement vide) d'ensembles V(p).

....

Ia. Tout voisinage $V(p)$ de p contient p.

Ib. Si $q \subset V(p)$, il y a $V'(q)$ contenu dans $V(p)$.

II. Toute intersection $V(p) \cap V'(p)$ contient un $V''(p)$.

III. Tout point p a au moins un voisinage $V(p)$.

IV. A tout couple p; q correspond un $V(q) \not\ni p$.

(B) Par une base (ensemble de voisinages, mais non attachés à des points déterminés : notés B) : on se donne une famille d'ensembles B.

I. (Axiome sans contenu).

II. Toute intersection $B \cap B'$ est une réunion de B_α.

III. A tout p correspond un $B \ni p$.

IV. A tout couple p, q correspond un $B \ni q, \not\ni p$.

Observations :

1) Si, comme il est désirable de le faire, on considère que la réunion d'une famille vide d'ensembles est 0 (et l'intersection, complémentairement, $\mathcal{E}$), alors $O_{I'}$ est un cas particulier de O_I (et $F_{I'}$, de F_I).

2) A_{Ib} suit de A_{II} ; A_{Ia} suit de A_{II+IV} (cf. Alexandroff-Hopf).

3) Au sens de Alexandroff-Hopf : Umgebungsraum : espace (V) avec axiome V_{III} ; - allgemein-topologischer Raum = espace (A) sans axiome ; - topologischer Raum = espace (A) avec $A_{Ia,b,c+II+III}$.

Equivalences :

1) Dans un même ensemble fondamental, deux familles Ω, ou deux familles F, ou deux correspondances ($A \to \bar{A}$), définissent le même espace, si elles sont identiques, et dans ce cas seulement.

.....

2°) Deux systèmes de voisinages $V(p)$, $W(p)$ sont dits <u>équivalents</u>, et les espaces qu'ils définissent sont considérés comme identiques, si tout $V(p)$ contient un $W(p)$ et tout $W(p)$ un $V(p)$, et dans ce cas seulement. On a les équivalences : $V_{Ia} = W_{Ia}$, $V_{II} = W_{II}$, $V_{III} = W_{III}$, $V_{IV} = W_{IV}$. Les axiomes V_{Ib} et W_{Ib} sont indépendants.

3°) Deux bases B, B' sont dites équivalentes, et les espaces qu'elles définissent considérées comme identiques, si tout B est une réunion de B'_α et tout B' une réunion de B_β. Il y a équivalence entre II, III, IV pour B et pour B', respectivement.

<u>Règles de passage</u>.

<u>1°)</u> De (O) à (F), et réciproquement : a) partant de (O), les F sont définis comme complémentaires $\complement\,\Omega$; b) partant de (F), les Ω sont définis comme complémentaires $\complement\,F$. Dans les deux cas, équivalences entre axiomes correspondants I, I', II, III, IV de (O) et de (F).

<u>2°)</u> De (F) à (A), et réciproquement : a) partant de (F), on définit $\overline{A}$ comme intersection de tous les $F \supset A$; $A_{Ia,\,b,\,c}$ est rempli automatiquement ; F_I est équivalent au théorème "Si $A = \overline{A}$, A est un F". F_I étant supposé rempli, il y a équivalence entre II, III, IV (resp.) de (F) et de (A). b) partant de (A), on définit les F comme les ensembles tels que $\overline{F} = F$. A_{Ia} entraîne $F_{I'}$; $A_{Ia,b}$ entraîne F_I ainsi que le théorème. "Si $F \supset A$, $F \supset \overline{A}$"; A_{Ic} est équivalent au théorème "Tout $\overline{A}$ est un F". $A_{Ia,\,b,\,c}$ étant supposé rempli, il y a équivalence entre II, III, IV de (A) et (F).

.....

3°) De (O) à (A), et réciproquement : cf. 2° et 1°. Partant de (O), on définit $\bar{A}$ comme ensemble des points p en contact avec A ("Tout $\Omega \supset p$ contient un point de A"). Mêmes équivalences qu'au 2°.

4°) De (O) à (V), ou réciproquement : a) partant de (O) : on prend pour système des voisinages V(p) de p tous les $\Omega \supset p$, ou tout système W(p) équivalent. $V_{Ia,b}$ (ou W_{Ia}) sont remplis automatique--ment. Il y a équivalence entre II, III, IV (resp.) de (O), de (V), de (W). O_I est équivalent au théorème "Tout ensemble contenant un voisinage V(p), ou W(p), de chacun de ses points p, est un Ω".
b) partant de (V) : les Ω sont les ensembles qui contiennent un voisinage V(p) de chacun de leurs points p. Deux systèmes de voisinages équivalents donnent le même espace (O). $O_{I+I'}$ est rempli automatiquement ; V_{II} entraîne O_{II} ; V_{Ia+II} étant remplis, il y a équivalence entre III et IV (resp.) de (V) et de (O).
V_{Ib} est équivalent au théorème "Tout V(p) est un Ω". $V_{Ia,b}$ entraîne que "Le système des V(p) est équivalent au système des $\Omega \supset p$" et que "Tout Ω est une réunion de V(p)" (c'est-à-dire "Les V(p) forment une base pour les Ω"). $V_{Ia,b}$ étant rempli, il y a équivalence entre II, III, IV de (V) et (O).

5°) De (V) à (A), et réciproquement : a) partant de (V), on définit $\bar{A}$ comme ensemble des points p en contact avec A ("Tout V(p) contient un point de A"). Deux systèmes de voisinages équivalents donnent le même espace (A) ; les $\bar{A}$ étant ainsi définis au moyen des V(p), on a le critère d'équivalence : "Pour que le système W(p) soit équivalent au système V(p), il faut et il suffit que tout V(p) contienne un W(p) et que, quel que soit W(p), $\overline{\complement W(p)} \not\ni p$".

.....

A_{Ib} est rempli automatiquement ; V_{Ia} est équivalent à A_{Ia} ; V_{Ib} entraîne A_{Ic}, et réciproquement, V_{Ia} étant supposé rempli, il faut, pour que A_{Ic} soit rempli, que l'on puisse remplacer les $V(p)$ par un système $W(p)$ équivalent satisfaisant à W_{Ib} (en effet, on prend $W(p) = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{C} V(p)})$, et on voit, en posant $A = \mathcal{C} V(p)$ et supposant A_{Ic} rempli, que $W(p)$ satisfait au critère d'équivalence). Il y a équiva-lence entre II, III, IV (resp.) de (V) et (A) (démonstration pour II: soient $V(p)$, $V'(p)$ ne satisfaisant pas à V_{II}, alors si $A = \mathcal{C} V(p)$, $B = \mathcal{C} V'(p)$, on aura $p \subset (\overline{A \cup B}) - (\bar{A} \cup \bar{B})$). b) partant de (A), cf. 2° b) et 4° a).

6°) De (B) à (O), et réciproquement : a) partant de (B), on définit les Ω comme les réunions d'ensembles B_α. Deux bases B, B' équivalentes donnent le même espace (O). O_I est vérifié automatiquement ; de même O_I, si l'on inclut, dans la définition des Ω, la réunion d'une famille <u>vide</u> de B_α. Il y a équivalence entre II, III, IV (resp.) de (B) et (O). b) partant de (O) : on prend pour B, soit tous les Ω, soit une famille équivalente. Il y a équivalence entre II, III, IV (resp.) de (O) et (B). O_{I+I}, entraîne que "Toute réunion de B est un Ω ".

7°) De (B) à (V), et réciproquement : a) partant de (B), on prend pour $V(p)$ tous les $B \supset p$. $V_{Ia,b}$ est rempli automatiquement. Il y a équi-valence entre II, III, IV (resp.) de (B) et de (V). Deux familles B équivalentes donnent deux systèmes de voisinages équivalents. b) partant de (V) : $V_{Ia,b}$ étant supposé rempli, on prend pour B tous les $V(p)$ quel que soit p ; il y a équivalence entre II, III IV de (V) et (B) ; deux systèmes $V(p)$ équivalents définissent deux familles B équivalentes. Si $V_{Ia,b}$ n'est pas rempli, cf. 4°b) et 6°b).

....

8°) De (B) à (A), et réciproquement : partant de (B), on définit $\bar{A}$ comme ensemble des points p en contact avec A ("Tout $B \supset p$ contient un point de A"). Ensuite, cf. 7° et 5°, ou 6° et 3°.

Terminologie.

Au sens de Alexandroff-Hopf : Umgebungsraum = espace (V) avec axiome V_{III} ; - allgemein-topologischer Raum = espace (A) sans axiome ; - topologischer Raum = espace (A) avec axiomes $A_{Ia,b,c}$, A_{II} et A_{III} (= espaces (O), (F), (V), (B), avec axiomes I, II, III).

Tous les axiomes (dans l'un quelconque des systèmes) = espace "accessible" dans la terminologie Fréchet.

Nouvelle définition d'un espace :

(M) Par une métrique : on se donne une fonction $d(p,q) \geqslant 0$ des couples de points.

I. $d(p,p) = 0$.

II. $d(p,r) \leqslant d(p,q) + d(q,r)$,

III. $d(p,q) = 0$ entraîne $p = q$.

IV. $d(q,p) = d(p,q)$.

Règles de passage.

9° De (M) à (V) : on prend pour voisinages V(p) les sphères $d(p,q) < c$, où $c > 0$. V_{II} et V_{III} sont remplis automatiquement. V_{Ia} suit de M_I ; V_{Ib} suit de M_{II} ; V_{IV} équivaut à M_{III}.

.....

HCR 003 14

10^o De (M) à (A) : on définit d(p, A) comme borne inférieure des d(p,a) pour $a \subset A$; et $\bar{A}$ comme ensemble des points p en contact avec A, c'est-à-dire tels que d(p,A) = 0. $A_{Ib+II+III}$ sont vérifiés automa- -tiquement ; A_{Ia} suit de M_I ; A_{Ic} suit de M_{II} ; A_{IV} équivaut à M_{III}.

__Terminologie__ : au sens de Alexandroff-Hopf, allgemein-metrisch = (M) sans axiome ; metrisch = (M) avec M_I, M_{II}, M_{III} et M_{IV}.

__II$^{\text{è}}$ Partie__. __Théorie du degré topologique__.

__Fonctions numériques d'une variable numérique__.

Existence d'une racine quand la fonction change de signe dans un intervalle. Application : inversion des fonctions continues mono- -tones : homéomorphies entre intervalles. Exemples (racine n-ième si elle n'a pas encore été faite ; en tout cas a^x, $\log_a x$: isomor- -phie des deux groupes, additif et multiplicatif, des nombres réels).

__Connexion__.

Première généralisation de ce qui précède : fonctions numéri- -ques dans un ensemble connexe (= non somme de deux ensembles fermés (dans la topologie induite, en cas de sous-ensemble d'un espace et sans point commun) : existence d'un zéro de toute fonction qui change de signe : Notion de domaine (= ensemble ouvert connexe ; domaine fermé = domaine + frontière). Notion de courbe : deux points d'un domaine peuvent être reliés par une courbe. Exemples; physiologiques et pathologiques, sur la notion de courbe : chemins polygonaux, arcs connexes et sommes de tels ; le cercle ; - courbe genre Peano.

.....

Degré topologique.

En vue de la généralisation aux représentations de E^n dans E^n, on reprend le cas $n = 1$. Fonction continue sur un intervalle (a, b) : réalise une représentation du segment sur la droite, tout point du segment (f(a), f(b)) étant recouvert algèbriquement + 1 fois (ou resp.- 1 fois) et tout point extérieur recouvert 0 fois si la fonction est suffisamment régulière (stückweise linéaire, c'est-à-dire polygonale ; ou même stückweise monotone) ; pour une fonction quelconque, on se sert d'une approximation polygonale. Représentation sur la droite d'un ensemble ouvert quelconque. Représentation d'un cercle sur la droite / sur un cercle : le degré est constant ; si le cercle (= ensemble des nombres réels x modulo 1) est représenté sur la droite (= ensemble des y) ou le cercle (= ensemble des y modulo 1) par $y = f(x)$, le degré est égal à $f(1) - f(0)$.

Pour l'extension à un domaine dans le plan ou dans E^n : il faut un analogue de l'approximation polygonale : ce sera l'approxima- -tion simpliciale (fonction stückweise linéaire).

Notion de simplexe S^n dans E^n ; interpolation linéaire d'une fonction donnée sur un S^n. Triangulation d'un ensemble ouvert : par les cubes d'un ε-réseau de l'espace contenus dans l'ensemble, et la subdivision des cubes en simplexes. Dans une telle triangulation, tout S^{n-1} est commun au plus à deux S^n. Orientation d'un simplexe par une orientation de l'espace ; orientation des simplexes frontières; tout S^{n-1} dans une triangulation d'une portion de l'espace est frontière de deux S^n avec orientations opposées, ou d'un seul S^n.

.....

HCR003 16

Extension : on appellera <u>variété</u> V^n (terminologie à discuter) tout complexe connexe tel que tout simplexe S^{n-1} appartienne, soit à deux S^n avec orientations opposées, soit à un seul S^n : variétés plongées dans un E^{n+p}, variétés "abstraites" ; notion de frontière ; variétés closes (= pseudomultiplicités orientables dans la terminologie de Brouwer, Lefschetz et Hopf-Alexandroff). Exemples : triangulation de variétés connues (en les subdivisant en morceaux convexes, et par projection centrale : annoncer qu'on démontrera plus loin la triangulabilité de toute variété continument différentiable ? question à débattre suivant les variétés qu'on désire admettre comme champs d'intégration pour les intégrales de formes différentielles, et aussi selon qu'on définit celles-ci par triangulation ou par la mesure approximative). Subdivision (simpliciale) d'un simplexe, puis d'une variété.

Degré topologique local d'une représentation simpliciale d'une variété (dans E^n ; ou bien, dans une variété, en un point dont le voisinage est holomorphe à E_n ; cas où on fait la représentation sur une sphère, c'est-à-dire sur une frontière de simplexe). Théorème fondamental : le degré dans E^n = l'ordre de la frontière, défini comme degré de la représentation sur une sphère (ou une frontière de simplexe) par projection centrale (démonstration : il suffit de la donner pour un simplexe). Conséquence pour l'invariance : invariance par variation continue ; le degré est constant sur tout domaine connexe sans point commun avec la frontière ; possibilité de définir le degré pour une représentation continue d'une variété dans une variété, avec les mêmes théorèmes d'invariance ; extension à l'image

......

continue d'une somme algèbrique de variétés (p. ex. de simplexes : <u>complexe algèbrique</u> ; notion de frontière ; notion de <u>cycle</u>). Cas des variétés closes. Cas de la représentation d'un ensemble ouvert de E^n, dans E^n.

Exemples et applications : théorème d'existence de Kronecker (il y a au moins une racine quand l'ordre de la frontière est $\neq 0$). Théorème de Poincaré-Bohl (v. séminaire Julia, exposé F (1936) par Weil, p. 24 et 25). Applications : théorème de d'Alembert, avec le nombre exact des racines ; autres applications ? (théorèmes de Hurwitz ?). Application aux champs de vecteurs (l'ordre prenant le nom de caractéristique) ; théorème du point fixe de Brouwer. Application aux singularités des champs de vecteurs : indice d'une singularité.

Calcul du degré : théorème de multiplication (cf. loc. cit., p. 20, 1°) ; degré d'une transformation localement topologique $= \pm 1$ (ibid., 2°). Invariance topologique du degré. Quand la trans-formation est localement topologique et les 2 variétés orientables, le degré (global) donne le <u>nombre exact</u> des racines.

Théorème de Jordan, méthode Leray (v. exposé C (1936), par Leray) : le nombre des domaines connexes en lesquels un ensemble fermé divise E^n est un invariant topologique intrinsèque de l'ensem-ble ; relations de Leray entre les degrés topologiques de la transformation. Cas d'une image homéomorphe de sphère : deux domaines, la frontière ayant par rapport aux points de l'un (extérieur) l'ordre 0 et de l'autre (intérieur) l'ordre ± 1 (pour une orientation conve-nable). Exemple : le cercle, avec interprétation de la notion d'or-dre. Conséquence : invariance du domaine.

......

Extension aux espaces à une infinité de dimensions : notion d'espace de Banach. Théorème d'existence de Kronecker, pour une transformation $y = x + F(x)$, F étant complétement continue (i. e. transformant tout ensemble borné en un ensemble compact) ; le transformé d'un voisinage de l'origine recouvre tout un voisinage de l'origine. Applications, ici même ? (Ex : éq. intégrales, éq. différentielles, en admettant les notions nécessaires ?)

<u>Appendices</u> 1) Notion générale de nombre d'intersection et coefficient d'enlacement dans E^n, avec les propriétés élémentaires.

2) Définition de la dimension des ensembles fermés bicompacts ; la dimension d'un simplexe de E^n est n.

<u>Note importante</u>. La question suivante est mise au concours.

On demande de donner une définition du degré topologique, <u>indépendante de la triangulation</u>, qui satisfasse à la condition suivante :

Soit A^n un espace <u>localement euclidien</u> (tout point a un voisinage homéomorphe à E^n), <u>connexe</u> et <u>orientable</u> ; soit f une représentation de A^n dans l'espace euclidien E^n ; alors f possède un degré bien défini <u>en tout point</u> o <u>tel que l'image inverse</u> $\overset{-1}{f}(V)$ <u>soit bicompacte dans A si</u> V = V(o) <u>est un voisinage de o suffisamment petit</u>. Et naturellement le degré devra possèder les propriétés habituelles.

Le rapporteur suggère de chercher une définition par récurrence suivant n.

III^{è} partie. Espaces de recouvrement et groupe de Poincaré. (1)

Retour sur les deux aspects de la notion de connexion. Ensemble connexe = ensemble non somme de deux ensembles (relativement) fermés sans point commun. Notion de connexité locale (tout voisinage de p contient un voisinage connexe). Tous les espaces qui seront considérés dans cette partie seront connexes, localement connexes, localement bicompacts. Théorème : si un tel espace est métrisable, deux points quelconques peuvent être joints par un chemin (image homéomorphe d'un segment).

Représentations localement homéomorphes. Chaque fois qu'on aura une représentation f localement homéomorphe d'un espace B dans un espace A, on dira que B est porté par A, et qu'un point b de B est porté par le point a de A qui lui correspond. Exemples. Dans le cas métrique, et sur un exemple, on étudiera l'image inverse, dans B, d'un chemin issu de a dans A : cette image inverse comprend, si le chemin est assez petit, un chemin et un seul issu de b ; quand le chemin n'est plus petit, ou bien il en est de même, ou bien ... on tombe dans un point frontière (TABOU : ne pas les nommer, en dépit de l'insistance suspecte de H.C.).

Enoncés généraux : B étant porté par A, et b par a, soit E un ensemble fermé, bicompact, connexe dans A ; alors : ou bien la composante connexe de $\overset{-1}{f}(E)$ qui contient b est bicompacte dans B ; ou bien on peut trouver un E' contenu dans E, fermé, connexe, contenant a, tel que la composante connexe de $\overset{-1}{f}(E')$ qui contient b ne soit pas bicompacte, et tel qu'il n'y ait pas de $E'' \subset E'$ jouissant

.....

(1) avec la collaboration de H.C.

 20

des mêmes propriétés (bien entendu E' n'est pas unique en général). On pose alors la définition : B <u>est appelé un recouvrement de A si toute composante connexe de l'image inverse d'un ensemble fermé bicompact sur A est bicompacte</u>. Voir ouvrage

Exemples : A étant un cercle, un plan pointé, un tore.

Théorèmes : dans un recouvrement de A, tout A est recouvert ; tout point a possède un voisinage qui est en correspondance homéo-morphique avec chacune des composantes connexes de son image inverse.

Transitivité (tout recouvrement d'un recouvrement de A est un recouvrement de A). Des recouvrements de A (en nombre quelconque) ont un recouvrement commun. → (intersection)

Tout recouvrement B de A possède un recouvrement (et même un recouvrement le plus petit possible) C jouissant de la propriété suivante : si c et c' sont deux points de C, portés par un même point de A, il y a une homéomorphie de C en lui-même et une seule, qui à tout point fasse correspondre un point porté par le même point de A, et qui fasse correspondre c' à c. Le groupe de ces trans-formations est appelé le <u>groupe</u> de C par rapport à A ; il est proprement discontinu et sans point fixe (définition de ces termes). <u>Réciproquement</u>, tout groupe proprement discontinu sans point fixe d'un espace C en lui-même définit (par identification) un A dont C est recouvrement.

Existence du <u>recouvrement universel</u> U. Son groupe par rapport à A est le <u>groupe de Poincaré</u> de A. Espaces simplement connexes ; U est le seul recouvrement simplement connexe de A. Correspondance biunivoque entre les sous-groupes du groupe de Poincaré et les

.....

recouvrements de A, avec les compléments habituels (immédiat par ce qui précède).

Cas des espaces métriques. Groupe de Poincaré comme groupe des chemins modulo le groupe des chemins réductibles à zéro. Exemples : droite, cercle, plan, plan pointé, tore E^n, S^n, leurs recouvrements universels et tous les autres (discussion complète). Groupe du plan deux fois pointé (exemple de groupe non abélien).

<u>Principe de monodromie</u>. On suppose qu'à tout voisinage suffisamment petit sur l'espace A ait été attachée une classe de fonctions, de telle manière que si deux voisinages V_1, V_2 ont une intersection non vide, à une fonction f_1 de la classe de V_1 corresponde une fonction f_x et une seule de la classe de V_2 qui coïncide avec f_1 sur $V_1 \cap V_2$. Dans ces conditions, on considère sur le recouvrement universel U (et sur A lui-même s'il est simplement connexe) les fonc-tions qui, sur tout voisinage suffisamment petit W, sont égales à une fonction de la classe du voisinage V qui porte W. Le principe de monodromie s'énonce : il y a une fonction et une seule, de cette sorte, qui soit égale sur un voisinage donné à une fonction donnée de la classe correspondante. A chacune de ces fonctions on peut faire correspondre un recouvrement B de A bien déterminé, le plus petit sur lequel elle peut être définie (comme fonction uniforme, naturellement).

Voir ma notion de relèvement

Si on suppose seulement qu'à tout f_1 de la classe de V_1 corres-ponde <u>au plus</u> une f_2 de la classe de V_2, alors toute f_1 donnée sur un voisinage permet seulement de définir, non plus un recouvrement de A, mais un espace porté par A (" domaine d'existence " !).

. . . .

Exemple : orientation d'une transformation localement topolo-gique d'un espace localement euclidien dans un espace analogue : l'orientation est une fonction définie localement, et égale à + 1 ou à -1 ; prolongée par continuité, elle est constante, donc elle est bien définie sur l'espace, ou sur un espace de recouvrement. Notion d'orientabilité. 2è Exemple : interprétation de l'ordre d'un point par rapport à une courbe dans le plan.

Critères suffisants pour qu'un espace porté par A soit un recouvrement de A. Evidemment B, porté par A, sera un recouvrement de A si B est bicompact ; alors A est aussi bicompact. En particulier un B bicompact, porté par un A simplement connexe, est homéomorphe à A. (Exemple : il est impossible de faire porter S^n par E^n). Dans le cas des espaces métriques, si B porté par A n'est pas un recouvrement, il y a dans B au moins un chemin de détermination (chemin sur B rendu bicompact par l'adjonction d'un point à l'infini, qui aboutisse au point à l'infini, et dont l'image sur A aboutisse en un point bien déterminé, non à l'infini, de A). Exemple : si une transformation localement topologique de E^n dans E^n n'a pas de chemin de détermination, c'est une homéomorphie (on peut même affirmer qu'il y a un chemin de détermination dont l'image soit un segment de droite, d'où résulte un vieux théorème d'Hadamard. Cf. H. Cartan, Acta litt. ac scient. Szeged, t. VI (1933), p. 85).

IV^e partie. Topologie combinatoire, plus particulièrement surfaces.

(Cette partie est traitée sommairement, de Possel devant fournir un rapport détaillé).

.....

Retour sur la notion de simplexe et la triangulation des variétés. Définition d'un complexe ; cas des complexes à deux dimensions : con--dition pour qu'un complexe à deux dimensions (fini ou infini) soit localement euclidien. Démonstration de la triangulabilité des surfaces (= multiplicités à deux dimensions = espaces localement euclidiens à deux dimensions) ?

Détermination du groupe fondamental d'un complexe : on la ramène à un problème combinatoire, sur les complexes à deux dimensions. Cas du complexe fini : le groupe est définissable par un nombre fini de générateurs et de relations. Cas du complexe à une dimension ; application : Gruppenbild.

Groupe de Betti (combinatoire) à une dimension ; il est identi--que au groupe de Poincaré modulo le groupe des commutateurs.

Etude des surfaces : surfaces closes, leurs types ; détermination de leurs groupes de Poincaré et de Betti ; notion de genre. Surfaces ouvertes : le cercle est la seule surface ouverte simplement connexe (démonstration d'après Seifert-Threlfall, note (26), p. 320, ou toute autre : question mise au concours). Détermination du groupe de Poincaré et de Betti pour une surface close (sphère ou surface de genre p) une ou plusieurs fois pointée.

<u>Appendice</u>. Groupe de Betti pour une dimension quelconque ; définition, invariance topologique (pour les complexes finis) ; formule d'Euler-Poincaré, caractéristique d'un complexe. L'indice total d'un champ de vecteurs sur une multiplicité (triangulable) est égal à la caractéristique.

OBSERVATIONS CRITIQUES DE C. CHEVALLEY SUR LES Iè et IIè PARTIES DE LA TOPOLOGIA BOURBACHICA.

-:-:-:-:-:-

I. TOPOLOGIE GÉNÉRALE.

a) Il me paraît inutile de construire d'abord la notion de limite dans E^n pour les raisons suivantes : le lecteur est assez vite fatigué de tant de définitions différentes des ens. ouverts et fermés qui lui produisent un effet kaléïdoscopique - ayant déjà la topologie dans E^n, il ne se sent pas très attiré par les topologies plus générales qui viennent après - enfin, on parle surtout dans E^n de limites et de Bolzano-Weierstrass, qui disparaissent subrepticement en topo. géné. Et puis, un laïus scurrile au début de chaque très grande subdivision de Bourbaki me paraît largement suffisant en tant que scurrilité.

b) Faire les espaces topologiques généraux avant les espaces métriques, la notion de métrique m'apparaissant de plus en plus comme ridicule.

c) En topo. géné. prendre carrément une notion fonda-mentale et construire linéairement à partir d'elle. Le mieux est, je crois, de partir de (O). Repousser en appendice les autres points de départ possibles en les ramenant tous à celui qui a été choisi.

......

II. Théorie du degré topologique.

Pour introduire la notion d'approximation simpliciale, partir dans le cas de n = 1 de fonctions continument dérivables (par ex.), donc stückweise monotones, et montrer que le nombre de racines ne change pas par variation petite dans le champ de ces fonctions. Ceci laisse présager qu'il pourra se définir pour des fonctions quelconques.

Je crois que la chose essentielle pour les variétés est le caractère localement euclidien (pour les points du bord, voisinage : une demi-sphère). Les définir d'abord comme cela, puis dire qu'on a besoin de triangulation pour construire des approxi--mations.

Le double sens du mot frontière en topologie me paraît bien gênant ; je crois qu'il faudrait le remplacer par un autre en topo. générale.

<u>Erratum</u> : <u>p. 16 ligne 2</u>.

<u>B est appelé un recouvrement de A si tout point de A possède un voisinage bicompact</u> V <u>tel que chaque composante connexe de l'image inverse de</u> V <u>soit bicompacte</u>.
