RÉDACTION N° 082

COTE : HCR 002

TITRE : PRÉCISIONS ET COMPLÉMENTS À LA THÉORIE DE L'HOMOLOGIE

FONDS : HENRI CARTAN

NOMBRE DE PAGES : 12

NOMBRE DE FEUILLES : 12

HCR 002

$\overline{t'_{4k}}$

(en notant $\overline{t'_{4k}}$ l'image de t'_{4k} dans $\overline{H}^*(BO(V);Z)$;

d'algèbres de Hopf, ~~qui~~ et qui envoie x'_{4k+2} en 0 et x'_{4k} en $\overline{t'_{4k}}$, l'application diagonale de $\overline{H}^*(BO(V);Z)$ est donc donnée par

(58) $$\Delta \overline{t'_{4k}} = \sum_{i+j=k} \overline{t'_{4i}} \otimes \overline{t'_{4j}} \quad (\overline{t'_{o}} = 1).$$

Par dualité (cf. Exposé 10), on obtient:

(59) $\overline{H}_*(BO(V);Z)$ est une algèbre de polynômes $L(\overline{t}_4, \ldots, \overline{t}_{4k}, \ldots)$ avec l'application diagonale $\Delta \overline{t}_{4k} = \sum_{i+j=k} \overline{t}_{4i} \otimes \overline{t}_{4j}$ $(\overline{t}_o = 1)$.

On a défini au n° 9 un isomorphisme de $\overline{H}_*(BO(V);Z)$ ~~xxxx~~ sur une sous-algèbre B de $H_*(BO(V);Z)$. On notera t_{4k} l'image de $\overline{t}_{4k}$ par cet isomorphisme. ~~xxx~~ Ainsi $B = L(t_4, \ldots, t_{4k}, \ldots)$ a pour supplémentaire, dans $H_*(BO(V);Z)$, le groupe de torsion, formé d'éléments d'ordre 2. L'image de t_{4k} dans $H_*(BO(V);Z_2)$ est $(z_{2k})^2$.

Remarque: la relation (58) et l'application diagonale dans $H^*(BO(V);Z_2)$ (définie par (46)) déterminent l'application diagonale dans $H^*(BO(V);Z)$, bien que, a priori, ce ne soit pas une algèbre de Hopf:

(58') $$\Delta t'_{4k} = \sum_{i+j=k} t'_{4i} \otimes t'_{4j} + \sum_{i=1}^{k} (z'_{2i-1})^2 \otimes (z'_{2k-2i+1})^2,$$

en rappelant qu'on a identifié ~~les~~ ~~xixxx~~ $(z'_{2j-1})^2$ à l'élément de Tors $H^*(BO(V);Z)$, image de $x'_{4j-2} \in H^*(BU(V_C);Z)$. On a de même

(59') $$\Delta t_{4k} = \sum_{i+j=k} t_{4i} \otimes t_{4j} + \sum_{i=1}^{k} (z_{2i-1})^2 \otimes (z_{2k-2i+1})^2.$$

L'application diagonale (59) permet d'expliciter une base de l'espace des éléments primitifs de $\overline{H}_*(BO(V);Z)$:

(60) $$p_4 = \overline{t}_4, \ldots, p_{4k} = (-1)^{k+1} k\overline{t}_{4k} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \overline{t}_{4j} p_{4k-4j}, \ldots$$

On les notera $p_{4k}(\overline{t})$.

~~L'assertion (54), et le fait que x'_{4k+2}~~

D'après (56), l'application $H^*(BU(V_C);Z) \to \overline{H}^*(BO(V);Z)$ envoie x'_{4k} en $\overline{t'_{4k}}$, et x'_{4k+2} en 0, comme on l'a déjà dit. Par dualité,

~~l'application $\overline{H}_*(BO(V);Z)$ $H_*(BU(V_C);Z)$ envoie $(-1)^k \overline{t}_{4k}$ en~~

~~$(-1)^i x_{2i} x_{2j}$, et envoie~~

(61) $\overline{H}_*(BO(V);Z) \to H_*(BU(V_C);Z)$ envoie $p_{4k}(\bar{t})$ en $p_{4k}(x)$.

De là on déduit, comme pour (16):

(62) $H_*(BO(V);Z) \to H_*(BU(V_C);Z)$ envoie $(-1)^k t_{4k}$ en $\sum_{i+j=2k} (-1)^i x_{2i} x_{2j}$.

En raisonnant comme dans la démonstration de (20), on montre que l'application composée

f

$$\overline{H}_*(BO(V);Z) \xrightarrow{f} H_*(BU(V_C);Z) \xrightarrow{g} \overline{H}_*(BO(V_C);Z)$$

envoie chaque élément primitif dans le double de ce même élément.

petit rond sur la ligne

Ainsi $g \circ f$ envoie $p_{4k}(\bar{t})$ en $2\, p_{4k}(\bar{t})$. Or, d'après (61), f envoie $p_{4k}(\bar{t})$ en $p_{4k}(x)$; donc g envoie $p_{4k}(x)$ en $2\, p_{4k}(\bar{t})$, et (pour des raisons de degré) envoie $p_{4k+2}(x)$ en 0. ~~On en déduit, par récurrence:~~

~~(61) $H_*(BU(V_C);Z) \to \overline{H}_*(BO(V_C);Z)$ envoie x_{4k} dans $(-1)^k \bar{t}_{4k}$ (et x_{4k+2} en 0).~~

Ce résultat, qu'on vient de montrer pour l'espace complexe V_C, vaut pour tout espace complexe X de dimension infinie. Ainsi:

(63) $H_*(BU(X);Z) \to \overline{H}_*(BO(X);Z)$ envoie $p_{4k}(x)$ en $2\, p_{4k}(\bar{t})$.

sigma

On a vu (n° 1) que la suspension $\sigma : H_*(U(X);Z) \to H_*(BU(X);Z)$ envoie a_{4k-1} en $p_{4k}(x)$; on sait d'autre part par (45) que l'injection $U(X) \subset SO(X)$ envoie a_{4k-1} en $e_{4k-1} \in H_*(SO(X);Z)$. En comparant à (63), ~~on obtient:~~ ~~et~~ en identifiant $\overline{H}_*(B(SO(X));Z)$ à $\overline{H}_*(BO(X);Z)$ (d'après (54')), on obtient:

(64) La suspension $\sigma : H_*(SO(X);Z) \to \overline{H}_*(B(SO(X));Z)$ envoie $\bar{e}_{4k-1}$ en $2\, p_{4k}(\bar{t})$; par dualité:

(64') La suspension $\sigma^* : \overline{H}^*(B(SO(X));Z) \to H^*(SO(X);Z)$ envoie $\bar{t}'_{4k}$ en $2\, \bar{e}'_{4k-1}$.

~~On peut préciser xxxxxxxxxxx(63)xx l'application (61): tout d'abord, les expressions explicites de $p_{4k}(x)$ et de $p_{4k}(\bar{t})$ montrent, par récurrence sur k, que x_{4k} est appliqué sur $(-1)^k \bar{t}_{4k}$ par l'application $H_*(BU(X);Z) \to \overline{H}_*(BO(X);Z)$; montrons que, plus précisément:~~

~~(63) $H_*(BU(X);Z) \to H_*(BO(X);Z)$ envoie x_{4k} en $(-1)^k t_{4k}$.~~

La ~~xxxxxxxx~~ propriété (63) montre, en explicitant $p_{4k}(x)$ et $p_{4k}(\bar{t})$, et en raisonnant par récurrence sur k:

(63') ~~xxxx~~ $H_*(BU(X);\mathbb{Z}) \to H_*(BO(X);\mathbb{Z})$ envoie x_{4k} en $(-1)^k\,\bar{t}_{4k}$, et x_{4k+2} en 0.

De là on déduit, en raisonnant comme pour (21) et (22):

(65) $H^*(BO(X);\mathbb{Z}) \to H^*(BU(X);\mathbb{Z})$ envoie t'_{4k} en $\sum_{i+j=k} (-1)^i x'_{2i}\, x'_{2j}$.

On va préciser la relation (63'), comme suit:

(66) $H_*(BU(X);\mathbb{Z}) \to H_*(BO(X);\mathbb{Z})$ envoie x_{4k} en $(-1)^k t_{4k}$.

La relation (66) va résulter de (63') et de ceci:

(67) $H_*(BU(X);\mathbb{Z}_2) \to H_*(BO(X);\mathbb{Z}_2)$ envoie x_{2k} en $(z_k)^2$.

Démonstration de (67): l'application $H_*(U(X);\mathbb{Z}_2) \to H_*(SO(X);\mathbb{Z}_2)$ induit, en chaque degré impair, un isomorphisme des espaces d'"éléments indécomposables"; comme les suspensions

$H_*(U(X);\mathbb{Z}_2) \to H_*(BU(X);\mathbb{Z}_2)$ et $H_*(SO(X);\mathbb{Z}_2) \to H_*(B(SO(X));\mathbb{Z}_2)$

définissent un isomorphisme des indécomposables sur les primitifs (cf. Exposé 7, paragraphe 7, théorème ~~III~~ 3; ce théorème est applicable en caractéristique 2 même lorsque le module A de l'énoncé n'est pas pair, pourvu que L(A) ait même rang, en chaque degré, que l'homologie de la fibre), il s'ensuit que l'application (67) induit un isomorphisme des espaces d'éléments primitifs, en chaque degré pair. Or ce fait détermine entièrement l'application, et la propriété (67) en découle par récurrence sur k.

~~Par dualité, on déduit de (65), en raisonnant comme pour (21) et (22).~~

De (67) on déduit aussitôt, par dualité:

(68) $H^*(BO(X);\mathbb{Z}_2) \to H^*(BU(X);\mathbb{Z}_2)$ envoie z'_{2k+1} en 0, et z'_{2k} en x'_{2k}.

11. Homologie et cohomologie de $SO(X)/U(X)$.-

Coefficients $\mathbf{Q}_2$.- considérons le fibré en espaces de Hopf:

$$SO(X)/U(X) \longrightarrow BU(X) \longrightarrow B(SO(X)).$$

En homologie, l'application $H_*(BU(X);\mathbf{Q}_2) \longrightarrow H_*(B(SO(X));\mathbf{Q}_2)$ est surjective d'après (63'); donc $H_*(SO(X)/U(X);\mathbf{Q}_2)$ s'identifie à la sous-algèbre de Hopf de $H_*(BU(X);\mathbf{Q}_2)$, "noyau" de l'homomorphisme d'algèbres de Hopf $H_*(BU(X);\mathbf{Q}_2) \longrightarrow H_*(B(SO(X));\mathbf{Q}_2)$. Le calcul est le même que pour l'homologie ~~Hx(SP~~ $H_*(Sp(X_H)/U(X);\mathbf{Z})$ (cf. n° 5), et on trouve:

(69) $H_*(SO(X)/U(X);\mathbf{Q}_2)$ est une algèbre de polynômes engendrée par les éléments $u_2, u_6, \dots, u_{4k+2}, \dots$ (définis par (24)).

Par dualité (cf. (23)):

$H^*(SO(X)/U(X);\mathbf{Q}_2)$ s'identifie au quotient de $H^*(BU(X);\mathbf{Q}_2)$ par l'idéal engendré par les éléments $\sum_{i+j=k} (-1)^i x'_{2i} x'_{2j}$. Puisque la division par 2 est possible (coefficients $\mathbf{Q}_2$), x'_{4k} s'exprime (par récurrence sur k) comme polynôme en les x'_{4i-2} pour $i \leq k$, d'où:

(70) $H^*(SO(X)/U(X);Q_2) = L(x'_2, x'_6, \dots, x'_{4k+2}, \dots)$ (algèbre de ~~polynômes~~ polynômes par rapport aux classes de Chern de degrés $4k+2$).

Coefficients $\mathbf{Z}_2$.- considérons le fibré en espaces de ~~Hop~~ Hopf:

$$U(X) \longrightarrow SO(X) \longrightarrow SO(X)/U(X).$$

On a vu au n° 8 que $H_*(U(X);\mathbf{Z}_2) \longrightarrow H_*(SO(X);\mathbf{Z}_2)$ envoie a_{2k+1} en $p_{2k+1}(c)$; c'est donc une injection, et par suite $H_*(SO(X)/U(X);\mathbf{Z}_2)$ s'identifie au quotient de $H_*(SO(X);\mathbf{Z}_2) = E(c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$ par l'idéal engendré par $p_1(c), p_3(c), \dots, p_{2k+1}(c), \dots$; d'après (36), cet idéal est aussi l'idéal engendré par $c_1, c_3, \dots, c_{2k+1}, \dots$, d'où:

(71) $H_*(SO(X)/U(X);\mathbf{Z}_2) = E(c_2, c_4, \dots, c_{2k}, \dots)$ (algèbre extérieure), avec l'application diagonale induite $\Delta c_{2k} = \sum_{i+j=k} c_{2i} \otimes c_{2j}$.

$(u'_{4k+2}, \dots)$

Par dualité:

(72) $H^*(SO(X)/U(X); Z_2) = L(c'_2, c'_6, \dots, c'_{4k+2}, \dots)$, algèbre de polynômes engendrée par des éléments ~~xxxxxxxxxx~~ primitifs $c'_{4k+2} = (c'_{2k+1})^2$.

Par comparaison de (70) et (72), et en ~~xxxxxxxx~~ appliquant le corollaire du théorème 4 de l'Exposé 4, on voit que:

(73) $H^*(SO(X)/U(X); Z)$ est une algèbre de polynômes $L(u'_2, u'_6, \dots, u'_{4k+2}, \dots)$ ~~$L(s'_2, s'_6, \dots, s'_{4k+2}, \dots)$~~

En fait, on verra plus loin (cf. (88)) qu'on peut prendre comme générateurs u'_{4k+2} de cette algèbre les moitiés des classes de Chern x'_{4k+2} du fibré SO(X), de groupe U(X), de base SO(X)/U(X).

12. Homologie et cohomologie de $U(V_C)/O(V)$ et de $SU(V_C)/SO(V)$.

Rappelons, (cf. Exposé 16, proposition 1) qu'on peut considérer $SU(V_C)/O(V)$ comme le revêtement universel de $U(V_C)/O(V)$, dont le groupe fondamental est Z.

Coefficients Q_2: considérons le fibré en espaces de Hopf:

$$SO(V) \longrightarrow U(V_C) \longrightarrow U(V_C)/SO(V).$$

~~L'application $H_*(U(V_C); Q_2) \to H_*(U(V_C)/SO(V); Q_2) = H_*(U(V_C)/O(V); Q_2)$~~

L'application $H_*(SO(V); Q_2) \to H_*(U(V_C); Q_2)$ est injective, d'après (55); donc $H_*(U(V_C)/O(V); Q_2) = H_*(U(V_C)/SO(V); Q_2)$ s'identifie au quotient de $H_*(U(V_C); Q_2)$ par l'idéal engendré par les éléments a_{4k-1}; ainsi:

(74) $H_*(U(V_C)/O(V); Q_2) = E(a_1, a_5, \dots, a_{4k+1}, \dots)$, algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs.

Par dualité:

(74') $H^*(U(V_C)/O(V); Q_2) = E(a'_1, a'_5, \dots, a'_{4k+1}, \dots)$ (s'identifie à une sous-algèbre de $H^*(U(V_C); Q_2)$).

Coefficients Z_2: ~~xxxxxxxxxx~~ considérons le fibré en espaces de Hopf:

$$U(V_C)/O(V) \longrightarrow BO(V) \longrightarrow BU(V_C).$$

On a vu (n° 10) que (l'application) $\varphi : H_*(BO(V);\mathbb{Z}_2) \to H_*(BU(V_{\mathbb{C}});\mathbb{Z}_2)$ envoie z_{2k} en x_{2k}, et z_{2k+1} en 0; elle est donc surjective, et par suite $H_*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$ s'identifie à la sous-algèbre de Hopf de $H_*(BO(V);\mathbb{Z}_2) = L(z_1,z_2,\dots,z_k,\dots)$, "noyau" de φ. D'où:

(75) $H_*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2) = L(p_1(z),p_3(z),\dots, p_{2k+1}(z),\dots)$, algèbre de polynômes engendrée par des éléments primitifs, avec

$$\beta p_{2k+1}(z) = (p_k(z))^2.$$

Par dualité, $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$ s'identifie au quotient de $H^*(BO(V);\mathbb{Z}_2) = L(z'_1,z'_2,\dots,z'_k,\dots)$ par l'idéal engendré par les $(z'_k)^2$ (cf. (57)); ~~xxxxxxxx~~ autrement dit:

(76) $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2) = E(z'_1,z'_2,\dots,z'_k,\dots)$, algèbre extérieure ~~xxx~~ avec application diagonale $\Delta z'_k = \sum_{i+j=k} z'_i \otimes z'_j$, l'opérateur de ~~Cette algèbre extérieure est engendrée par des éléments primitifs~~ Bockstein étant donné par (52).

~~$p'_1 = z'_1, \dots, p'_{2k+1}$~~

Calculons la β'-cohomologie de $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$: comme β'-algèbre différentielle graduée, elle admet une sous-algèbre $E(z'_1)$ (avec $\beta' z'_1 = 0$); le quotient par l'idéal qu'elle engendre est $E(z'_2,\dots,z'_k,\dots)$, avec le Bockstein $\beta' z'_{2k} = z'_{2k+1}$, $\beta' z'_{2k+1} = 0$. De là résulte que les éléments

$$z'_1,\ z'_2 z'_3,\ \dots,\ z'_{2k} z'_{2k+1},\ \dots$$

engendrent une sous-algèbre extérieure ~~A'~~ de $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$, contenue dans Ker β', et ~~xxx~~ ayant comme supplémentaire Im β'.

~~Observons que A' est aussi l'algèbre extérieure engendrée par les éléments primitifs~~

~~$p'_1 = z'_1, \dots, p'_{4k+1} = z^2$~~

~~Par comparaison avec (74'), on voit que $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$ a, en chaque degré, un $\mathbb{Z}_2$-rang égal au Q_2-rang de $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);Q_2)$~~

Or les éléments primitifs de $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$ sont donnés par des formules analogues à (36); donc les éléments

$$p'_1 = z'_1, \quad \dots, \quad p'_{4k+1} = z'_{4k+1} + z'_1 z'_{4k} + z'_2 z'_{4k-1} + \dots + z'_{2k} z'_{2k+1}, \quad \dots$$

sont primitifs, et puisque l'on a, dans $H^*(BO(V);\mathbb{Z}_2)$, et a fortiori dans $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$, a fortiori dans

$$\cancel{z'_{4k+1} + z'_1 z'_{4k} + \dots + z'_{2k} z'_{2k+1} = z'_{2k} z'_{2k+1} + \beta'(z'_{4k} +}$$

$$p'_{4k+1} = z'_{2k} z'_{2k+1} + \beta'(z'_{4k} + z'_2 z'_{4k-2} + \dots + z'_{2k-2} z'_{2k+2}),$$

on voit que les p'_{4k+1} (pour $k \geq 0$) engendrent une sous-algèbre extérieure de $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$, engendrée par des éléments primitifs, contenue dans $\operatorname{Ker} \beta'$, et ayant pour supplémentaire $\operatorname{Im} \beta'$.

la torsion de $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z})$ est d'ordre 2, et

D'après l'Appendice, les éléments de $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z})$ dont l'image dans ~~$H(U(V_C)/O(V))$~~ $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$ appartient à A' forment une sous-algèbre de Hopf B', isomorphe à $\bar{H}^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z})$ (quotient de l'algèbre de cohomologie à coefficients entiers par la torsion). L'algèbre B' est une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs, que nous noterons α'_{4k+1} (alpha) (ces éléments sont, jusqu'à nouvel ordre, bien déterminés au signe près). L'image de α'_{4k+1} dans $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}_2)$ est p'_{4k+1}.

On se propose maintenant de chercher l'image de α'_{4k+1} dans l'application $H^*(U(V_{\mathbb{C}})/O(V);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(U(V_{\mathbb{C}});\mathbb{Z})$. Pour cela, considérons la ~~suite~~ suite spectrale de cohomologie, à coefficients $\mathbb{Z}_2$, du fibré

$$U(V_{\mathbb{C}}) \longrightarrow U(V_{\mathbb{C}})/O(V) \longrightarrow BO(V).$$

Le terme E_2 de cette suite spectrale est

$$E_2 = E(a'_1, \dots, a'_{2k+1}, \dots) \otimes L(z'_1, \dots, z'_k, \dots),$$

les algèbres extérieure et polynomiale étant prises à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. De plus, d'après (76), le terme E_∞ est

$$E_\infty = E(z'_1, \dots, z'_k, \dots).$$

Il faut donc que, dans le passage de E_2 à E_∞, les carrés $(z'_k)^2$ soient "tués". Un raisonnement facile de suite spectrale montre, par récurrence sur k, que les $a'_{2k-1} \in H^*(U(V_{\mathbb{C}});\mathbb{Z}_2)$ sont transgressifs et que la différentielle d_{2k} envoie a'_{2k-1} en $(z'_k)^2$. Or, dans la cohomologie de la base $H^*(BO(V);Z_2)$, on a :

$$\cancel{(z'_1)^2 = \beta'(z'_1),\ (z'_{2k+1})^2 = \beta'(z'_{2k}z'_{2k+1}) = \beta' p'_{4k+1}\ (k>0)}$$

$$\beta' p'_{4k+1} = (z'_{2k+1})^2 \text{ pour } k \geqslant 0.$$

De là nous allons déduire:

(77) $H^*(U(V_C)/O(V);Z) \longrightarrow H^*(U(V_C);Z)$ envoie α'_{4k+1} en $\pm\, 2a'_{4k+1}$.

Démonstration de (77) : on vient de voir que $d_{4k+2}\, a'_{4k+1} = \beta' p'_{4k+1}$. Donc il existe une ~~cocycle~~ cochaîne u du fibré $U(V_C)/O(V)$ (de base $BO(V)$, de fibre $U(V_C)$) qui induit sur la fibre ~~dont~~ la classe de cohomologie a'_{4k+1}, et dont le cobord

delta

$\delta u = v$ est un cocycle de la base, dont l'image dans $H^*(BO(V);Z_2)$ est $\beta' p'_{4k+1}$. En ajoutant au besoin à u un cocycle de la base, on peut supposer que (en notant t une cochaîne de la base dont la classe de cohomologie mod 2 soit p'_{4k+1})

$$\delta u - \frac{1}{2}\delta t = 2\, w,$$

w étant un cocycle de la base. Ainsi $\delta(2u-t) = 4\, w$; donc la classe de cohomologie entière de 4w est nulle, et puisque la torsion de $H^*(BO(X);Z)$ est d'ordre 2, 2 w est un cobord δs (s: cochaîne de la base); en retranchant s de u, on se ramène au cas où s = 0. Alors 2u-t est un Z-cocycle du fibré; ce cocycle induit sur la fibre la classe de Z-cohomologie de $2a'_{4k+1}$, et sa réduction mod 2 est l'image de t dans $H^*(U(V_C)/O(V);Z_2)$. En d'autres termes, 2u - t a pour classe de cohomologie entière un multiple impair de α'_{4k+1}, et par suite l'application $H^*(U(V_C)/O(V);Z) \longrightarrow H^*(U(V_C);Z)$ envoie un multiple impair de α'_{4k+1} en l'élément $2\, a'_{4k+1}$. Ceci exige que ce multiple impair soit $\pm\alpha'_{4k+1}$, et (77) est ainsi démontrée.

On achèvera donc de fixer le choix du signe des α'_{4k+1} en convenant que $H^*(U(V_C)/O(V);Z) \longrightarrow H^*(U(V_C);Z)$ envoie α'_{4k+1} en $2\, a'_{4k+1}$.

Passons maintenant à $SU(V_C)/SO(V)$, revêtement universel de $U(V_C)/O(V)$. Considérons le fibré en espaces de Hopf:

$$SU(V_C)/SO(V) \longrightarrow U(V_C)/O(V) \longrightarrow K(Z,1).$$

En cohomologie à coefficients Z_2, $H^*(K(Z,1);Z_2)$ est une algèbre extérieure dont le générateur s'envoie sur $z'_1 \in H^*(U(V_C)/O(V);Z_2)$;

(78) donc $H^*(SU(V_C)/\cancel{O(V)}\ SO(V);Z_2)$ s'identifie à ~~xxxxxxxxxxxxx~~ $E(z'_2, z'_3, \ldots, z'_k, \ldots)$, ~~xxxH*(U(V_C)/O(V);Z_2)~~ quotient de $H^*(U(V_C)/O(V);Z_2)$ par l'idéal engendré par z'_1. De plus:

(78') $H^*(SU(V_C)/SO(V);Z)$ s'identifie à la sous-algèbre extérieure $E(\alpha'_5, \ldots, \alpha'_{4k+1}, \ldots)$ de $H^*(SU(V_C)/SO(V);Z)$, en appelant encore α'_{4k+1} (pour $k \geq 1$) ~~xxxxxxxxx~~ l'image de $\alpha'_{4k+1} \in H^*(U(V_C)/O(V);Z)$ dans $H^*(SU(V_C)/SO(V);Z)$.

13. Homologie ~~xxxxxxxxxxxxx~~ des espaces de lacets des groupes $SU(X)$, $Sp(Y)$ et $Spin(V)$.

On se propose d'expliciter les algèbres d'homologie, sans rechercher encore l'application diagonale.

(79) $H_*(\Omega(SU(X);Z)$ est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont de degrés ~~xxxx~~ $2, 4, \ldots, 2k, \ldots$

Cela résulte d'un calcul direct, par récurrence sur n, de $H_*(\Omega(SU(n);Z)$, en utilisant le fibré

S^{2n+1}

$$\Omega(SU(n)) \longrightarrow \Omega(SU(n+1)) \longrightarrow \Omega(S^{2n+1}),$$

et le fait ~~xxxxxxxxx~~ que $H_*(\Omega(S^n);Z)$ est une algèbre de polynômes à un générateur de degré ~~xx~~ $2n$.

(80) $H_*(\Omega(Sp(Y));Z)$ est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont de degrés $2, 6, \ldots, 4k+2, \ldots$ ~~xxxx~~ (démonstration analogue).

(81) $H_*(\Omega(Spin(V));Z)$ est sans torsion, et on a

$H_*(\Omega(Spin(V));Q_2)$ = algèbre de polynômes à générateurs de degrés $4k+2$,

~~$H_*(\Omega(Spin(V));Z_2)$ = algèbre extérieure à générateurs de degrés~~ pairs $2k$.

13. <u>Homologie des espaces de lacets des groupes</u> SU(X), Sp(Y) <u>et</u> Spin(V).

On ne s'intéresse ici qu'aux <u>algèbres</u> d'homologie (on laisse de côté la détermination de l'application diagonale). On appliquera systématiquement les théorèmes du paragraphe §7 de l'Exposé 7; les références se rapporteront toujours à ce paragraphe.

numéro

On a vu au n° 1 que $H_*(SU(X);\underset{\sim}{Z}) = E(a_3, a_5, \ldots, a_{2k+1}, \ldots)$ comme coalgèbre (et on a précisé le choix des générateurs a_{2k+1}). D'après le théorème ~~III~~ 3 (loc. cit.), on obtient:

oméga

lettre grecque ξ ksi

(79) $H_*(\Omega(SU(X));\underset{\sim}{Z}) = L(\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{2k}, \ldots)$ comme algèbre, la suspension envoyant ξ_{2k} en a_{2k+1} (ceci fixe les ξ_{2k} modulo les décommposables).

lettre grecque êta

De même, utilisant (8) et le théorème ~~III~~ 3, on trouve:

(80) $H_*(\Omega(Sp(Y));\underset{\sim}{Z}) = L(\eta_2, \eta_6, \ldots, \eta_{4k+2}, \ldots)$ comme algèbre, la suspension envoyant η_{4k+2} en b_{4k+3} (ceci fixe les η_{4k+2} modulo les décomposables).

D'après (29), on a $H^*(Spin(V);\underset{\sim}{Q}_2) = E(\bar{e}'_3, \ldots, \bar{e}'_{4k-1}, \ldots)$ comme algèbre, compte tenu du fait que Spin(V), revêtement universel de SO(V), a même cohomologie à coefficients $\underset{\sim}{Q}_2$. Appliquant alors le théorème ~~III~~ 3, on trouve:

(81) $H_*(\Omega(Spin(V));\underset{\sim}{Q}_2) = L(\beta_2, \beta_6, \ldots, \beta_{4k+2}, \ldots)$.

De même, d'après (42), $H^*(Spin(V);\underset{\sim}{Z}_2) = L(c'_3, \ldots, c'_{2k-1}, \ldots)$; en appliquant le théorème V (loc. cit.), on obtient:

(81') $H_*(\Omega(Spin(V));\underset{\sim}{Z}_2) = E(\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2k}, \ldots)$.

Comparons (81) et (81'): le $\underset{\sim}{Q}_2$-rang de $H_*(\Omega(Spin(V));\underset{\sim}{Q}_2)$ et le $\underset{\sim}{Z}_2$-rang de $H_*(\Omega(Spin(V));\underset{\sim}{Z}_2)$ sont égaux dans chaque degré. Donc (Exposé 5, Appendice):

(82) ~~L'algèbre~~ $H_*(\Omega(Spin(V));\underset{\sim}{Z})$ <u>est sans torsion</u> (on verra dans l'Exposé ~~suivant que c'est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont de degrés 2, 6, ..., 4k+2, ...~~).

sé suivant que l'algèbre de cohomologie $H^*(\Omega(\mathrm{Spin}(V));Z)$ est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont de degrés 2, 6, ..., 4k+2, ...).

14. Algèbres d'homologie des espaces de lacets de $SU(Y)/Sp(Y)$, $Sp(X_H)/U(X)$, $SO(X)/U(X)$, $SU(V_C)/SO(V)$.

D'après (17), $H_*(SU(Y)/Sp(Y);Z)$ est, comme coalgèbre, une algèbre extérieure $E(a_5,\dots,a_{4k+1},\dots)$ engendrée par des éléments primitifs. Appliquant le théorème ~~XXI~~ 3 (les références se rapportent toujours au ~~§~~ paragraphe 7 de l'exposé 7), on obtient:

grecque ξ . Kr

(83) ~~xxxxxxxx~~ $H_*(\Omega(SU(Y)/Sp(Y));Z) = L(\xi_4,\dots,\xi_{4k},\dots)$ comme algèbre (on note ξ_{4k} les générateurs, car ce sont les images des générateurs de même nom de $H_*(\Omega(SU(Y));Z)$).

Passons à l'homologie de $\Omega(Sp(X_H)/U(X))$. Commençons par les coefficients Q_2; pour cela, ~~xxxxxxxxxxxxxxxx fibré~~ appliquons le théorème IV, compte tenu du fait que $H^*(Sp(X_H)/U(X);Q_2) = L(x'_2,x'_6,\dots,x'_{4k+2},\dots)$ (ce qui résulte aussitôt de (23)); on obtient:

(84) L'algèbre $H_*(\Omega(Sp(X_H)/U(X));Q_2)$ est une algèbre extérieure $E(\sigma_1,\sigma_5,\dots,\sigma_{4k+1},\dots)$. (Cela résulterait aussi de la considération du fibré

$$\Omega(Sp(X_H)/U(X)) \to U(X) \to Sp(X_H),$$

compte tenu de (19)).

Passons aux coefficients Z_2: d'après (27), l'algèbre $H^*(Sp(X_H)/U(X);Z_2)$ est $E(x'_2,x'_4,\dots,x'_{2k},\dots)$. ~~Appliquons~~ Considérons alors le théorème ~~XXI~~ 3: comme on l'a déjà vu lors de la démonstration de (67), ~~il est applicable~~ on pourra l'appliquer aux coefficients Z_2 même si le module A de l'énoncé n'est pas pair, pourvu que ~~L(A) ait même rang, en chaque degré, que~~ l'homologie de la fibre $H_*(\Omega(Sp(X_H)/U(X);Z_2)$ ait même rang, en chaque degré, que l'algèbre $L(A) = L(v_1,v_3,\dots,v_{2k+1},\dots)$