HOMOTOPIE, REVETEMENTS, ESPACES FIBRES

Rédaction n° 080

Nombre de pages: 17

Nombre de feuilles: 17

Homotopie -
Revêtements
fibrés

A 80²

HOMOTOPIE, REVETEMENTS, ESPACES FIBRÉS.

§ 1. Homotopie, Groupe de Poincaré.

1. Déformation continue, homotopie.

Définition 1. Soit f une application continue d'un espace topologique A dans un espace topologique E et désignons par I l'intervalle $[0,1]$ de la droite numérique. Une déformation continue de f est une famille $(f_t)_{t\in I}$ d'applications continues de A dans E telle que $f_0=f$ et que l'application F qui applique (x,t), où $x\in A$ et $t\in I$, sur $f_t(x)$ soit une application continue de $A\times I$ dans E.

A toute déformation continue de f correspond ainsi une application continue de $A\times I$ dans E. Réciproquement, à toute application continue F de $A\times I$ dans E correspond une déformation continue $(f_t)_{t\in I}$; en désignant par g_t l'homéomorphisme inverse de l'homéomorphisme canonique de $A\times\{t\}$ sur A, on a $f_t = F\circ g_t$.

Définition 2. Deux applications continues f et f' de A dans E sont dites homotopes, lorsqu'il existe une déformation continue $(f_t)_{t\in I}$ de f à f', c'est-à-dire telle que $f_0=f$ et $f_1=f'$. La relation ainsi définie dans l'ensemble des applications continues de A dans E est appelée homotopie. S'il existe une déformation continue $(f_t)_{t\in I}$ de f à f' telle que la restriction de f_t à une partie B de A soit identique à la restriction de f à B quel que soit t, les applications f et f' sont dites homotopes modulo B.

Proposition 1. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

En effet, elle est symétrique, car on a une déformation continue de f à f en prenant la famille constante d'applications $(f_t)_{t\in I}$, où $f_t=f$ quel que soit t.

Elle est réflexive, car si $(f_t)_{t\in I}$ est une déformation continue de f à f', la famille $(g_t)_{t\in I}$, où $g_t=f_{1-t}$, est une déformation continue de f' à f. Celle-ci est appelée déformation inverse de la première.

Elle est transitive, car si $(f_t)_{t\in I}$ est une déformation continue de f à g et $(g_t)_{t\ \ I}$ une déformation continue de g à h, on obtient une déformation continue de g à h en prenant la famille $(h_t)_{t\in I}$ telle que $h_t=f_{2t}$ pour $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $h_t=g_{2t-1}$ pour $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Cette dernière déformation est appelée produit des deux premières.

La démonstration s'applique aussi bien à l'homotopie modulo B.

L'homotopie définit ainsi dans l'ensemble des application continues de A dans E une partition en <u>classes d'homotopie</u> ; l'homotopie modulo B définit une partition en classes d'homotopie modulo B dans l'ensemble des applications continues de A dans E ayant même restriction à B.

<u>Définition 3</u>. Une déformation continue $(f_t)_{t\in I}$ est appelée une déformation d'isotopie lorsque f_t est un homéomorphisme quel que soit t. Deux applications continues f et f' de A dans E sont dites isotopes lorsqu'il existe une déformation d'isotopie de f à f'.

La relation d'isotopie est évidemment aussi une relation d'équivalence.

<u>Définition 4</u>. Une application continue de A dans E est dite inessentielle lorsqu'elle est homotope à une application constante. Une application non inessentielle est dite essentielle.

<u>Définition 5</u>: On appelle déformation du sous-espace A de E en le sous-espace B de E une déformation de l'application canonique de A dans E faisant passer de celle-ci à une application de A sur B. Lorsqu'il existe une déformation de E en un sous-espace A, on dit que E est contractile en A. Lorsque E est contractile en A par une déformation qui laisse fixes tous les points de A, on dit que A est un rétracte de déformation de E.

Proposition 2. Si f et f' sont deux applications homotopes de A dans E et si g et g' sont deux applications homotopes de E dans F, les applications $g \circ f$ et $g' \circ f'$ sont homotopes.

De cette proposition, dont la démonstration est immédiate, on déduit facilement le corollaire suivant :

Corollaire. Si l'espace E est contractile en A, la condition nécessaire et suffisante pour que deux applications de E dans F soient homotopes, est que leurs restrictions à A soient homotopes. Si l'espace F est contractile en B, la déformation qui contracte F en B établit une correspondance biunivoque entre les classes d'applications de E dans F et les classes d'applications de E dans B. En particulier, si l'un des espaces E et F est contractile en un point, toute application continue de E dans F est inessentielle.

Remarque. Si A est rétracte de déformation de E, toute application continue de A dans F admet évidemment une extension à E, et il existe par suite une correspondance biunivoque entre les classes d'applications de E dans F et les classes d'applications de A dans F.

Exemple. La boule B^n (ouverte ou fermée) est contractile en un point. En effet, la famille d'applications $x \rightarrow x(1-t)$, où $x \in R^n$ (considéré comme espace vectoriel), $t \in I$, définit une déformation contractant la boule B^n en son centre. Par suite, tout pavé de R^n et R^n lui-même sont également contractiles en un point. Toute application continue de B^n ou dans B^n est donc inessentielle. On voit aussi que toutes les applications continues d'un espace A dans R^n ou dans B^n, qui coïncident sur une partie A' de A, sont homotopes modulo A'. En effet, si f et g sont deux applications de cette nature, la famille d'applications $x \rightarrow (1-t)f(x)+tg(x)$, où $x \in A$ et $t \in I$, est une déformation modulo A' de f à g.

Proposition 3. Soient f et f' deux applications continues d'un espace topologique E dans la sphère S^n. Si pour aucun point x de E les images $f(x)$ et $f'(x)$ ne sont diamétralement opposés, les deux applications sont homotopes.

Si de plus f et f' coïncident sur une partie A de E, elles sont homotopes modulo A.

En effet, S^n étant la sphère de rayon 1 et de centre l'origine de l'espace vectoriel R^{n+1}, le point $y=(1-t)f(x)+tf'(x)$ est fonction continue de (x,t), où $t\in I$; comme la norme euclidienne $\|y\|$ ne s'annule jamais, le point $y/\|y\|$ de S^n est aussi fonction continue de (x,t), et la famille d'applications $x \longrightarrow y/\|y\|$ définit une déformation continue de f à f'. Si les restrictions de f et f' à une partie A de E coïncident, la déformation précédente est une déformation modulo A.

Corollaire. Une application continue f de E dans S^n telle que $f(E)$ soit différente de S^n est inessentielle.

En effet, soit $a\in S^n$ et $a\notin f(E)$. L'application constante de E sur le point diamétralement opposé de a est homotope à f.

2. Groupe de Poincaré.

Définition 1. Une application continue c de l'intervalle I dans un espace topologique E est appelé un chemin dans E ; les points $c(s)$, où $s\in I$, sont appelés les points du chemin ; $c(0)$ est appelé origine et $c(1)$ extrémité du chemin. Le sous-espace $c(I)$ appelé le support ou la trajectoire du chemin. Si l'origine et l'extrémité sont confondues, le chemin est dit fermé. Si c est une application constante, le chemin est dit réduit au point $c(0)$.

Remarquons qu'une application continue f de E dans un espace topologique F fait correspondre au chemin c dans E le chemin $c'=f\circ c$ dans F. On dira que f applique c sur c', ou que c' est image de c par f.

Etant donné un segment fermé orienté $[p,q]$ de l'espace numérique R^n, c'est-à-dire un segment fermé dont l'ensemble des extrémités est muni d'un ordre, p étant appelé l'origine et q l'extrémité, on peut lui faire correspondre un chemin déterminé porté par $[p,q]$, d'origine p et d'extrémité q ; c'est celui qui est défini par l'application affine de I sur $[p,q]$, le point $s \in I$ étant appliqué sur le point $(1-s)p+sq$. Une application continue de $[p,q]$ dans E définit par suite un chemin dans E, image du chemin associé à $[p,q]$.

Etant donnée une déformation d'une application continue de A dans E, la restriction de la déformation à un point de A définit un chemin dans E appelé chemin de déformation.

<u>Définition 2</u>. Etant donnés deux chemins a et b dans E tels que l'extrémité de a coïncide avec l'origine de b, on appelle produit de a par b, et on note ab, le chemin c tel que la restriction de l'application c à $[0, \frac{1}{2}]$ définisse a et que la restriction de c à $[\frac{1}{2},1]$ définisse b ; c'est-à-dire $c(s)=a(2s)$ lorsque $0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}$ et $c(s)=b(2s-1)$ lorsque $\frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1$. On appelle chemin inverse d'un chemin a le chemin, noté a^{-1}, tel que $a^{-1}(s)=a(1-s)$ pour $s \in I$.

On voit que l'application $c=ab$ est bien une application continue, en remarquant que les restrictions de c à $[0,\frac{1}{2}]$ et à $[\frac{1}{2},1]$ sont continues ; l'image réciproque par c d'un ensemble fermé est donc la réunion de deux ensembles fermés, c'est-à-dire est un ensemble fermé.

Remarquons que a^{-1} n'est pas l'élément inverse de a par rapport à la loi de composition ainsi définie dans l'ensemble des chemins dans E.

Définition 3. On appelle arc orienté d'origine p et d'extrémité q un sous-espace L de E sur lequel on a défini un ensemble de chemins de la forme $c \circ \alpha$, où c est un chemin sur L (c'est-à-dire une application de I sur L), d'origine p et d'extrémité q , et où α est un automorphisme arbitraire de I laissant fixes les points 0 et 1 . L'arc orienté est dit simple, lorsque c est un homéomorphisme.

Remarquons que tout chemin c détermine un arc orienté (à savoir celui qui est défini par l'ensemble des chemins $c \circ \alpha$) et peut être considéré comme une représentation paramétrique de celui-ci. L'arc orienté correspondant au produit de deux chemins a et b ne dépend évidemment que des arcs orientés correspondant à a et à b et peut donc être appelé produit de ces deux arcs orientés. L'arc orienté correspondant à c^{-1} est dit opposé à l'arc orienté correspondant à c . A un segment orienté $[p,q]$ de R^n est associé un arc orienté bien déterminé, à savoir celui qui est déterminé par le chemin associé à $[p,q]$.

Dans l'ensemble des chemins dans E , considérons la relation d'équivalence définie par l'homotopie modulo le couple de points (0,1). Deux chemins c et c' seront donc dits homotopes (notation $c \equiv c'$) lorsqu'il existe une déformation de c à c' laissant fixes l'origine et l'extrémité de c . Cette relation d'équivalence est compatible avec la loi de composition définie dans l'ensemble des chemins, c'est-à-dire, en supposant défini le produit ab, la relation $a \equiv a'$ et $b \equiv b'$ entraîne $ab \equiv a'b'$. En effet, si $(a_t)_{t \in I}$ est une déformation modulo (0,1) de a à a' et si $(b_t)_{t \in I}$ est une déformation modulo (0,1) de b à b' , la famille de chemins $(a_t b_t)_{t \in I}$ est une déformation modulo (0,1) de ab à a'b' . Par passage au quotient, la loi de composition précédente détermine une loi de composition dans l'ensemble des classes de chemins, on peut donc poser la définition suivante :

<u>Définition 4</u>. Si $\dot{a}$ et $\dot{b}$ désignent les classes des chemins a et b et si ab est défini, le produit $\dot{a}\dot{b}$ est la classe du chemin ab.

Pour que le produit a'b' de deux chemins a' et b' soit homotope au produit ab des chemins a et b , il faut et il suffit qu'il existe une déformation de a à a' laissant fixe l'origine de a et une déformation de b à b' laissant fixe l'extrémité de b et que le chemin de déformation de l'extrémité de a coïncide avec celui de l'origine de b .

Si f est une application continue de E dans F , deux chemins homotopes dans E sont appliqués par f sur deux chemins homotopes dans F , c'est-à-dire $a \equiv b$ entraîne $f \circ a \equiv f \circ b$. De même le produit de deux chemins a et b dans E est appliqué sur le produit de deux chemins correspondants dans F ; c'est-à-dire $f\circ(ab)=(f\circ a)(f\circ b)$. Remarquons aussi qu'un arc orienté dans E est appliqué par f sur un arc orienté dans F .

Deux chemins dans R^n (ou dans B^n) qui ont la même origine et la même extrémité sont homotopes, d'après l'exemple du n°1. En particulier, tous les chemins d'origine p , d'extrémité q et portés par le segment $[p,q]$ de R^n sont homotopes ; leurs images par une application continue de $[p,q]$ dans E sont donc aussi homotopes. Par exemple, toutes les représentations paramétriques d'un arc orienté sont homotopes.

Soit m un point de $[p,q]$, différent de p et de q . Le produit des chemins associés à $[p,m]$ et à $[m,q]$ est homotope au chemin associé à $[p,q]$. (Si m est distinct du milieu du segment $[p,q]$, ce produit n'est pas identique au chemin associé à $[p,q]$, car il est défini par l'application de I sur $[p,q]$ telle que sa restriction à $[0,\frac{1}{2}]$ soit l'application affine de $[0,\frac{1}{2}]$ sur $[p,m]$ et que sa restriction à $[\frac{1}{2},1]$ soit l'application affine de $[\frac{1}{2},1]$ sur $[m,q]$. Par contre, le produit le produit des arcs orientés associés à $[p,m]$ et à $[m,q]$ est bien identique à l'arc orienté associé à $[p,q]$). Une application continue f de $[p,q]$ dans E définit un chemin qui est homotope au produit des chemins définis par les restrictions de f à $[p,m]$ et à $[m,q]$. Ces remarques facilitent la démonstration de la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u>. La loi de composition dans l'ensemble $\Gamma(E)$ des classes de chemins dans E possède les propriétés suivantes :

1) Si a,b,c sont trois chemins tels que ab et bc soient définis, les classes de chemins $\dot{a},\dot{b},\dot{c}$ vérifient la relation d'associativité : $(\dot{a}\dot{b})\dot{c}=\dot{a}(\dot{b}\dot{c})$.

2) Si e_a est le chemin réduit à l'origine de a et si e'_a est le chemin réduit à l'extrémité de a, on a : $\dot{e}_a\dot{a} = \dot{a}\dot{e}'_a = \dot{a}$. (Les classes $\dot{e}_a$ et $\dot{e}'_a$ sont appelées respectivement unité à gauche et unité à droite de $\dot{a}$).

3) Si $\dot{a}^{-1}$ est la classe du chemin a^{-1}, inverse de a, on a : $\dot{a}\dot{a}^{-1}=\dot{e}_a$, $\dot{a}^{-1}\dot{a} = \dot{e}'_a$.

Pour démontrer la propriété d'associativité, considérons sur I deux points m_1 et m_2 tels que $0<m_1<m_2<1$, et supposons que les chemins a, b, c soient définis par des applications continues f_1,f_2,f_3 des segments $[0,m_1]$, $[m_1,m_2]$, $[m_2,1]$ respectivement. Comme ab et bc sont définis, on a $f_1(m_1)=f_2(m_1)$ et $f_2(m_2)=f_3(m_2)$, et par suite f_1,f_2,f_3 sont les restrictions d'une application continue f de I . La restriction de f à $[0,m_2]$ définit donc un chemin homotope à ab et par suite f définit un chemin homotope à (ab)c . D'autre part la restriction de f à $[m_1,1]$ définit un chemin homotope à bc et par suite f définit aussi un chemin homotope à a(bc). Donc $(\dot{a}\dot{b})\dot{c} = \dot{a}(\dot{b}\dot{c})$.

(Remarquons que le chemin $a(bc)$ est seulement homotope et non identique à $(ab)c$; mais si a',b',c' désignent les arcs orientés correspondant à a,b,c, on a bien $(a'b')c'=a'(b'c')$.

Soit i le chemin sur I défini par la transformation identique de I, soit ω le chemin réduit au point 0 et soit ω' le chemin réduit au point 1. Les trois chemins i, ωi et $i\omega'$ sont homotopes sur I ; $i \equiv \omega i \equiv i\omega'$. Soit a un chemin dans E. L'application a applique i,ω,ω' sur a,e_a,e'_a respectivement : $a\circ i=a$, $a\circ\omega=e_a$, $a\circ\omega'=e'_a$. Par suite :

$$a\circ i \equiv (a\circ\omega)(a\circ i) \equiv (a\circ i)(a\circ\omega'),$$

ce qui s'écrit $a \equiv e_a a \equiv a e'_a$ et démontre la deuxième propriété.

La troisième propriété se démontre en remarquant que ii^{-1} est un chemin fermé dans I d'origine 0 et par suite homotope à ω ; de même $i^{-1}i$ est homotope à ω'. Les relations $ii^{-1} \equiv \omega$ et $i^{-1}i \equiv \omega'$ entraînent $(a\circ i)(a\circ i^{-1}) \equiv a\circ\omega$ et $(a\circ i^{-1})(a\circ i) \equiv a\circ\omega'$. Comme $a\circ i^{-1} = a^{-1}$, on a donc $aa^{-1} \equiv e_a$ et $a^{-1}a \equiv e'_a$.

La loi de composition dans l'ensemble $\Gamma(E)$ des classes de chemins admet, en plus des trois propriétés précédentes (associativité, existence d'une unité à gauche e_x et d'une unité à droite e'_x correspondant à un élément quelconque x de $\Gamma(E)$, existence d'un élément inverse x^{-1} de x), un certain nombre de propriétés qui sont des conséquences purement algèbriques de ces trois propriétés et de la propriété évidente suivante :

4) Pour que le produit xy de deux classes de chemins soit défini, il faut et il suffit que l'unité à droite de x soit identique à l'unité à gauche de y.

Voici les principales de ces conséquences :

5. $xy=xz$ ou $yx=zx$ entraîne $y=z$. Cette propriété montre en particulier qu'à chaque élément x ne correspond qu'un seul élément u et un seul élément u' tels que $ux=x$ et $xu'=x$, à savoir $u=e_x$ et $u'=e'_x$.

6. Toute unité à gauche ou à droite est un élément idempotent. Réciproquement, tout élément idempotent e est unité à gauche pour tout x tel que ex soit défini, unité à droite pour tout y tel que ye soit défini.

7. A chaque élément x correspond un élément unique y tel que $xy=e_x$ et $yx=e'_x$, à savoir $y=x^{-1}$.

8. $xy=z$ entraîne les relations suivantes : $x^{-1}z=y$, $zy^{-1}=x$, $y^{-1}x^{-1}=z^{-1}$, $z^{-1}x=y^{-1}$, $yz^{-1}=x^{-1}$.

La proposition 1 admet surtout le corollaire suivant :

Corollaire : L'ensemble $\Pi(E,p)$ des classes de chemins fermés d'origine p , muni de loi de composition induite par celle de $\Gamma(E)$, est un groupe.

En effet, cette loi de composition induite est partout définie, est associative, admet un élément unité (la classe du chemin réduit au point p) et chaque élément x admet un inverse x^{-1} .

Définition 5. Le groupe $\Pi(E,p)$ des classes de chemins fermés d'origine p est appelé groupe de Poincaré au point p , ou premier groupe d'homotopie au point p , de l'espace E .

Proposition 2. Lorsqu'il existe un chemin a d'origine p et d'extrémité q, l'application $x \to \mathring{a}^{-1}x\,\mathring{a}$, où $x \in \Pi(E,p)$, est un isomorphisme de $\Pi(E,p)$ sur $\Pi(E,q)$.

L'application est en effet biunivoque, car l'image réciproque de $y \in \Pi(E,q)$ se réduit à l'élément $\mathring{a}y\mathring{a}^{-1}$; de plus le produit xx' est appliqué sur $\mathring{a}^{-1}xx'\mathring{a} = (\mathring{a}^{-1}x\mathring{a})(\mathring{a}^{-1}x'\mathring{a})$.

L'isomorphisme considéré dépend, en général, du chemin reliant p à q. Soit, en effet, b un autre chemin reliant p à q. On passe de $y=\mathring{a}^{-1}x\mathring{a}$ à $y'=\mathring{b}^{-1}x\mathring{b}$ par l'application $y \to \mathring{b}^{-1}\mathring{a}y\mathring{a}^{-1}\mathring{b}$, qui est l'automorphisme intérieur du groupe $\Pi(E,q)$ correspondant à l'élément $\mathring{b}^{-1}\mathring{a}$ de ce groupe. L'isomorphisme n'est donc parfaitement défini que dans le cas où le groupe $\Pi(E,q)$ est abélien.

<u>Définition 6</u>. L'espace topologique E est dit continument connexe (ou connexe par arc), lorsque, les points p et q étant quelconques dans E, il existe un chemin dans E d'origine p et d'extrémité q. L'espace E est dit localement continument connexe lorsque tout point de E possède un système fondamental de voisinages continument connexes.

Si E est continument connexe, les groupes de Poincaré aux différents points de E sont tous isomorphes ; l'un quelconque de ces groupes pourra s'appeler groupe de Poincaré de l'espace E et pourra se noter $\Gamma(E)$. Remarquons aussi que la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les applications inessentielles d'un espace A dans E soient de même classe est que E soit continument connexe.

<u>Proposition 3</u>. Si l'espace E est localement continument connexe et de plus connexe, il est continument connexe.

En effet, l'ensemble A des points dont chacun puisse être relié à un point p par un chemin est ouvert ; car tout point q de A admet un voisinage V tel qu'il existe un chemin reliant q à un point arbitraire q' de V. Le produit de deux chemins reliant respectivement p à q et q à q' est un chemin reliant p à q'; donc $V \subset A$. Mais A est aussi fermé, car le même raisonnement montre que tout point adhérent à A peut être relié à un point de A, donc aussi à p. Comme E est connexe, A est donc identique à E.

<u>Corollaire</u>. Pour qu'un espace E soit localement continument connexe, il faut et il suffit que toute composante connexe d'un ensemble ouvert non vide dans E soit un ensemble ouvert continument connexe.

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de la proposition 10 de Bourbaki, Topologie, chap. I, § 11.

<u>Exemple</u>. L'espace R^n, la boule B^n, tout pavé de R^n, la sphère S^n (pour $n > 0$) sont des espaces continument connexes. Toute variété numérique (espace séparé tel que tout point admette un voisinage ouvert homéomorphe à une boule ouverte $\overset{\circ}{B}{}^n$) est localement continument connexe; donc tout domaine d'une variété numérique est continument connexe.

<u>Remarque</u>. La loi de composition dans $\Gamma(E)$ est un exemple du type étudié dans Bourbaki, Algèbre, § 6, ex. 22. Lorsque E est continument connexe, $\Gamma(E)$ muni de cette loi de composition est un groupoïde.

<u>Proposition 4</u>. Une application continue f de E dans F détermine un homomorphisme de $\Pi(E,p)$ sur un sous-groupe de $\Pi(F,f(p))$. Une déformation continue de E en un sous-espace A de E détermine un isomorphisme de $\Pi(E,p)$ sur $\Pi(A,q)$, où q est l'extrémité du chemin de déformation d'origine p.

La première partie est évidente. Considérons donc une déformation $(f_t)_{t \in I}$ de l'application identique de E à une application f de E dans A, et soit $q=f(p)$. Soit c le chemin de déformation d'origine p. Le chemin fermé a d'origine p est appliqué par f sur le chemin fermé $a'=f \circ a$ d'origine q. Le chemin $ca'c^{-1}$ est un chemin fermé d'origine p, homotope à a.

Soit en effet, c_t le chemin défini par la restriction de l'application c à l'intervalle $[0,t]$, soit $a_t=f_t \circ a$ et soit e le chemin réduit au point p. La famille de chemins $(c_t a_t c_t^{-1})$ définit une déformation continue du chemin eae au chemin $ca'c^{-1}$, l'origine et l'extrémité restant fixes. Par suite $ca'c^{-1} \equiv eae \equiv a$. Soit b un deuxième chemin fermé d'origine p, et soit b' son image par f . Pour que a' et b' soient homotopes dans A, il faut et il suffit que a et b soient homotopes dans E . La condition est évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire, car $a' \equiv b'$ dans A entraîne $ca'c^{-1} \equiv cb'c^{-1}$ dans E et par suite $a \equiv b$ dans E . L'application $\mathring{a} \to \mathring{a}'$ est donc une application biunivoque de $\Pi(E,p)$ dans $\Pi(E,q)$. C'est même une application sur $\Pi(E,q)$. Soit, en effet, y un chemin fermé dans A d'origine q . Remarquons que $a' \equiv c^{-1}ac$. Pour que a' soit homotope à y , il suffit donc de prendre pour a le chemin cyc^{-1} . L'application f détermine donc bien un isomorphisme de $\Pi(E,p)$ sur $\Pi(A,q)$.

<u>Corollaire 1</u>. Pour que deux espaces topologiques continument connexes soient homéomorphes, il faut que leurs groupes de Poincaré soient isomorphes.

<u>Corollaire 2</u>. Si E est contractile en un point, le groupe de Poincaré en un point quelconque de E est réduit à l'élément unité.

<u>Définition 7</u>. Un espace topologique est dit simplement connexe, lorsqu'il est continument connexe et que son groupe de Poincaré est réduit a l'élément unité.

Le corollaire précédent peut encore s'énoncer : Pour que l'aplication identique de E soit inessentielle, il faut que E soit simplement connexe.

<u>Proposition 5</u>. Le groupe de Poincaré de l'espace produit $E = \prod_{i \in I} E_i$ au point $(p_i)_{i \in I}$ est isomorphe au produit de la famille de groupes de Poincaré $(\Pi(E_i,p_i))_{i \in I}$.

En effet, au chemin c dans E correspond la famille de chemins $(c_i)_{i \in I}$ où c_i est la projection canonique de c dans E_i. La relation $c \equiv c'$ équivaut à $c_i \equiv c'_i$, quel que soit $i \in I$. Au chemin cd dans E correspond la famille $(c_i d_i)_{i \in I}$. La proposition en résulte immédiatement.

Exemples. 1) L'espace R^n et la boule B^n sont simplement connexes, d'après le corollaire 2 de la prop.4.

2) Pour $n > 1$, la sphère S^n est simplement connexe.

Pour démontrer cette proposition, remarquons d'abord que deux points p et q du cercle S^1 déterminent exactement deux arcs orientés simples d'origine p et d'extrémité q ; on les appellera les arcs de cercle d'origine p et d'extrémité q. En effet, le complémentaire de (p,q) dans S^1 a deux composantes connexes A et B, car le complémentaire de p dans S^1 est homéomorphe à R, et le complémentaire d'un point de R a deux composantes connexes. Soit a un homéomorphisme de I dans S^1 tel que $a(0)=p$ et $a(1)=q$. L'image par a de l'intervalle ouvert $]0,1[$ est contenue dans l'une des composantes connexes A et B, car elle est connexe et ne contient aucun des points p et q. Donc $a(I)$ est contenu dans l'un des sous-espaces $\bar{A}$ et $\bar{B}$. Supposons $a(I) \subset \bar{A}$. Or $\bar{A}$ est homéomorphe à un intervalle fermé $[p',q']$ de R, les points p et q correspondant à p' et q'. Tous les homéomorphismes de I dans $[p',q']$ qui appliquent 0 sur p' et 1 sur q' sont des homéomorphismes <u>sur</u> $[p',q']$ et définissent un même arc orienté. Donc il existe un seul arc orienté simple d'origine p, d'extrémité q et dont le support est $\bar{A}$. Il existe un deuxième arc orienté simple d'origine p et d'extrémité q ; son support est $\bar{B}$.

Soit a un chemin dans S^n d'origine p et d'extrémité q . Si le support de a ne recouvre pas tout S^n , a est homotope à l'un quelconque des arcs de grand cercle d'origine p et d'extrémité q . En effet, si m est un point de S^n n'appartenant pas à a , il existe un arc de grand cercle d'origine p , d'extrémité q et ne contenant pas m . Comme le complémentaire de m dans S^n est homéomorphe à R^n , tous les chemins d'origine p et d'extrémité q et ne contenant pas m sont homotopes, d'après l'exemple du n°1 . Donc a est homotope à l'un des arcs de grand cercle d'origine p et d'extrémité q , et par suite aussi à tout autre arc de grand cercle ayant même origine et même extrémité. Si le chemin a est quelconque, on peut, en vertu de la continuité uniforme de l'application a , subdiviser I en un nombre fini de segments $[m_{i-1}, m_i]$, où $i=0,1,\ldots,k$ et $m_0=0$, $m_k=1$, tel que chaque chemin partiel a_i défini par la restriction de a à $[m_{i-1}, m_i]$ soit contenu dans un hémisphère. Chacun de ces chemins partiels est alors homotope à un arc de grand cercle et par suite a est homotope au produit a' d'un nombre fini d'arcs de grands cercles. Comme le support de a' ne recouvre pas S^n , le chemin a' est homotope à un arc de grand cercle d'origine p et d'extrémité q .
Donc tous les chemins d'origine p et d'extrémité q sont homotopes.
En particulier tout chemin fermé d'origine p est homotope au chemin réduit au point p .

3) On verra plus loin (par la théorie des revêtements) que le groupe de Poincaré de S^1 est le groupe monogène infini. En admettant ce résultat, on peut énoncer quelques conséquences immédiates des propositions précédentes : Le groupe de Poincaré du tore T^n est isomorphe au produit de n groupes monogènes infinis. L'application identique de S^1 est essentielle. Il n'existe aucune application continue du disque B^2 sur sa frontière S^1, dont la restriction à S^1 soit l'application identique.

Remarque. Comme S^1 est homéomorphe à l'espace déduit de I par identification des extrémités 0 et 1 , un chemin fermé dans E d'origine p est aussi défini par une application continue f de S^1 dans E telle qu'un point donné o de S^1 soit appliqué sur p . Deux chemins fermés d'origine p sont homotopes lorsqu'ils sont définis par deux applications continues de S^1 qui sont homotopes modulo o . Deux chemins fermés quelconques sont dits librement homotopes lorsqu'ils sont définis par deux applications continues homotopes de S^1 dans E . Pour que deux chemins fermés d'origine p soient librement homotopes, il faut et il suffit que leurs classes d'homotopie soient des éléments conjugués du groupe de Poincaré $\Pi(E,p)$.
