VUE D'ENSEMBLE SUR LA THEORIE DE LA DIMENSION

Rédaction n° 081

Nombre de pages : 11

Nombre de feuilles : 11

Vue d'ensemble sur la théorie de la dimension

81

1 A 81 2

Vue d'ensemble sur la théorie de la dimension.

La définition de la <u>dimension</u> d'un espace <u>compact</u> (par les recouvrements ouverts finis) est prévue pour le Ch.II de "Topologie algèbrique", en même temps que la théorie des "complexes simpliciaux euclidiens" (qu'on pourrait appeler "polytopes" comme Hurewicz et Wallman) et des applications continues d'un espace compact dans les polytopes. La dimension d'un espace <u>localement compact</u> sera définie comme la borne supérieure des dimensions des espaces compacts contenus. Il n'est pas question de développer la <u>théorie</u> de la dimension dans ce chapitre, car il faut attendre pour cela de pouvoir démontrer que R^n est de dimension $\underline{n}$. On le démontrera au Ch. III, lorsqu'on déterminera les groupes d'homologie des boules et des sphères. Il serait donc sage de se borner, au Ch.II, à une <u>définition</u> de la dimension, sans commencer une théorie qu'il vaut mieux ne pas couper en plusieurs morceaux. Rien n'empêchera, lorsqu'on traitera de cette théorie, de dire qu'elle est en grande partie indépendante de l'homologie.

Voici ce que pourrait être un plan de la théorie de la dimension :

I. Généralités résultant de la définition.

Dimension d'un sous-espace (1° cas compact : les recouvrements ouverts finis d'un sous-espace fermé d'un compact E ne sont autres que les traces des rec. ouv. finis de E ; le fait que la dimension est fonction croissante du sous-espace justifie la déf. de la dimension d'un espace loc. compact ; 2° dans le cas d'un espace loc. compact, c'est trivial d'après la définition).

2 Dimension d'une image continue, c'est-à-dire d'un espace-quotient : si F compact est quotient de E compact, on peut avoir $\dim F > \dim E$ (Exemples : 1° le segment $[0,1]$ de la droite numérique est quotient de l'espace des entiers p-adiques ; 2° courbe de Peano).

Notion de $\mathcal{R}$-application (Voir le précédent papier sur la dimension, papier noté T.D.). Pour que E compact soit de dim. $\leqslant n$, il faut et il suffit que, pour tout rec. ouvert fini $\mathcal{R}$, il existe une $\mathcal{R}$-application de E dans un polytope de dim. $\leqslant n$. (Dém. dans T.D.: prop.1). Si E compact est de dim.n, et F compact de dim.$<n$, il n'existe pas de $\mathcal{R}$-application de E dans F lorsque $\mathcal{R}$ est assez fin. Pour qu'un sous-espace fermé de la boule B_n soit de dimension $<n$, il faut et il suffit qu'il ne contienne aucun point intérieur.

La dimension du <u>produit</u> de deux espaces localement compacts est au plus égale à la somme de leurs dimensions : il suffit de le démontrer pour des compacts (dém. dans T.D., prop.2).

C'est dans ce paragraphe qu'on pourrait démontrer qu'un espace compact métrisable de dimension $\leqslant n$ est homéomorphe à un sous-espace fermé de R^{2n+1} .

II. Dimension et applications dans la sphère S_n (sans considération d'homologie)

<u>Théorème préliminaire</u> (Borsuk) (où faudra-t-il le placer ? dans le parag sur les espaces normaux au chap.VII de Top.gén.? ou dans un par. spécial sur l'homotopie ? .

Toute application continue f d'un sous-espace fermé A d'un espace normal E dans un polytope P , qui est <u>homotope</u> (au sens "déformation continue") à une application prolongeable à E, est prolongeable à E . (Indications sur la démonstration : on s'appuie essentiellement sur 2 faits : 1° P , réalisé d'une manière convenable dans un espace numérique, est rétracte d'un de ses voisinages ouverts ; ceci entraîne que f est prolongeable à un voisinage de A ; 2° I désignant le segment $[0,1]$, on peut appliquer le produit $E\times I$ dans la réunion de $A'\times I$ et $E\times\{0\}$, quel que soit le voisinage A' de A dans E).

<u>Proposition 1</u>.- Si E compact est de dimension $\leqslant n$, toute application continue f d'un sous-espace fermé A dans S_n peut être prolongée en une application continue de E dans S_n .
(Démonstration : d'après la théorie des approximations simpliciales qui aura été traitée au Ch.II, $\underline{f}$ est homotope à la composée de 2 applications: 1° la restriction à A d'une application de E dans un polytope P de dimension $\leqslant n$; 2° une application simpliciale d'un sous-polytope Q dans la sphère S_n identifiée au polytope frontière d'un simplexe de dimension $n+1$. Il suffit de montrer que cette application simpliciale peut être prolongée, ce qui est évident.

<u>Proposition 1 bis</u>.- Soit $\underline{f}$ une application continue, dans S_n, d'un sous-espace fermé A d'un espace compact E ; si l'espace localement compact $E - A$ est de dimension $\leqslant n$, $\underline{f}$ peut être prolongée en une application continue de E dans S_n . (Se ramène à la prop.1, en remarquant que $\underline{f}$ peut être prolongée à un voisinage ouvert de A).

<u>Proposition 2</u>.- Si la dimension de l'espace compact E (finie ou infinie) est $> n$, il existe un sous-espace fermé A et une application continue de A dans la sphère S_n , qui n'est pas prolongeable à E .

Démonstration : on établit d'abord le lemme : si toute application continue d'une partie fermée quelconque de E (compact) dans S_n est prolongeable à E , toute application continue d'une partie fermée de E dans S_{n+1} est prolongeable (en effet, considérons S_n comme sous-espace de S_{n+1} ; soit $\underline{f}$ une application continue de A fermé dans S_{n+1} , et $B = \overset{-1}{f}(S_n)$, et soit g la restriction de $\underline{f}$ à B . Prolongeons g en une application continue $\overline{g}$ de E dans S_n (et par suite dans S_{n+1}). Sur A , f et $\overline{g}$ sont homotopes, car $f(x)$ et $g(x)$ ne sont jamais diamétralement opposés pour $x \in A$; le théor. de Borsuk prouve alors que f est prolongeable).

Ce lemme étant établi, on démontre la prop.2 par l'absurde : si toute application continue d'une partie fermée quelconque de E compact, dans S_n , est prolongeable à E , alors il existe une $\mathcal{R}$ -application de E dans un polytope de dimension $\leqslant n$, et cela quel que soit le rec. ouvert fini $\mathcal{R}$ de E . C'est à peu près évident.

Les prop.1 et 2 entraînent :

THEOREME 1.- Pour que E compact soit de dimension $\leqslant n$, il faut et il suffit que toute application continue, dans S_n , d'une partie fermée quelconque de E , soit prolongeable en une application continue de E dans S_n .

On peut énoncer autrement ce théorème. On dit qu'une application continue f d'un espace E dans la boule B_{n+1} $(n \geqslant 0)$ est inessentielle si elle peut être déformée en une application continue dans la sphère frontière S_n , de manière que les images des points de $\overset{-1}{f}(S_n)$ restent fixes au cours de la déformation. Pour cela, il faut et il suffit que la restriction de f à $\overset{-1}{f}(S_n)$ soit prolongeable en une application continue de E dans S_n . Le théor.1 s'énonce alors ainsi :

La dimension (finie ou infinie) d'un espace compact E est le plus grand des entiers p tels qu'il existe une application essentielle de E dans la boule B_p .

III. Dimension d'une réunion finie ou dénombrable.

THEOREME 2.- Soit A un sous-espace fermé de E localement compact ; si dim A $\leqslant n$ et dim(E-A) $\leqslant n$, alors dim E $\leqslant n$.

Démonstration : on se ramène au cas où E est compact. Pour montrer que dim E $\leqslant n$, il suffit de montrer (d'après la prop.2) que toute application continue f d'une partie fermée B de E dans S_n est prolongeable à E . Or la restriction de f à $A \cap B$ est prolongeable à A , d'après la prop.1 ; d'où un prolongement de $\underline{f}$ à $A \cup B$. Mais $E-(A \cup B)$ est un ensemble ouvert de dimension $\leqslant n$, donc le prolongement à E est possible (prop. 1 bis). C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>.- Si E localement compact est réunion <u>finie</u> de sous-espaces <u>fermés</u> de dimension $\leqslant n$, E est de dimension $\leqslant n$.

Définissons la <u>dimension en un point</u> a de E comme la borne inférieure (finie ou infinie) des dimensions des voisinages compacts de a (attention : cette définition n'est pas du tout équivalente à celle d'Hurewicz-Wallman). Le corollaire précédent prouve : <u>la dimension d'un espace localement compact est la borne supérieure des dimensions aux différents points de l'espace</u>.

<u>Noyau</u> d'ordre n d'un espace localement compact : nous appellerons ainsi l'ensemble des points de l'espace E où la dimension est $\geqslant n$.

<u>Proposition 3</u>.- Le noyau d'ordre n d'un espace localement compact E de dimension $\geqslant n$ est un sous-espace <u>fermé</u> non vide, dont la dimension est $\geqslant \underline{n}$ en chacun de ses points.

Démonstration : soit N le noyau ; il n'est pas vide, sinon E serait de dimension $\leqslant n-1$, d'après ce qui précède. Il est fermé, parce que l'ensemble des points de E où la dimension est $\leqslant n-1$ est ouvert. Soit $\underline{x}$ un point de N , et V un voisinage compact quelconque de $\underline{x}$ (dans E) ; V est réunion du sous-espace fermé $V \cap N$ et du sous-espace ouvert $V \cap \complement N$, ce dernier de dimension $\leqslant n-1$; puisque V est de dimension $\geqslant \underline{n}$, $V \cap N$ est de dimension $\geqslant \underline{n}$ d'après le théor. 2 . C.Q.F.D.

THEOREME 3.- <u>Si</u> E <u>localement compact est réunion dénombrable de sous-espaces fermés</u> E_i <u>de dimension</u> $\leqslant n$, <u>alors</u> E <u>est de dimension</u> $\leqslant n$.

En effet, si dim $E > n$, le noyau N d'ordre n+1 n'est pas vide . Posons $E_i \cap N = N_i$. L'espace localement compact N est réunion dénombrable de sous-espaces fermés N_i , donc (d'après le théor. de Baire) l'un des N_i possède un point intérieur, et par suite sa dimension est $\geqslant n+1$. Contradiction. C.Q.F.D.

IV. Ensembles séparateurs dans un espace compact.

On dit qu'un ensemble fermé C sépare 2 ensembles fermés disjoints A et B si le complémentaire de C admet une partition en 2 ensembles ouverts contenant respectivement A et B . En particulier, on a la notion d'ensemble fermé séparant un point et un ensemble fermé, ou deux points distincts.

Pour que deux ensembles fermés disjoints d'un espace compact E puissent toujours être séparés par un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$, il suffit que deux points distincts puissent toujours être séparés par un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$ (Conséquence facile de la compacité, et du fait qu'une réunion finie d'ensembles de dimensions $\leqslant n-1$ est de dimension $\leqslant n-1$).

Proposition 4.- Si deux points distincts de l'espace compact E peuvent toujours être séparés par un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$, alors E est de dimension $\leqslant n$.

Démonstration : soit un recouvrement ouvert fini quelconque de E . Il existe un recouvrement $\mathcal{R}$ plus fin formé d'ouverts dont la frontière est de dimension $\leqslant n-1$ (car tout point de E possède un système fondamental de voisinages ouverts dont la frontière est de dimension $\leqslant n-1$). Soit A la réunion des frontières des ensembles de ce recouvrement ; A est de dimension $\leqslant n-1$, donc il existe un rec. ouvert fini de A qui est plus fin que la trace de $\mathcal{R}$ sur A et dont le nerf est de dimension $\leqslant n-1$; les ensembles de ce recouvrement sont les traces (sur A) d'ensembles ouverts (de E) dont chacun est contenu dans un ensemble de $\mathcal{R}$.

Soit φ l'ensemble de ces ensembles ouverts ; on peut s'arranger pour qu'un point de E appartienne au plus à n ensembles de φ ; ils ne constituent pas un recouvrement de E , mais on peut évidemment leur adjoindre des ensembles resp. contenus dans les ensembles de $\mathcal{R}$, de manière à obtenir un recouvrement de E , dont le nerf soit de dimension $\leqslant n$.

C.Q.F.D.

La réciproque de la prop.4 ne peut être démontrée que dans le cas où l'espace compact E est <u>métrisable</u>. (Contre-exemple au concours !). Elle résulte du lemme suivant (toujours valable, que E soit métrisable ou non) :

Soient A et B deux sous-espaces fermés disjoints de l'espace compact E de dimension $\leqslant n$, et $\mathcal{R}$ un recouvrement ouvert fini de E , assez fin pour que 2 ensembles de $\mathcal{R}$ qui rencontrent respectivement A et B ne se rencontrent pas ; supposons en outre que le nerf de $\mathcal{R}$ soit de dimension $\leqslant n$; alors il existe deux ensembles ouverts A' et B' contenant A et B respectivement, tels que leurs adhérences ne se rencontrent pas, et tels que la trace de $\mathcal{R}$ sur l'ensemble fermé $\complement(A' \cup B')$ ait un nerf de dimension $\leqslant n-1$. (Indications sur la démonstration : le nerf de $\mathcal{R}$ définit un polytope P ; soit <u>f</u> une "application canonique" de E dans P (Voir le papier sur les appl. d'un espace compact dans un complexe simplicial, p.10). Les simplexes (fermés) de P se partagent en deux catégories : ceux dont l'image réciproque rencontre B , et les autres ; les simplexes de la 2è catégorie qui sont contenus dans un simplexe de la 1ère catégorie forment un sous-polytope Q <u>de dimension</u> $\leqslant n-1$. Soit P_1 ce qui reste de la réunion des simplexes de 1ère catégorie quand on enlève Q , P_2 ce qui reste de la réunion des simplexes de 2è cat. quand on enlève Q . Les images réciproques de P_2, P_1 et Q définissent une partition de E en trois ensembles, dont

dont les 2 premiers sont ouverts et contiennent resp. A et B , le troisième C est fermé, tel que le nerf de la trace de $\mathfrak{R}$ sur C soit de dimension $\leqslant n-1$. Il n'y a plus qu'à remplacer C par un de ses voisinages fermés (assez petit), pour obtenir le résultat du lemme).

Lorsque l'espace compact E est métrisable, on peut appliquer le lemme précédent successivement à une suite fondamentale (dénombrable) de rec. ouverts finis, d'où :

Proposition 5.- Si un espace compact métrisable E est de dimension $\leqslant n$, deux sous-espaces fermés disjoints peuvent toujours être séparés par un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$.

La dimension de Menger-Urysohn.- Désignons par $\dim_1 E$ la dimension de E telle qu'elle a été définie jusqu'ici, par $\dim_2 E$ la dimension selon Menger-Urysohn : un espace a la dimension -1 s'il est vide, un espace compact E a une dimension $\leqslant n$ si deux points quelconques de E peuvent être séparés par un sous-espace fermé de dimension $\leqslant n-1$. La prop. 4 prouve que l'on a toujours

$$\dim_1 E \leqslant \dim_2 E \quad ;$$

on le vérifie par récurrence, à partir du fait que $\dim_1 E = 0$ est équivalent à $\dim_2 E = 0$. Lorsque l'espace E est en outre métrisable, on peut appliquer la proposition 5 qui prouve par récurrence que $\dim_1 E \geqslant \dim_2 E$. Il est ainsi démontré que, pour un espace compact métrisable, les deux définitions de la dimension sont équivalentes.

V. Liens entre la théorie de l'homologie et la théorie de la dimension.

Cette partie a déjà été traitée dans le papier T.D.

REMARQUES sur la théorie de Menger-Urysohn, etc. pour les espaces non compacts.

Cette théorie, telle qu'elle est développée dans le livre de Hurewicz-Wallman, est surtout une escroquerie. On peut en effet définir $\dim_1 E$ (par les rec. ouverts finis) et $\dim_2 E$ (par la dim. des ensembles séparant deux sous-ensembles fermés disjoints) pour tout espace E normal . Faisons tout de suite deux remarques : 1° pour E localement compact, $\dim_1 E$ ainsi définie ne coïncidera peut-être pas avec la dimension telle qu'elle avait été définie (borne sup. des dimensions des compacts contenus dans E) ; 2° pour E normal non compact, il y a des variantes dans la définition de $\dim_2 E$, suivant qu'on envisage seulement la séparation de 2 points ou la séparation d'un point et d'un ensemble fermé, ou enfin la séparation de 2 ensembles fermés. Nous nous en tiendrons à cette dernière définition.

Or soit E un espace normal ; complétons-le pour la structure uniforme des recouvrements ouverts finis : soit $\widetilde{E}$ le complété. Alors tout sous-espace A de E , fermé dans E , est normal, et son adhérence $\widetilde{A}$ dans $\widetilde{E}$ est isomorphe à l'espace complété de A (parce que, sur A , la structure unif. des rec. ouverts finis est induite par la structure unif. de E).

On a $\dim_1 E = \dim_1 \widetilde{E}$, et, plus généralement, $\dim_1 A = \dim_1 \widetilde{A}$ pour tout sous-espace A fermé dans E . On vérifie sans peine, par récurrence, que l'on a aussi $\dim_2 A = \dim_2 \widetilde{A}$. Si Hurewicz-Wallman doivent supposer que l'espace E est métrique à base dénombrable, c'est tout simplement pour que $\widetilde{E}$ soit métrisable (condition nécessaire et suffisante), afin que $\dim_1 \widetilde{E} = \dim_2 \widetilde{E}$, et par suite $\dim_1 E = \dim_2 E$.

Quant aux problèmes de prolongement d'une application continue d'une partie fermée A de E normal, dans S_n (et, plus généralement, dans un espace <u>compact</u>), ils se ramènent immédiatement au prolongement d'une application de $\widetilde{A}$ dans $\widetilde{E}$, car toute fonction continue sur un espace normal (à valeurs dans un espace compact) est <u>uniformément continue</u> pour la structure uniforme des recouvrements ouverts finis.

En définitive, il n'y a rien de plus dans la théorie de la dimension des espaces normaux généraux que dans celle de la dimension des espaces compacts, sauf bien entendu les théorèmes pathologiques relatifs à la dimension des sous-espaces <u>non fermés</u>. Mais il faut bien se garder d'en parler.
