CHAPITRE VII
ALGEBRES SEMI-SIMPLES
REPRESENTATION MATRICIELLE DES GROUPES

Rédaction n° 075

Nombre de pages : 154

Nombre de feuilles : 154

Algèbre Chap. VII
Algèbre semi-simples
Représentations

75

COMMENTAIRES SUR LE CHAPITRE VII.

L'élaboration de ce chapitre (qui est, bien entendu, une première rédaction) a été plus lente que ne l'espérait le rédacteur, qui a mis un certain temps pour s'initier aux matières dudit chapitre, et dont le travail a dû être interrompu à plusieurs reprises en faveur de tâches plus urgentes. Le rédacteur espère que les deux derniers chapitres de l'Algèbre suivront dans un délai plus court.

Voici tout d'abord le sommaire du chapitre :

Le chapitre se divise en 3 parties : les 4 premiers paragraphes sont consacrés à la théorie générale des algèbres semi-simples, les deux suivants à l'application ce cette théorie à la théorie générale de la représentation matricielle des algèbres et des groupes ; enfin les 3 derniers ont pour objet une application à des groupes particuliers, le groupe symétrique et le groupe linéaire, mais cette application particulière est en réalité le point de départ d'une immense théorie, celle des invariants, qui commande elle-même toute la géométrie élémentaire et la géométrie différentielle.

Dans la première partie, on s'est limité à la partie élémentaire de la théorie des algèbres, la seule utilisée d'ailleurs par la suite : on a donc laissé de côté toute la théorie approfondie des algèbres, basée sur les "systhèmes de facteurs" de Brauer et E. Noether, et qui jusqu'ici ne semble avoir d'applications qu'en Théorie des Nombres ; il faudra naturellement, lors de la discussion du chapitre, examiner s'il n'y aurait pas lieu d'insérer tout de même cette théorie ici. En ce qui concerne le mode d'exposition adopté, le rédacteur n'a pas jugé satisfaisante la marche classique pour arriver aux th. de Wedderburn, telle qu'elle est par exemple développée dans Deuring ou van der Waerden : on a du mal à voir clair au milieu de cette série d'astuces, où tout se fait à grand renfort d'"idempotents" et de "décompositions de Peirce", et où, pour aboutir à quelque chose, il faut d'abord, par une construction pénible, prouver qu'un anneau semi-simple admet un élément unité. Le rédacteur a cherché une autre voie, se rattachant davantage aux méthodes générales de l'Algèbre linéaire (théorie des modules complètement réductibles) ; la méthode exposée dans le texte est un premier essai dans cette direction. Depuis cette rédaction, le rédacteur a simplifié encore cette méthode (ce qui lui a permis de l'étendre à des algèbres de rang infini), et préconisera, pour une seconde rédaction, cette nouvelle version, qui conduit très rapidement et presque sans calcul, aux th. de Wedderburn.

....

- Suite -

En ce qui concerne les "représentations matricielles" des algèbres, il est apparu au rédacteur qu'il y avait intérêt à distinguer, dans leur étude, deux parties : tout d'abord, la théorie générale des représentations des algèbres semi-simples les unes dans les autres (théorie de E. Noether), qui conduit à d'importantes propriétés de ces algèbres (§ 4) ; dans cette partie, on n'étudie pas les représentations pour elles-mêmes, mais comme des moyens pour élucider la structure des algèbres simples ; en particulier, la notion d'irréductibilité ne joue aucun rôle dans ces questions. Au contraire, dans la seconde partie (§ 5), ce sont les représentations elles-mêmes auxquelles on s'intéresse, et les représentations irréductibles deviennent primordiales ; en outre, on se limite alors pratiquement aux représentations dans une algèbre de matrices sur un corps commutatif, surtout en ce qui concerne les applications aux groupes (§ 6). Le rédacteur estime que de cette manière, les divers aspects de la question sont mieux mis en lumière que chez v.der Waerden ou Deuring, où tout est mélangé.

Dans la dernière partie, les résultats essentiels sont ceux du § 7 sur les représentations du groupe symétrique ; une fois celles-ci déterminées, presque tout le reste se ramène à des applications faciles de théorèmes généraux, et se bourbachise donc très bien. Il n'en est pas de même pour les représentations du groupe symétrique, dont la théorie actuelle est un parfait exemple de tour de prestidigitation mathématique : par quel miracle les "schémas d'Young" fournissent-ils des représentations irréductibles, et par quel plus grand miracle ils les fournissent toutes, c'est ce qu'on ne voit absolument pas. Le rédacteur a vainement essayé de débrouiller la question, mais a dû y renoncer et laisser les choses en l'état : il met donc le problème au concours, et espère que pour l'honneur de Bourbaki quelqu'un parviendra à trouver une dérivation naturelle de ces résultats.

En ce qui concerne les matières de cette dernière partie, on s'est borné à ce qui est strictement indispensable à la théorie des invariants, et, de cette dernière, on n'a donné que les résultats les plus fondamentaux. C'est ainsi que, dans la théorie des représentations du groupe symétrique et du groupe linéaire, on a laissé de côté le calcul effectif des caractères ; il y aura naturellement matière à discussion sur ce point, et en général sur l'étendue qu'il convient de donner à ces théories. En raison de cette imprécision, on n'a pas ajouté d'exercices aux §§ 7 et 8 ; ce n'est pas que la matière manque, elle est au contraire trop abondante, et le difficile sera de faire un choix, mais ce dernier n'aura sa raison d'être qu'une fois fixé le contenu du texte lui-même.

A 75

CHAPITRE VII

Etat 1

ALGEBRES SEMI-SIMPLES

REPRESENTATION MATRICIELLE DES GROUPES

----

§ 1. Idéaux minimaux d'un anneau à opérateurs.

Produit d'idéaux dans un anneau à opérateurs. Conformément aux conventions du chap. I, § 8, nous entendrons toujours par idéal (à gauche, à droite ou bilatère) d'un anneau à opérateurs A , un idéal $\mathfrak{a}$ stable pour les opérateurs considérés (c'est-à-dire (chap. I, § 8) tel que $\alpha\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ pour tout opérateur α) .

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de A , et B une partie quelconque de A ; par le produit de $\mathfrak{a}$ par B , noté $\mathfrak{a}$B , nous entendrons toujours, dans ce chapitre, l'idéal à gauche engendré par le produit $\mathfrak{a}$.B (ensemble des xy , où $x \in \mathfrak{a}$, $y \in B$) défini au chap. I ; cet idéal est l'ensemble des sommes finies $\sum_i a_i b_i$, où les a_i sont des éléments arbitraires de $\mathfrak{a}$, les b_i des éléments arbitraires de B ; lorsque $B = \{b\}$, on écrit $\mathfrak{a}b$ au lieu de $\mathfrak{a}\{b\}$, et ce produit est alors identique au produit $\mathfrak{a}.b$.

Cette définition généralise celle du chap. V, § 3 aux anneaux non commutatifs ; il est immédiat que, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux à gauche, on a la propriété d'associativité

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}B) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})B \tag{1}$$

et celle de distributivité à gauche

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})B = \mathfrak{a}B + \mathfrak{b}B \tag{2}$$

En outre, si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont trois idéaux à gauche, on a la distributivité à droite

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} \tag{3}$$

Si B et C sont deux parties quelconques de A , on notera par contre qu'on n'a pas en général $\mathfrak{a}(B+C)=\mathfrak{a}B+\mathfrak{a}C$, mais seulement la relation d'inclusion $\mathfrak{a}(B+C)\subset\mathfrak{a}B+\mathfrak{a}C$; l'égalité a lieu toutefois lorsque B et C sont des parties de B+C , ce qui sera le cas, par exemple, lorsque 0 appartient à $B\cap C$.

On définit de même le produit $B\mathfrak{r}$ d'une partie B de A et d'un idéal à droite $\mathfrak{r}$, comme l'idéal à droite engendré par le produit $B.\mathfrak{r}$; nous laissons au lecteur le soin de formuler les propriétés correspondant aux précédentes. En particulier, si $\mathfrak{a}$ est un idéal à gauche, $\mathfrak{b}$ un idéal à droite, C une partie quelconque de A , on a $\mathfrak{a}(C\mathfrak{b})=(\mathfrak{a}C)\mathfrak{b}$, et l'idéal $\mathfrak{a}C\mathfrak{b}$ est bilatère.

Grâce à la propriété d'associativité, la puissance n-ième d'un idéal quelconque $\mathfrak{a}$ est définie (par récurrence) pour tout entier >0 , et est un idéal de même espèce que $\mathfrak{a}$. On dit que l'idéal $\mathfrak{a}$ est <u>nilpotent</u> s'il existe un entier $n>0$ tel que $\mathfrak{a}^n=(0)$.

On dit de même qu'un élément $a\in A$ est <u>nilpotent</u> s'il existe un entier $n>0$ tel que $a^n=0$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal nilpotent, tout élément de $\mathfrak{a}$ est évidemment nilpotent ; et plus généralement, si $\mathfrak{a}^n=(0)$, le produit de n élément quelconques de $\mathfrak{a}$ est nul. Mais il faut se garder de croire que, si a est un élément nilpotent, l'idéal à gauche Aa (ou l'idéal à droite aA) soit un idéal nilpotent.

<u>Idéaux minimaux</u>. Dans un anneau à opérateurs A , un idéal à gauche $\mathfrak{l}\neq(0)$ est dit <u>minimal</u> s'il est un élément minimal de l'ensemble des idéaux à gauche $\neq(0)$, ordonné par inclusion ; autrement dit, il n'existe aucun idéal à gauche $\neq(0)$ contenu dans $\mathfrak{l}$, et distinct de $\mathfrak{l}$. Cette définition équivaut encore à dire que $\mathfrak{l}$ est un A-module à gauche <u>simple</u> (chap.II, § 1). On définit de même les idéaux à droite minimaux.

Lorsque, dans ce qui suit, nous parlerons d'idéaux à gauche <u>isomorphes</u>, il s'agira toujours d'une isomorphie de leurs structures de A-<u>modules à gauche</u> (et non des <u>structures d'anneau</u> de ces idéaux ; autrement dit, si a et b sont des éléments qui se correspondent dans une telle isomorphie, et x un élément quelconque de A , les éléments xa et xb se correspondent dans l'isomorphie).

<u>Proposition 1</u>. <u>Si $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche minimal, a un élément quelconque de</u> A , <u>l'idéal à gauche $\mathfrak{l}$a est égal à</u> (0) <u>ou est un idéal à gauche minimal isomorphe à $\mathfrak{l}$</u> .

En effet, il est immédiat que l'application $x \to xa$ est une <u>représentation</u> de l'idéal à gauche $\mathfrak{l}$ sur l'idéal à gauche $\mathfrak{l}$a ; $\mathfrak{l}$a est donc isomorphe à un module quotient $\mathfrak{l}/\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est un idéal à gauche contenu dans $\mathfrak{l}$; comme on ne peut avoir que $\mathfrak{m}=(0)$ ou $\mathfrak{m}=\mathfrak{l}$, ou bien $\mathfrak{l}a=(0)$ ou bien $\mathfrak{l}$a est isomorphe à $\mathfrak{l}$; dans ce dernier cas, il est clair que $\mathfrak{l}$a est minimal.

<u>Proposition 2</u>. <u>Si $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche minimal, on a $\mathfrak{l}^2=(0)$ ou il existe un élément $a \in \mathfrak{l}$ tel que $\mathfrak{l}a=\mathfrak{l}$</u> .

En effet, si $\mathfrak{l}^2 \neq (0)$, il existe $a \in \mathfrak{l}$ tel que $\mathfrak{l}a \neq (0)$; $\mathfrak{l}$a est alors un idéal à gauche contenu dans $\mathfrak{l}$ et $\neq (0)$, donc égal à $\mathfrak{l}$.

<u>Corollaire</u>. <u>Si $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche minimal non nilpotent, on a $\mathfrak{l}^2=\mathfrak{l}$</u> .

En effet, il existe $a \in \mathfrak{l}$ tel que $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}a$; comme $\mathfrak{l}a \subset \mathfrak{l}^2 \subset \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}^2=\mathfrak{l}$.

<u>Proposition 3</u>. <u>Si $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ sont deux idéaux à gauche minimaux isomorphes, on a $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'=(0)$ si $\mathfrak{l}$ est nilpotent, $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'=\mathfrak{l}'$ dans le cas contraire</u>.

En effet, soit φ un isomorphisme de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}'$; on a $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'=\mathfrak{l}\varphi(\mathfrak{l})=$ $=\varphi(\mathfrak{l}^2)$, d'où la proposition d'après la prop.2 et son corollaire.

Socle d'un anneau à opérateurs. Définition 1. On appelle socle d'un anneau à opérateurs A la somme des idéaux à gauche minimaux de A . La somme de tous les idéaux à gauche minimaux de A isomorphes à un même idéal minimal $\mathfrak{l}_0$ est appelée un pied du socle de A .

Il peut naturellement n'exister aucun idéal à gauche minimal dans A , auquel cas le socle de A se réduit à 0 .

Proposition 4. Tout pied du socle d'un anneau A est un idéal bilatère de A , et un A-module à gauche complètement réductible ; le socle de A est la somme directe de ses pieds.

Soit $\mathfrak{a}$ un pied du socle de A ; comme $\mathfrak{a}$ est par définition une somme de A-modules simples, $\mathfrak{a}$ est un A-module complètement réductible (chap.II, §1,th.1), donc somme directe d'une famille ($\mathfrak{l}_\iota$) d'idéaux à gauche minimaux isomorphes entre eux ; si x est un élément quelconque de A , $\mathfrak{a}$ x est somme des idéaux $\mathfrak{l}_\iota$ x , qui (prop.1) sont nuls ou isomorphes aux $\mathfrak{l}_\iota$, donc contenus dans $\mathfrak{a}$; par suite $\mathfrak{a} x \subset \mathfrak{a}$, ce qui prouve que $\mathfrak{a}$ est un idéal à droite dans A , donc un idéal bilatère.

Soit ($\mathfrak{a}_\lambda$) la famille des pieds distincts du socle $\mathfrak{s}$ de A ; il est clair que $\mathfrak{s}$ est la somme des idéaux bilatères $\mathfrak{a}_\lambda$; en outre, si $\mathfrak{b}_\lambda$ est la somme des idéaux $\mathfrak{a}_\mu$ différents de $\mathfrak{a}_\lambda$, on a $\mathfrak{a}_\lambda \cap \mathfrak{b}_\lambda = (0)$; en effet, dans le cas contraire, cette intersection serait un A-module à gauche complètement réductible (chap.II, §1,th.2), somme directe d'idéaux à gauche minimaux dont chacun serait, d'une part, isomorphe aux idéaux à gauche minimaux contenus dans $\mathfrak{a}_\lambda$, d'autre part isomorphe aux idéaux à gauche minimaux contenus dans un $\mathfrak{a}_\mu$ différent de $\mathfrak{a}_\lambda$, ce qui est absurde, en vertu de la définition des pieds du socle de A . Il en résulte que $\mathfrak{s}$ est la somme directe des $\mathfrak{a}_\lambda$.

Proposition 5. Si $\mathfrak{a}$ est un pied du socle d'un anneau A , on a $\mathfrak{a}^2=(0)$ ou $\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}$.

En effet, $\mathfrak{a}$ est somme directe d'une famille ($\mathfrak{l}_\iota$) d'idéaux à gauche minimaux isomorphes ; donc $\mathfrak{a}^2$ est somme des idéaux $\mathfrak{l}_\iota\mathfrak{l}_\varkappa$; si tous les $\mathfrak{l}_\iota$ sont nilpotents, $\mathfrak{l}_\iota\mathfrak{l}_\varkappa=(0)$ quels que soient ι et $\varkappa$, (prop.3), donc $\mathfrak{a}^2=(0)$; dans le cas contraire, si $\mathfrak{l}_\iota$ n'est pas nilpotent, $\mathfrak{l}_\iota\mathfrak{l}_\varkappa=\mathfrak{l}_\varkappa$ pour tout $\varkappa$, donc $\mathfrak{a}^2$ contient la somme des $\mathfrak{l}_\varkappa$, c'est-à-dire $\mathfrak{a}$, d'où la proposition.

Proposition 6. Soit $\mathfrak{r}$ l'annihilateur à droite du socle $\mathfrak{s}$ d'un anneau A ; si aucun des pieds de $\mathfrak{s}$ n'est nilpotent, $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=(0)$.

En effet, comme $\mathfrak{s}$ est un idéal bilatère de A , $\mathfrak{r}$ est un idéal bilatère de A ; si $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}$ n'était pas réduit à 0, il contiendrait un idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$ (chap.II, §1,th.2) ; or, il existe d'après l'hypothèse et la prop.5, un idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}_0$ non nilpotent et isomorphe à $\mathfrak{l}$; on a donc (prop.3) $\mathfrak{l}_0\mathfrak{l}=\mathfrak{l}$; mais d'autre part $\mathfrak{l}_0\mathfrak{l}\subset\mathfrak{s}\mathfrak{r}=(0)$, d'où contradiction.

Proposition 7. S'il existe un idéal à gauche minimal nilpotent $\mathfrak{l}_0$ dans A , la somme des idéaux à gauche minimaux nilpotents et isomorphes à $\mathfrak{l}_0$ est un idéal bilatère $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b}^2=(0)$.

En effet, si $\mathfrak{l}$ est nilpotent, il en est de même de $\mathfrak{l}a$, quel que soit $a\in A$, car on a $(\mathfrak{l}a)(\mathfrak{l}a)=\mathfrak{l}(a\mathfrak{l})a\subset\mathfrak{l}^2a=(0)$; donc $\mathfrak{b}a$, somme des idéaux $\mathfrak{l}a$, où $\mathfrak{l}$ parcourt l'ensemble des idéaux à gauche nilpotents isomorphes à $\mathfrak{l}_0$, est contenu dans $\mathfrak{b}$, ce qui prouve que $\mathfrak{b}$ est idéal à droite, donc bilatère ; comme $\mathfrak{b}$ est un A-module complètement réductible, le même raisonnement que dans la prop.5 prouve que $\mathfrak{b}^2=(0)$.

Anneaux d'Artin. *Définition 2*. *On appelle anneau d'Artin gauche* (resp. *droit*) *un anneau à opérateurs A satisfaisant à la condition suivante* (*dite condition minimale pour les idéaux à gauche* (resp. *les idéaux à droite*)) (CM) *Tout ensemble d'idéaux à gauche* (resp. *droite*) *de A , ordonné par inclusion, admet un élément minimal*.

Exemples. 1) Tout anneau *fini* est évidemment un anneau d'Artin (à gauche et à droite).

2) Une *algèbre* A de rang *fini* sur un *corps* K est un anneau d'Artin (à gauche et à droite) : en effet, tout idéal (à gauche ou à droite) de A est un sous-espace vectoriel de A , donc a un nombre de dimensions inférieur à celui de A ; dans un ensemble quelconque d'idéaux à gauche (ou à droite), un idéal ayant un nombre de dimensions minimum est évidemment un élément minimal.

Remarque. La condition (CM) équivaut à la suivante :

(CM') *Si* ($\mathfrak{a}_n$) *est une suite décroissante d'idéaux à gauche* (resp. *droite*) *de A* , *on a* $\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{a}_n$ *à partir d'un certain rang* .

Il est clair, en effet, que (CM) entraîne (CM'). Réciproquement, supposons (CM') vérifié, et soit Φ un ensemble d'idéaux à gauche de A ; si Φ n'avait pas d'élément minimal on pourrait déterminer par récurrence une suite infinie strictement décroissante ($\mathfrak{a}_n$) d'idéaux appartenant à Φ , ce qui contredirait (CM') .

Quand nous parlerons d'anneau d'Artin sans préciser, il sera toujours question d'un anneau d'Artin *gauche* ; l'opposé d'un anneau d'Artin gauche est évidemment un anneau d'Artin droit.

Soit A un anneau d'Artin non réduit à 0 ; tout idéal à gauche $\mathfrak{a} \neq (0)$ de A contient un idéal à gauche minimal, comme on le voit en appliquant (CM) à l'ensemble des idéaux à gauche $\neq (0)$ et contenus dans $\mathfrak{a}$.

Le socle de A n'est donc pas réduit à (0) ; on a en outre la proposition suivante :

Proposition 8. Le socle d'un anneau d'Artin A est somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche minimaux.

En effet, supposons que ce socle soit somme directe d'une famille infinie d'idéaux à gauche minimaux, et soit $(\mathfrak{l}_n)$ une suite infinie d'idéaux extraite de cette famille ; si on pose $\mathfrak{a}_p = \sum_{n \geqslant p} \mathfrak{l}_n$ les idéaux à gauche $\mathfrak{a}_p$ formeraient une suite infinie strictement décroissante, qui contredirait (CM'), d'où la proposition.

Inversement, remarquons qu'un anneau A somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche minimaux est un anneau d'Artin gauche (identique à son socle). En effet, dans un tel anneau, tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ est somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche minimaux (chap.II, §1, th.2) ; ce nombre r est d'ailleurs indépendant de la décomposition considérée (chap.II, §1,th.3), et on l'appelle la longueur de l'idéal $\mathfrak{a}$. Si on considère alors un ensemble quelconque $\mathfrak{M}$ d'idéaux à gauche de A , il existe un de ces idéaux dont la longueur est la plus petite, et un tel idéal ne peut contenir aucun idéal de l'ensemble $\mathfrak{M}$ qui en soit distinct (chap.I, §1,th.2).

De même, tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ contenu dans le socle $\mathfrak{s}$ d'un anneau d'Artin gauche A , est somme directe d'un nombre fini et bien déterminé d'idéaux à gauche minimaux de A ; ce nombre s'appelle encore la longueur $\mathfrak{a}$.

Proposition 9. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de longueur r , contenu dans le socle d'un anneau d'Artin A . Pour tout $x \in A$, la longueur de $\mathfrak{a}x$ est $\leqslant r$.

En effet, $\mathfrak{a}$ est somme directe de r idéaux à gauche minimaux $\mathfrak{l}_i$ ($1 \leq i \leq r$), donc $\mathfrak{a}x$ est somme des r idéaux à gauche $\mathfrak{l}_i x$; ceux de ces idéaux qui ne sont pas nuls sont minimaux (prop.1) donc (chap.II, §1, th.1) $\mathfrak{a}x$ est somme directe de r idéaux à gauche minimaux au plus.

Exercices. 1) Soit $\mathfrak{a}$ un pied du socle d'un anneau A , $\mathfrak{b}$ l'idéal bilatère de A , somme des idéaux à gauche minimaux nilpotents de $\mathfrak{a}$; on suppose que $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}$ contient un idéal à gauche minimal idempotent $\mathfrak{l}_0$; $\mathfrak{a}$ est alors somme directe de $\mathfrak{b}$ et d'un idéal à gauche $\mathfrak{r}$ de A , somme directe d'idéaux à gauche isomorphes à $\mathfrak{l}_0$ et idempotents.

a) Si $\mathfrak{v}$ est l'annihilateur à droite de $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{v} = (0)$.

b) Tout idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$ de A , contenu dans $\mathfrak{a}$, est un idéal à gauche minimal par rapport à l'anneau $\mathfrak{a}$ (si $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{l}$ est un idéal à gauche non nul par rapport à $\mathfrak{a}$, montrer que $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{l}$ en utilisant a)). En déduire que tout idéal à gauche par rapport à $\mathfrak{a}$ est aussi un idéal à gauche par rapport à A (remarquer que l'anneau $\mathfrak{a}$ est identique à son socle, que ce dernier n'admet qu'un seul pied, non nilpotent ; si $\mathfrak{m}$ est un idéal à gauche minimal de $\mathfrak{a}$ montrer que $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, en prouvant que $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \neq (0)$).

c) Si $\mathfrak{d}$ est l'annihilateur à droite de $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{d} = (0)$ (prouver que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{d}$ est un idéal à gauche par rapport à $\mathfrak{a}$ en remarquant que $\mathfrak{b}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{d}) \subset \mathfrak{b}\mathfrak{a} = (0)$; conclure à l'aide de la prop.3) .

d) Tout idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$ de A , contenu dans $\mathfrak{r}$ est un idéal à gauche minimal par rapport à l'anneau $\mathfrak{r}$ (utiliser c)). En déduire que tout idéal à gauche par rapport à $\mathfrak{r}$ est aussi un idéal à gauche par rapport à A (raisonner comme dans b)).

2) a) La somme de deux idéaux à gauche nilpotents d'un anneau A est un idéal nilpotent de A .

b) Si $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche nilpotent de A , $\mathfrak{l} + \mathfrak{l}A$ est un idéal bilatère nilpotent.

c) Déduire de a) et b) que la somme $\mathfrak{R}$ de <u>tous</u> les idéaux à gauche nilpotents d'un anneau A est un idéal bilatère, qu'on appelle le <u>radical</u> de l'anneau A ; tout élément de $\mathfrak{R}$ est nilpotent.

d) Si A est le produit d'une famille (finie ou non) (A_ι) d'anneaux ayant un élément unité, le radical de A est le produit des radicaux des A_ι .

e) Si les idéaux à gauche de l'anneau A satisfont à la condition <u>maximale</u> (c'est-à-dire si tout ensemble d'idéaux à gauche de A admet un élément maximal), le radical de A est nilpotent.

f) Si le radical $\mathfrak{R}$ d'un anneau A est nilpotent, l'anneau quotient $A/\mathfrak{R}$ a un radical réduit à (0) .

5) a) Montrer que, si p est un nombre premier, le radical de l'anneau $Z/(p^n)$ est l'idéal $(p)/(p^n)$.

b) En déduire que, dans l'anneau produit $\prod_{n=1}^{\infty} Z/(p^n)$, le radical n'est pas nilpotent.

6) Dans un anneau A , on dit qu'un idéal $\mathfrak{n}$ est un <u>nilidéal</u> si tous ses éléments sont nilpotents.

a) Soit $\mathfrak{n}$ un nilidéal à gauche de A , $\mathfrak{l}$ un idéal à gauche minimal de A ; montrer que $\mathfrak{n}\mathfrak{l} = (0)$ (remarquer que dans le cas contraire il existerait un élément $u \in \mathfrak{l}$ tel que $\mathfrak{n}u = \mathfrak{l}$, et un élément $a \in \mathfrak{n}$ tel que $au = u$; en déduire une contradiction).

b) Soit A un anneau d'Artin gauche, $\mathfrak{n}$ un nilidéal bilatère de A ; montrer que, si $\mathfrak{n} \neq (0)$, l'intersection $\mathfrak{a}_1$ de $\mathfrak{n}$ et de son annihilateur à droite est un idéal bilatère $\neq (0)$ de A (utiliser a)).

c) L'idéal $\mathfrak{a}_1$ étant défini dans b), on définit par récurrence $\mathfrak{a}_p$ comme l'idéal bilatère de A tel que $\mathfrak{a}_p / \mathfrak{a}_{p-1}$ soit l'intersection de $\mathfrak{n} / \mathfrak{a}_{p-1}$ et de son annihilateur à droite dans $A / \mathfrak{a}_{p-1}$ (ou encore l'intersection de $\mathfrak{n}$ et du transporteur à droite de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{a}_{p-1}$) . Montrer que $\mathfrak{a}_p$ est l'intersection de $\mathfrak{n}$ et de l'annihilateur à droite de $\mathfrak{n}^p$ dans A .

d) Déduire de c) que l'idéal $\mathfrak{n}$ est nilpotent (remarquer qu'il existe un entier k tel que $\mathfrak{n}^p = \mathfrak{n}^k$ pour $p \geqslant k$, et déduire de b) qu'on a nécessairement $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{n}$). En conclure que, dans un anneau d'Artin gauche, le radical est nilpotent, et que tout nilidéal est contenu dans le radical.

7) Montrer que l'intersection du radical et du socle d'un anneau A est la somme des idéaux à gauche minimaux nilpotents de A (utiliser le corollaire de la prop.2) .

8) a) Si $\mathfrak{l}$ est un nilidéal à gauche d'un anneau A , $\mathfrak{a}$ un nilidéal bilatère de A , $\mathfrak{l} + \mathfrak{a}$ est un nilidéal à gauche de A (montrer que, pour tout $x \in \mathfrak{l} + \mathfrak{a}$, il existe une puissance de x appartenant à $\mathfrak{a}$) .

b) En déduire que la somme des nilidéaux bilatères de A est un nilidéal bilatère $\mathfrak{N}$, et que le radical de $A / \mathfrak{N}$ est réduit à 0 (utiliser 2b)).

9) Soit A un anneau d'Artin gauche nilpotent ; montrer que A est aussi un anneau d'Artin droit (Soit ($\mathfrak{b}_n$) une suite décroissante d'idéaux à droite de A , et soit $\mathfrak{a}_p$ l'annihilateur à droite de A^p (exerc. 6c)) ; considérer d'abord le cas où $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{a}_1$, puis le cas où $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{a}_2$; en formant alors les idéaux $\mathfrak{b}_n + \mathfrak{a}_1$, montrer que $\mathfrak{b}_n + \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_{n+1} + \mathfrak{a}_1$, et $\mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{a}_1$

à partir d'un certain rang, et en déduire $\mathfrak{v}_n = \mathfrak{v}_{n+1}$ à partir d'un certain rang ; raisonner ensuite par récurrence sur p).

§ 2. Anneaux semi-simples et anneaux simples.

Anneaux semi-simples. **Définition 1.** On dit qu'un anneau à opérateurs A est semi-simples si A est un anneau d'Artin gauche et ne contient aucun idéal à gauche nilpotent et $\neq(0)$.

Proposition 1. Si A est un anneau semi-simple, il est identique à son socle, et il existe un élément $a \in A$ tel que $A = Aa$.

Soit $\mathfrak{s}$ le socle de A ; nous allons d'abord montrer qu'il existe $a \in \mathfrak{s}$ tel que $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}a$. On sait (§ 1,prop.8) que tout idéal à gauche contenu dans $\mathfrak{s}$ est somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche minimaux. Nous allons voir que, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{b}$ contenu dans $\mathfrak{s}$, il existe $b \in \mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}b$. Il suffira de montrer que, si $\mathfrak{b}$ est un idéal à gauche de longueur r $(r \geqslant 0)$ ayant cette propriété, tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de longueur r+1 contenant $\mathfrak{b}$ la possède également. Soit donc $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}b$, $b \in \mathfrak{b}$, et soit $\mathfrak{l}$ l'intersection de $\mathfrak{a}$ et de l'annihilateur à gauche de b dans A ; $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche $\neq(0)$: en effet, si un élément $x \in \mathfrak{a}$ n'appartient pas à $\mathfrak{b}$, on a $xb \in \mathfrak{b}$, donc il existe $y \in \mathfrak{b}$ tel que $xb=yb$, et $x-y\neq 0$ appartient à $\mathfrak{l}$ ceci montre en outre que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{l}$. D'autre part, on a $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{l} =(0)$; sinon, $\mathfrak{b}$ serait somme directe de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{l}$ et d'un idéal $\mathfrak{b}_1$ de longueur $< r$, et on aurait $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}b = \mathfrak{b}_1 b$, donc (§ 1,prop.9), $\mathfrak{b}$ aurait une longueur $< r$, ce qui est absurde. Il en résulte que $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche minimal et que $\mathfrak{a}$ est somme directe de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{l}$; il existe $c \in \mathfrak{l}$ tel que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}c$; nous allons voir que $(\mathfrak{b}+\mathfrak{l})(b+c) = \mathfrak{b}+\mathfrak{l}$.

Il est immédiat que $(\mathfrak{k}+\mathfrak{l})(b+c) \subset \mathfrak{k}+\mathfrak{l}$; tout revient à montrer que $(\mathfrak{k}+\mathfrak{l})(b+c)$ contient $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{l}$; or, il contient $\mathfrak{l}(b+c)=\mathfrak{l}c=\mathfrak{l}$, puisque $\mathfrak{l}b=(0)$; d'autre part, pour tout $x \in \mathfrak{k}$, $xc \in \mathfrak{l}$, donc il existe $y \in \mathfrak{l}$ tel que $yc=-xc$, et par suite $(x+y)(b+c)=xb+xc+yc=xb$, ce qui prouve que $(\mathfrak{k}+\mathfrak{l})(b+c)$ contient $\mathfrak{k}b=\mathfrak{k}$, et achève la démonstration de la première partie.

Reste à prouver que $\vartheta=A$. Supposons le contraire : on voit alors comme ci-dessus, que l'annihilateur à gauche $\mathfrak{a}$ de a n'est pas nul, et que $\vartheta \cap \mathfrak{a}=(0)$; mais cela est absurde, car $\mathfrak{a}$ contient alors un idéal à gauche minimal non contenu dans le socle, contrairement à la définition de ce dernier.

<u>Théorème 1</u> (Wedderburn). <u>Un anneau semi-simple A est isomorphe à l'opposé de l'anneau des endomorphismes de A, considéré comme A-module à gauche ; il est composé direct d'un nombre fini d'anneaux isomorphes à des anneaux de matrices sur des corps</u> (commutatifs ou non).

La seconde partie du théorème est une conséquence immédiate de la première, puisque A, considéré comme A-module à gauche, est complètement réductible d'après la prop.1 (chap.II, §2,th.1).

30 900

Pour établir la première partie, soit $a \in A$ tel que $A=Aa$; remarquons que l'annihilateur à gauche de a dans A est nul, comme le montre le raisonnement de la prop.1 ; il en résulte que tout élément de A se met, d'une manière et d'<u>une seule</u>, sous la forme xa. Soit f un endomorphisme du A-module à gauche A ; on a $f(xa)=xf(a)$, donc tout endomorphisme de A est de la forme $xa \rightarrow xb$, et réciproquement, pour tout $b \in A$, l'application $xa \rightarrow xb$ est un endomorphisme f du A-module A ; en outre, l'élément b est bien déterminé par l'endomorphisme considéré, car si on avait $xb=xc$ pour tout $x \in A$, $c-b$ appartiendrait à l'annihilateur à droite de A, qui est nul (§ 1, prop.6) ; nous désignerons par b_f l'élément de A ainsi déterminé par f ; on peut écrire $b_f=c_f a$, où c_f est encore un élément bien déterminé de A , et on définit ainsi une application biunivoque $f \longrightarrow c_f$ de l'anneau $\mathcal{L}(A)$ des endomorphismes du A-module A , sur l'anneau A . Reste à voir que c'est une représentation de l'opposé $\mathcal{L}^0(A)$ sur A ; en effet, à f+g correspond évidemment b_f+b_g , donc c_f+c_g ; d'autre part, $g(f(xa))=g(xb_f)=g(xc_f a) = xc_f c_g a$, d'où $c_{g\circ f} = c_f c_g$, ce qui achève la démonstration.

Anneaux simples. Définition 2. On dit qu'un anneau à opérateurs A est simple s'il est semi-simple et ne contient aucun idéal bilatère autre que A et (0).

Proposition 2. Un anneau simple A est isomorphe à un anneau de matrices carrées de degré n , $K_{(n)}$, sur un corps K (commutatif ou non) le nombre n est égal à la longueur de A (considéré comme idéal à gauche).

La proposition résulte aussitôt du th.1, car un anneau simple A ne peut être le composé direct de plusieurs anneaux, qui seraient des idéaux bilatères dans A ; tous les idéaux à gauche de A sont nécessairement isomorphes, car le socle de A , identique à A , ne peut avoir qu'un seul pied ; enfin la détermination du nombre n résulte de l'étude de l'anneau d'endomorphismes d'un module complètement réductible (chap.II, § 2, th.1) .

Proposition 3. Un anneau de matrices $K_{(n)}$ sur un corps K , considéré comme algèbre par rapport à un corps commutatif quelconque contenu dans le centre de K , est un anneau simple.

Soient c_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ les n^2 éléments matriciels de la base de $K_{(n)}$ considéré comme espace vectoriel à gauche sur K , qui satisfont aux relations $c_{ij}c_{hk}=0$ si $j \neq h$, $c_{ij}c_{jk}=c_{ik}$ (Chap.III, § 2) . Montrons que l'ensemble $\mathfrak{l}_j$ des matrices dont la seule colonne d'indice j est différente de 0, est un idéal à gauche <u>minimal</u> de $K_{(n)}$. En effet, comme $\mathfrak{l}_j = \sum_{i=1}^{n} Kc_{ij}$, il est immédiat, d'après la multiplication des c_{ij} , que $\mathfrak{l}_j$ est un idéal à gauche, et qu'on a $\mathfrak{l}_j = K_{(n)}c_{ij}$ pour tout indice i ; d'autre part, si un idéal à gauche contenu dans $\mathfrak{l}_j$ contient un élément $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_{ij} \neq 0$, il existe un indice i tel que $\alpha_i \neq 0$, donc l'idéal considéré contient aussi $\alpha_i^{-1} c_{ii} x = c_{ij}$ d'après la multiplication des c_{ij} , d'où résulte qu'il est identique à $\mathfrak{l}_j$.

Comme $\mathfrak{l}_k = \mathfrak{l}_j c_{jk}$, tous les $\mathfrak{l}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ sont <u>isomorphes</u>, et $K_{(n)}$ est la somme directe des $\mathfrak{l}_j$. Il en résulte que $K_{(n)}$ est un anneau d'Artin gauche dont tous les idéaux à gauche minimaux sont isomorphes. En second lieu, montrons que $K_{(n)}$ ne peut contenir d'idéal à gauche nilpotent $\mathfrak{l} \neq (0)$; en effet, $K_{(n)}$ serait alors somme directe de $\mathfrak{l}$ et d'un idéal à gauche $\mathfrak{l}'$; on peut en particulier écrire pour l'élément unité I de $K_{(n)}$, $I=e+e'$, avec $e \in \mathfrak{l}$, $e' \in \mathfrak{l}'$; pour tout $x \in \mathfrak{l}$ on a $x=xI=xe=xe'$, et comme $xe \in \mathfrak{l}$, $xe' \in \mathfrak{l}'$, et que la somme $\mathfrak{l}+\mathfrak{l}'$ est directe, $x=xe$, $xe'=0$; en particulier, comme on a supposé $\mathfrak{l} \neq (0)$, on a $e \neq 0$, et $e^2=e$, ce qui contredit l'hypothèse que $\mathfrak{l}$ est nilpotent.

Enfin, montrons que $K_{(n)}$ ne contient aucun idéal bilatère $\mathfrak{a}$ autre que lui-même et (0). Sinon, il serait somme directe de $\mathfrak{a}$ et d'un idéal à gauche non nul $\mathfrak{b}$; soit $\mathfrak{l}$ un idéal à gauche minimal contenu dans $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{l}'$ un idéal à gauche minimal contenu dans $\mathfrak{b}$; comme $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ sont isomorphes et non nilpotents, $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}'$ (§ 1,prop.3) ; mais, comme $\mathfrak{a}$ est bilatère, $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (0)$, on aboutit à une contradiction.

<u>Proposition 4</u>. <u>Un anneau semi-simple est composé direct d'un nombre fini d'anneaux simples bien déterminés, et réciproquement tout anneau composé direct d'anneaux simples est semi-simple</u>.

Soit A un anneau semi-simple ; d'après le th.1 et la prop.3, A est composé direct d'anneaux simples $\mathfrak{a}_i (1 \leqslant i \leqslant p)$, qui sont des idéaux bilatères dans A . Supposons que A soit composé direct d'une seconde suite finie $(\mathfrak{b}_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ de sous-anneaux simples. Comme A possède un élément unité, $\mathfrak{b}_j$ est somme directe de ses intersections avec les $\mathfrak{a}_i$ (chap.I, § 8) ; comme $\mathfrak{b}_j \cap \mathfrak{a}_i$ est un idéal bilatère dans $\mathfrak{b}_j$, il est égal à (0) ou à $\mathfrak{b}_j$ par hypothèse, donc on a $\mathfrak{b}_j \cap \mathfrak{a}_i = (0)$ sauf pour un indice $i=\varphi(j)$ pour lequel $\mathfrak{b}_j \subset \mathfrak{a}_i$; mais comme $\mathfrak{b}_j$ est idéal bilatère dans l'anneau simple $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_j = \mathfrak{a}_i$. On définit ainsi une application biunivoque φ de $[1,q]$ dans $[1,p]$ telle que $\mathfrak{b}_j = \mathfrak{a}_{\varphi(j)}$; comme A est composé direct des $\mathfrak{b}_j$, p=q , d'où la première partie de la proposition. La réciproque résulte immédiatement de la prop.3 : un anneau simple étant somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche minimaux il en est de même du composé direct A d'un nombre fini d'anneaux simples $\mathfrak{a}_i$, donc A est un anneau d'Artin gauche; d'autre part, un idéal à gauche $\mathfrak{l}$ de A étant somme directe des idéaux $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{a}_i$, ne peut être nilpotent s'il est $\neq (0)$, puisque dans le cas contraire un des $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{a}_i$ serait $\neq (0)$ et nilpotent, contrairement au fait que $\mathfrak{a}_i$ est simple.

<u>Corollaire</u>. <u>Un anneau semi-simple est un anneau d'Artin droit</u>.

Il suffit de le prouver pour un anneau <u>simple</u> A ; or, A étant isomorphe à un anneau de matrices sur un corps K , son opposé A^o est isomorphe à un anneau de matrices sur l'opposé K^o de K , donc est un anneau d'Artin gauche d'après la prop.3 .

Centre d'un anneau semi-simple. Proposition 5. Soit $A=K_{(n)}$ un anneau de matrices d'ordre n sur un corps K ; le centre de A est identique au centre Z de K .

Dans cet énoncé, K est identifié au corps $K.\underline{I}$ des matrices multiples de la matrice unité $\underline{I}$ de A .

Soient c_{ij} $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ les n^2 éléments matriciels de la base de A par rapport à K . Si $a=\sum_{i,j} \alpha_{ij}c_{ij}$ est un élément du centre de A , on a en particulier $ac_{1h}=c_{1h}a$ pour tout indice h , ce qui donne $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1}c_{ih} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{hj}c_{1j}$, d'où $\alpha_{hj}=0$ si $h \neq j$, $\alpha_{hh}=\alpha_{11}$ pour tout indice h , ce qui démontre la proposition.

Corollaire. Le centre d'un anneau semi-simple est un anneau semi-simple, composé direct d'un nombre fini de corps commutatifs.

Cela résulte aussitôt des prop.4 et 5 .

Exercices. 1) Dans un anneau A , soit $\mathfrak{l}$ un idéal à gauche minimal non nilpotent.

a) On sait (chap.II, § 3) que l'anneau des endomorphismes du A-module $\mathfrak{l}$ est un corps K . Montrer que tout endomorphisme de $\mathfrak{l}$ est de la forme $x \longrightarrow xa$, où $a \in \mathfrak{l}$, en remarquant que les endomorphismes de cette forme constituent un idéal à gauche $\neq (0)$ dans K . Les éléments $a \in \mathfrak{l}$ pour lesquels $\mathfrak{l}a = \mathfrak{l}$ forment une partie S stable pour la multiplication, dont le complémentaire dans $\mathfrak{l}$ est l'annulateur à droite $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{l}$ dans lui-même, qui est un idéal bilatère de l'anneau $\mathfrak{l}$; l'anneau quotient $\mathfrak{l}/\mathfrak{r}$ est isomorphe à l'opposé de K ; la classe (mod. $\mathfrak{r}$) qui est élément unité de $\mathfrak{l}/\mathfrak{r}$ est formée des idempotents de $\mathfrak{l}$ (si e est un élément de cette classe, et $a \in S$, remarquer que $e^2a = ea$).

b) Si e est un idempotent de $\mathfrak{l}$, on a x=xe pour tout $x \in \mathfrak{l}$ (remarquer que (x-xe)e=0) ; e$\mathfrak{l}$ est un idéal à droite de l'anneau $\mathfrak{l}$, et un sous-corps de l'anneau $\mathfrak{l}$, isomorphe à $\mathfrak{l}/\mathfrak{n}$; l'anneau $\mathfrak{l}$ est somme directe de e$\mathfrak{l}$ et de $\mathfrak{n}$.

c) Si un idéal à droite $\mathfrak{a}$ par rapport à l'anneau $\mathfrak{l}$ est contenu dans S , il contient un idempotent e et un seul, et on a $\mathfrak{a} = e\mathfrak{l}$ (considérer l'idéal $(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})/\mathfrak{n}$) ; en déduire que, si e et e' sont deux idempotents distincts de $\mathfrak{l}$, $(e\mathfrak{l})\cap(e'\mathfrak{l}) = \{0\}$; pour tout $x \in S$, il existe un idempotent et un seul e tel que $x \in e\mathfrak{l}$ (remarquer que $x\mathfrak{l}$ est un idéal à droite dans $\mathfrak{l}$, contenu dans S) .

d) Si $\mathfrak{b}$ est un idéal à droite quelconque dans $\mathfrak{l}$, ou bien $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{n}$, ou bien il existe un idempotent et un seul e tel que $\mathfrak{b}$ soit somme directe de e$\mathfrak{l}$ et de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{n}$.

1 bis) Soit $\mathfrak{l}$ un idéal à gauche dans un anneau A , $\mathfrak{n}$ l'annihilateur à droite de $\mathfrak{l}$ dans lui-même. Montrer que, si $\mathfrak{l}/\mathfrak{n}$ est un corps, tout idéal à gauche de l'anneau A , contenu dans $\mathfrak{l}$ et distinct de $\mathfrak{l}$, est contenu dans $\mathfrak{n}$ (soit S le complémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{l}$; montrer que, pour tout $a \in S$, il existe $b \in S$ tel que xba=x pour tout $x \in \mathfrak{l}$ en remarquant que $x \to xa$ est un endomorphisme inversible dans le corps des endomorphismes de $\mathfrak{l}$ de la forme $x \to xc$, $c \in \mathfrak{l}$).

2) a) Si dans un anneau A , il n'existe aucun idéal bilatère autre que (0) et A , ou bien le socle de A est réduit à 0 , ou bien A est identique à son socle, ce dernier n'a qu'un seul pied, et, ou bien A est de carré nul et son groupe additif (à opérateurs) est simple, ou bien A ne contient aucun idéal à gauche nilpotent. Nous supposerons dans ce qui suit qu'on est dans ce dernier cas ; montrer que l'anneau $\mathfrak{K}$ défini dans l'exerc. 1d) du §1 rentre dans cette catégorie.

b) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche dans A ; pour tout élément $b \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}b \neq (0)$, on a $\mathfrak{a} b \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ (utiliser la prop.3 du § 1). En déduire que, si $\mathfrak{b}$ est l'annihilateur à droite de $\mathfrak{a}$ dans A , $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$ est un idéal bilatère maximal dans $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{b} \neq (0)$, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{l}$ de A , $\mathfrak{l}\mathfrak{b} = A$ ou $\mathfrak{l}\mathfrak{b} = (0)$. Si A est somme directe de deux idéaux à gauche $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{b}$ est somme directe de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{l}$ et $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{l}'$; en déduire que $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{l} \neq (0)$ si $\mathfrak{l}\mathfrak{b} = A$. Montrer qu'il existe un idéal à gauche minimal, $\mathfrak{l}_0$ tel que $\mathfrak{l}_0 \mathfrak{b} = A$ (remarquer que, dans le cas contraire, on aurait $A\mathfrak{b} = (0)$) ; en déduire que, pour <u>tout</u> idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$ de A , on a $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{b} \neq (0)$ (utiliser l'isomorphie des idéaux à gauche minimaux de A pour montrer que, dans tout $\mathfrak{l}$, il existe $x \neq 0$ tel que $\mathfrak{a}x = (0)$).

c) Si $\mathfrak{a}$ est de longueur finie r dans A , il existe $a \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}a$ (raisonnement de la prop.1) ; pour tout élément a ayant cette propriété, $x \to xa$ est un isomorphisme de l'idéal $\mathfrak{a}$ (considéré comme A-module) sur lui-même.

d) Avec les mêmes hypothèses que dans c), $\mathfrak{a}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$ est un anneau simple de longueur r ; la classe (mod. $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$) élément unité de cet anneau quotient est identique à l'ensemble des idempotents $e \in \mathfrak{a}$ tels que $x = xe$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$; pour chacun de ces idempotents, $\mathfrak{a}$ est somme directe de $e\mathfrak{a} = e\mathfrak{a}e$, qui est un anneau simple isomorphe à $\mathfrak{a}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$, et de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$.

e) Si $\mathfrak{a}$ est somme directe de r idéaux à gauche minimaux isomorphes $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_r$, il existe r idempotents e_i tels que $e_i \in \mathfrak{l}_i$ et $e_i e_j = 0$ pour $i \neq j$ (considérer un idempotent e de la classe unité (mod. $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$), et décomposer e suivant les $\mathfrak{l}_i$).

f) Pour qu'un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A soit un sous-anneau de A dans lequel tout idéal bilatère est égal à (0) ou à $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que l'annihilateur à droite de $\mathfrak{a}$ dans A soit nul (pour montrer que la condition est suffisante, raisonner comme dans l'exerc.1 du § 1).

3) a) Soient $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ deux idéaux à gauche minimaux isomorphes et non nilpotents d'un anneau A . Si e est un idempotent de $\mathfrak{l}$, tout isomorphisme de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}'$ est de la forme $x \rightarrow xu$, où $u \in e\mathfrak{l}'$; il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble de ces isomorphismes et l'idéal à droite $e\mathfrak{l}'$ dans l'anneau $\mathfrak{l}'$; en déduire que $e\mathfrak{l}'$ est un idéal à droite minimal dans l'anneau $\mathfrak{l}'$.

b) Déduire de a) que, si A satisfait aux conditions de l'exerc.2, et si $\mathfrak{l}$ est un idéal minimal à gauche de A , e un idempotent contenu dans $\mathfrak{l}$, eA est un idéal à droite minimal dans A . En conclure que A est somme directe d'une famille d'idéaux à droite minimaux, non nilpotents, et tous isomorphes.

c) Déduire de b) que l'annihilateur à droite d'un idéal à gauche minimal de A est un idéal à droite maximal de A (autrement dit, un idéal à droite admettant un supplémentaire qui est idéal à droite minimal de A) .

4) Soit A un anneau, somme directe d'une famille ($\mathfrak{l}_\alpha$) d'idéaux à gauche minimaux, tous isomorphes, et tels qu'il existe dans chaque $\mathfrak{l}_\alpha$ un idempotent e_α tel que $e_\alpha e_\beta=0$ pour $\alpha\neq\beta$. Montrer que A ne contient aucun idéal bilatère autre que lui-même et (0) (pour tout $x\neq0$ dans A , montrer qu'il existe y tel que yx soit un élément $\neq0$ de l'un des $\mathfrak{l}_\alpha$).

Dans l'anneau $M^{E,E}$ des matrices semi-finies par lignes, correspondans aux endomorphismes d'un espace vectoriel $K^{(E)}$, où E est un ensemble infini quelconque, montrer que le sous-anneau A formé des

des matrices dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception d'un nombre fini d'entre elles, est un anneau ne contenant aucun idéal bilatère autre que (0) et A ; il en est de même du sous-anneau B de A formé des matrices dont tous les éléments sont nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux (appliquer le résultat précédent, en considérant, dans A , l'idéal à gauche formé des matrices réduites à une colonne d'indice donné, et prouvant que cet idéal à gauche est minimal)

Montrer que, dans A , B est un idéal à droite dont l'annihilateur à gauche est réduit à 0 . Montrer aussi que l'anneau A est le socle de $M^{E,E}$.

5) Soient A un anneau d'Artin gauche de longueur finie, $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche $\neq(0)$ dans A .

a) S'il existe $a\in\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}a$, montrer que l'application $x\rightarrow xa$ est un isomorphisme de $\mathfrak{a}$ (considéré comme A-module à gauche) sur lui-même, autrement dit, que, dans l'anneau $\mathfrak{a}$, a n'est pas diviseur à droite de 0 (remarquer que, dans le cas contraire, $\mathfrak{a}$ serait isomorphe à un de ses modules quotients $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{b}$ est un idéal $\neq(0)$ contenu dans $\mathfrak{a}$).

b) Inversement, si a n'est pas diviseur à droite de 0 dans l'anneau $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}a$ (remarquer qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ tel que $\mathfrak{a}a^n=\mathfrak{a}a^{n+1}$, et montrer que l'hypothèse entraîne $n=0$, en raisonnant par l'absurde).

c) S'il existe $a\in\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}a$, montrer qu'il existe un idempotent $e\in\mathfrak{a}$ tel que $xe=x$ pour tout $x\in\mathfrak{a}$.

6) Dans un anneau d'Artin gauche A de longueur finie, on dira qu'un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ est <u>régulier</u> s'il n'est pas contenu dans le radical $\mathfrak{R}$ de A (c'est-à-dire si $\mathfrak{a}$ n'est pas nilpotent (§ 1,exerc.6)).

a) Si $\mathfrak{l}$ est un idéal régulier minimal (c'est-à-dire ne contenant aucun idéal régulier distinct de $\mathfrak{l}$), montrer qu'il existe $c \in \mathfrak{l}$ tel que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}c$ (remarquer que, dans le cas contraire, on aurait $\mathfrak{l}^2 \subset \mathfrak{R}$).

b) Prouver que A est somme directe d'un nombre fini d'idéaux réguliers minimaux $\mathfrak{l}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ et d'un idéal à gauche $\mathfrak{m}$ contenu dans le radical (utiliser le raisonnement de la prop.1,et l'exer.5a)). L'anneau semi-simple $A/\mathfrak{R}$ est somme directe des r idéaux à gauche minimaux $(\mathfrak{l}_i + \mathfrak{R})/\mathfrak{R}$.

c) Si $\mathfrak{k}$ est la somme des idéaux $\mathfrak{l}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, et $\mathfrak{v}$ l'annihilateur à droite de l'anneau $\mathfrak{k}$ dans lui-même, l'anneau quotient $\mathfrak{k}/\mathfrak{v}$ est isomorphe à l'anneau des endomorphismes de $\mathfrak{k}$, considéré comme $\mathfrak{k}$-module à gauche (utiliser le raisonnement du th.1).

7) a) Soient $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ deux idéaux réguliers minimaux d'un anneau d'Artin gauche A, non nilpotent, de longueur finie, de radical $\mathfrak{R}$. Montrer que, si $(\mathfrak{l} + \mathfrak{R})/\mathfrak{R}$ et $(\mathfrak{l}'+\mathfrak{R})/\mathfrak{R}$ sont isomorphes (en tant que modules sur $A/\mathfrak{R}$), $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ sont isomorphes en tant que A-modules (soit $\overline{x} \rightarrow \overline{xa}$ un isomorphisme de $(\mathfrak{l} + \mathfrak{R})/\mathfrak{R}$ sur $(\mathfrak{l}'+ \mathfrak{R})/\mathfrak{R}$; prendre dans $\mathfrak{l}'$ un élément a de la classe $\overline{a}$; montrer que $x \rightarrow xa$ est un homomorphisme de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}'$; si e' est un idempotent de $\mathfrak{l}'$, et si $b \in \mathfrak{l}$ est tel que $ba=e'$, montrer que $\mathfrak{l}'b = \mathfrak{l}$).

b) En déduire que, si A admet un élément unité, et est tel que $A/\mathfrak{R}$ soit <u>simple</u>, A est isomorphe à un anneau de matrices sur l'opposé de l'anneau des endomorphismes d'un idéal régulier minimal de A (utiliser l'exerc. 6) .

c) Montrer que l'anneau des endomorphismes d'un idéal régulier minimal $\mathfrak{l}$ de A est isomorphe à l'opposé de $\mathfrak{l}/\mathfrak{r}$, où $\mathfrak{r}$ est l'annihilateur à droite de $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{l}$. Montrer que, dans $\mathfrak{l}/\mathfrak{r}$, l'ensemble des éléments nilpotents est $((\mathfrak{l} \cap \mathfrak{R}) + \mathfrak{r})/\mathfrak{r}$ et que cet ensemble est identique au radical de $\mathfrak{l}/\mathfrak{r}$; le quotient de $\mathfrak{l}/\mathfrak{r}$ par ce radical est un corps (voir exerc.1).

8) Si a est un élément nilpotent dans un anneau d'Artin gauche de longueur n, on a $a^n=0$ (remarquer que Aa^k est au plus de longueur n-k).

9) On dit qu'un anneau A est un <u>anneau de von Neumann</u> s'il admet un élément unité et si, pour tout $a \in A$, il existe un idéal à gauche supplémentaire de l'idéal Aa.

a) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes : α) A est un anneau de von Neumann ; β) pour tout $a \neq 0$, il existe un idempotent e tel que $Aa=Ae$; γ) pour tout $a \neq 0$, il existe $x \in A$ tel que $axa=a$ (utiliser l'exerc.16 du § 8 du chap.I).

En déduire que : 1° pour tout $a \in A$, il existe un idéal à droite supplémentaire de l'idéal aA ; 2° dans A il n'existe aucun idéal nilpotent (en particulier, un anneau qui est à la fois anneau d'Artin et anneau de von Neumann est <u>semi-simple</u>, et réciproquement).

b) S'il existe un idempotent e tel que $\mathfrak{a}=Ae$ soit un idéal bilatère dans A, montrer que e est élément unité du sous-anneau $\mathfrak{a}$, et appartient au centre de A (remarquer que l'idéal à droite annihilateur de e <u>dans</u> $\mathfrak{a}$ est nécessairement nul ; en déduire que $x=ex$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$, puisque $eye=ey=ye$ pour tout $y \in A$).

c) Pour tout idempotent $e \in A$, Ae est l'annihilateur à gauche de l'idéal à droite $(1-e)A$. En déduire que, pour tout $a \in A$, l'annihilateur à gauche de l'annihilateur à droite de l'idéal Aa est cet idéal lui-même.

d) Si a et b sont deux éléments quelconques de A , montrer qu'il existe $c \in A$ tel que $Aa+Ab=Ac$ (si e est un idempotent tel que $Aa=Ae$, montrer que $Aa+Ab=Ae+Ab(1-e)$, puisqu'il existe un idempotent e' tel que $ee'=e'e=0$ et $Ab(1-e)=Ae'$) .

e) Montrer que le centre Z d'un anneau de von Neumann A est un anneau de von Neumann (si $a \in Z$, et si $x \in A$ est tel que $axa=a$, montrer que $a(a^p x^{p+1})a=a$, et que $a^p x^{p+1} \in Z$ pour $p \geqslant 2$) .

f) Dans un anneau de von Neumann commutatif, tout idéal <u>irréductible</u> (chap.I, §8,exerc.12) est maximal (remarquer que, si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère dans un anneau de von Neumann A , $A/\mathfrak{a}$ est un anneau de von Neumann ; si $\mathfrak{a}$ est irréductible, montrer que $A/\mathfrak{a}$ ne peut contenir aucun idéal autre que lui-même et (0)).

g) Soit A un anneau commutatif ayant un élément unité ; montrer que si tout idéal de A est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent, A est un anneau de von Neumann (utiliser l'exerc. 13d) du §8 du chap.I pour montrer que, pour tout élément $a \neq 0$ de A , on a $a \in (a^2)$). En déduire que si tout idéal irréductible de A est premier, A est un anneau de von Neumann (utiliser l'exerc. 12 b) du §8 du chap. I).

10) a) Soit A un anneau simple, B un sous-anneau simple de A ; si $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$ sont deux idéaux à gauche minimaux de B , montrer que les longueurs des idéaux $A\mathfrak{l}_1$ et $A\mathfrak{l}_2$ sont égales ; on appelle <u>indice</u> de B par rapport à A la longueur d'un idéal $A\mathfrak{l}$, où $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche minimal de B .

b) Soit C un sous-anneau semi-simple de A , C_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ les anneaux simples dont C est le composé direct ; si on désigne par n la longueur de A , par n_k celle de C_k , par r_k l'indice de C_k par rapport à A , montrer qu'on a

27

(1) $$n = \sum_{k=1}^{p} n_k r_k$$

si l'élément unité de A est aussi élément unité de C (remarquer que, dans ce cas, si C est somme directe d'idéaux à gauche minimaux $\mathfrak{l}_i$ $(1 \leq i \leq s)$, A est somme directe des idéaux à gauche $A\,\mathfrak{l}_i$).

c) Généraliser la formule (1) au cas où A est un anneau semi-simple (considérer les anneaux simples A_i dont A est le composé direct, et les composantes de chaque C_k dans A_i).

11) Soit A un anneau tel qu'il existe $a \in A$ pour lequel $A=Aa$. On désigne par $\mathfrak{a}_p$ l'annihilateur à gauche de a^p dans A ; on a $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{a}_{p+1}a \subset \mathfrak{a}_{p+1}$.

a) Montrer que, s'il existe un entier $n>0$ tel que $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1}$, on a $\mathfrak{a}_p=(0)$ quel que soit p ; dans ce cas, il existe $e \in A$ tel que $x=xe$ pour tout $x \in A$. En conclure que si A satisfait à la condition maximale pour ses idéaux à gauche, on a $\mathfrak{a}_n=(0)$ quel que soit n.

b) Soit $\mathfrak{b}_p$ l'annihilateur à droite de $\mathfrak{a}_p$ dans A ; on a $\mathfrak{b}_{p+1}=a\,\mathfrak{b}_p \subset \mathfrak{b}_p$; montrer que $\mathfrak{a}_p$ est l'annihilateur à gauche de $\mathfrak{b}_p$. En déduire que, si A satisfait à la condition minimale pour ses idéaux à droite, on a $\mathfrak{a}_n=(0)$ quel que soit n.

§ 3. Produits tensoriels d'algèbres semi-simples.

Soient A et B deux <u>algèbres</u> sur un même corps commutatif K, admettant chacune un élément unité. On a défini au chap. II, § 6 le <u>produit tensoriel</u> $A \otimes B$ de ces deux algèbres (relatif au corps de base K) ; rappelons que ce produit est une algèbre sur K, et que, moyennant des identifications convenables, on peut supposer qu'il contient A et B comme <u>sous-algèbres</u>, et possède alors les propriétés suivantes :

 28

1° tout élément de A est permutable avec tout élément de B ;

2° l'intersection $A \cap B$ est égale à K ;

3° $A \otimes B$ est identique au groupe additif engendré par l'ensemble A.B des produits xy (=yx), où $x \in A$ et $y \in B$; si on note ce groupe additif $\widehat{A.B}$, on a $A \otimes B = \widehat{A.B}$.

Il en résulte en particulier que, si A' est une sous-algèbre de A, B' une sous-algèbre de B, le produit tensoriel $A' \otimes B'$ (relatif à K) est isomorphe à la sous-algèbre $\widehat{A'.B'}$ de $A \otimes B$, avec laquelle on l'identifie d'ordinaire.

Remarquons encore que $A \otimes B$ est à la fois module à gauche et module à droite par rapport à A (et à B) ; toute <u>base</u> de B par rapport à K est aussi une base régulière de chacune de ces deux structures de module de $A \otimes B$ par rapport à A. Si en outre A est <u>commutatif</u>, $A \otimes B$ est une <u>algèbre</u> sur A.

<u>Produit tensoriel de deux corps commutatifs</u>. Considérons d'abord le cas où A et B sont deux <u>sur-corps commutatifs</u> de K, l'un d'eux (par exemple A) étant une extension <u>finie</u> (donc <u>algèbrique</u>) de K. Plus particulièrement, supposons d'abord que A soit une extension algèbrique <u>simple</u> $A=K\langle\theta\rangle$, θ étant racine du polynome irréductible de degré n $\varphi \in K[\text{e}]$. Comme les éléments $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$ forment une base de A par rapport à K, ils forment également une base de $A \otimes B$ par rapport à B, autrement dit, tout élément de $A \otimes B$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $b_0+b_1\theta+\ldots+b_{n-1}\theta^{n-1}$ où les $b_i \in B$. Il en résulte aussitôt que l'application, qui, à tout polynome $f \in B[\text{e}]$, fait correspondre $f(\theta)$, est un <u>homomorphisme</u> de l'algèbre $B[\text{e}]$ sur l'algèbre $A \otimes B$, l'image réciproque de 0 par cet homomorphisme étant l'idéal principal (φ) de $B[\text{e}]$; donc $A \otimes B$ est isomorphe

au quotient $B[\theta]/(\varphi)$. Si $\varphi = \prod \varphi_i^{r_i}$ est la décomposition en facteurs premiers de φ dans l'anneau $B[\theta]$, il en résulte que $A \otimes B$ est isomorphe au composé direct des algèbres $B[\theta]/(\varphi_i^{r_i})$ (chap.V, § 5,prop.9). Cela étant, si θ est séparable par rapport à K, φ n'a pas de racine multiple, donc tous les r_i sont égaux à un, et chacune des algèbres $B[\theta]/(\varphi_i)$ est un corps commutatif, isomorphe à une extension algèbrique finie de B ; dans ce cas, $A \otimes B$ est donc semi-simple quel que soit le corps B. Au contraire, si θ est inséparable par rapport à K, on a $\varphi = \psi^{p^e}$ où ψ est un polyhome irréductible par rapport à une extension E de K (chap. VI, § 5) ; donc le produit tensoriel $A \otimes E$ est isomorphe à $E[\theta]/(\psi^{p^e})$; dans cet anneau quotient, la classe de ψ n'est pas nulle, mais sa puissance p^e-ième l'est ; autrement dit, il existe des éléments nilpotents, $A \otimes E$ n'est pas semi-simple.

Si on considère maintenant le cas où A est une extension séparable finie quelconque de K, A est une extension simple $K\langle\theta\rangle$ de K (chap.VI, § 5,prop.8) ; donc $A \otimes B$ est un anneau commutatif semi-simple, composé direct d'un nombre fini de corps commutatifs.

On peut établir ce résultat sans utiliser le fait que A est une extension simple. En effet, si E est un sous-corps de A tel que $K \subset E \subset A$, $A \otimes B$, considéré comme algèbre sur E, est isomorphe au produit tensoriel, relatif à E, de A et de $E \otimes B$ (considérés comme algèbres sur E). Si A est une extension simple séparable de E, E une extension simple séparable de K, $E \otimes B$ est isomorphe au composé direct d'un nombre fini de corps B_i (extensions de E); donc $A \otimes B$ est composé direct des produits tensoriels $A \otimes B_i$ (relatifs à E) ; chacun de ces produits étant lui-même composé direct de corps commutatifs, il en est de même de $A \otimes B$.

On généralise aussitôt par récurrence au cas général.

Si au contraire A est une extension inséparable de K , et θ un élément de A inséparable par rapport à K , $A \otimes B$ contient l'algèbre $K\langle\theta\rangle \otimes B$, qui, pour un choix convenable du corps B , possède des éléments nilpotents. En résumé :

<u>Proposition 1</u>. <u>Etant donnée une extension algébrique finie</u> A <u>d'un corps</u> K , <u>pour que le produit tensoriel</u> $A \otimes B$ (<u>relatif à</u> K) <u>de</u> A <u>et d'une extension quelconque</u> B <u>de</u> K , <u>soit un anneau</u> (<u>commutatif</u>) <u>semi-simple</u>, <u>il faut et il suffit que</u> A <u>soit une extension séparable de</u> K .

<u>Produit tensoriel de deux corps non commutatifs</u>. Supposons maintenant que A et B soient deux surcorps non commutatifs de K , et désignons respectivement par E et F leurs <u>centres</u>, qui sont des surcorps commutatifs de K .

<u>Proposition 2</u>. <u>Le centre de l'algèbre</u> $A \otimes B$ <u>est le produit tensoriel</u> $E \otimes F$ <u>des centres de</u> A <u>et de</u> B .

En effet, le centre de $A \otimes B$ peut être défini comme l'ensemble des éléments de $A \otimes B$ qui sont à la fois permutables avec tout élément de A et tout élément de B . Cherchons d'abord les éléments z permutables avec tout élément $x \in A$; si (e_λ) est une base de B par rapport à K , et $z = \sum_\lambda z_\lambda e_\lambda$ $(z_\lambda \in A)$, on doit avoir $xz=zx$, c'est-à-dire $\sum_\lambda xz_\lambda e_\lambda = \sum_\lambda z_\lambda xe_\lambda$ (d'après la permutabilité des éléments de A et des éléments de B) ; donc il faut que $xz_\lambda = z_\lambda x$ quel que soit $x \in A$, ce qui entraîne $z_\lambda \in E$, et $z \in E \otimes B$. De la même manière, on montre ensuite que les éléments de $E \otimes B$ permutables avec tout élément de B appartiennent à $E \otimes F$.

<u>Proposition 3</u>. <u>Pour que l'algèbre</u> $A \otimes B$ <u>ne contienne pas d'idéal bilatère nilpotent</u> ; <u>il faut et il suffit que</u> $E \otimes F$ <u>ne contienne pas d'idéal bilatère nilpotent</u>.

Cette proposition va être une conséquence de la suivante :

<u>Proposition 4</u>. <u>Tout idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de $A \otimes B$ est engendré par son intersection</u> $\mathfrak{a} \cap (E \otimes F)$ <u>avec le centre de</u> $A \otimes B$.

Supposons en effet la prop. 4 démontrée ; alors, si $\mathfrak{a}$ est un idéal nilpotent dans $A \otimes B$, $\mathfrak{a} \cap (E \otimes F)$ n'est pas nul, puisqu'il engendre $\mathfrak{a}$, et est nilpotent. Réciproquement, si $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap (E \otimes F)$ est nilpotent, si par exemple $\mathfrak{a}_0^p = (0)$, on a $\mathfrak{a}^p = (0)$: en effet tout élément de $\mathfrak{a}$ est de la forme $\sum_i z_i x_i$, où $z_i \in \mathfrak{a}_0$, $x_i \in A \otimes B$. Il suffit de montrer que $\prod_{i=1}^{p} (z_i x_i) = 0$; or, comme les z_i appartiennent au centre de $A \otimes B$, ce produit est égal à $(z_1 z_2 \ldots z_p)(x_1 \ldots x_p)$ et on a par hypothèse $z_1 z_2 \ldots z_p = 0$ quels que soient les $z_i \in \mathfrak{a}_0$.

Démontrons donc la prop.4 . Dans $A \otimes B$, considéré comme espace vectoriel à gauche par rapport à A , $\mathfrak{a}$ est un <u>sous-espace vectoriel</u> . D'après le th. d'échange (chap.II, § 1), comme toute base de B par rapport à K est une base de $A \otimes B$ par rapport à A , il existe un sous-espace vectoriel M de B (par rapport à K) tel que le sous-espace vectoriel $\widehat{A.M}$ (par rapport à A) qu'il engendre dans $A \otimes B$, soit <u>supplémentaire</u> de $\mathfrak{a}$. Soit N un <u>supplémentaire</u> de M dans B (considéré comme sous-espace vectoriel par rapport à K) ; dans la décomposition en somme directe de $A \otimes B$ en $\mathfrak{a} + \widehat{A.M}$, soit H le composant de N dans $\mathfrak{a}$; nous allons voir que $H \subset E \otimes B$, et que $\widehat{A.H} = \mathfrak{a}$. En effet, soit $x \in N$, et $x = y + z$, avec $y \in \mathfrak{a}$, et $z \in \widehat{A.M}$; pour tout $u \in A$, on a $ux = xu$, puisque $x \in B$ et $u \in A$; donc $uy - yu = zu - uz$. Mais, comme $\mathfrak{a}$ est idéal bilatère, uy et yu appartiennent à $\mathfrak{a}$; d'autre part, $uz \in \widehat{A.M}$ par définition, et $zu \in \widehat{A.M}$, d'après la permutabilité des éléments de A et de B ; comme la somme $\mathfrak{a} + \widehat{A.M}$ est directe, $uy = yu$, donc y est permutable avec tout élément de A , et par suite appartient à $E \otimes B$ (prop. 2) .

En outre, comme $\widehat{A.N}$ est supplémentaire de $\widehat{A.M}$, il en est de même de $\widehat{A.H}$, et comme $\widehat{A.H} \subset \mathfrak{a}$, $\widehat{A.H} = \mathfrak{a}$, a fortiori, $\mathfrak{a}$ est engendré par son intersection avec $E \otimes B$, qui contient H. En recommençant le raisonnement dans $E \otimes B$, on obtient la proposition.

Théorème 1. Soient A, B deux sur-corps non commutatifs de K, A étant de rang fini par rapport à K. Pour que le produit tensoriel $A \otimes B$ soit un anneau semi-simple, il faut et il suffit que le produit tensoriel $E \otimes F$ des centres de A et B soit un anneau semi-simple.

Remarquons d'abord que $A \otimes B$ est un anneau d'Artin (§ 1) : en effet, tout idéal à gauche dans cet anneau est un sous-espace vectoriel de $A \otimes B$, considéré comme espace vectoriel à gauche par rapport au corps B ; comme cet espace a par hypothèse un nombre fini de dimensions, les idéaux à gauche satisfont à la condition minimale.

Cela étant, la condition est évidemment nécessaire (§ 2, prop.5). Inversement, si elle est remplie, $A \otimes B$ ne contient aucun idéal bilatère nilpotent d'après la prop.3 ; comme $A \otimes B$ est un anneau d'Artin, il ne peut contenir non plus d'idéal à gauche nilpotent (§ 1, prop.7), donc il est semi-simple.

La condition du th.1 sera toujours remplie si l'un au moins des corps E, F est une extension séparable de K (prop.1).

Produit tensoriel de deux algèbres semi-simples. Toute algèbre semi-simple étant composé direct d'algèbres simples, il suffit d'étudier les produits tensoriels d'algèbres simples. Soient donc A et B deux algèbres simples sur un corps K, et supposons que l'une d'elles, par exemple A, soit de rang fini par rapport à K ; d'après le th. de Wedderburn (§ 2, th.1), on peut écrire (à une isomorphie près) $A = G \otimes K_m$, $B = H \otimes K_n$, où G et H sont des corps (gauches), G étant de rang fini par rapport à K, K_m et K_n les anneaux de matrices d'ordre m et n respectivement sur K. On a donc $A \otimes B = (G \otimes H) \otimes (K_m \otimes K_n)$, et comme $K_m \otimes K_n$ peut être identifié à K_{mn} (chap. II, § 6), $A \otimes B = (G \otimes H) \otimes K_{mn}$. On est donc ramené au produit $G \otimes H$ de deux corps non commutatifs ; si le produit tensoriel $E \otimes F$ des centres respectifs de G et H (qui sont aussi les centres de A et B) est semi-simple, il en est de même du produit $G \otimes H$ (th. 1) ; donc $G \otimes H$ est composé direct d'algèbres simples sur K, c'est-à-dire d'algèbres de la forme $C_i \otimes K_{r_i}$, où C_i est un sur-corps (en général non commutatif) de K. Il en résulte que $A \otimes B$ est alors composé direct des algèbres simples $C_i \otimes K_{mnr_i}$; donc :

Théorème 2. Soient A et B deux algèbres simples sur K, A étant de rang fini par rapport à K. Pour que le produit tensoriel $A \otimes B$ soit semi-simple, il faut et il suffit que le produit tensoriel $E \otimes F$ des centres de A et B soit semi-simple.

Corollaire. Si A et B sont deux algèbres simples sur K, A étant de rang fini par rapport à K, et si le centre de l'une d'elles (par exemple de A) est identique à K, $A \otimes B$ est une algèbre simple dont le centre est identique au centre de B.

En effet, si $E = K$, $E \otimes F = F$.

Extension du corps de base d'une algèbre simple. Etant donnée une algèbre A sur un corps K et une extension E de K, rappelons qu'on désigne par $A_{(E)}$ le produit tensoriel $A \otimes E$ (relatif à K) considéré comme algèbre par rapport au corps E ; on dit que $A_{(E)}$ est l'algèbre obtenue à partir de A par extension du corps de base à E. Si A est de rang fini n par rapport à K, $A_{(E)}$ est de rang n par rapport à E, toute base de A par rapport à K étant une base de $A_{(E)}$ par rapport à E.

Considérons en particulier le cas où A est une algèbre <u>simple</u> de rang fini n par rapport à K. Alors on peut écrire $A=G \otimes K_r$, où G est un corps (gauche) de rang m par rapport à K, et on a $n=mr^2$. Il en résulte aussitôt qu'on a $A_{(E)}=G_{(E)} \otimes E_r$ (le produit tensoriel étant pris relativement à E) ; tout revient donc à étudier la structure de $G_{(E)}$, c'est-à-dire de $G \otimes E$ (produit relatif à K) considéré comme algèbre sur E. $G_{(E)}$ est une algèbre de rang fini m sur E ; pour qu'elle soit semi-simple, il faut et il suffit que, si F est le centre de G (et de A), $F_{(E)}$ soit semi-simple (th.1) ; en se bornant au cas des extensions algèbriques E du corps de base, $F_{(E)}$ sera toujours semi-simple (donc composé direct de corps commutatifs) si F est une extension <u>séparable</u> de K.

Considérons plus particulièrement le cas où $F=K$; $G_{(E)}$ est alors toujours une <u>algèbre simple</u> de rang m sur E ; mais, pour des extensions E convenablement choisies, $G_{(E)}$ <u>ne sera plus un corps</u>, mais une algèbre de matrices sur un corps gauche. Par exemple, prenons pour E <u>l'extension algèbrique maximale</u> Ω de K ; $G_{(\Omega)}$ est alors une algèbre de matrices sur un corps gauche H sur Ω. Or, on a nécessairement $H = \Omega$; en effet, H étant de rang fini par rapport à Ω, si x est un élément quelconque de H, il y a au plus un nombre fini de puissances de x linéairement indépendantes par rapport à Ω, donc x est racine d'un polynome à coefficients dans Ω, et par suite $x \in \Omega$. On remarquera que le rang de $G_{(\Omega)}$ par rapport à Ω étant égal à m, on a démontré en passant la proposition suivante :

<u>Proposition 5</u>. <u>Si un corps gauche G est de rang fini par rapport à son centre</u> F, <u>ce rang est un carré parfait</u> t^2, <u>et, si</u> Ω <u>désigne l'exten-algèbrique maximale de</u> F, $G_{(\Omega)}$ <u>est l'anneau de matrices d'ordre</u> t <u>sur</u> Ω.

D'une manière générale, nous dirons qu'une extension E de F est un <u>corps de décomposition</u> du corps gauche G , si $G_{(E)}$ est un anneau de matrices <u>sur</u> E (nécessairement d'ordre t) ; nous venons de voir que l'extension algèbrique maximale Ω est toujours un corps de décomposition. Nous montrerons au § 4 qu'il existe des extensions <u>finies</u> de F qui sont des corps de décomposition de G .

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que le produit tensoriel $K(e) \otimes F$, où F est une extension (commutative) quelconque du corps K , est isomorphe à l'extension transcendante simple F(e) (utiliser la base vectorielle de K(e) sur K fournie par la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples). En déduire que le produit $K(I) \otimes F$, où I est un ensemble quelconque, est isomorphe à l'extension transcendante pure F(I) (se ramener au cas précédent, à l'aide du th. de Zorn) .

2) Soient A et B deux algèbres simples, dont l'une A est de rang fini par rapport à son centre E . Montrer que, si E est une extension algèbrique séparable infinie de K , $A \otimes B$ est un anneau de von Neumann (§ 2,exerc.9) (remarquer que tout élément de $A \otimes B$ appartient à un sous-anneau $A' \otimes B$ où A' est une sous-algèbre de A , de rang fini par rapport à K) . Etendre cette propositøon au cas où E est une extension algèbrique séparable d'une extension transcendante pure de K (utiliser l'exerc.1) .

3) Soient A et B deux surcorps non commutatifs d'un corps commutatif K , E et F les centres de A et B respectivement. Montrer que, si $\mathfrak{a}_0$ est un idéal bilatère du centre $E \otimes F$ de $A \otimes B$, $\mathfrak{a}$ l'idéal bilatère de $A \otimes B$ engendré par $\mathfrak{a}_0$, on a $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap (E \otimes F)$.

4) Soit E une extension galoisienne séparable de degré n d'un corps commutatif K, G le groupe de Galois de E par rapport à K, Γ l'algèbre de groupe de G par rapport au corps K. On munit E d'une structure de module à gauche par rapport à l'anneau Γ, en posant, pour $x \in E$, et $a = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma . \sigma$ $(a_\sigma \in K)$ $\quad a.x = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma . \sigma(x)$.

a) Soit E' une extension de K <u>isomorphe</u> à E ; on considère l'algèbre $\Gamma_{(E')}$ obtenue par extension à E' du corps de base de Γ ; on considère d'autre part le produit tensoriel $E' \otimes E$ (relatif à K), et on définit sur ce produit une structure de module à gauche par rapport à $\Gamma_{(E')}$ en posant, pour $b = \sum_\sigma b_\sigma . \sigma$ $(b_\sigma \in E', \sigma \in G)$, et $z = \sum_i y_i x_i$ $(y_i \in E', x_i \in E)$, $b.z = \sum_{\sigma, i} b_\sigma y_i . \sigma(x_i)$. Montrer que cette structure de module à gauche est isomorphe à celle de $\Gamma_{(E')}$, considéré comme module à gauche par rapport à lui-même (remarquer que $E' \otimes E$ est composé direct de n sous-corps isomorphes à E', et que $z \to \sigma.z$ est un automorphisme de l'algèbre semi-simple $E' \otimes E$, qui permute par suite les éléments unités de ces n corps ; pour voir que, si $\sigma \neq \tau$ on a $\sigma.e \neq \tau.e$ pour une quelconque de ces unités e, remarquer que pour tout $x \in E$, (E et E' étant identifiés à des sous-corps de $E' \otimes E$), on a $xe = x'e$, avec $x' \in E'$, et $\sigma.(xe) = \sigma(x)(\sigma.e) = x'(\sigma.e)$.)

b) En restreignant l'anneau d'opérateurs des modules à gauche $\Gamma_{(E')}$ et $E' \otimes E$ définis dans a), au sous-anneau Γ, montrer que les modules obtenus sont respectivement isomorphes aux Γ-modules Γ^n et E^n. En déduire que les Γ-modules à gauche Γ et E sont isomorphes (cf. chap. II, § 3, exerc.   ).

c) Déduire de b) qu'il existe une base du corps E par rapport à K formée d'un élément de E et de ses conjugés (<u>base normale</u> de E).

d) Soit H un sous-groupe de G , F le sous-corps de E formé des éléments de E invariants par les automorphismes $\sigma \in H$. Montrer que, par tout isomorphisme du Γ-module E sur le Γ-module Γ , il correspond à F un même idéal à droite, qui n'est autre que l'idéal à droite engendré par l'élément $_{\sigma \quad H} \sigma$. En déduire que $[F:K] = (G:H)$, ce qui donne une nouvelle démonstration du th. du chap.VI, § . Montrer en outre que l'élément de F qui correspond à $\sum_{\sigma \in H} \sigma$ est de degré $[F:K]$ par rapport à K , et par suite engendre F (ce qui donne une nouvelle démonstration de la prop. du chap.VI, §) .

§ 4. Représentations des algèbres semi-simples.

Modules sur un anneau semi-simple. Proposition 1. *Tout module à gauche unitaire sur un anneau semi-simple A est complètement réductible, et est somme directe de modules simples dont chacun est isomorphe à un idéal à gauche minimal de A .*

En effet, soit M un A-module à gauche unitaire ; M est somme des sous-modules A.x , où x parcourt M (puisque M est unitaire). Si A est somme directe d'une famille finie $(\mathfrak{l}_i)$ d'idéaux à gauche minimaux, A.x est somme des modules $\mathfrak{l}_i.x$. Or, si $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche de A , l'application $a \rightarrow a.x$ de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}.x$ est une représentation du A-module $\mathfrak{l}$ sur le A-module $\mathfrak{l}.x$; ce dernier est donc isomorphe à un module quotient de $\mathfrak{l}$. Si $\mathfrak{l}$ est minimal, ses seuls modules quotients sont (0) et $\mathfrak{l}$; donc $\mathfrak{l}.x$ est nul ou isomorphe à $\mathfrak{l}$, et par suite simple dans ce dernier cas. On conclut de là que M est somme de A-modules simples ; la proposition en résulte par application du th.1 du chap.II, § 1 .

<u>Représentations d'un anneau dans un anneau d'endomorphismes</u>. L'étude des représentations des anneaux semi-simples dans les anneaux semi-simples se ramène immédiatement à celle des représentations des anneaux semi-simples dans les anneaux <u>simples</u>. En effet, soient A et B deux anneaux semi-simples, $B = \sum_{i=1}^{p} B_i$ la décomposition de B en anneaux simples, h_i la fonction composante dans B_i ; si f est une représentation de A dans B , $h_i \circ f$ est une représentation de A dans B_i , et on a $f(x)= \sum_{i=1}^{p} h_i(f(x))$; réciproquement, si f_i est une représentation de A dans B_i , $x \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} f_i(x)$ est une représentation de A dans B .

Un anneau simple étant, d'après le th. de Wedderburn, l'<u>anneau des endomorphismes</u> d'un espace vectoriel sur un corps gauche, nous allons étudier de façon générale les représentations d'un anneau dans un tel anneau d'endomorphismes.

Soit donc E un espace vectoriel à gauche sur un corps K , $\mathcal{L}(E)$ l'anneau des endomorphismes de E . Soit A un anneau à opérateurs quelconque, soumis à la seule restriction que ses opérateurs appartiennent au centre de K , et sont donc aussi des opérateurs de l'anneau $\mathcal{L}(E)$. Soit $s \longrightarrow u_s$ une <u>représentation</u> de A dans $\mathcal{L}(E)$; nous allons montrer qu'une telle représentation permet de définir une structure de <u>module à gauche par rapport à A</u> sur l'espace vectoriel E . En effet, posons $s.x = u_s(x)$ pour tout $x \in E$; cette loi de composition externe définit bien une structure de module à gauche : il suffit de vérifier l'axiome (M_{III}) ; or, on a $(st).x = u_{st}(x)$ et $u_{st}=u_s \circ u_t$ par hypothèse, donc $(st).x = u_s(u_t(x)) = s.(t.x)$. En outre, la loi externe ainsi définie est <u>permutable</u> avec la multiplication des éléments de E par les scalaires de K : en effet, si $s \in A$, $\lambda \in K$, on a $s.(\lambda x)=u_s(\lambda x)= \lambda u_s(x) = \lambda(s.x)$

Autrement dit, la donnée d'une représentation de A dans $\mathcal{L}(E)$ définit sur E une structure de bimodule (à gauche) par rapport à A et à K .

Inversement, toute structure de A-module à gauche sur E , dont la loi externe est permutable avec la multiplication par un scalaire de K , correspond à une représentation de A dans $\mathcal{L}(E)$: savoir celle qui, à tout opérateur $s \in A$, fait correspondre l'application u_s de E dans E produite par cet opérateur (chap. I, § 3) : les hypothèses faites assurent que u_s est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel E , et $s \to u_s$ une représentation de A dans $\mathcal{L}(E)$, comme on le vérifie par des calculs analogues aux précédents.

Il y a donc correspondance biunivoque entre les représentations de A dans $\mathcal{L}(E)$ et les structures de bimodule (à gauche) sur E (par rapport à A et K , la loi externe relative à K étant la multiplication par un scalaire). Le bimodule correspondant à une représentation est dit associé à cette représentation.

Soient E,E' deux espaces vectoriels à gauche sur K , $s \to u_s$, $s \to v_s$ des représentations de A dans $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{L}(E')$ respectivement ; désignons par E_1 et E_2 les bimodules associés à ces deux représentations (ayant pour support E et E' respectivement). Examinons les propriétés d'un homomorphisme φ du bimodule E_1 dans le bimodule E_2 ; tout d'abord, φ est une application linéaire de l'espace vectoriel E dans E' . Si on exprime ensuite que φ est une représentation du A-module E_1 dans le A-module E_2 , on obtient l'identite $\varphi(s.x)=s.\varphi(x)$, c'est-à-dire, d'après les définitions des lois externes de ces deux modules, $\varphi(u_s(x)) = v_s(\varphi(x))$, ou encore

(1) $$\varphi \circ u_s = v_s \circ \varphi$$

identiquement en s . La réciproque est immédiate ; donc :

<u>Proposition 2</u>. <u>Pour qu'une application linéaire φ de E dans E' soit un homomorphisme du bimodule associé à la représentation $s \rightarrow u_s$ dans le bimodule associé à la représentation $s \rightarrow v_s$, il faut et il suffit que φ satisfasse identiquement à la relation</u> (1).

Deux corollaires de cette proposition sont importants. En premier lieu, cherchons à quelle condition φ est un <u>isomorphisme</u> de E_1 sur E_2 : φ doit satisfaire à (1) et être un <u>isomorphisme</u> de l'<u>espace vectoriel</u> E sur l'<u>espace vectoriel</u> E'. En particulier, lorsque E=E', φ doit être un élément <u>inversible</u> de $\mathcal{L}(E)$; et la relation (1) s'écrit

(2) $$v_s = \varphi \circ u_s \circ \varphi^{-1}$$

quelque soit $s \in A$. On dit alors que les représentations $s \rightarrow u_s$ et $s \rightarrow v_s$ sont <u>semblables</u>. Donc :

<u>Corollaire 1</u>. <u>Pour que les bimodules associés à deux représentations $s \rightarrow u_s$ et $s \rightarrow v_s$ de A dans $\mathcal{L}(E)$ soient isomorphes, il faut et il suffit que ces représentations soient semblables</u>.

En second lieu, cherchons à quelle condition φ est un <u>endomorphisme</u> du bimodule E_1 ; il faut alors faire $v_s = u_s$ dans (1), autrement dit :

<u>Corollaire 2</u>. <u>L'anneau des endomorphismes du bimodule associé à une représentation $s \rightarrow u_s$ est identique à l'anneau des éléments de $\mathcal{L}(E)$ permutables avec tous les éléments de l'image de A par cette représentation</u>.

<u>Représentations d'une algèbre simple dans une algèbre simple</u>. Soient A et B deux anneaux simples. B est un anneau de matrices K_r sur un corps gauche K, donc peut être identifié à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à gauche E à r dimensions sur le corps K^o <u>opposé</u> de K. Pour étudier les représentations de A dans B, nous nous bornerons au cas où A est une <u>algèbre</u> par rapport au <u>centre</u> Z de K, B étant alors

considéré également comme algèbre sur Z ; nous nous bornerons aussi au cas où l'image, par la représentation considérée, de l'élément unité de A , est l'élément unité de B . Si e désigne l'élément unité de A , les éléments ξe , lorsque l'opérateur ξ parcourt Z , forment donc un sous-corps du centre de A , isomorphe à Z ; pour toute représentation $s \rightarrow u_s$ de A dans B , on a donc $u_{\xi e} = \xi u_e$, et u_e n'est autre que l'élément unité de B (application identique de l'espace vectoriel E sur lui-même). A une telle représentation est associée, comme nous venons de le voir, une structure de <u>bimodule</u> à gauche sur E , par rapport aux anneaux A et K^o ; en outre, pour tout $\xi \in Z$, et tout $x \in E$, on a $(\xi e).x = u_{\xi e}(x) = \xi u_e(x) = \xi x$. Il en résulte (chap.II, §6) que la structure de bimodule précédente peut être assimilée (au point de vue des sous-modules, modules quotients, représentations, etc.) à une structure de <u>module à gauche</u> par rapport au <u>produit tensoriel</u> $A \otimes K^o$ des algèbres A et K^o , relatif au corps Z . Nous voyons donc qu'il y a <u>correspondance biunivoque</u> entre les <u>représentations</u> de A dans $B=K_r$, et les structures de <u>module à gauche</u> par rapport à $A \otimes K^o$, de <u>rang r</u> par rapport au sous-corps K^o de cet anneau.

Supposons maintenant plus particulièrement que A soit une algèbre de <u>rang fini</u> sur Z ; alors (§3,cor. du th.2), $A \otimes K^o$ est une <u>algèbre simple</u> sur Z ; donc (prop.1) tout module à gauche par rapport à $A \otimes K^o$ est somme directe d'un nombre fini de modules simples isomorphes aux idéaux à gauche minimaux de $A \otimes K^o$; mais ces derniers sont tous isomorphes entre eux ; en particulier, ce sont tous des sous-espaces vectoriels de E ayant même nombre de dimensions k ; le nombre de dimensions par rapport à K^o d'un module sur $A \otimes K^o$, somme directe de h modules simples (de "longueur" h) est donc hk ; deux tels modules ayant même nombre de de dimensions par rapport à K^o ont donc même longueur, et sont par suite <u>isomorphes</u>. Donc (cor.1 de la prop.2) :

<u>Théorème 1</u>. <u>Etant donnés une algèbre simple</u> B , <u>anneau de matrices sur un corps gauche</u> K , <u>de centre</u> Z , <u>et une algèbre simple</u> A <u>de rang fini sur</u> Z , <u>deux représentations quelconques de l'algèbre</u> A <u>dans l'algèbre</u> B <u>sont semblables</u>.

Considérons en particulier deux sous-algèbres simples A_1, A_2 de B , <u>contenant le centre</u> Z de B (et considérées comme algèbres sur Z) . S'il existe un isomorphisme de A_1 sur A_2 , pour lequel les éléments de Z sont invariants, c'est une représentation de A_1 dans B ; l'application identique de A_1 sur lui-même est aussi une représentation de A_1 dans B . Donc :

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> B <u>une algèbre simple de centre</u> Z , A_1 <u>et</u> A_2 <u>deux sous-algèbres simples de</u> B <u>contenant</u> Z , <u>et de rang fini sur</u> Z ; <u>tout isomorphisme de</u> A_1 <u>sur</u> A_2 <u>est de la forme</u> $x \to axa^{-1}$ <u>où</u> a <u>est un élément inversible de</u> B .

En particulier :

<u>Théorème 2</u> (Skolem). <u>Etant donnée une algèbre simple</u> A , <u>de rang fini par rapport à son centre, tout automorphisme de A laissant invariants les éléments du centre de A est un automorphisme intérieur</u>.

<u>Représentations d'une algèbre semi-simple dans une algèbre simple</u>. Considérons maintenant les représentations d'un anneau <u>semi-simple</u> A dans un anneau <u>simple</u> B . Comme ci-dessus, nous nous bornerons au cas où A est une <u>algèbre</u> par rapport au centre Z de B , B étant lui aussi considéré comme algèbre sur Z . En outre, nous pouvons nous borner à étudier les <u>isomorphismes</u> de A dans B ; en effet, si $\sum_{i=1}^{p} A_i$ est la décomposition de A en algèbres simples, et f une représentation de A dans B ,

$f^{-1}(0)$ est un idéal bilatère de A , donc somme d'un certain nombre des A_i ; et f , restreint à la somme A' des A_i restants, est un isomorphisme de A' sur f(A')=f(A) .

Cela étant, à tout isomorphisme $s \to u_s$ de A dans B est associée sur E une structure de bimodule par rapport à A et K^o, ou, ce qui revient au même, une structure de module à gauche par rapport à $A \otimes K^o$. Or, $A \otimes K^o$ est un anneau semi-simple, composé direct des algèbres simples $A_i \otimes K^o$; donc, E est somme directe de modules simples, dont chacun est isomorphe à un idéal à gauche minimal de $A \otimes K^o$ (prop.1), c'est-à-dire à un idéal à gauche minimal de l'un des $A_i \otimes K^o$. Soit E_i $(1 \leq i \leq p)$ la somme des sous-modules simples de E isomorphes aux idéaux à gauche minimaux de $A_i \otimes K^o$ (considérés comme idéaux à gauche dans $A \otimes K^o$) ; pour $i \neq j$, un sous-module simple de E_i et un sous-module simple de E_j ne peuvent être isomorphes, donc E est <u>somme directe</u> des E_i ; en outre, comme, dans $A \otimes K^o$, les sous-anneaux $A_i \otimes K^o$ s'annulent mutuellement, on a $(A_i \otimes K^o).E_j=0$ pour $i \neq j$. Il s'ensuit qu'aucun des E_i n'est nul (sans quoi la représentation de A dans B ne serait pas un isomorphisme) ; en outre, la connaissance de la structure de chacun des E_i , en tant que module à gauche sur $A_i \otimes K^o$, détermine complètement la structure de module à gauche de E par rapport à $A \otimes K^o$.

<u>Algèbre commutante d'une sous-algèbre</u>. Soit $B=K_r$ une algèbre simple, Z son centre. Si A est une sous-algèbre de B (par rapport au centre Z), la sous-algèbre de B formée des éléments de B <u>permutables avec tous les éléments de</u> A sera dite l'algèbre <u>commutante</u> de A .

<u>Proposition 4</u>. <u>Soit</u> B <u>une algèbre simple de centre</u> Z , A <u>une sous-algèbre semi-simple de</u> B <u>contenant</u> Z <u>et de rang fini par rapport à</u> Z . <u>L'algèbre commutante</u> C <u>de</u> A <u>est semi-simple</u>.

En effet, si on considère B comme anneau d'endomorphismes de l'espace vectoriel E de dimension r sur K^o, l'application identique de A dans B définit une structure de module à gauche sur E, par rapport à $A \otimes K^o$. D'après le cor.2 de la prop.2, l'algèbre commutante C de A n'est autre que l'anneau des endomorphismes du module E ainsi défini ; comme E est complètement réductible (prop.1) on sait (chap.II, §3) que cet anneau est semi-simple.

Examinons de plus près la structure de C. Si $\sum_{i=1}^{p} A_i$ est la décomposition de A en algèbres simples, E_i la décomposition correspondante du $(A \otimes K^o)$-module E, C est composé direct des anneaux C_i, dont chacun est formé des endomorphismes de E annulant tous les E_j d'indice $\neq i$; C_i est isomorphe à l'anneau des endomorphismes de E_i, considéré comme module sur $A_i \otimes K^o$; c'est donc un anneau simple. De façon plus précise, si E_i est somme directe de h_i modules simples, isomorphes aux idéaux à gauche minimaux de $A_i \otimes K^o$, C_i est un anneau de matrices d'ordre h_i sur un corps gauche G_i, isomorphe à l'opposé du corps des endomorphismes d'un idéal à gauche minimal de $A_i \otimes K^o$.

Supposons de plus que K (et par suite B) soit de rang fini sur son centre Z, et calculons alors le rang $[C_i:Z]$; on a d'après ce qui précède, $[C_i:Z] = h_i^2 [G_i:Z]$. Or, $A_i \otimes K^o$ est un anneau simple, somme directe de n_i idéaux à gauche minimaux ; c'est donc un anneau de matrices d'ordre n_i sur l'opposé du corps G_i ; en écrivant de deux manières le rang de $A_i \otimes K^o$ par rapport à Z, il vient $[A_i:Z][K:Z] = n_i^2 [G_i:Z]$.

Enfin, désignons par k_i le nombre de dimensions d'un idéal à gauche minimal de $A_i \otimes K^o$, par rapport à K^o ; comme toute base de A_i par rapport à Z est une base de $A_i \otimes K^o$ par rapport à K^o, on a $n_i k_i = [A_i:Z]$, d'où, par un calcul facile

45

(3) $$\left[A_i:Z\right]\left[C_i:Z\right] = h_i^2 k_i^2 . \left[K:Z\right] = r_i^2 \left[K:Z\right]$$

où r_i est le <u>nombre de dimensions</u> de E_i par rapport à K^o .

Cherchons maintenant, toujours dans le cas où K est de rang fini sur Z , l'<u>algèbre commutante de</u> C . Comme $C_i . E_j = \{0\}$ pour $i \neq j$, la décomposition du $(C \otimes K^o)$-module E est formée des <u>mêmes</u> E_i que précédemment (avec naturellement une autre structure de module) ; si A' est l'algèbre commutante de C , A'_i le sous-anneau simple de A' correspondant à E_i , A'_i contient A_i , et la relation (3), appliquée à C et A' , donne $\left[A'_i:Z\right] = \left[A_i:Z\right]$, donc $A'_i = A_i$, $A' = A$. Nous avons donc obtenu le théorème suivant :

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit</u> B <u>une algèbre simple, de rang fini par rapport à son centre</u> Z . <u>Si</u> A <u>est une sous-algèbre semi-simple de</u> B <u>contenant</u> Z , C <u>l'algèbre commutante de</u> A , <u>l'algèbre commutante de</u> C <u>est identique à</u> A .

On peut ajouter la remarque suivante, qui résulte de la relation entre la décomposition d'un module semi-simple en modules simples et la décomposition en idéaux minimaux à droite de son anneau d'endomorphismes (chap.II, § 3) : Si $C_i = \sum_{j=1}^{h_i} \mathfrak{r}_j$ est une décomposition de C_i en somme directe de h_i idéaux à droite minimaux $1 = \sum_{j=1}^{h_i} e_j$ la décomposition correspondante de l'élément unité de C_i en idempotents, on a $\mathfrak{r}_j = e_j C_i$, et $E_i = \sum_{j=1}^{h_i} e_j E_i$, où les $e_j E_i$ sont des $(A_i \otimes K^o)$-modules <u>simples</u>, dont la somme est <u>directe</u>.

Nous avons vu en outre que le nombre des sous-anneaux simples dans la décomposition de A et dans celle de C est le même ; en particulier, si A est une algèbre <u>simple</u>, il en est de même de C , et la relation (3) donne alors

(4) $$\left[A:Z\right] . \left[C:Z\right] = \left[B:Z\right] .$$

Remarquons encore que (par définition) $A \cap C$ est le centre commun des deux sous-algèbres A et C ; si $A \cap C = Z$, la relation (4) montre que B est isomorphe au produit tensoriel $A \otimes C$.

Proposition 5. Le produit tensoriel d'un corps gauche K et de son opposé K^0 (relativement à leur centre commun Z) est une algèbre de matrices sur Z , lorsque K est de rang fini sur Z .

En effet, considérons la représentation identique de K sur lui-même ; il lui correspond une structure de module à gauche par rapport à $K \otimes K^0$, sur K^0 (considéré comme espace vectoriel à 1 dimension par rapport à lui-même). D'après la démonstration du th. 3 , l'algèbre commutante de K dans lui-même est identique au corps gauche par rapport auquel $K \otimes K^0$ est algèbre de matrices ; mais cette algèbre commutante n'est autre que le centre Z de K , d'où la proposition.

Corps de décomposition d'un corps gauche. Soit K un corps gauche de rang fini sur son centre Z . Cherchons à déterminer les extensions commutatives finies de Z qui sont des corps de décomposition (§ 3) de K . Une telle extension T est aussi corps de décomposition de l'opposé K^0 ; donc $T \otimes K^0$ est anneau de matrices sur T . Cette algèbre simple est somme directe d'un certain nombre d'idéaux à gauche minimaux isomorphes ; soit E l'un d'eux, et soit r le nombre de dimensions de E , considéré comme espace vectoriel à gauche sur K^0 ; à ce module par rapport à $T \otimes K^0$ correspond un isomorphisme de T dans l'anneau d'endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ de l'espace vectoriel E , c'est-à-dire dans K_r ; soit T' l'image de T par cet isomorphisme. Comme T est isomorphe, par hypothèse, au corps des endomorphismes de E (considéré comme module sur $T \otimes K^0$), il résulte du corollaire 2 de la prop. 2 que, dans K_r , l'algèbre commutante de T' est isomorphe à T', et comme elle contient T', elle lui est <u>identique</u> ; cela signifie encore que, dans K_r , T' est un corps commutatif <u>maximal</u>, car s'il existait un corps commutatif contenu dans K_r et contenant T' , ses éléments seraient permutables avec tous ceux de T' .

La relation (4) entre le rang d'une sous-algèbre simple et celui de son algèbre commutante donne ici

$$([T':Z])^2 = r^2[K:Z]$$

d'où, en posant $[K:Z] = m^2$ (§3, prop.5)

$$[T':Z] = rm .$$

Considérons inversement un anneau de matrices quelconque $B=K_n$ sur K , et soit S un corps commutatif maximal de B , contenant le centre Z de K . Si C est l'algèbre commutante de S , C contient S , qui est le centre de C ; or, C est une algèbre simple sur un corps G , contenant S ; on ne peut avoir $G \neq S$, car si un élément $\theta \in G$ n'appartenait pas à S , le plus petit sous-corps de G contenant S et θ serait commutatif (identique à $S\langle\theta\rangle$), contrairement à l'hypothèse. Mais G est isomorphe à l'opposé du corps des endomorphismes d'un idéal à gauche minimal de $S \otimes K^o$, donc $S \otimes K^o$ est un anneau de matrices sur un corps isomorphe à S . En résumé :

<u>Proposition 6</u>. <u>Pour qu'une extension commutative finie</u> T <u>du centre</u> Z <u>d'un corps gauche</u> K <u>de rang fini sur</u> Z <u>soit corps de décomposition de</u> K , <u>il faut et il suffit que</u> T <u>soit isomorphe à un sous-corps commutatif maximal</u>, <u>contenant</u> Z , <u>d'un anneau de matrices sur</u> K . <u>Si</u> $[K:Z] = m^2$, $[T:Z]$ <u>est un multiple de</u> m .

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> K <u>est un corps gauche de rang</u> m^2 <u>sur son centre</u> Z , <u>tout sous-corps commutatif maximal de</u> K , <u>contenant</u> Z , <u>est une extension de degré</u> m <u>de</u> Z , <u>et un corps de décomposition de</u> K .

<u>Remarque</u>. Les sous-corps commutatifs maximaux de K , contenant Z , sont donc les corps de décomposition <u>de plus petit degré</u> de K ; mais, malgré le fait que le degré de tout corps de décomposition de K est un multiple de m , il ne faudrait pas croire que tout corps de décomposition de K soit une extension d'un sous-corps commutatif maximal de K (contenant Z)(*).

<u>Applications. I : Corps finis. Théorème 4</u> (Wedderburn). <u>Tout corps fini est commutatif</u>.

Soit K un corps fini, Z son centre ; deux sous-corps commutatifs maximaux de K ont même degré par rapport à Z , donc (chap.VI, § 7) sont isomorphes ; deux quelconques de ces corps sont donc transformés l'un dans l'autre par un automorphisme intérieur de K (prop.3). Or, tout élément de K appartient à un sous-corps commutatif maximal de K ; donc, si T est un sous-corps commutatif maximal de K , K est réunion des xTx^{-1} , où x parcourt l'ensemble des éléments $\neq 0$ de K . On en conclut que le groupe multiplicatif K^* des éléments de K est réunion des <u>conjugués</u> xT^*x^{-1} de son sous-groupe T^*. Nous allons montrer que c'est impossible si $T \neq K$; en effet, si $x' = xt$, $t \in T^*$, on a $x'T^*x'^{-1} = xtT^*t^{-1}x^{-1} = xT^*x^{-1}$; le nombre des conjugués xT^*x^{-1} distincts est donc au plus égal à l'<u>indice</u> $(K^*:T^*)$; d'autre part, chacun des conjugués de T^* a même nombre d'éléments que T^* ; K^* ne peut donc être réunion des xT^*x^{-1} que si ces ensembles forment une <u>partition</u> de K^* ; or, cela est absurde si $T \neq K$, car tous les xT^*x^{-1} ont en commun l'élément unité de K .

<u>Applications</u>. <u>II</u> : <u>Corps gauches sur un corps quasi-réel maximal</u>. <u>Théorème 5</u> (Frobenius). <u>Sur un corps quasi-réel maximal</u> S , <u>tout corps non commutatif de rang fini est isomorphe au corps des quaternions sur</u> S .

49

En effet, soit K un tel corps, Z son centre, T un sous-corps commutatif maximal de K ; posons $[T:Z] = m$, d'où $[K:Z] = m^2$. T et Z étant des extensions commutatives finies de S, sont nécessairement identiques (à une isomorphie près) à S ou à $S\langle i\rangle = \Omega$; comme $m > 1$ par hypothèse, on a nécessairement $Z=S$, $T = \Omega$, $m=2$. L'unique automorphisme de Ω (distinct de l'application identique) laissant invariants les éléments de S, transforme i en -i, et est la restricton à Ω d'un automorphisme intérieur de K (prop.3) ; donc, il existe $u \neq 0$ dans K tel que $uiu^{-1}=-i$; u ne peut appartenir à Ω, donc 1 et u forment une base de K par rapport à Ω. D'autre part, on a $u^2iu^{-2}=i$, donc u^2 est permutable avec i ; étant aussi permutable avec u, il appartient au centre de K, donc $u^2=a \in S$. On ne peut avoir $a \geqslant 0$, car on en déduirait $u=v^2$, $v \in S$, d'où $(u-v)(u+v)=0$, $u=v$ ou $u=-v$, u appartiendrait à S, ce qui est absurde. On a donc $u^2=-b^2$, $b \in S$. Si on pose $j=ub^{-1}$, K a pour base par rapport à S les éléments $1, i, j$ et $ij=k$, avec la table de multiplication $i^2=j^2=-1$, $ij=-ji=k$, $k^2=ijij=-i^2j^2=-1$, $ki=-ik=j$, $jk=-kj=i$; d'où le théorème.

<u>Exercices</u>. 1) Soit A un anneau semi-simple, composé direct d'anneaux simples A_i. Si M est un module à gauche simple par rapport à A, isomorphe à un idéal à gauche minimal de A_i, son dual est isomorphe à un idéal à droite minimal de A_i, son bidual est identique à M (se borner au cas où M est un idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$ de A_i, et remarquer que toute représentation de $\mathfrak{l}$ dans A est de la forme $x \to xa$).

2) Soit M un module à gauche simple par rapport à un anneau d'Artin gauche A. Si $\mathfrak{R}$ est le radical de A, montrer que $\mathfrak{R}M = 0$ (remarquer que, dans le cas contraire, on aurait $\mathfrak{R}^pM = M$ quel que soit l'entier p). En déduire que si $A.M \neq \{0\}$, M, muni de la

de la structure de module par rapport à $A/\mathfrak{R}$ associée à la structure donnée, est isomorphe à un idéal à gauche minimal de l'anneau semi-simple $A/\mathfrak{R}$.

3) Soit A un anneau d'Artin gauche, $\mathfrak{R}$ son radical ; on définit $\mathfrak{a}_1$ comme l'intersection de $\mathfrak{R}$ et de son annihilateur à droite dans A , et par récurence, $\mathfrak{a}_p$ comme intersection de $\mathfrak{R}$ et du transporteur à droite de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{a}_{p-1}$ (voir §1,exerc.6) ; il existe un indice m tel que $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{R}$ (§1,exerc.6). Montrer que la structure de A-module de $\mathfrak{a}_p / \mathfrak{a}_{p-1}$ peut être assimilée à une structure de module par rapport à $A/\mathfrak{R}$; en déduire que, si A admet un élément unité, $\mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_{p-1}$ est un A-module de longueur finie (prop.1). Conclure de là qu'un anneau d'Artin gauche ayant un élément unité satisfait à la condition <u>maximale</u> pour ses idéaux à gauche (remarquer qu'il suffit de le démontrer pour les idéaux contenus dans le radical $\mathfrak{R}$).

4) a) Soit $A=K_n$ un anneau de matrices d'ordre n sur un corps gauche K de centre Z et de rang fini sur Z . Si B est une algèbre simple contenue dans A et ayant pour centre Z , A est produit tensoriel de B et de son algèbre commutante.

b) En déduire que, s'il existe dans A une base matricielle (c_{ij}) de m^2 éléments ($c_{ij}c_{hk}=0$ si $j\neq h$, $=c_{ik}$ si $j=h$) tels que $\sum_{i=1}^{m} c_{ii}=1$, m est un diviseur de n , et A est produit tensoriel de Z_m et de $K'_{n/m}$, K' étant un corps gauche contenu dans A , isomorphe à K .

c) En considérant le cas particulier où m=n, montrer que, si K et K' sont deux corps gauches contenus dans A et contenant Z , tels que A soit anneau de matrices sur K et sur K' , les unités matricielles correspondantes étant c_{ij} et c'_{ij} , il existe un élément inversible $a\in A$ tel que $K'=aKa^{-1}$, et $c'_{ij}=ac_{ij}a^{-1}$ (remarquer qu'il existe un

51

un automorphisme intérieur de A transformant l'algèbre sur Z de base c_{ij} en l'algèbre sur Z de base c'_{ij}, en appliquant la prop.3).

d) En déduire que, si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont deux idéaux à gauche de même longueur r dans A, il existe un élément inversible $a \in A$ tel que $\mathfrak{b}' = a\mathfrak{b}a^{-1}$ (remarquer qu'on peut toujours trouver deux systèmes d'unités matricielles de A tels que relativement au premier, $\mathfrak{b}$ soit formé des matrices ayant leurs n-r dernières colonnes nulles, et de même $\mathfrak{b}'$ relativement au second système).

4 bis) Soit $A=K_n$ un anneau de matrices d'ordre n sur un corps gauche K de centre Z et de rang fini sur Z. Soit B une algèbre simple contenue dans A et contenant Z, C l'algèbre commutante de B, qui est une algèbre simple ; montrer que la sous-algèbre $\widehat{B.C}$ de A (sous-algèbre engendrée par les produits xy, où $x \in B$ et $y \in C$) considérée comme algèbre par rapport au centre commun $B \cap C$ de B et C, est isomorphe au produit tensoriel de B et C relatif au corps $B \cap C$ (remarquer que ce produit tensoriel $B \otimes C$ étant simple, il existe un isomorphisme de $B \otimes C$ sur $\widehat{B.C}$). En déduire que $\widehat{B.C}$ est l'algèbre commutante de $B \cap C$ dans A (calculer le rang de $\widehat{B.C}$ par rapport à Z, et utiliser la relation (4)).

5) Soient K_1 et K_2 deux corps gauches de même centre Z, m^2 et n^2 leurs rangs respectifs par rapport à Z. Montrer que la longueur h de l'algèbre simple $K_1 \otimes K_2$ est un diviseur commun de m^2 et n^2 (si chacun des idéaux à gauche de $K_1 \otimes K_2$ a k dimensions par rapport à K_2, remarquer qu'il existe une représentation de K_1 dans l'anneau de matrices d'ordre k sur K_2^o). En déduire que, si m et n sont premiers entre eux, $K_1 \otimes K_2$ est un corps gauche.

5 bis) Soit $A=K_n$ une algèbre de matrices d'ordre n sur un corps commutatif K . Tout corps commutatif S , contenu dans A et contenant son centre K , est une extension de K dont le degré p est un diviseur de n , dont l'algèbre commutante a pour centre S .

6) a) Soit K un corps gauche de centre Z imparfait. Montrer que si tous les éléments de K sont des éléments radiciels (chap.VI, § 5) par rapport à Z , on a K=Z (raisonner par l'absurde : si S est un corps commutatif maximal contenu dans K , montrer que, dans $S \otimes K$, les éléments de K sont des matrices sur S de trace nulle lorsqu'ils n'appartiennent pas à Z , en considérant l'équation caractéristique (chap.V, § 7) de ces matrices ; en conclure que toutes les matrices de $S \otimes K$ auraient une trace nulle).

b) En déduire que si K est un corps gauche de centre imparfait Z , de rang fini sur Z , il existe un corps commutatif maximal contenu dans K qui est une extension séparable de Z (prouver que toute extension séparable maximale S de Z contenue dans K est corps de décomposition de K , en appliquant a) à l'algèbre commutante de S dans K).

7) Soit A une algèbre simple de rang n^2 sur son centre Z , telle qu'il existe un corps commutatif maximal S de A qui soit une extension galoisienne séparable de Z . Pour tout automorphisme $x \to x^\sigma$ de S relatif à Z , il existe (prop.3) un élément $u_\sigma \in A$, inversible, tel que, pour tout $x \in S$, $u_\sigma^{-1} x u_\sigma = x^\sigma$: soit M_σ l'ensemble des éléments $u_\sigma \in A$ ayant cette propriété.

a) Montrer que les M_σ sont des espaces vectoriels (à gauche et à droite) de dimension 1 par rapport au corps S ; en déduire que la somme des M_σ est directe, et égale à A (remarquer que les M_σ sont des bimodules non isomorphes deux à deux), et que, si $u_\sigma \in M_\sigma$,

53

$u_\tau \in M_\tau$, on a $u_\sigma u_\tau \in M_{\sigma\tau}$, d'où $M_\sigma M_\tau = M_{\sigma\tau}$.

b) On considère inversement une extension galoisienne séparable S, de degré n, d'un corps commutatif Z. On suppose qu'un anneau A soit somme directe de n bimodules M_σ par rapport à S (à gauche et à droite), chacun des M_σ correspondant à un automorphisme de S (relatif à Z), et satisfaisant aux propriétés suivantes : 1° chacun des M_σ est un bimodule simple ; 2° pour tout $x \in S$ et tout $u_\sigma \in M_\sigma$, on a $xu_\sigma = u_\sigma x^\sigma$; 3° $M_\sigma M_\tau = M_{\sigma\tau}$. Montrer que, si ε est l'automorphisme identique de S, M_ε est un sous-corps de A isomorphe à S, et que son élément unité est élément unité de A ; que tout $u_\sigma \neq 0$ appartenant à M_σ est inversible dans A ; que l'algèbre commutante de M_ε est identique à M_ε, et que, si on identifie M_ε à S, Z est le centre de A ; enfin, montrer que tout sous-anneau de A, qui est bimodule par rapport à S, est somme directe de bimodules M_σ correspondant aux σ appartenant à un sous-groupe du groupe de Galois de S (remarquer que deux M_σ distincts ne sont jamais des bimodules isomorphes). En conclure que tout sous-anneau B de A contenant $M_\varepsilon = S$ (et en particulier A lui-même) est une algèbre simple sur Z, dont S est un corps commutatif maximal.

8) On suppose que A est une algèbre simple de rang n^2 sur son centre Z, telle qu'il existe un corps commutatif maximal S de A qui soit une extension séparable <u>cyclique</u> de Z. Montrer que A, considéré comme espace vectoriel à droite sur S, possède une base formée de l'élément unité et des puissances $u, u^2, \ldots, u^{n-1}$ d'un élément $u \neq 0$, tel que $u^n = a \in Z$, et $xu = ux^\sigma$ pour tout $x \in S$, où σ est un générateur du groupe de Galois de S (utiliser l'exerc.7, en prenant u dans M_σ ; pour voir que $a \in Z$, exprimer les conditions d'associativité).

Si $1, v, v^2, \ldots, v^{n-1}$ est une seconde base de cette nature, et $v^n = b$, b/a est la norme relative à Z d'un élément de S .

§ 5 . Représentations matricielles des algèbres.

Etant donné un corps K et l'anneau de matrices K_r d'ordre r sur K , toute représentation dans K_r d'une algèbre A par rapport à un sous-corps S du centre de K (A et K_r étant considérés comme des algèbres par rapport à S) est appelée <u>représentation matricielle de degré r</u> de l'algèbre A , relative au corps K . L'anneau K_r peut être identifié à l'anneau des endomorphismes de l'espace vectoriel à droite $E=K^r$, à r dimensions par rapport à K ; à toute représentation matricielle $s \longrightarrow M(s)$ de A dans K_r est donc associée une structure de <u>bimodule</u> sur E , ayant A comme domaine d'opérateurs à gauche, K comme domaine d'opérateurs à droite ; le produit $s.x$ de $s \in A$ et du vecteur $x=(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ (matrice à une <u>colonne</u>), n'est autre que le vecteur $M(s).x$. Inversement, tout bimodule défini sur E détermine une représentation de A dans K_r ; si on désigne par e_i le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception de celle d'indice i , égale à 1 , et si $s.e_i = \sum_{k=1}^{r} e_k \alpha_{ki}$, on a $M(s)=(\alpha_{ki})$.

D'après la définition donnée au § 4, deux représentations matricielles $s \rightarrow M(s)$, $s \rightarrow N(s)$ de A dans K_r sont <u>semblables</u> s'il existe une matrice inversible P telle que, <u>pour tout</u> $s \in A$

(1) $$N(s) = P.M(s).P^{-1}$$

Il revient au même (§ 4,prop.2) de dire que les bimodules associés aux deux représentations considérées sont <u>isomorphes</u>. Cette relation est une <u>relation d'équivalence</u> dans l'ensemble des représentations de A dans K_r ; les classes d'équivalence suivant cette relation sont appelées <u>classes de représentations</u>.

Si on considère une représentation $s \to u_s$ de A dans l'anneau d'endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ d'un espace vectoriel à droite E, à r dimensions par rapport à K, et si $M(s)$ est la matrice correspondant à u_s, rapporté à une base quelconque de E, $s \to M(s)$ est une représentation matricielle de degré r de A, dont le bimodule associé est isomorphe au bimodule associé à la représentation $s \to u_s$. Quand on change de base dans E, on obtient une représentation matricielle semblable à $s \to M(s)$; à $s \to u_s$ correspond ainsi une <u>classe</u> de représentations matricielles.

Remarquons encore qu'à tout automorphisme $\lambda \to \lambda^\sigma$ du corps K correspond un automorphisme $M \to M^\sigma$ de l'anneau K_r, M^σ étant la matrice dont les éléments sont transformés par σ des éléments correspondants de M. Si $s \to M(s)$ est une représentation de A dans K_r, $s \to (M(s))^\sigma$ sera encore une représentation de A dans K_r, dite <u>conjuguée</u> de $s \to M(s)$ (relativement à l'automorphisme σ).

Si on prend pour K le corps S des opérateurs de l'algèbre A, (ce qui sera le cas le plus fréquent dans ce qui suit), A, considéré comme espace vectoriel à droite sur S, est un <u>bimodule</u> par rapport à A (à gauche) et S (à droite). Il lui correspond donc une représentation de A dans $\mathcal{L}(A)$, qu'on appelle <u>représentation régulière</u> de A ; si m est le <u>rang</u> de A, $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de A par rapport à S, et si, pour $s \in A$, $s.c_i = \sum_{k=1}^{m} c_k \gamma_{ki}$, à s correspond, dans la représentation régulière (rapportée à la base (c_i)), la matrice d'ordre m, (γ_{ki}), à éléments dans S.

On notera que, si A possède un élément unité e, la représentation régulière de A est un <u>isomorphisme</u> dans $\mathcal{L}(A)$, car on peut alors supposer que l'un des c_i est égal à e, et on a $s.e \neq 0$ pour tout $s \neq 0$, donc la matrice correspondant à s n'est jamais nulle pour $s \neq 0$.

Représentations réductibles. Définition 1. On dit qu'une représentation matricielle de A dans K_r est réductible s'il existe un sous-espace de $E=K^r$ (autre que $\{0\}$ et E) stable pour tous les endomorphismes de E correspondant aux éléments de A .

Si F est un tel sous-espace, c'est évidemment un sous-bimodule de E considéré comme bimodule sur A et K , et réciproquement. Cette interprétation montre aussitôt que toute représentation semblable à une représentation réductible est réductible ; si une représentation d'une classe est réductible, il en est donc de même de toutes les autres : on dit que la classe est réductible.

Soit $s \to M(s)$ une représentation réductible, et soit F un sous-espace de E , à p dimensions $(0 \leqslant p \leqslant r)$, invariant par tous les endomorphismes $x \to M(s).x$. Il existe un automorphisme de E transformant F en le sous-espace engendré par les p premiers vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$ de la base canonique de E ; on peut donc supposer, en remplaçant la représentation donnée par une représentation semblable, que F a pour base $e_1, e_2, \ldots, e_p$. On a donc $M(s).e_i \in F$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$; autrement dit, si $M(s)=(\mu_{ki})$, on a $\mu_{ki}=0$ pour $p<k\leqslant r$ et $1 \leqslant i \leqslant p$; la matrice M(s) apparaît comme un "tableau carré de matrices"

$$\begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \\ 0 & R(s) \end{pmatrix}$$

où P(s) est une matrice carrée d'ordre p , R(s) une matrice carrée d'ordre r-p . L'application $x \to M(s).x$, restreinte au sous-espace F , n'est autre que l'application $y \to P(s).y$; $s \to P(s)$ est donc encore une représentation de A dans K_p . De même, la matrice R(s) correspond à l'endomorphisme de l'espace quotient E/F obtenu par passage aux quotients à partir de l'endomorphisme $x \to M(x).x$ de E ; donc $s \to R(s)$ est une autre représentation de A dans K_{r-p} . On dit que ces deux représentations (resp. leurs classes) proviennent de la **réduction** de la représentation $s \to M(s)$; elles correspondent respectivement au sous-bimodule F de E et au bimodule quotient E/F .

Si, pour tout $s \in A$, on a $Q(s)=0$, l'application $x \to M(s).x$ laisse invariant, non seulement le sous-espace F , mais aussi le sous-espace **supplémentaire** G , engendré par les vecteurs restants de la base canonique de E ; autrement dit, le bimodule E est alors **somme directe** des sous-bimodules F et G . Réciproquement, si le bimodule E associé à une représentation $s \to M(s)$ est somme directe de deux sous-bimodules F et G , on peut, en passant au besoin à une représentation semblable, supposer que F soit engendré par p vecteurs de la base canonique de E , G par les $r-p$ vecteurs restants ; il en résulte que $M(s)$ a, pour tout $s \in A$, la forme d'un "tableau diagonal" de matrices

$$\begin{pmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & R(s) \end{pmatrix}$$

les applications $s \to P(s)$ et $s \to R(s)$ étant des représentations associées respectivement aux bimodules F et G . On dit que la représentation $s \to M(s)$ (resp. la classe $\mathcal{D}$ de cette représentation) est **somme directe** des représentations $s \to P(s)$ et $s \to R(s)$ (resp. des classes $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ de ces représentations) ; on écrit $\mathcal{D} = \mathcal{D}' + \mathcal{D}''$.

Inversement, si on se donne deux classes $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ de représentations matricielles de A , de degrés p et q respectivement, il existe une classe de représentations et une seule $\mathcal{D}$, de degré $p+q$, qui est somme directe de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$: si $s \to P(s)$ et $s \to Q(s)$ sont deux représentations des classes $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ respectivement, la classe $\mathcal{D}$ est la classe de la représentation

$$s \to \begin{pmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & Q(s) \end{pmatrix}$$

<u>Représentations complètement réductibles</u>. Une représentation matricielle non réductible est dite <u>irréductible</u> ; pour qu'une représentation soit irréductible, il faut et il suffit qu'elle corresponde à un bimodule <u>simple</u>.

Etant donné une représentation $s \to M(s)$, le bimodule assoicé E étant de dimension finie par rapport à K, admet une <u>suite de Jordan-Hölder</u> $F_0=E$, $F_1,\dots,F_{k-1},F_k=\{0\}$, où F_i est un sous-bimodule maximal de F_{i-1}, F_{i-1}/F_i un bimodule <u>simple</u>. En remplacant au besoin la représentation donnée par une représentation semblable, on peut supposer que les F_i, considérés comme sous-espaces vectoriels de E, sont engendrés par des vecteurs de la base canonique de E, autrement dit, que les matrices $M(s)$ ont la forme

$$\begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & \dots & P_{1k}(s) \\ 0 & P_{22}(s) & \dots & P_{2k}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{kk}(s) \end{pmatrix}$$

Les applications $s \to P_{ii}(s)$ sont des représentations <u>irréductibles</u> correspondant aux bimodules simples F_{i-1}/F_i ; d'après le th. de Jordan-Hölder, les classes de ces représentations ne dépendent (à l'ordre près) que de la classe $\mathfrak{D}$ de la représentation $s \to M(s)$; on dit que ce sont les <u>facteurs de composition</u> de la classe $\mathfrak{D}$.

Un cas important est celui où le bimodule E est <u>complètement réductible</u>, c'est-à-dire somme directe de sous-bimodules <u>simples</u> G_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$. La représentation $s \to M(s)$ correspondante (resp. sa classe) est alors dite <u>complètement réductible</u> la classe $\mathfrak{D}$ de cette représentation est <u>somme directe</u> des classes $\mathfrak{D}_i$ des représentations irréductibles correspondant aux bimodules G_i ; en remplaçant au besoin $s \to M(s)$ par une représentation semblable, on peut supposer que $M(s)$ a la forme "diagonale"

$$\begin{pmatrix} P_{11}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{22}(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{kk}(s) \end{pmatrix}$$

où les représentations $s \to P_{ii}(s)$ sont irréductibles et correspondent aux bimodules simples G_i .

Soient $s \to M(s)$, $s \to N(s)$ deux représentations irréductibles de A , E et E' les bimodules correspondants. Comme E et E' sont simples, tout homomorphisme de E dans E' est nécessairement nul ou un isomorphisme de E sur E' ; tenant compte de la prop.2 du § 4, on voit donc que :

Proposition 1 (lemme de Schur). S'il existe une matrice fixe P telle que, pour tout $s \in A$,

$$PM(s) = N(s)P$$

ou bien P=0 , ou bien les représentations irréductibles $s \to M(s)$ et $s \to N(s)$ sont de même degré r , et P est une matrice carrée inversible d'ordre r (donc $s \to M(s)$ et $s \to N(s)$ sont semblables).

Remarquons aussi que les endomorphismes d'un bimodule simple forment un corps (chacun d'eux étant nul ou un automorphisme) ; autrement dit, les matrices Q telles que $QM(s)=M(s)Q$ pour tout $s \in A$ forment un sous-corps de K_r , contenant le centre de K_r (formé des matrices ξI , où ξ parcourt le centre de K) .

En particulier, si K est un corps commutatif algébriquement stable, les seules matrices Q permutables avec toutes les matrices $M(s)$ sont les matrices λI, où λ parcourt K .

On en déduit le corollaire suivant du lemme de Schur :

Corollaire. S'il existe deux matrices fixes non nulles P,Q tel que pour tout $s \in A$, $P.M(s)=N(s).P$ et $Q.M(s)=N(s).Q$, $s \to M(s)$ et $s \to N(s)$ étant deux représentations irréductibles relatives à un corps algèbrique ment stable K , P et Q sont les matrices inversibles, et il existe $\lambda \in K$ tel que $Q = \lambda P$.

En effet, on a $(Q^{-1}P)M(s)(P^{-1}Q) = M(s)$ quel que soit s .

Traces et normes dans une représentation matricielle. A partir de maintenant nous ne considérerons plus que des représentations matricielles relatives à un corps commutatif K .

Définition 2. On appelle trace (resp. norme) d'un élément $s \in A$, relative à la représentation matricielle $s \to M(s)$, la trace (resp. le déterminant) de la matrice $M(s)$ correspondant à s .

Comme les polynomes caractéristiques de deux matrices semblables sont les mêmes, la trace et la norme d'un élément $s \in A$ sont les mêmes pour toutes les représentations d'une même classe, et ne dépendent donc que de cette classe $\mathcal{D}$; aussi les note-t-on $Tr_{\mathcal{D}}(s)$ et $N_{\mathcal{D}}(s)$ respectivement (ou simplement $Tr(s)$ et $N(s)$ quand aucune confusion n'en résulte).

On a évidemment les formules

(1) $$Tr_{\mathcal{D}}(s+s') = Tr_{\mathcal{D}}(s) + Tr_{\mathcal{D}}(s')$$

(2) $$N_{\mathcal{D}}(ss') = N_{\mathcal{D}}(s) . N_{\mathcal{D}}(s')$$

(3) $$Tr_{\mathcal{D}}(\alpha s) = \alpha \, Tr_{\mathcal{D}}(s)$$

(4) $$N_{\mathcal{D}}(\alpha s) = \alpha^r N_{\mathcal{D}}(s)$$

où α est un élément du corps des opérateurs $S \subset K$ de l'algèbre A , et r le degré des représentations de la classe $\mathcal{D}$.

En outre, d'après ce qu'on a vu plus haut, si $\mathcal{D}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont les classes facteurs de composition de la classe $\mathcal{D}$, on a

(5) $$Tr_{\mathcal{D}}(s) = \sum_{i=1}^{k} Tr_{\mathcal{D}_i}(s)$$

(6) $$N_{\mathcal{D}}(s) = \prod_{i=1}^{k} N_{\mathcal{D}_i}(s)$$

Lorsque A est en particulier une <u>extension commutative séparable et finie</u> du corps K , la trace et la norme d'un élément $s \in A$ définies au chap. VI, § 5, ne sont autres que la trace et la norme de s relatives à la représentation <u>régulière</u> de A . Si s est racine d'une équation irréductible de degré n , et si A est une extension de degré m de $K\langle s\rangle$, il suffit pour le voir de calculer la matrice qui correspond à s dans la représentation régulière de A , A étant rapportée à la base formée des éléments $s^i u_j$, où $0 \leq i \leq n-1$, (u_i) étant une base quelconque de A par rapport à $K\langle s\rangle$. Dans le cas général, le même calcul montre que, si $\varphi(s)=s^n+a_1 s^{n-1}+\dots+a_n = 0$ est l'équation irréductible à laquelle satisfait s , on a $Tr(s) = -ma_1$, $N(s)=(-1)^{mn}a_n^m$ pour la représentation régulière de A , expressions qu'on comparera aisément à la trace et à la norme de s définies au chap. VI, § 5 .

<u>Extension du corps de base</u>. Soit F une extension du corps K ; toute représentation $s \longrightarrow M(s)$ de degré r , relative au corps K , peut aussi être considérée comme une représentation de degré r relative au corps F . Mais, comme deux représentations semblables relativement au corps F ne sont pas nécessairement semblables relativement au corps K , une représentation irréductible relativement à K ne reste pas nécessairement irréductible relativement à F . Pour étudier ce que devient la représentation considérée par extension du corps de base à F , on peut remarquer que cette représentation fournit aussi une représentation de l'algèbre $A_{(F)}$ relative au corps F , la matrice correspondant à $\sum \lambda_i s_i$ ($\lambda_i \in F$, $s_i \in A$) étant $\sum \lambda_i M(s_i)$. Il est clair que les représentations (relatives à F) des algèbres A et $A_{(F)}$, ainsi associées, seront en même temps réductibles ou irréductibles, et que leurs facteurs de composition seront associés de la même manière ; ainsi, on peut toujours se ramener à considérer uniquement des représentations d'une algèbre relatives à son corps d'opérateurs.

On dit qu'une représentation relative à un corps K est absolument irréductible si elle reste irréductible relativement à une extension algèbrique quelconque de K ; elle reste alors irréductible relativement à l'extension algèbrique maximale Ω de K , et réciproquement, si elle reste irréductible relativement à Ω , elle le reste aussi relativement à tout sous-corps de Ω contenant K .

On en conclut, d'après ce qui a été vu plus haut, que, dans une représentation absolument irréductible, aux éléments du centre de A correspondent des matrices diagonales λI , avec $\lambda \in K$: en effet, par extension de K au corps algèbriquement stable Ω , ces matrices sont semblables à des matrices de la forme μI , avec $\mu \in \Omega$; mais une matrice semblable à une matrice μI est elle-même de la forme λI , avec $\lambda \in \Omega$; comme en outre, ses éléments doivent appartenir à K , on a $\lambda \in K$.

En particulier, si A est commutatif, donc identique à son centre, toutes les matrices d'une représentation absolument irréductibles de A dans K_r sont de la forme λI , avec $\lambda \in K$: la représentation ne peut donc être irréductible que si elle est du premier degré ; autrement dit, les seules représentations absolument irréductibles d'un anneau commutatif A , relatives à un corps commutatif K , sont les représentations de A dans K ; il est immédiat d'ailleurs (d'après la commutativité de K) que deux telles représentations ne peuvent être semblables que si elles sont identiques (autrement dit, les classes de représentations absolument irréductibles se composent d'un seul élément).

La trace d'un élément dans une représentation absolument irréductible s'appelle encore le caractère de cet élément relatif à cette représentation (ou à la classe de cette représentation).

<u>Représentations matricielles d'une algèbre semi-simple</u>. <u>Proposition 2</u>. <u>Pour qu'une représentation matricielle de degré</u> r <u>d'une algèbre</u> A , <u>relative au corps des opérateurs</u> S <u>de</u> A , <u>soit complètement réductible, il faut et il suffit que l'image de</u> A <u>par cette représentation soit un sous-anneau semi-simple de</u> S_r .

Identifions S_r à l'anneau des endomorphismes de l'espace vectoriel $E=S^r$, et soit B l'image de A par la représentation considérée. Pour voir que la condition est <u>nécessaire</u>, remarquons que B est un espace vectoriel à un nombre fini de dimensions par rapport au centre S de S_r , donc est un anneau d'Artin ; pour voir qu'il est semi-simple, il suffit d'établir qu'il ne contient aucun idéal minimal nilpotent. Par hypothèse, E , considéré comme bimodule par rapport à B et S , c'est-à-dire comme module à gauche par rapport à $B \otimes S = B$, est somme directe de sous-modules simples E_i . Si $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche de B , $\mathfrak{l} E_i$ est un sous-module de E_i , donc égal à E_i ou à $\{0\}$; mais si $\mathfrak{l}^2=(0)$, on ne peut avoir $\mathfrak{l} E_i=E_i$, car on ne déduirait $E_i = \mathfrak{l} E_i = \mathfrak{l}(\mathfrak{l} E_i) = \mathfrak{l}^2 E_i = \{0\}$: on doit donc avoir $\mathfrak{l} E_i = \{0\}$, et comme c'est vrai pour tous les E_i , $\mathfrak{l} E = \{0\}$; mais comme $\mathfrak{l}$ est formé d'endomorphismes de E , ces endomorphismes sont tous nuls, donc $\mathfrak{l} = (0)$.

Montrons maintenant que la condition est <u>suffisante</u> ; en effet, si B est semi-simple, E , considéré comme B-module à gauche, est unitaire, donc somme directe de modules simples, isomorphes à des idéaux à gauche minimaux de B (§ 4, prop. 1) ; la représentation est par suite complètement réductible.

<u>Remarque</u>. Si B est un sous-anneau <u>simple</u> de S_r , E est somme directe de modules simples tous isomorphes à un idéal à gauche minimal de B , donc la représentation considérée est somme directe de représentations irréductibles deux à deux semblables ;

on peut encore dire que la classe de cette représentation est *multiple* d'une classe irréductible. Réciproquement, s'il en est ainsi, les E_i dont E est somme directe sont des modules simples isomorphes à un même idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$ de B ; il ne peut exister d'idéal à gauche $\mathfrak{l}' \neq (0)$ de B tel que $\mathfrak{l}'\mathfrak{l} = (0)$ car on en déduirait $\mathfrak{l}'E_i = \{0\}$, d'où $\mathfrak{l}'E = \{0\}$, ce qui est implique que tout élément de $\mathfrak{l}'$ est égal à l'endomorphisme nul ; on en conclut aussitôt que B est simple.

Corollaire. *Toute représentation matricielle, par rapport à un corps* S , *d'une algèbre semi-simple* A *ayant* S *comme corps d'opérateurs, et de rang fini sur* S , *est complètement réductible ; le bimodule associé à une représentation irréductible de* A *est isomorphe à un idéal à gauche minimal de* A .

En effet, l'anneau B , image de A , est isomorphe à un anneau quotient de A , donc au composé direct d'un certain nombre des sous-anneaux simples dont A est composé direct ; B est par suite semi-simple.

Comme des bimodules isomorphes correspondent à la même classe de représentations, on déduit de la prop.1 que, si A est composé direct de p anneaux *simples* A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, il existe p *classes de représentations irréductibles* $\mathcal{D}_i$ de A , le bimodule associé à une représentation de la classe $\mathcal{D}_i$ étant isomorphe à un idéal à gauche minimal de l'anneau simple A_i ; toute classe de représentations de A est une *somme directe* $\sum_{i=1}^{p} n_i \mathcal{D}_i$, où les n_i sont des entiers $\geqslant 0$ arbitraires.

Dans une représentation de la classe $\mathcal{D}_i$, l'image de tout élément d'un anneau A_j , où $j \neq i$, est nulle (puisque les A_j annulent à gauche A_i , et par suite tous ses idéaux) ; $\mathcal{D}_i$ peut donc être considérée comme une classe de représentations irréductibles de l'anneau simple A_i , les bimodules associés aux représentations de cette classes étant isomorphes à un idéal à gauche minimal de A_i

L'étude des représentations irréductibles d'une algèbre semi-simple (relatives à son corps d'opérateurs), est donc ramenée à celle des représentations irréductibles d'une algèbre simple. Si A est une algèbre simple, ayant donc une seule classe $\mathcal{D}$ de représentations irréductibles (relatives à son corps d'opérateurs S), on aura une représentation de cette classe en prenant celle qui a pour bimodule associé un idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$ de A . A est une algèbre de matrices sur un corps K de rang fini par rapport à S , soit $A=K_n$; si c_{ij} $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ sont les éléments matriciels formant une base de A (par rapport à K), on peut supposer par exemple que $\mathfrak{l}=Kc_{11}+Kc_{21}+..+Kc_{n1}$. Si K est de rang m par rapport à S , la représentation correspondant à $\mathfrak{l}$ est de degré mn ; soit $u_1,u_2,..,u_m$ une base de K par rapport à S ; si $s=zc_{ij}$ $(z \in K)$, et $x = \sum_{h,k} \lambda_{hk} u_k c_{h1}$ $(\lambda_{hk} \in S)$, on a $s.x = (\sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} zu_k)c_{i1}$, d'où résulte aussitôt que la matrice d'ordre mn $A(s)$ correspondant à s est un tableau carré d'ordre n , dont les éléments sont des matrices d'ordre m , toutes les matrices du tableau étant nulles, sauf celle appartenant à la ligne d'indice i , et la colonne d'indice j , qui n'est autre que la matrice correspondant à l'élément $z \in K$ dans la <u>représentation régulière</u> du corps K (rapportée à la base $u_1,u_2,...,u_m$) . On en conclut aussitôt que la matrice correspondant à un élément $s = \sum_{i,j} z_{ij} c_{ij}$ de A $(z_{ij} \in K)$ est un tableau d'ordre n

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{pmatrix}$$

où Z_{ij} est la matrice correspondant à z_{ij} dans la représentation régulière de K .

En particulier, si $K=S$, autrement dit si $A=S_n$ est algèbre de matrices d'ordre n sur un corps commutatif S, la représentation que nous venons d'obtenir est la représentation <u>identique</u> de A sur lui-même.

Etudions maintenant les représentations matricielles d'une algèbre semi-simple B relatives à une <u>extension</u> T de son corps d'opérateurs S. Le bimodule associé à une telle représentation est alors assimilable à un module à gauche par rapport à l'algèbre $B_{(T)}$ obtenue par extension à T du corps de base de l'algèbre B. Toute représentation de B relative à T est donc <u>complètement réductible</u> si l'algèbre $B_{(T)}$ est encore <u>semi-simple</u>. En particulier (§3, prop.1 et th.2) :

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> B <u>une algèbre semi-simple sur un corps</u> S. <u>Toute représentation matricielle de</u> B <u>relative à une extension</u> T <u>de</u> S <u>est complètement réductible, si on est dans l'un des deux cas suivants</u> :

1° T <u>est une extension séparable et finie de</u> S ;

2° <u>le centre de</u> B <u>est composé direct d'extensions séparables</u> (et finies) <u>de</u> S.

Cherchons enfin ce que devient une représentation matricielle d'une algèbre semi-simple A relative à son corps d'opérateurs S, par extension à T du corps de base. On peut se borner au cas où A est <u>simple</u> et où la représentation considérée est <u>irréductible</u>, et a pour bimodule associé un idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$ de A. Comme A est anneau de matrices d'ordre n sur un corps K, on prendra comme ci-dessus $\mathfrak{l} = Kc_{11}+..+Kc_{n1}$; si K est de rang m par rapport à S, et si $u_1,u_2,..,u_m$ est une base de K par rapport à S, les éléments $u_kc_{h1}=c_{h1}u_k$ forment une base de $\mathfrak{l}$ par rapport à S. Le bimodule associé à la représentation obtenue par extension à T du corps de base aura donc les u_kc_{h1} comme base <u>par rapport à</u> T ; autrement dit, ce bimodule n'est autre que $K_{(T)}c_{11}+...+K_{(T)}c_{n1}$.

Cela étant, si l'anneau $K_{(T)}$ possède des idéaux à gauche autres que lui-même et (0), et si $\mathfrak{m}$ est un tel idéal, $\mathfrak{m} c_{11}+\ldots+\mathfrak{m} c_{n1}$ sera un sous-bimodule du précédent, et la représentation correspondante sera réductible ; réciproquement, si $K_{(T)}$ ne possède aucun idéal à gauche autre que lui-même et (0) (autrement dit si c'est un <u>corps</u>) , $A_{(T)}$ est un anneau de matrices d'ordre n sur $K_{(T)}$, et $K_{(T)}c_{11}+\ldots+K_{(T)}c_{n1}$ un idéal minimal de cet anneau, donc correspond à une représentation irréductible.

En résumé :

<u>Proposition 4</u>. <u>Pour qu'une représentation irréductible d'une algèbre simple</u> $A=K_n$ <u>relative à son corps d'opérateurs</u> S , <u>reste irréductible par extension du corps de base à un sur-corps commutatif</u> T , <u>il faut et il suffit que</u> $K_{(T)}$ <u>soit un corps</u>.

<u>Corollaire</u>. <u>Pour qu'une représentation d'une algèbre simple A relative à son corps d'opérateurs</u> S <u>soit absolument irréductible, il faut et il suffit que</u> A <u>soit anneau de matrices sur le corps</u> S .

En effet, si le centre Z de K est un sur-corps de S , le produit tensoriel $Z \otimes Z$ (relatif à S) est composé direct de deux anneaux au moins, donc $K_{(Z)}$ contient des idéaux bilatères autres que lui-même et (0) . Si $Z=S$, mais $K \neq Z$, et si on prend pour T un corps de décomposition de K (§§ 3 et 4) $K_{(T)}$ est anneau de matrices sur T , donc n'est pas un corps.

<u>Remarque</u>. On conclut de là que, si une représentation de degré r d'une algèbre A , relative au corps des opérateurs S de A , est absolument irréductible, l'image B de A par cette représentation est <u>identique à</u> S_r ; en effet, B est alors un anneau simple et nécessairement anneau de matrices sur S ; comme d'ailleurs $E=S^r$ est isomorphe à un idéal à gauche minimal de B , B est l'anneau de matrices d'ordre r sur S , autrement dit est identique à S_r .

Lorsque $K_{(T)}$ n'est pas un corps, la nature de cet anneau détermine celle de la représentation obtenue par extension à T du corps de base de la représentation considérée. Bornons-nous au cas où le corps d'opérateurs S est le <u>centre</u> de K (donc de A). Alors, le rang de K par rapport à S est un carré $m=r^2$, et $K_{(T)}$ est un anneau de matrices d'ordre s sur un corps K' de centre T et de rang t^2 sur T, avec la relation $r=st$ (§ 3). Tout module simple par rapport à $A_{(T)}$, isomorphe à un idéal à gauche minimal de cette algèbre simple, est de rang ns par rapport à K', donc de rang nst^2 par rapport à T. Donc, par extension à T du corps de base, l'unique classe de représentations irréductibles $\mathcal{D}$ de l'anneau A relativement à S, se décompose en la somme directe de s classes identiques à l'unique classe $\mathcal{D}'$ de représentations irréductibles de $A_{(T)}$ relativement au corps T. Si en particulier on prend pour T un corps de décomposition de K, on aura $s=r$, la classe $\mathcal{D}'$ sera formée de représentations <u>absolument irréductibles</u> de degré rn.

Comme en particulier l'extension algèbriquement stable Ω de S est corps de décomposition de K, on voit qu'il existe (relativement au corps Ω) <u>une seule classe de représentations absolument irréductibles</u> (de degré rn) de l'algèbre simple A. Pour tout corps de décomposition $T \subset \Omega$ de K, les représentations irréductibles de A relativement au corps T appartiennent à cette classe.

On étend facilement ces considérations au cas où le centre Z de l'algèbre simple A est distinct du corps d'opérateurs S, mais en est une extension <u>séparable</u>. Alors, les représentations absolument irréductibles de l'algèbre A s'obtiennent par restriction à partir de celles de l'algèbre $A_{(\Omega)}$, qui est ici somme directe de p algèbres simples, si p est le degré de Z par rapport à S ; A aura donc p classes de représentations absolument irréductibles.

<u>Exercices</u>. 1) Toute représentation irréductible non nulle d'un anneau d'Artin gauche A est identique à une représentation irréductible de l'anneau semi-simple $A/\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ désignant le radical de A) (§ 4, exerc.2) .

1 bis) Soit A une algèbre de rang fini sur son corps de base S , $s \rightarrow M(s)$ et $s \rightarrow N(s)$ deux représentations complètement réductibles de même degré de A relatives au corps S . Si, pour tout $s \in A$, les traces de s dans ces deux représentations sont les mêmes, et si S est de caractéristique 0 , les représentations $s \rightarrow M(s)$ et $s \rightarrow N(s)$ sont semblables (se ramener au cas où A est semi-simple, à l'aide de l'exerc.1, puis montrer que l'hypothèse entraîne que chaque classe de représentations irréductibles de A figure autant de fois dans la décomposition de chacune des représentations données, en faisant voir qu'on peut calculer ce nombre à l'aide des traces d'éléments de A convenablement choisis).

2) Soit A une algèbre de rang fini sur son corps de base S , $\mathfrak{R}$ son radical, r le rang de $\mathfrak{R}$ par rapport à S . Montrer que les facteurs de composition de la représentation régulière de A sont r facteurs égaux à la matrice à un seul élément égal à 0 , et les facteurs irréductibles de la représentation régulière de $A/\mathfrak{R}$ (remarquer que, dans A, considéré comme bimodule par rapport à A et S , $\mathfrak{R}$ est un sous-bimodule, et que les facteurs de compositions de la représentation régulière d'un anneau nilpotent sont nuls).

En déduire que, dans la représentation régulière de A , la trace d'un élément quelconque du radical est nulle.

3) Soit A une algèbre de rang fini n sur un corps S , (u_i) une base de A par rapport à S , $s \rightarrow A(s)$ une représentation matricielle

de A relative à une extension T de S . Soit $F(e_1,e_2,\dots,e_n)$ le polynome égal au déterminant de la matrice $\sum_{i=1}^{n} e_i A(u_i)$; il ne dépend que de la classe de la représentation considérée.

a) Si $s \longrightarrow A(s)$ est une représentation absolument irréductible, F est irréductible dans $\Omega[e_1,e_2,\dots,e_n]$, Ω étant l'extension algèbriquement stable de S (étudier l'effet sur F d'un changement de base de A , puis prendre une base de A formée d'une base du radical $\mathfrak{R}$, et d'éléments dont chacun appartient à une classe mod. $\mathfrak{R}$, qui devient un élément d'une base matricielle d'un des anneaux simples dont $(A/\mathfrak{R})_{(\Omega)}$ est le composé direct ; utiliser l'exerc.1, et l'irréductibilité du déterminant $\boxed{e_{ij}}$).

b) Le polynome correspondant à une représentation est égal au produit des polynomes correspondant aux facteurs de composition de cette représentation.

c) Les polynomes correspondant à deux classes de représentations distinctes irréductibles relativement à T sont premiers entre eux dans $\Omega[e_1,e_2,\dots,e_n]$ (décomposer les représentations en facteurs de composition relatifs au corps Ω).

3 bis) Soient $s \longrightarrow M(s)$, $s \longrightarrow N(s)$ deux représentations de même degré d'une algèbre A de rang fini, relatives au corps d'opérateurs S de A . Si, par extension à un surcorps T de degré fini n de S , du corps de base de ces représentations, les représentations relatives à T ainsi obtenues sont semblables, les deux représentations données sont aussi semblables (soient E et F les A-modules associés à $s \longrightarrow M(s)$ et $s \longrightarrow N(s)$, E' et F' les $(A \otimes T)$-modules associés aux représentations obtenues par extension à T du corps de base ; remarquer que, si on restreint à A l'anneau d'opérateurs des modules E' et F' , les A-modules obtenus sont respectivement isomorphes à E^n et F^n;

utiliser ensuite l'exerc.   du chap.II, § 3) .

4) Soit K un corps commutatif, n un entier >0 quelconque. Toute extension algèbrique S de K de degré p diviseur de n admet une représentation matricielle de degré n relative à K (considérer la représentation régulière de S , considéré comme algèbre sur K , ou un multiple de cette représentation). Pour qu'une telle représentation soit irréductible, il faut et il suffit que $p=n$.

5) Soit A une algèbre ayant un élément unité de rang fini sur un corps commutatif K ; pour un $a \in A$, la sous-algèbre $K\langle a \rangle$ de A engendrée par $K \cup \{a\}$ est commutative. L'ensemble des polynomes $f \in K[e]$ tels que $f(a)=0$ est un idéal principal (φ), où φ est appelé le polynome minimal de a ; pour que $K\langle a \rangle$ soit un corps, il faut et il suffit que φ soit irréductible. On appelle polynome caractéristique de a le polynome caractéristique (chap.V, § 7) de la matrice $\underline{A}$ qui correspond à a dans la représentation régulière de A ; le polynome minimal de a est aussi le polynome minimal de $\underline{A}$.
Si $K\langle a \rangle$ est un corps, le polynome caractéristique de a est une puissance de son polynome minimal.

6) a) Soit A une algèbre ayant un élément unité, de rang n par rapport à un corps commutatif K ; si $P=K(e_1,e_2,\ldots,e_n)$, et si $u_1,u_2,\ldots,u_n$ est une base de A par rapport à K , le polynome minimal de l'élément $e_1u_1+e_2u_2+\ldots+e_nu_n$ de l'algèbre $A_{(P)}$ (obtenue par extension à P du corps d'opérateurs) est appelé le polynome au rang de l'algèbre A ; il est le même pour toute algèbre $A_{(T)}$ obtenue par extension, à un surcorps commutatif quelconque T de K , du corps d'opérateurs. Les polynomes au rang de A correspondant à deux bases distinctes de A se déduisent l'un de l'autre par une transformation linéaire. Si $F[e,e_1,e_2,\ldots,e_n]$ est le polynome au rang de A

correspondant à la base (u_i), pour tout élément $a = \sum_i \alpha_i u_i$ de $A_{(T)}$, le polynome minimal de a divise $F[e;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$.

b) Si A est composé direct de p sous-algèbres $A_1,A_2,\ldots,A_p$, le polynome au rang de A (pour une base convenable) est le p.p.c.m. des polynomes au rang de $A_1,A_2,\ldots,A_p$.

c) Soit A une algèbre simple sur K, anneau de matrices sur un corps gauche G, de centre Z ; on suppose que Z soit une extension séparable de K, et on pose $[Z:K]=m$, $[A:Z]=n^2$. Soit S un sous-corps commutatif maximal de G, qui soit une extension séparable de Z (§ 4, exerc.6). Si $A=G_q$, et s'il existe une extension T de S, de degré q, il existe un isomorphisme de T dans A (exerc.4) ; en conclure que, si T est séparable, il existe un élément de A dont le polynome minimal soit irréductible et de degré mn.

d) Les hypothèses étant les mêmes que dans c), on pose $P = K(e_1,e_2,\ldots,e_{n^2m})$; l'algèbre $A_{(P)}$ est une algèbre simple de rang mn^2 sur P, ayant pour centre $Z(e_1,e_2,\ldots,e_{n^2m})$ (§ 5, exerc.1), et est un anneau de matrices d'ordre q sur le corps gauche $G_{(P)}$; $S(e_1,e_2,\ldots,e_{n^2m})$ est un sous-corps commutatif maximal de $G_{(P)}$, extension séparable de $Z_{(P)}$, donc de P. Montrer qu'il existe une extension séparable de degré q de $S(e_1,e_2,\ldots,e_{n^2m})$, et en conclure que le polynome au rang de A est irréductible et de degré mn.

e) Dans le cas où $Z=K$, le polynome caractéristique de $e_1u_1+\ldots+e_{n^2}u_{n^2}$ est la puissance $n^{\text{ième}}$ du polynome au rang de A (cf. chap.V, § 7).

f) Dans le cas où $Z=K$, le groupe de Galois du polynome au rang de A est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (considérer le polynome au rang de $A_{(T)}$, où T est un corps de décomposition de A ; remarquer qu'il existe des extensions de degré n de $T(e_1,e_2,\ldots,e_{n^2})$ dont le groupe de Galois est $\mathfrak{S}_n$ (chap.VI, § 6), et utiliser l'ex.4).

§ 6. Représentations matricielles des groupes.

Définition 1. Etant donnés un corps commutatif K et un groupe G , on appelle représentation matricielle de degré r de G relative à K toute représentation de G dans le groupe linéaire $\mathbf{GL}_r(K)$ des automorphismes de l'espace vectoriel K^r (ou, ce qui revient au même, des matrices inversibles d'ordre r à éléments dans K) .

Dans la plupart des cas que nous envisagerons, le groupe G est un sous-groupe du groupe des éléments inversibles d'une algèbre A (ayant un élément unité) sur un sous-corps S de K . Alors, toute représentation matricielle de degré r de A (relative au corps K) donne une représentation de degré r du groupe G en la restreignant à G .

Inversement, toute représentation matricielle de G peut s'obtenir de cette façon : il suffit de considérer G comme plongé dans son algèbre de groupe A (chap.III, § 2) par rapport au corps K ; on sait en effet que toute représentation de G dans une algèbre sur K se prolonge d'une manière et d'une seule en une représentation de A dans cette même algèbre.

On définit de même une représentation matricielle de degré r d'un monoïde quelconque M (chap.I, § 1), et on voit comme ci-dessus que cette représentation peut toujours être obtenue par restriction à M d'une représentation matricielle de l'algèbre du monoïde M par rapport au corps K .

Deux représentations matricielles $s \to M(s)$, $s \to N(s)$ de degré r d'un groupe G (relatives à un corps K) seront dites <u>semblables</u> si les représentations correspondantes de l'algèbre de groupe de G le sont, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que, <u>pour tout</u> $s \in G$, $N(s)=P.M(s).P^{-1}$; les représentations de G semblables à une même représentation forment une <u>classe de représentations</u>.

Une représentation $s \to M(s)$ de degré r de G est dite <u>réductible</u> si la représentation correspondante de l'algèbre de groupe de G est réductible, c'est-à-dire s'il existe un sous-espace de $E=K^r$ (autre que $\{0\}$ et E) stable pour <u>tous</u> les automorphismes de E définis par les matrices $M(s)$. On définit de même les notions de <u>réduction</u> et de <u>facteurs de composition</u> d'une représentation (ou d'une classe de représentations), ainsi que la notion de représentation <u>complètement réductible</u>, et celle de <u>somme directe</u> de représentations, ou de classes de représentations (voir § 5) ; le lemme de Schur (§ 5, prop. 1) s'applique naturellement aux représentations des groupes. L'image de l'algèbre de groupe A de G par une représentation matricielle de degré r de G est identique à la sous-algèbre de K_r engendrée par l'image G' de G par la représentation considérée ; pour que cette représentation soit <u>complètement réductible</u>, il faut et il suffit donc que la sous-algèbre engendrée par G' soit <u>semi-simple</u> (§ 5, prop. 2).

Un sous-groupe Γ de $GL_r(K)$ est dit <u>irréductible</u> (resp. <u>réductible</u>, <u>complètement réductible</u>) si la représentation <u>identique</u> de Γ dans $GL_r(K)$ est irréductible (resp. réductible, complètement réductible). Pour que Γ soit complètement réductible, il faut et il suffit que la sous-algèbre de K_r engendrée par Γ soit semi-simple.

Enfin, si $\lambda \to \lambda^\sigma$ est un automorphisme du corps K , et $s \to M(s)$ une représentation matricielle de G relative à K , $s \to (M(s))^\sigma$ sera encore une représentation matricielle de G dite <u>conjuguée</u> de $s \to M(s)$ (relativement à l'automorphisme σ) .

En outre, comme M(s) est une matrice inversible quel que soit $s \in G$, sa <u>contragrédiente</u> $\check{M}(s)$ est définie pour tout s (chap.II, § 3) ; on sait que, si P et Q sont inversibles, la contragrédiente de PQ est $\check{P}.\check{Q}$; donc, l'application $s \to \check{M}(s)$ est encore une représentation matricielle de même degré que $s \to M(s)$; on dit que c'est la <u>représentation contragrédiente</u> de cette dernière ; si $\mathcal{D}$ est la classe de $s \to M(s)$, on désignera par $\check{\mathcal{D}}$ la classe de sa représentation contragrédiente, et on dira que $\mathcal{D}$ et $\check{\mathcal{D}}$ sont deux <u>classes contragrédientes</u>.

La trace d'une matrice étant la même que celle de sa transposée, la trace de $\check{M}(s)$ est la même que celle de $(M(s))^{-1} = M(s^{-1})$, donc $Tr_{\check{\mathcal{D}}}(s) = Tr_{\mathcal{D}}(s^{-1})$.

Il est clair en outre que si $\mathcal{D}$ est une classe irréductible, il en est de même de $\check{\mathcal{D}}$, et vice-versa .

<u>Produits kroneckériens de représentations</u>. On a défini (chap.II, § 4) le <u>produit kroneckérien</u> (ou produit <u>tensoriel</u>) de deux matrices carrées P , Q d'ordre p et q respectivement, et on a vu qu'on a $P \otimes Q = Q \otimes P$, $(P_1P_2) \otimes (Q_1Q_2) = (P_1 \otimes Q_1)(P_2 \otimes Q_2)$. Il en résulte que si $s \to M(s)$, $s \to N(s)$ sont deux représentations matricielles de degré p et q d'un même groupe G , l'application $s \to M(s) \otimes N(s)$ est une représentation matricielle de degré pq de G , qu'on appelle <u>produit kroneckérien</u> des deux représentations données. Comme on a, pour des matrices inversibles P et Q , $(PM(s)P^{-1}) \otimes (QN(s)Q^{-1}) = (P \otimes Q)(M(s) \otimes N(s))(P \otimes Q)^{-1}$, la classe de la représentation $s \to M(s) \otimes N(s)$ ne dépend que des <u>classes</u> $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ des représentations $s \to M(s)$ et $s \to N(s)$; on dit que cette

classe est le <u>produit kroneckérien</u> de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, et on la note $\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}'$. Il est immédiat qu'on a $\mathcal{D}'\otimes\mathcal{D} = \mathcal{D}\otimes\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}\otimes(\mathcal{D}'\otimes\mathcal{D}'') = (\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}')\otimes\mathcal{D}''$; d'autre part, d'après la définition de la somme directe de deux classes, on a $(\mathcal{D}'+\mathcal{D}'')\otimes\mathcal{D} = (\mathcal{D}'\otimes\mathcal{D})+(\mathcal{D}''\otimes\mathcal{D})$: les classes de représentations matricielles d'un groupe G relatives à un corps K forment un <u>anneau commutatif</u>.

Si $P = (\alpha_{ij})$, $Q = (\beta_{hk})$ $(1\leqslant i,j\leqslant p, 1\leqslant h,k\leqslant q)$, $\alpha_{ij}\beta_{hk}$ est le terme de $P\otimes Q$ appartenant à la ligne d'indice (i,h) et la colonne d'indice (j,k) ; on a donc $Tr(P\otimes Q) = \sum_{i,j}\alpha_{ii}\beta_{jj} = (\sum_i \alpha_{ii})(\sum_j \beta_{jj}) = Tr(P).Tr(Q)$. Par suite, si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux classes quelconques de représentations de G relatives à K, on a, pour tout $s\in G$

$$Tr_{\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}'}(s) = Tr_{\mathcal{D}}(s).Tr_{\mathcal{D}'}(s)$$

Le lemme de Schur (§ 5, prop.1) est équivalent à la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u>. <u>Soient</u> $s \to M(s)$, $s \to N(s)$ <u>deux représentations matricielles irréductibles d'un groupe</u> G, <u>de degrés respectifs</u> r <u>et</u> r' $\mathcal{D}$ <u>et</u> $\mathcal{D}'$ <u>leurs classes respectives</u>. <u>Si on pose</u> $E=K^r$, $F=K^{r'}$, <u>pour qu'il existe un vecteur</u> $\neq 0$ <u>de l'espace</u> $E\otimes F$, <u>invariant par chacune des matrices</u> $M(s)\otimes N(s)$, <u>il faut et il suffit que</u> $\mathcal{D}' = \check{\mathcal{D}}$.

En effet, soient (e_i) $(1\leqslant i\leqslant r)$, (e'_j) $(1\leqslant j\leqslant r')$ les bases canoniques de E et F, et soit $x = \sum_{i,j} a_{ij}e_i e'_j$ un vecteur de $E\otimes F$. Si $M(s)=(\mu_{hi})$, $N(s)=(\nu_{kj})$, la condition pour que x soit invariant par $M(s)\otimes N(s)$ s'écrit

$$\sum_{h,k} a_{hk}\mu_{hi}\nu_{kj} = a_{ij} \quad \text{pour } 1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant r'$$

ou encore $M^*(s).A.N(s)=A$, en désignant par A la matrice (a_{ij}) ; cette dernière relation s'écrivant encore $\check{M}(s).A=A.N(s)$, l'application du lemme de Schur donne aussitôt $\mathcal{D}' = \check{\mathcal{D}}$.

Lorsque $\mathcal{D}' = \check{\mathcal{D}}$, et que $\mathcal{D}$ est une classe de représentations absolument irréductibles, on a en outre la proposition suivante :

Proposition 2. Si $\mathcal{D}$ est une classe de représentations absolument irréductibles d'un groupe G , $s \to M(s)$ une représentation de cette classe, $s \to N(s)$ une représentation de la classe contragrédiente $\check{\mathcal{D}}$, l'ensemble des vecteurs de $E \otimes E$ invariants par chacune des matrices $M(s) \otimes N(s)$ est un sous-espace à une dimension.

En effet, les relations $\check{M}(s).A = A.N(s)$ et $\check{M}(s).B = B.N(s)$ entraînent que AB^{-1} est permutable avec toutes les matrices $\check{M}(s)$; comme la classe $\mathcal{D}$ est supposée absolument irréductible, AB^{-1} est nécessairement un multiple scalaire de la matrice unité, d'où la proposition.

Représentations matricielles des groupes finis. Théorème 1 (Maschke). Pour que toute représentation matricielle d'un groupe fini G relative à un corps K soit complètement réductible, il faut et il suffit que la caractéristique de K ne divise pas l'ordre de G .

Tout revient à voir que, pour que l'algèbre A d'un groupe fini G d'ordre h par rapport à un corps K de caractéristique p soit semi-simple, il faut et il suffit que $h \not\equiv 0 \ (p)$.

Pour montrer que la condition est nécessaire, considérons dans A l'élément $u = \sum_{s \in G} s$; on a évidemment $ut = tu = u$ pour tout $t \in G$, donc les éléments λu $(\lambda \in K)$ forment un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de A . On a d'autre part $u^2 = hu$, donc si $h \equiv 0 \ (p)$, $u^2 = 0$ et par suite $\mathfrak{a}^2 = (0)$, A n'est pas semi-simple.

Etablissons maintenant que la condition est suffisante. Pour montrer que A est semi-simple, nous montrerons plus généralement que tout A-module E satisfaisant à la condition minimale est complètement réductible ; pour cela, il suffira de voir que tout sous-module M de E admet un sous-module supplémentaire.

Or, E est un espace vectoriel sur le corps K , donc M admet un <u>sous-espace vectoriel supplémentaire</u> N ; pour tout $x \in E$, soit $f(x)$ le composant de x dans M , correspondant à la décomposition $E=M+N$. Pour tout $s \in G$, on a $f(sx) \in M$, donc $s^{-1}f(sx) \in M$, puisque M est un sous-module ; on en conclut que E est aussi somme de M et de $s^{-1}N$, et que cette somme est directe, car la relation $x-s^{-1}f(sx) \in M$ entraîne $x \in M$, $sx \in M$, $f(sx)=sx$, et $x-s^{-1}f(sx)=0$. Comme h n'est pas multiple de la caractéristique de K , $x \to \frac{1}{h} \sum_{s \in G} s^{-1}f(sx)$ est une application linéaire de E dans M ; si on la désigne par g , on a $g(x)=x$ pour tout $x \in M$; E est donc somme directe de M et du sous-espace vectoriel $P=\overset{-1}{g}(0)$; montrons que P est un <u>sous-module</u> de E . En effet, si $\sum_{s \in G} s^{-1}f(sx)=0$, cette relation s'écrit aussi, pour un $t \in G$ quelconque, en y remplaçant s par st , $\sum_{s \in G}(st)^{-1}f(stx)=0$, c'est-à-dire $t^{-1} \sum_{s \in G} s^{-1}f(stx)=0$, c'est-à-dire $g(tx)=0$, $tx \in P$.

Etudions en particulier les représentations <u>absolument irréductibles</u> d'un groupe G , ou, ce qui revient au même, les représentations irréductibles de G relatives à un corps algèbriquement stable Ω (dont la caractéristique n'est pas diviseur de h). Cherchons d'abord le nombre des classes de représentations irréductibles ; on sait (§5) que ce nombre est égal à celui des anneaux simples dont A est le composé direct. Si Z est le centre de A , ce nombre est encore égal au nombre de corps commutatifs dont Z est le composé direct ; comme ces corps sont nécessairement identiques à Ω , on voit finalement que le nombre cherché est égal au <u>rang</u> de z par rapport à Ω . Or, pour qu'un élément $z = \sum_s a_s.s$ $(a_s \in \Omega)$ appartienne au centre de A , il faut et il suffit qu'il soit permutable avec tous les $t \in G$, c'est-à-dire qu'on ait $z=tzt^{-1}$, ou, ce qui revient au même, $a_{tst^{-1}} = a_s$ quel que soit t ;

en d'autres termes, les coefficients a_s et $a_{s'}$ doivent être les mêmes pour deux éléments <u>conjugués</u> (chap.I, § 6) de G . Si, pour toute classe H d'éléments conjugués de G , on pose $u_H = \sum_{s \in H} s$, on voit que Z est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires des u_H , autrement dit que ces dernières forment une <u>base</u> de Z par rapport à Ω . Par suite :

<u>Proposition 3</u>. <u>Le nombre de classes de représentations irréductibles d'un groupe fini, relatives à un corps algèbriquement stable</u> (dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de G) <u>est égal au nombre de classes d'éléments conjugués dans</u> G .

Soient $\mathcal{D}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ les classes de représantations irréductibles de G relatives à Ω ; on sait (§ 5) que l'algèbre A est composé direct de k algèbres simples A_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, et que, si, n_i est le degré des représentations de la classe $\mathcal{D}_i$, A_i est un anneau de matrices d'ordre n_i sur le corps Ω ; on en conclut la relation

$$(1) \qquad n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2 = h$$

Soit $s \to M(s)$ une représentation matricielle quelconque de degré r d'un groupe fini G relativement à un corps K . Considérons la matrice $U = \sum_{s \in G} M(s)$; pour tout $t \in G$, on a $M(t).U = \sum_{s \in G} M(t)M(s) = \sum_{s \in G} M(ts) = U$, donc, pour tout vecteur $x \in E = K^r$, le vecteur $U.x$ est <u>invariant</u> par toutes les matrices $M(s)$; en particulier, s'il n'y a pas de vecteur $\neq 0$ de E invariant par toutes les matrices $M(s)$, on a $U.x = 0$ quel que soit $x \in E$, c'est-à-dire $U = 0$.

Soient alors $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux classes de représentations <u>irréductibles</u> de G , de degrés r, r' , relatives à un corps K . Si $s \to M(s)$, $s \to N(s)$ sont deux représentations appartenant respectivement à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, et si $\mathcal{D}' \neq \check{\mathcal{D}}$, il n'existe aucun vecteur $\neq 0$ de $K^r \otimes K^{r'}$ invariant par toutes les matrices $M(s) \otimes N(s)$, d'après la prop.1 ; on a donc la relation

(2) $$\sum_{s\in G} M(s)\otimes N(s) = 0$$

Supposons maintenant que $s \to M(s)$ soit <u>absolument irréductible</u> ; alors (prop.2) l'ensemble des vecteurs de $K^r\otimes K^r$ invariants par toutes les matrices $M(s)\otimes \check{M}(s)$ a <u>une dimension</u> ; or, si I est la matrice unité d'ordre r , on a $M^*(s).I.\check{M}(s)=I$, autrement dit, d'après la démonstration de la prop.1, toutes les matrices $M(s)\otimes\check{M}(s)$ laissent invariant le vecteur $u=\sum_i e_i e_i$ de $K^r\otimes K^r$; on en déduit que, si $U=\sum_{s\in G} M(s)\otimes\check{M}(s)$, U.x est un multiple scalaire du vecteur u quel que soit le vecteur $x\in K^r\otimes K^r$; appliquant cette remarque aux vecteurs de la base canonique de cet espace, on voit que chacune des <u>colonnes</u> de la matrice U est multiple scalaire du vecteur u . Pour exprimer ces relations, posons $M(s)=(m_{ij}(s))$ $(1\leqslant i,j\leqslant r)$, et remarquons que $\check{M}(s)=((M(s))^{-1})^*=(M(s^{-1}))^*=(m_{ji}(s^{-1}))$; le terme de U appartenant à la ligne d'indice (i,h) et la colonne d'indice (j,k) est $\sum_{s\in G} m_{ij}(s)m_{kh}(s^{-1})$; donc

(3) $$\sum_{s\in G} m_{ij}(s)m_{kh}(s^{-1})=0 \qquad \text{si} \quad i\neq h$$

(4) $$\sum_{s\in G} m_{ij}(s)m_{ki}(s^{-1}) = \lambda_{jk}$$

λ_{jk} étant indépendant de l'indice i ; sommant les relations (4) correspondant aux r indices $i=1,2,\dots,r$, il vient, en remarquant que $\sum_{i=1}^{r} m_{ij}(s)m_{ki}(s^{-1})$ est le terme situé dans la ligne d'indice j et la colonne d'indice k du produit $\check{M}(s)M^*(s)=I$,

(5) $$\sum_{s\in G} m_{ij}(s)m_{ki}(s^{-1})=0 \qquad \text{si} \quad j\neq k$$

(6) $$\sum_{s\in G} m_{ij}(s)m_{ji}(s^{-1}) = \frac{h}{r}$$

De ces relations, on en déduit des relations analogues entre les <u>caractères</u> des représentations de G . Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux classes absolument irréductibles, et si $\mathcal{D}'\neq\mathcal{D}$, on a, d'après (2)

(7) $$\sum_{s\in G} \chi_{\mathcal{D}}(s)\,\chi_{\mathcal{D}'}(s^{-1}) = 0$$

et, si $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$, en tenant compte de (3),(5),(6) et de
$\chi_{\mathcal{D}}(s) = \sum_{i=1}^{z} m_{ii}(s)$

(8) $$\sum_{s \in G} \chi_{\mathcal{D}}(s)\, \chi_{\mathcal{D}}(s^{-1}) = h .$$

Les relations (2),(3),(5),(6),(7),(8) sont appelées les <u>relations d'orthogonalité de Schur</u>.

En particulier, si on prend pour $\mathcal{D}'$ la classe $\mathcal{D}_0$ de la représentation <u>identique</u> (qui, à tout $s \in G$, fait correspondre la matrice réduite au seul élément 1) on a $\chi_{\mathcal{D}_0}(s)=1$ quel que soit $s \in G$, donc

$$\sum_{s \in G} \chi_{\mathcal{D}}(s) = 0$$

pour toute classe $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_0$.

<u>Caractères des groupes abéliens finis</u>. L'algèbre d'un groupe abélien fini est commutative ; toute représentation irréductible d'un groupe abélien G d'ordre h dans un corps Ω algèbriquement stable (dont la caractéristique ne divise pas h) est donc <u>de degré un</u> ; toute matrice $M(s)$ d'une telle représentation est donc identique à son <u>caractère</u> $\chi(s)$, et les caractères de G peuvent être définis comme les <u>représentations de G dans le groupe multiplicatif du corps</u> Ω , autrement dit, les applications de G dans ce groupe telles que $\chi(s)\chi(t) = \chi(st)$ pour $s \in G$, $t \in G$. Si s est un élément d'ordre k , on a $\chi(s^k) = (\chi(s))^k = \chi(e) = 1$, donc $\chi(s)$ est <u>racine</u> $k^{\text{ème}}$ <u>de l'unité</u>.

Inversement, si H est un groupe cyclique d'ordre k , ζ une racine $k^{\text{ème}}$ de l'unité, a un générateur de H , l'application $a^m \to \zeta^m$ pour $0 \leqslant m \leqslant k-1$ est un caractère de H .

Plus généralement, on sait que G est produit direct de groupes cycliques $H_1, H_2, \ldots, H_r$ d'ordres $h_1, h_2, \ldots, h_r$; si χ est un caractère quelconque de G , on a, en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_r$

des générateurs de $H_1,\dots,H_r$ respectivement, $\chi(a_1^{m_1} a_2^{m_2}\dots a_r^{m_r}) = \zeta_1^{m_1}\dots\zeta_r^{m_r}$ où ζ_i est une racine $h_i^{\text{ème}}$ de l'unité ; récirpqoquement toute suite (ζ_i) de racines $h_i^{\text{èmes}}$ de l'unité $(1\leqslant i\leqslant r)$ définit un caractère χ de G par la condition $\chi(a_i)=\zeta_i$ pour $1\leqslant i\leqslant r$; on voit donc que le nombre de caractères distincts de G est $h_1h_2\dots h_r = h$, ce que montre aussi, bien entendu, la formule générale (1) appliquée à G .

Si χ_1, χ_2 sont deux caractères de G , $\chi_1\chi_2$ en est un troisième, ainsi que χ_1^{-1}; les caractères de G forment donc un <u>groupe multiplicatif</u> G' . L'ensemble H'_i des caractères χ_i tels que $\chi_i(a_j)=1$ pour $j\neq i$ est un groupe cyclique d'ordre h_i isomorphe au groupe des racines $h_i^{\text{èmes}}$ de l'unité, et il résulte de ce qui précède que G' est <u>produit direct</u> des H'_i ; par suite, <u>le groupe des caractères d'un groupe abélien fini</u> G <u>est isomorphe à</u> G . En outre, chaque élément $s\in G$ définit un <u>caractère</u> ρ_s du groupe G' en posant $\rho_s(\chi) = \chi(s)$; le groupe formé des caractères ρ_s est isomorphe à G ; si on l'identifie à G , on voit que G peut être considéré comme sous-groupe du groupe G" des caractères de G' , et comme il a même ordre que G" d'après ce qui précède, il lui est identique : autrement dit, <u>tout caractère du groupe des caractères</u> G' <u>d'un groupe abélien fini</u> G <u>est de la forme</u> $\chi \longrightarrow \chi(s)$.

Si on considère G (écrit additivement) comme un module <u>normal</u> sur l'anneau $\mathbf{Z}/(h)$, G' (écrit additivement) n'est autre que le <u>dual</u> de G , et l'application canonique de G dans son <u>bidual</u> G" est un <u>isomorphisme</u> de G <u>sur</u> G" (cf. chap.V, §6, exerc.).

<u>Représentations des sous-groupes d'un groupe fini</u>. Soit G un groupe fini d'ordre h , H un sous-groupe de G d'indice j . Nous nous proposons d'étudier les relations entre les représentations matricielles de G et de H relatives à un même corps commutatif K (dont la caractéristique ne divise pas h). Nous désignerons par A et B respectivement les algèbres de groupe de G et H relatives à K ; B est une sous-algèbre de A ; nous sommes ramenés à étudier les relations entre représentations des algèbres semi-simples A et de B . Nous désignerons par A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ les anneaux simples dont A est le composé direct, par B_k $(1 \leqslant k \leqslant q)$ ceux dont B est le composé direct.

Toute classe irréductible de représentations de A contient une représentation dont le bimodule associé ici (module par rapport à A) est un idéal minimal d'un des ~~anneaux~~ anneaux A_i ; soit $\mathcal{D}_i$ la classe correspondant à un idéal minimal $\mathfrak{l}_i$ de A_i ; la ~~récip~~ représentation $s \longrightarrow M_i(s)$ définie par cet idéal, restreinte à B , est une représentation de B dont le bimodule associé est $\mathfrak{l}_i$, <u>considéré comme B-module</u> à gauche ; ce module est somme directe de modules simples, isomorphes aux idéaux minimaux de B ; soit c_{ik} le nombre de ces modules isomorphes à un idéal minimal $\mathfrak{l}'_k$ de B_k ; si ϑ_k désigne la classe de représentations irréductibles de B (ou de H) qui correspond à $\mathfrak{l}'_k$, on peut donc écrire, en considérant $\mathcal{D}_i$ comme classe de représentations de H :

$$\mathcal{D}_i = \sum_{k=1}^{q} c_{ik} \vartheta_k \tag{9}$$

Inversement, l'idéal minimal $\mathfrak{l}'_k$ de B_k engendre l'idéal $A.\mathfrak{l}'_k$ <u>de l'anneau</u> A ; on dit que la représentation correspondant au A-module $A.\mathfrak{l}'_k$ (resp. sa classe) est <u>la représentation de</u> A (ou de G) -resp. la classe - <u>induite</u> par la représentation de B (de H) correspondant à $\mathfrak{l}'_k$ (resp. par la classe ϑ_k) . La classe induite par ϑ_k

se notera $\mathcal{D}(\vartheta_k)$; l'idéal $A.\ell'_k$ est somme directe d'un certain nombre d'idéaux minimaux de A ; si c'_{ik} est le nombre de ces idéaux qui appartiennent à A_i , on peut écrire

$$(10) \qquad \mathcal{D}(\vartheta_k) = \sum_{i=1}^{p} c'_{ik}\,\mathcal{D}_i$$

Proposition 4. Si le corps K est algèbriquement stable (autrement dit, si les classes $\mathcal{D}_i$ et ϑ_k sont absolument irréductibles), on a $c_{ik}=c'_{ik}$ quels que soient i et k .

En effet, c'_{ik} est la longueur de l'idéal à gauche $A_i.\ell'_k$ de A_i ; il est immédiat que cette longueur est égale à celle de tout idéal $A_i\ell'$, où $\ell' = \ell'_k a$ est isomorphe à ℓ'_k , puisqu'inversement, il existe $b\in B_k$ tel que $\ell'_k = \ell' b$. L'anneau simple B_k est somme directe d'un certain nombre n'_k d'idéaux isomorphes à ℓ'_k , donc $A_i.B_k$ est un idéal de A_i somme de n'_k ~~d'~~ idéaux isomorphes à $A_i.\ell'_k$; la somme est directe, car si e_k est l'élément unité de B_k , ℓ'_{hk} $(1\leqslant h\leqslant n'_k)$ les idéaux dont B_k est somme directe, on a $e_k = \sum_h e_{hk}$ $(e_{hk}\in \ell'_{hk})$, $\ell'_{hk} = B_k.e_{hk}$, $e^2_{hk}=e_{hk}$, $e_{hk}e_{h'k}=0$ pour $h'\neq h$, donc $\sum_{h'\neq h} A_i\ell'_{h'k}$ est annulé à droite par e_{hk} et n'a par suite que 0 en commun avec $A_i\ell'_{hk}$. En résumé, $A_i.B_k$ est un idéal de A_i de longueur $n'_k c'_{ik}$. Or, on a $B_k=Be_k$, et comme B contient l'élément unité de A , $A_i.B=A_i$, donc $A_i.B_k=A_ie_k$; cet idéal à gauche a par suite même longueur que l'idéal à droite $e_kA_i=e_kBA_i=B_k.A_i$. Si d'autre part, A_i est un anneau de matrices d'ordre n_i^2 sur K , tout idéal minimal (à droite ou à gauche) de A_i est de rang n_i sur K , donc A_iB_k et B_kA_i sont des espaces vectoriels de rang $n_in'_kc'_{ik}$ sur K .

Remarquons maintenant que c_{ik} est la longueur de ℓ_i considéré comme B_k-module à gauche, donc la longueur de B_kA_i (qui par le même raisonnement que ci-dessus, est somme directe de n_i modules isomorphes à $B_k\,\ell_i$)

85

est $c_{ik}n_i$; comme tout idéal minimal de B_k est de rang n'_k sur K , B_kA_i est de rang $n_in'_kc_{ik}$. On a par suite $n_in'_kc_{ik} = n_in'_kc'_{ik}$, d'où la proposition

Le nombre entier $c_{ik}=c'_{ik}$ se note ($\mathcal{D}_i : \vartheta_k$) et s'appelle l'<u>indice</u> de la classe ϑ_k par rapport à la classe $\mathcal{D}_i$; on peut aisément calculer ce nombre, à l'aide des <u>caractères</u> des classes $\mathcal{D}_i$ et ϑ_k : en effet, pour tout $s \in H$, on a, d'aprés (9)

$$\chi_{\mathcal{D}_i}(s) = \sum_k c_{ik} \chi_{\vartheta_k}(s)$$

Si on multiple cette relation par $\chi_{\vartheta_k}(s^{-1})$ et qu'on somme pour tous les $s \in H$, on a, en tenant compte des relations d'othogonalité de Schur

$$(11) \qquad t(\mathcal{D}_i : \vartheta_k) = \sum_{s \in H} \chi_{\mathcal{D}_i}(s) \chi_{\vartheta_k}(s^{-1})$$

où t est l'ordre du sous-groupe H .

<u>Exercices</u>. 1) a) Soit $(s,t) \rightarrow \underline{\underline{M}}(s,t)$ une représentation matricielle de degré r relative à un corps S d'un groupe produit $G=H \times K$; si e et e' sont les éléments neutres de H et K , $s \rightarrow \underline{\underline{M}}(s,e')$ et $t \rightarrow \underline{\underline{M}}(e,t)$ sont deux représentations de degré r de H et K respectivement telles que $\underline{\underline{M}}(s,e')$ et $\underline{\underline{M}}(e,t)$ soient des matrices permutables quels que soient s et t . Inversement, si $s \rightarrow \underline{P}(s)$ et $t \rightarrow Q(t)$ sont deux représentations de degré r de H et K respectivement (relatives au corps S), telles que $\underline{P}(s)$ et $Q(t)$ soient permutables quels que soient $s \in H$ et $t \in K$,

$(s,t) \rightarrow \underline{P}(s)\underline{Q}(t)=Q(t)\underline{P}(s)$ est une représentation de degré r de G.

b) Si la représentation $(s,t) \rightarrow \underline{\underline{M}}(s,t)$ est irréductible, la classe de la représentation $s \rightarrow \underline{\underline{M}}(x,e')$ est multiple d'une classe irreductible de représentations de H ; propriété analogue pour la classe de la représentation $t \rightarrow \underline{\underline{M}}(e,t)$ (montrer, en utilisant le § 4, que la sous-algèbre A de S_r , engendrée par les matrices $\underline{\underline{M}}(s,e')$ est simple) .

c) Si la représentation $(s,t) \to \underline{\underline{M}}(s,t)$ est absolument irréductible, elle est semblable à une représentation de la forme $(s,t) \to \underline{\underline{P}}(s) \otimes \underline{\underline{Q}}(t)$, où $s \to \underline{\underline{P}}(s)$ et $t \to \underline{\underline{Q}}(t)$ sont deux représentations absolument irréductibles de H et K respectivement (si A et B sont les sous-algèbres de S_r engendrées par les matrices $\underline{\underline{M}}(s,e')$ et $\underline{\underline{M}}(e,t)$ respectivement, montrer, en utilisant l'exerc.4 du § 4 , que $A \cap B = S$, et en déduire que S_r est isomorphe à $A \otimes B$).

d) Inversement, si $s \to \underline{\underline{P}}(s)$ et $t \to \underline{\underline{Q}}(t)$ sont deux représentations absolument irréductibles de H et K (relatives au corps S), $(s,t) \to \underline{\underline{P}}(s) \otimes \underline{\underline{Q}}(t)$ est une représentation irréductible de G (remarquer que, si $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche minimal de S_h , $\mathfrak{l}'$ un idéal à gauche minimal de S_k , $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'$ est un idéal à gauche minimal de $S_h \otimes S_k$).

2) Soit G un groupe fini d'ordre h , C_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ les classes d'éléments conjugués de G , h_i le nombre d'éléments de C_i . Soit A l'algèbre du groupe G relative à un corps algèbriquement stable Ω (dont la caractéristique ne divise pas h), Z le centre de A ; les r éléments $z_i = \sum_{s \in C_i} s$ forment une base de Z ; soient e_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ les éléments unités des r corps (isomorphes à Ω) dont Z est le composé direct.

a) Si $z_i z_j = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} z_k$, montrer que les c_{ijk} sont des entiers rationnels $\geqslant 0$.

b) Soient $\mathcal{D}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ les r classes de représentations irréductibles de G (relatives à Ω) n_i le degré des représentations de $\mathcal{D}_i$, χ_i le caractère de la classe $\mathcal{D}_i$; si la caractéristique de Ω ne divise aucun des n_i , les représentations de Z dans Ω

sont les r représentations $z \to \frac{1}{n_i}\chi_i(z)$; on suppose les classes $\mathcal{D}_i$ rangées en une suite de sorte que $\chi_i(e_j)=0$ si $i \neq j$, $\chi_i(e_i)=n_i$. Si on pose $z_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij}e_j$, on a $\lambda_{ij} = \frac{1}{n_j}\chi_j(z_i) = \frac{h_i}{n_j}\chi_j(s)$ pour tout élément $s \in C_i$; montrer que $\lambda_{ik}\lambda_{jk} = \sum_{h=1}^{r} c_{ijh}\lambda_{hk}$.

c) Si on pose $e_i = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij}z_j$, montrer que $\mu_{ij} = \frac{n_i}{h}\chi_i(s^{-1})$ pour tout élément $s \in C_j$ (utiliser b) et la relation d'orthogonalité des caractères). En déduire que, pour tout $s \in C_i$

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{r} \chi_j(s)\chi_j(t^{-1}) = \begin{cases} h/h_i & \text{si } t \in C_i \\ 0 & \text{si } t \notin C_i \end{cases}$$

(remarquer que les matrices (λ_{ij}) et (μ_{ij}) sont inverses l'une de l'autre). En particulier, montrer que

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{r} n_j\chi_j(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq e \quad \text{(élément neutre de G)} \\ h & \text{si } s = e \end{cases}$$

montrer que $c_{ijh} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik}\lambda_{jk}\mu_{kh}$.

d) Si $\mathcal{D}_i \otimes \mathcal{D}_j = \sum_{k=1}^{r} d_{ijk}\mathcal{D}_k$, les d_{ijk} sont des entiers rationnels $\geqslant 0$, et on a, pour tout $s \in G$

$$\chi_i(s)\chi_j(s) = \sum_{k=1}^{r} d_{ijk}\chi_k(s)$$

En déduire que $h.d_{ijk} = \sum_{s \in G} \chi_i(s)\chi_j(s)\chi_k(s^{-1})$.

e) Si on définit sur un espace vectoriel E à r dimensions sur Ω, ayant une base u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, une multiplication par les formules $u_iu_j = \sum_{k=1}^{r} d_{ijk}u_k$, E est une algèbre commutative sur Ω ; pour chaque indice i, l'application linéaire f_i de E dans Ω, définie par $f_i(u_j) = \frac{1}{n_i}\chi_j(z_i)$ est une représentation de E dans Ω ; ces r représentations sont distinctes (remarquer que la matrice (λ_{ij}) est inversible) ; en déduire que E est semi-simple, composé direct de r corps isomorphes à Ω (si E avait un radical, montrer que le nombre de ses représentations distinctes dans Ω serait $< r$).

3) Dans les mêmes hypothèses que pour l'exerc.2, soit $s \rightarrow \underline{\underline{M}}(s)$ une représentation de la classe $\mathcal{D}_i$; montrer que pour tout $s \in G$, on a $\sum_{x \in G} \underline{\underline{M}}(xsx^{-1}) = \frac{h}{n_i} \chi_i(s).\underline{\underline{I}}_{n_i}$ ($\underline{\underline{I}}_{n_i}$ matrice unité d'ordre n_i). En déduire que $\sum_{x \in G} \chi_i(xsx^{-1}t) = \sum_{x \in G} \chi_i(txsx^{-1}) = \frac{h}{n_i} \chi_i(s) \chi_i(t)$, et montrer que cette relation est équivalente à la relation $\lambda_{ik}\lambda_{jk} = \sum_{h=1}^{r} c_{ijh}\lambda_{hk}$ de l'exerc. 2b). En déduire qu'inversement, si ψ est une fonction $\neq 0$ définie sur G, à valeurs dans Ω, telle que, quels que soient $s \in G$, $t \in G$, on ait $\frac{1}{h} \sum_{x \in G} \psi(xsx^{-1}t) = \psi(s)\psi(t)$ on a $\psi(s) = \frac{1}{n_i} \chi_i(s)$ pour un indice i (remarquer que la relation de l'exerc. 2b) caractérise les représentations de Z dans Ω). Donner une seconde démonstration de cette proposition en remarquant qu'il existe un indice i tel que $\sum_{t \in G} \underline{\underline{M}}(t)\psi(t) \neq 0$ pour une représentation $s \rightarrow \underline{\underline{M}}(s)$ de la classe $\mathcal{D}_i$, et calculer l'expression $\psi(s). \sum_{t \in G} \psi(t)\, \underline{\underline{M}}(t)$.

4) On suppose que Ω est l'extension algèbrique maximale du corps Q des nombres rationnels ("corps des nombres algèbriques"). Déduire des relations de l'exerc.2b) et 2d) que les nombres λ_{ij} et $\chi_i(s)$ sont des <u>entiers algèbriques</u> (chap.VI, §). En déduire que h/n_i est un entier algèbrique, donc un entier rationnel, quel que soit i , autrement dit que les degrés des représentations des classes $\mathcal{D}_i$ <u>divisent l'ordre</u> du groupe (utiliser les relations d'orthogonalité pour exprimer h/n_i à l'aide des caractères).

5) Tout caractère d'un groupe fini d'ordre h (pour les représentations relatives à un corps dont la caractéristique ne divise pas h) est somme de racines $h^{\text{ièmes}}$ de l'unité (considérer, pour une représentation quelconque $s \rightarrow \underline{\underline{M}}(s)$ de G , la restriction de cette représentation au groupe cyclique engendré par un élément $a \in G$, et en déduire

que si χ est le caractère de $\underline{M}(s)$, $\chi(a)$ est somme de racines h-ièmes de l'unité).

6) a) Soit G un groupe fini d'ordre h . Montrer que l'image de G par toute représentation $s \longrightarrow \chi(s)$ de degré 1 relative à un corps K
un groupe cyclique (remarquer que c'est un s/groupe du groupe
(dont la caractéristique ne divise pas h), est groupe des racines h-ièmes de l'unité dans K) ; par suite $N = \overset{-1}{\chi}(1)$ est un sous-groupe distingué de G tel que G/N soit cyclique.

b) Inversement, tout sous-groupe distingué N de G tel que G/N soit cyclique d'ordre p définit p représentations distinctes de degré 1 de G (relatives à un corps algèbriquement stable, ou tout au moins contenant les racines h-ièmes de l'unité). Si, dans l'algèbre de groupe A de G , on pose $z = \sum_{s \in N} s$, et si u est un élément d'une classe (mod.N) engendrant G/N , montrer que les modules (à 1 dimension) correspondant à ces p représentations sont isomorphes aux p idéaux à gauche minimaux de A engendrés par chacun des p éléments $v_k = z + \zeta_k uz + \zeta_k^2 u^2 z + \ldots + \zeta_k^{p-1} u^{p-1} z$, où ζ_k est une des racines p-ièmes de l'unité.

c) Montrer que le nombre des représentations absolument irréductibles de degré 1 de G est égal à l'indice (G:C) du groupe des commutateurs C de G .

7) On dit qu'un groupe G de transformations linéaires de $E = K^r$ est <u>imprimitif</u> s'il existe une décomposition de E en somme directe de sous-espaces E_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ telle que, pour tout indice i et tout $\sigma \in G$, il existe un indice j tel que $\sigma(E_i) = E_j$; un groupe non imprimitif est dit primitif. Lorsque tous les E_i sont des sous-espaces à une dimension, on dit que G est <u>monomial</u>.

a) Si G est irréductible, les sous-espaces E_i ont tous le même nombre de dimensions, et pour tout indice i, il existe une transformation $\sigma_i \in G$ telle que $E_i = \sigma_i(E_1)$; si H_i est le sous-groupe de G qui laisse invariant E_i, on a $H_i = \sigma_i H_1 \sigma_i^{-1}$; il n'existe aucun sous-espace de E_1, distinct de E_1 et invariant par H_1 (autrement dit, H_1, considéré comme groupe de transformations de E_1, est irréductible).

Le sous-groupe $L = \bigcap_i H_i$ est sous-groupe distingué de G, et G/L est isomorphe à un groupe transitif de permutations de degré p ; si G est monomial, L est abélien.

b) Soit G un groupe fini de transformations linéaires de $E = K^r$, possédant un sous-groupe distingué N tel que E, considéré comme module complètement réductible sur l'algèbre de groupe de N, ne soit pas un module homogène (chap. II, § 3). Montrer que G est imprimitif (établir que, si E_i $(1 \leq i \leq p)$ sont les composants homogènes de E, considéré comme module par rapport à l'algèbre de groupe de N, $\sigma(E_i)$ est encore un composant homogène de E, quels que soient l'indice i et la transformation $\sigma \in G$). En particulier, s'il existe un sous-groupe distingué <u>abélien</u> N de G, dont les éléments ne sont pas tous des homothéties (ce qui sera toujours le cas si N n'est pas contenu dans le centre de G), G est imprimitif.

c) Déduire de b) que tout groupe fini de transformations linéaires G dont le groupe des commutateurs est abélien, est un groupe monomial (remarquer qu'on peut se borner à considérer le cas des groupes irréductibles ; établir que G est imprimitif, et raisonner par récurrence sur l'ordre de G, en remarquant que les groupes H_i laissant invariants les E_i ont également leurs groupes des commutateurs abéliens).

d) Montrer de même que tout groupe fini de transformations dont l'ordre n'est divisible par aucun carré est monomial (remarquer que si G n'est pas abélien, il existe un sous-groupe abélien distingué de G , distinct de son centre (cf. chap.V, Appendice, exerc.   )).

8) On dit qu'une représentation matricielle $s \rightarrow \underline{\underline{M}}(s)$ d'un groupe G est <u>imprimitive</u> (resp. monomiale) si l'image de G par cette représentation est un groupe imprimitif (resp. monomial) de transformations.

a) Soit G un groupe fini, H un sous-groupe de G , A et B les algèbres de groupe de G et H respectivement relatives à un corps K (dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de G) ; si $\mathfrak{m}$ est un idéal à gauche de B , $\mathfrak{l} = A.\mathfrak{m}$ l'idéal à gauche de A engendré par $\mathfrak{m}$, la représentation de G correspondant à l'idéal $\mathfrak{l}$ (<u>induite</u> par la représentation de H correspondant à $\mathfrak{m}$) est imprimitive ; si $\mathfrak{m}$ est un sous-espace vectoriel de B à une dimension (autrement dit, si la représentation correspondante de H est de degré 1), la représentation de G correspondant à $\mathfrak{l}$ est monomiale.

b) Réciproquement, une représentation imprimitive de degré r de G est semblable à la somme directe d'un certain nombre de représentations induites par des sous-groupes de G (soient E_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ les sous-espaces de E permutés par les opérateurs $s \in G$ (exerc.7), H_1 le sous-groupe de G laissant invariant E_1 ; décomposer E_1, considéré comme module par rapport à l'algèbre de groupe de H_1 , en somme directe de sous-modules simples E_{1j} $(1 \leqslant j \leqslant q)$, et remarquer que la représentation de G correspondant au sous-module de E somme directe des images de E_{1j} par les opérateurs de G , est semblable à la représentation correspondant à l'idéal de l'algèbre de groupe de G engendré par un idéal de l'algèbre de groupe de H_1, isomorphe à E_{1j}).

9) a) Soit G un groupe fini d'ordre h , H un sous-groupe de G d'indice j , $\mathcal{D}_i$ et ϑ_k les classes de représentations absolument irréductibles de G et H relatives à un corps Ω dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de G . Soient n_i , n'_k les degrés des représentations de $\mathcal{D}_i$ et ϑ_k respectivement. Montrer qu'on a

$$n_i = \sum_k (\mathcal{D}_i : \vartheta_k)\, n'_k$$

$$jn'_k = \sum_i (\mathcal{D}_i : \vartheta_k)\, n_i$$

(calculer respectivement de deux manières le rang par rapport à K d'un idéal minimal $\mathfrak{l}_i$ correspondant à $\mathcal{D}_i$, et de l'idéal $A.\mathfrak{l}'_k$ correspondant à la classe $\mathcal{D}(\vartheta_k)$ induite par ϑ_k) .

b) Avec les notations de l'exerc.2c), démontrer que

$$\sum_{u \in C_i \cap H} \chi_{\vartheta_k}(u) = \frac{h_i}{j} \sum_{p=1}^{r} (\mathcal{D}_p : \vartheta_k)\, \chi_p(s) \quad \text{avec } s \in C_i$$

(utiliser la formule (1) de l'exerc. 2c), et la formule (11 du texte).

10) a) Soit $s \to \underline{\underline{M}}(s)$ une représentation matricielle irréductible d'un groupe G . Si H est un sous-groupe distingué de G , montrer que la restriction de la représentation $s \to \underline{\underline{M}}(s)$ à H est somme directe de représentations irréductibles de même degré ; si $t \to \underline{\underline{N}}(t)$ est une de ces représentations, toutes les autres sont semblables à des représentations de la forme $t \to \underline{\underline{N}}(sts^{-1})$, où s est un élément fixe de G ; si l'indice (G:H) est fini, le nombre de ces représentations est au plus égal à (G:H) (si E est le bimodule associé à la représentation $s \to \underline{\underline{M}}(s)$, F un sous-bimodule simple de E (relatif au groupe H), montrer que, pour tout $s \in G$, sF est encore un sous-bimodule simple relatif au groupe H) .

b) On suppose que la représentation irréductible $s \to \underline{\underline{M}}(s)$ de G est relative à un corps algèbriquement stable, que le groupe quotient G/H est un groupe cyclique d'ordre fini p , et que le nombre de représentations irréductibles en lesquelles se décompose $s \to \underline{M}(s)$, restreinte à H , est égal à p . Montrer que, dans ces conditions, ces p représentations ne peuvent être toutes semblables (soit u un élément d'une classe engendrant G/H ; E (comme bimodule sur H) est somme directe des p bimodules $u^k F$ $(0 \leqslant k \leqslant p-1)$; se ramener au cas où les matrices correspondant à un élément $t \in H$ dans les p représentations correspondantes sont toutes identiques ; à l'aide de a) et du lemme de Schur, montrer que, par une homothétie convenable sur les éléments de base de chaque $u^k F$, on peut supposer que la matrice $\underline{M}(u)$ est de la forme d'un tableau carré de p^2 matrices carrées, de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{U} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \underline{U} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{U} \\ \underline{U} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire qu'il existe un sous-espace à p dimensions de E invariant par tout $t \in H$ et par u , et par suite invariant par G , contrairement à l'irréductibilité de $s \to \underline{M}(s)$).

c) On suppose désormais que $(G:H)=2$. Une représentation irréductible $s \to \underline{M}(s)$ de G est dite décomposable (pour H) si sa restriction à H est somme directe de deux représentations irréductibles, indécomposable si cette restriction est elle-même irréductible. Montrer que, si $s \to \underline{M}(s)$ est décomposable, elle est équivalente à la représentation $s \to \underline{M}'(s)$, où $\underline{M}'(s) = \underline{M}(s)$ si $s \in H$, $\underline{M}'(s) = -\underline{M}(s)$ si $s \notin H$.

Si $s \to \underline{M}_1(s)$ et $s \to \underline{M}_2(s)$ sont toutes deux décomposables et non semblables, aucune des deux représentations en lesquelles se décompose l'une d'elles ne peut être semblable à une des représentations en lesquelles se décompose l'autre (remarquer que la donnée d'une des

des représentations de H en lesquelles se décompose $s \to \underline{M}(s)$ détermine $\underline{M}(s)$ à une similitude près).

d) Avec les hypothèses de c), on suppose en outre que les représentations sont relatives à un corps algébriquement stable. Montrer que si deux représentations indécomposables $s \to \underline{M}(s)$, $s \to \underline{N}(s)$ sont telles que leurs restrictions à H soient semblables, $s \to \underline{N}(s)$ est semblable à $s \to \underline{M}(s)$ ou à la représentation $s \to \underline{M}'(s)$ définie dans c) (utiliser le lemme de Schur).

Si $s \to \underline{M}(s)$ est indécomposable, $s \to \underline{N}(s)$ décomposable, aucune des représentations de H en lesquelles se décompose $s \to \underline{N}(s)$ ne peut être semblable à la restriction de $s \to \underline{M}(s)$ à H (remarquer que $t \to \underline{M}(utu^{-1})$ est une représentation de H semblable à $t \to \underline{M}(t)$, tandis que cette propriété n'a pas lieu pour une des représentations de H en lesquelles se décompose $s \to \underline{N}(s)$).

----

§ 7. Représentations matricielles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Nous allons étudier les représentations matricielles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n (n > 1)$ relatives à un corps commutatif K de caractéristique ne divisant pas l'ordre n! de $\mathfrak{S}_n$ (ce qui entraîne en particulier que, si cette caractéristique n'est pas nulle, elle est $> n$). On sait alors (§ 6, th. 1) que toute représentation matricielle de $\mathfrak{S}_n$ est complètement réductible ; nous nous bornerons à chercher les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$; si A est l'algèbre de groupe de $\mathfrak{S}_n$ relative à K , le A-module associé à une telle représentation est isomorphe à un idéal à gauche minimal de A ; tout revient donc à déterminer ces derniers (ou simplement un idéal à gauche minimal de chacun des anneaux simples dont A est composé direct).

1. Les schémas d'Young. Soit $\alpha=(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une suite décroissamte de $r \leqslant n$ entiers $\geqslant 1$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n$. On appelle schéma d'Young correspondant à la suite α (ou schéma d'indice α), une suite à deux indices (m_{ij}) dans laquelle : 1° l'ensemble d'indices est formé des couples (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant \alpha_i$; 2° les n termes m_{ij} de la suite sont distincts et leur ensemble est identique à l'intervalle $[1,n]$ de N (on peut naturellement remplacer cet intervalle par un ensemble quelconque E de n éléments, et le groupe $\mathfrak{S}_n$ par $\mathfrak{S}_E$) . On imagine les termes de cette suite rangés en un "tableau"

$$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1,\alpha_1} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2,\alpha_2} \\ \dots\dots & & & & & \\ m_{r1} & \dots & m_{r,\alpha_r} & & & \end{matrix}$$

La suite $(m_{ij})_{1\leqslant j\leqslant \alpha_i}$ est appelée la <u>ligne</u> d'indice i du schéma, la suite (m_{ij}), où j reste fixe, et i parcourt les indices tels que $j\leqslant \alpha_i$ est dite la <u>colonne</u> d'indice j du schéma $(j\leqslant \alpha_1)$.

Etant donné un schéma $\Sigma_\alpha=(m_{ij})$ d'indice α , et une permutation quelconque $s\in \mathfrak{S}_n$, on désigne par $s\,\Sigma_\alpha$ le schéma de <u>même</u> indice $\Sigma'_\alpha=(m'_{ij})$, où $m'_{ij}=s(m_{ij})$ pour tout couple d'indices. Nous considérerons particulièrement, d'une part les permutations $p\in \mathfrak{S}_n$ <u>laissant invariantes les lignes</u> du schéma Σ_α , c'est-à-dire telles que, pour tout indice i , et tout indice j tel que $1\leqslant j\leqslant \alpha_i$, il existe un indice j' tel que $1\leqslant j'\leqslant \alpha_i$ et que $p(m_{ij})=m_{i,j'}$; ces permutations forment évidemment un <u>sous-groupe</u> $L(\Sigma_\alpha)$ de $\mathfrak{S}_n$; nous considérerons d'autre part les permutations $q\in \mathfrak{S}_n$ <u>laissant invariantes les colonnes</u> de Σ_α , c'est-à-dire telles que, pour tout indice $j\leqslant \alpha_1$, et tout indice i tel que $j\leqslant \alpha_i$, il existe un indice i' tel que $j\leqslant \alpha_{i'}$, et que $q(m_{ij})=m_{i',j}$; elles forment encore un <u>sous-groupe</u> $C(\Sigma_\alpha)$.
Il est clair qu'on a pour $s\in \mathfrak{S}_n$, $L(s\,\Sigma_\alpha)=sL(\Sigma_\alpha)s^{-1}$,
$C(s\,\Sigma_\alpha)=sC(\Sigma_\alpha)s^{-1}$.

Dans ce qui suit, nous <u>ordonnerons totalement</u> l'ensemble ddes suites d'entiers $\alpha=(\alpha_i)$ telles que $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=n$, par la relation suivante : supposons les suites prolongées pour l'ensemble d'indices $[1,n]$, en posant $\alpha_i=0$ pour $r+1\leqslant i\leqslant n$; si $\alpha=(\alpha_i)$, $\beta=(\beta_i)$, on posera $\alpha>\beta$ si la différence $\alpha_i-\beta_i$ de plus petit indice i qui soit $\neq 0$ est >0 ; on a par exemple, pour $n=6$

$$(5,1)>(4,2)>(3,3)>(3,2,1)>(3,1,2)$$

Ces conventions étant posées, nous pouvons démontrer le lemme suivant :

Lemme 1. Soient Σ_α et Σ'_β deux schémas d'Young tels que $\alpha \geqslant \beta$. **Ou bien il existe deux entiers distincts de $[1,n]$ qui appartiennent à une même ligne de Σ_α et une même colonne de Σ'_β, ou bien on a** $\alpha=\beta$, **et** $\Sigma'_\alpha = pq\,\Sigma_\alpha$, **où** $p \in L(\Sigma_\alpha)$, $q \in C(\Sigma_\alpha)$.

Supposons que la première alternative soit inexacte. On a par hypothèse $\alpha_1 \geqslant \beta_1$; l'hypothèse faite entraîne nécessairement $\alpha_1=\beta_1$, sans quoi les α_1 termes de la première ligne de Σ_α ne pourraient appartenir à des colonnes distinctes de Σ'_β. Il existe alors une permutation $q'_1 \in C(\Sigma'_\beta)$ telle que la première ligne de $q'_1\,\Sigma'_\beta$ se compose des mêmes éléments que la première ligne de Σ_α.

Il suffit maintenant de raisonner par récurrence sur le nombre des lignes de Σ_α ; supposons qu'on ait établi que $\alpha_i=\beta_i$ pour $i \leqslant k$, et qu'il existe une permutation $q'_k \in C(\Sigma'_\beta)$ telle que $q'_k\,\Sigma'_\beta$ ait les mêmes éléments que Σ_α dans chacune des lignes d'indice $i \leqslant k$. On a par hypothèse $\alpha_{k+1} \geqslant \beta_{k+1}$; l'hypothèse entraîne d'autre part $\alpha_{k+1}=\beta_{k+1}$, sans quoi les α_{k+1} termes de la $(k+1)^{me}$ ligne de Σ_α , qui ne peuvent se trouver dans des lignes d'indice $\leqslant k$ de $q'_k\,\Sigma'_\beta$, ne pourraient appartenir à des colonnes distinctes. Il existe alors une permutation $q''_{k+1} \in C(\Sigma'_\beta)$ laissant invariants les éléments des lignes d'indice $\leqslant k$ de $q'_k\,\Sigma'_\beta$, et telle que la $(k+1)^{me}$ ligne de $q''_{k+1}q'_k\,\Sigma'_\beta$ se compose des mêmes éléments que celle de Σ_α ; il suffit de poser $q'_{k+1}=q''_{k+1}q'_k$ pour pouvoir poursuivre le raisonnement.

On en conclut par suite que $\alpha=\beta$, et qu'il existe une permutation $q' \in C(\Sigma'_\alpha)$ telle que Σ_α et $q'\,\Sigma'_\alpha$ aient mêmes éléments dans <u>chacune</u> de leurs lignes ; il existe par suite une permutation $p \in L(\Sigma_\alpha)$ telle que $q'\,\Sigma'_\alpha = p\,\Sigma_\alpha$, d'où $\Sigma'_\alpha = q'^{-1}p\,\Sigma_\alpha = p(p^{-1}q'^{-1}p)\,\Sigma_\alpha$;

comme q'^{-1} laisse invariantes les colonnes de $q'\Sigma'_\alpha = p\,\Sigma_\alpha$, il appartient à $C(p\,\Sigma_\alpha)=pC(\Sigma_\alpha)p^{-1}$, autrement dit $p^{-1}q'^{-1}p = q \in C(\Sigma_\alpha)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> $s \in \mathfrak{S}_n$ <u>n'est pas de la forme</u> pq, <u>où</u> $p \in L(\Sigma_\alpha)$, $q \in C(\Sigma_\alpha)$, <u>il existe deux transpositions</u> $u \in L(\Sigma_\alpha)$, $v \in C(\Sigma_\alpha)$ <u>telles que</u> $us=sv$.

En effet, d'après le lemme, il existe deux entiers a,b qui figurent dans une ligne de Σ_α et dans une colonne de $s\,\Sigma_\alpha$. Soit u la transposition de a et de b ; on a évidemment $u \in L(\Sigma_\alpha)$; d'autre part, $s^{-1}us=v$ est la transposition de $s^{-1}(a)$ et de $s^{-1}(b)$ qui figurent dans une même colonne de $s^{-1}s\,\Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha$.

<u>Les idéaux minimaux de l'algèbre</u> A. Soit Σ_α un schéma d'Young quelconque ; posons dans l'anneau A $a_\alpha = \sum_{p \in L(\Sigma_\alpha)} p$, $b_\alpha = \sum_{q \in C(\Sigma_\alpha)} \varepsilon_q . q$, ε_q étant la <u>signature</u> de la permutation q (chap.I, § 7). Il est immédiat que, pour tout $p \in L(\Sigma_\alpha)$, $pa_\alpha = a_\alpha p = a_\alpha$, et pour tout $q \in C(\Sigma_\alpha)$, $qb_\alpha = b_\alpha q = \varepsilon_q b_\alpha$. Considérons le produit $c_\alpha = a_\alpha b_\alpha = \sum_{p,q} \varepsilon_q . pq$, p parcourant $L(\Sigma_\alpha)$, q parcourant $C(\Sigma_\alpha)$; cet élément n'est pas nul, car la relation $pq=p'q'$, où p et p' appartiennent à $L(\Sigma_\alpha)$, q et q' à $C(\Sigma_\alpha)$ n'est possible que pour $p=p'$, $q=q'$: elle entraîne en effet $p'^{-1}p=q'q^{-1}$, et l'intersection de $L(\Sigma_\alpha)$ et de $C(\Sigma_\alpha)$ est formée des permutations laissant invariantes à la fois les lignes et les colonnes de Σ_α, c'est-à-dire laissant invariants tous les éléments de Σ_α ; donc cette intersection se réduit à la permutation identique. Cela étant, nous allons montrer que :

<u>Proposition 1</u>. <u>L'idéal à gauche</u> Ac_α <u>est minimal</u>.

Nous établirons d'abord que, pour tout $u \in A$, on a $a_\alpha u b_\alpha = \mu c_\alpha$, où $\mu \in K$. Cela résultera du lemme suivant :

Lemme 2. Pour qu'un élément x de A soit tel que, pour tout $p \in L(\Sigma_\alpha)$ et tout $q \in C(\Sigma_\alpha)$, on ait $pxq = \varepsilon_q x$, il faut et il suffit qu'il soit de la forme μc_α, où $\mu \in K$.

Tout d'abord, on a bien $pc_\alpha q = (pa_\alpha)(b_\alpha q) = \varepsilon_q a_\alpha b_\alpha = \varepsilon_q c_\alpha$. Inversement soit $x = \sum_s \gamma_s s$ un élément de A tel que $pxq = \varepsilon_q x$ pour tout $p \in L(\Sigma_\alpha)$ et tout $q \in C(\Sigma_\alpha)$. On doit donc avoir $\sum_s \gamma_s psq = \varepsilon_q \sum_s \gamma_s s$; on en tire d'abord $\gamma_{pq} = \varepsilon_q \gamma_e$ (e élément neutre de $\mathfrak{S}_n$) ; donc, pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$ de la forme pq (p décrivant $L(\Sigma_\alpha)$ et q décrivant $C(\Sigma_\alpha)$), on a $\gamma_s = \varepsilon_q \gamma_e$. D'autre part, si s n'est pas de la forme pq, il existe une transposition $u \in L(\Sigma_\alpha)$ et une transposition $v \in C(\Sigma_\alpha)$ telles que $usv^{-1} = -x$, ce qui donne $\gamma_s = -\gamma_s$, et comme K n'est pas de caractéristique 2, $\gamma_s = 0$; on a donc bien $x = \gamma_e \sum_{p,q} \varepsilon_q pq = \gamma_e c_\alpha$.

Ce lemme étant démontré, pour tout $u \in A$, on a $pa_\alpha u b_\alpha q = \varepsilon_q a_\alpha u b_\alpha$ quels que soient $p \in L(\Sigma_\alpha), q \in C(\Sigma_\alpha)$; donc on a bien $a_\alpha u b_\alpha = \mu c_\alpha$, avec $\mu \in K$; autrement dit, on a $a_\alpha A b_\alpha = K c_\alpha$, et par suite $c_\alpha A c_\alpha \subset K c_\alpha$. Soit alors $\mathfrak{l}$ un idéal à gauche contenu dans Ac_α ; on doit avoir $c_\alpha \mathfrak{l} \subset c_\alpha A c_\alpha \subset K c_\alpha$, et comme Kc_α est un sous-espace vectoriel à 1 dimension, $c_\alpha \mathfrak{l} = (0)$ ou $c_\alpha \mathfrak{l} = Kc_\alpha$. Mais la première hypothèse entraîne $\mathfrak{l}^2 \subset Ac_\alpha \mathfrak{l} = (0)$, et comme A est semi-simple, $\mathfrak{l} = (0)$. Si au contraire $c_\alpha \mathfrak{l} = Kc_\alpha$, on a $Ac_\alpha = A(Kc_\alpha) = Ac_\alpha \mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}$, donc $\mathfrak{l} = Ac_\alpha$, ce qui achève de démontrer la proposition.

De la même manière, on démontre que $c_\alpha A$ est un idéal à droite minimal.

Proposition 2. Soient Σ_α et Σ'_β deux schémas d'Young tels que $\alpha \neq \beta$; les idéaux à gauche minimaux correspondants Ac_α et Ac_β ne sont pas isomorphes.

Supposons par exemple que $\alpha > \beta$. Il suffira de prouver que $(Ac_\alpha)(Ac_\beta)=(0)$ (§ 1, prop.3) ; cela résultera du fait que, pour tout $u \in A$, $c_\alpha u c_\beta=0$. Cette dernière relation sera établie si on prouve que $a_\alpha u b_\beta=0$ pour tout $u \in A$, et il suffit de démontrer que $a_\alpha s b_\beta=0$ pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$. Montrons d'abord que $a_\alpha b_\beta=0$. En effet, d'après le lemme 1 , comme $\alpha > \beta$, il existe deux entiers h,k qui figurent dans une même ligne de Σ_α et dans une même colonne de Σ'_β ; si t est la transposition de h et k , on a donc $t \in L(\Sigma_\alpha)$, et $t \in C(\Sigma'_\beta)$; d'où $a_\alpha t=a_\alpha$, $t^{-1}b_\beta=-b_\beta$; mais $a_\alpha b_\beta=a_\alpha t t^{-1} b_\beta=-a_\alpha b_\beta$ d'après ce qui précède, et comme K n'est pas de caractéristique 2 , $a_\alpha b_\beta=0$. Si maintenant, pour un $s \in \mathfrak{S}_n$ quelconque, on remarque que $s b_\beta s^{-1}$ est l'élément formé de la même manière que b_β , mais à partir du schéma $s\,\Sigma'_\beta$, on voit qu'on a aussi $a_\alpha s b_\beta s^{-1}=0$, d'où $a_\alpha s b_\beta=0$, et comme s est quelconque, la proposition est démontrée.

<u>Proposition 3</u>. <u>Tout idéal à gauche minimal de l'anneau</u> A <u>est isomorphe à un des idéaux</u> Ac_α .

D'après la prop.2, il y a autant d'idéaux Ac_α non isomorphes deux à deux que d'indices α distincts, c'est-à-dire autant que de suites $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ décroissantes et telles que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i=n$. La proposition sera démontrée si nous établissons qu'il ne peut y avoir un plus grand nombre d'idéaux minimaux de A , deux à deux non isomorphes. Or, le nombre maximum d'idéaux minimaux de A ayant cette propriété est égal au nombre des anneaux simples dont A est le composé direct, ou encore au <u>rang</u> du centre Z de A par rapport à K , puisque K est algèbriquement stable.

Or (§6, prop.3) ce rang est égal au nombre des classes d'éléments <u>conjugués</u> dans le groupe $\mathfrak{S}_n$. Nous sommes ramenés à voir que ce nombre est égal au nombre des indices α distincts.

Cherchons pour cela à quelle condition deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ conjuguées. Nous étudierons à cet effet les parties de $[1,n]$ qui sont <u>invariantes</u> par s . Une telle partie est aussi invariante par le sous-groupe cyclique $\Gamma(s)$ <u>engendré</u> par s ; elle est donc une réunion de <u>classes d'intransitivité</u> de ce sous-groupe, et réciproquement, toute réunion de telles classes est invariante par s . Soient donc $C_1, C_2, \ldots, C_h$ les classes d'intransitivité de $\Gamma(s)$; si a est un élément d'une de ces classes C_i , les autres éléments de C_i sont de la forme $s^k(a)$; si ν_i+1 est le plus petit nombre k tel que $s^k(a)=a$, C_i a exactement ν_i éléments, qu'on peut ranger en une suite $a_1=a, a_2=s(a), \ldots, a_{\nu_i}=s^{\nu_i}(a)$, telle que $s(a_k)=a_{k+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant \nu_i-1$, $s(a_{\nu_i})=a_1$.

Inversement, la donnée d'une <u>partition</u> $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$ de l'ensemble $[1,n]$, et d'un <u>ordre</u> des éléments de chaque ensemble C_i, détermine complètement une permutation s pour laquelle les C_i sont les classes d'intransitivité de $\Gamma(s)$: si $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu_i}$ sont les éléments de C_i rangés dans l'ordre choisi, s est déterminé par les relations $s(a_k)=a_{k+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant \nu_i-1$, $s(a_{\nu_i})=a_1$, et les relations analogues dans les autres ensembles C_i .

Remarquons alors que, si t est une permutation quelconque de $\mathfrak{S}_n$, les classes d'intransitivité de $\Gamma(tst^{-1})$ ne sont autres que les ensembles $t(C_i)$; autrement dit, il existe une correspondance biunivoque entre les classes d'intransitivité de $\Gamma(s)$ et celles de $\Gamma(tst^{-1})$, telle que deux classes qui se correspondent aient <u>même nombre d'éléments</u>.

Montrons qu'inversement, si s et s' sont deux permutations telles qu'il y ait correspondance biunivoque entre les classes d'intransitivité C_i de $\Gamma(s)$ et C'_i de $\Gamma(s')$, de sorte que C_i et C'_i aient même nombre d'éléments ν_i , s et s' sont <u>conjuguées</u>. En effet, soient $a_1, \ldots, a_{\nu_i}$ les éléments de C_i rangés dans l'ordre tel que $s(a_k)=a_{k+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant \nu_i-1$;

soient de même $b_1, \dots, b_{\nu_i}$ les éléments de C'_i rangés dans l'ordre tel que $s'(b_k)=b_{k+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant \nu_i - 1$. Si t est la permutation définie par $t(a_k)=b_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant \nu_i$, et les relations analogues pour chacun des C_i , il est clair que $s'=tst^{-1}$, s et s' sont bien conjuguées.

On conclut de ce raisonnement qu'une classe d'éléments conjugués de $\mathfrak{S}_n$ est caractérisée par une suite (ν_i) d'entiers $\geqslant 1$ tels que $\sum_i \nu_i = n$, deux suites correspondant à la même classe si elles ne diffèrent que par l'ordre des termes ; si on impose à la suite (ν_i) d'être <u>décroissante</u>, il y a correspondance biunivoque entre l'énsemble des classes d'éléments conjugués dans $\mathfrak{S}_n$ et l'ensemble des suites décroissantes (ν_i) d'entiers $\geqslant 1$ tels que $\sum_i \nu_i = n$; c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

On observera que les coefficients de c_α sont des entiers ; une base de l'idéal Ac_α par rapport au corps K est donc formée de combinaisons linéaires des $s \in \mathfrak{S}_n$ à coefficients entiers ; inversement, on peut donc trouver une base de A formée de cette base de Ac_α et d'un certain nombre des $s \in \mathfrak{S}_n$ (th. d'échange), et les s restants s'expriment par des combinaisons linéaires des éléments de cette nouvelle base, à coefficients dans le <u>corps premier</u> P contenu dans K . On en conclut que la représentation irréductible correspondant à l'idéal Ac_α est formée de matrices à coefficients dans P ; a fortiori, les <u>caractères</u> du groupe $\mathfrak{S}_n$ sont des éléments de P .

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que, si $\alpha > \beta$, on a $b_\beta u a_\alpha = 0$ quel que soit $u \in A$. En déduire que, si on pose $d_\alpha = b_\alpha a_\alpha$, les idéaux Ad_α sont minimaux et deux à deux non isomorphes.

Montrer que, si $\alpha \neq \beta$, $c_\alpha d_\beta = d_\beta c_\alpha = 0$; en déduire que Ac_α et Ad_α sont isomorphes ; établir directement cette dernière proposition en montrant que $c_\alpha d_\alpha \neq 0$ (se ramener à prouver que $a_\alpha b_\alpha a_\alpha \neq 0$, et et établir ce dernier point en examinant le coefficient de e (élément neutre) dans $a_\alpha b_\alpha a_\alpha$) .

En déduire que $c_\alpha^2 \neq 0$ (remarquer qu'il existe $x \in A$ tel que $d_\alpha = c_\alpha x$).

2) Si on pose $c_\alpha c_\alpha = \lambda_\alpha c_\alpha$, montrer que $\lambda_\alpha = n!/n_\alpha$, où n_α est le nombre de dimensions de l'idéal Ac_α par rapport à K (évaluer de deux manières la trace de l'élément c_α dans la représentation régulière de A , d'une part en prenant pour base de A les n! éléments de $\mathfrak{S}_n$, d'autre part en prenant une base dont n_α des vecteurs forment une base de l'idéal à droite $c_\alpha A$).

§ 8. Représentations matricielles du groupe linéaire et tenseurs irréductibles.

Représentations matricielles rationnelles de $GL_n(K)$. Soit K un corps commutatif de caractéristique 0 (donc infini) ; nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier certaines representations matricielles (relatives à K ou à un surcorps de K) du groupe linéaire à n variables $GL_n(K)$ sur K (que nous identifierons au groupe $L_n(K)$ des matrices inversibles d'ordre n sur K). Nous cherchons donc les applications de la forme $\underline{X} \rightarrow \underline{F}(\underline{X})$ qui, à toute matrice inversible d'ordre n $\underline{X} \in L_n(K)$, font correspondre une autre matrice carrée inversible $\underline{F}(\underline{X})$ à éléments dans K (ou un surcorps Ω de K), d'ordre déterminé (le degré de la représentation), de sorte que $\underline{F}(\underline{XY})=\underline{F}(\underline{X})\underline{F}(\underline{Y})$ quelles que soient $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ dans $L_n(K)$. Nous nous bornerons à étudier les représentations de cette nature dans lesquelles les éléments de F(X) sont des fonctions rationnelles (à coefficients dans Ω) des éléments de $\underline{X}$; nous dirons que ce sont les représentations de type rationnel de $L_n(K)$.

Remarquons tout d'abord que, si $\underline{X}=(\xi_{ij})$, $\underline{Y}=(\eta_{ij})$, la relation $\underline{F}(\underline{XY})=\underline{F}(\underline{X})\underline{F}(\underline{Y})$ doit être vérifiée pour tous les systèmes de valeurs des ξ_{ij} et η_{ij} dans K tels que $\boxed{\xi_{ij}}\neq 0$ et $\boxed{\eta_{ij}}\neq 0$; mais comme K est infini, il résulte du principe d'inconséquence des inégalités algèbriques (chap.IV) que $\underline{F}(\underline{XY})=\underline{F}(\underline{X})\underline{F}(\underline{Y})$ est une identité entre fractions rationnelles, celles qu'on obtient en remplaçant les ξ_{ij} et η_{ij} par des indéterminées x_{ij} , y_{ij} .

Cette remarque va nous permettre de nous ramener au cas où tous les éléments de $\underline{F}(\underline{X})$ sont des polynomes par rapport aux x_{ij} . En effet, réduisons les fractions rationnelles éléments de $\underline{F}(\underline{X})$ à un dénominateur commun $q(\underline{X})$, et soit $p(\underline{X})$ le p.g.c.d. des numérateurs des fractions ainsi obtenues ; on peut donc écrire $\underline{F}(\underline{X})=(p(\underline{X})/q(\underline{X}))\underline{G}(\underline{X})$, où $\underline{G}(\underline{X})$ est une matrice inversible dont les éléments sont des polynomes en x_{ij} , premiers entre eux ; on peut en outre évidemment supposer que $p(\underline{X})$ et $q(\underline{X})$ sont des polynomes en x_{ij} qui sont aussi premiers entre eux. Cela étant, l'identité $\underline{F}(\underline{XY})=\underline{F}(\underline{X})\underline{F}(\underline{Y})$ s'écrit

(1) $\quad p(\underline{XY})q(\underline{X})q(\underline{Y})\underline{G}(\underline{XY})=p(\underline{X})p(\underline{Y})q(\underline{XY})\underline{G}(\underline{X})\underline{G}(\underline{Y})$

Si on considère uniquement les indéterminées x_{ij} , on voit que $q(\underline{X})$ divise tous les éléments de la matrice du second membre de cette inégalité ; il divise donc leur p.g.c.d. , qui est $q(\underline{XY})p(\underline{X})$ (à un facteur près ne dépendant pas des x_{ij}) ; comme il est premier avec $p(\underline{X})$, il divise $q(\underline{XY})$; on voit de même que $q(\underline{Y})$ divise $q(\underline{XY})$; comme $q(\underline{X})$ et $q(\underline{Y})$ sont évidemment premiers entre eux (comme polynomes par rapport aux $2n^2$ indéterminées x_{ij} et y_{ij}), leur produit $q(\underline{X})q(\underline{Y})$ divise par suite $q(\underline{XY})$. Mais inversement, le p.g.c.d. des polynomes éléments de $\underline{G}(\underline{XY})$ est 1 (sans quoi, en prenant pour $\underline{Y}$ la matrice unité, on en conclurait que le p.g.c.d. des éléments de $\underline{G}(\underline{X})$ est différent de 1) ;

donc $q(\underline{XY})$ divise $p(\underline{XY})q(\underline{X})q(\underline{Y})$, et comme il est premier avec $p(\underline{XY})$, il divise $q(\underline{X})q(\underline{Y})$; on a donc $q(\underline{XY})=kq(\underline{X})q(\underline{Y})$, où k est une constante qu'on peut supposer égale à 1 (en remplaçant éventuellement $q(\underline{X})$ par $kq(\underline{X})$). Portant dans (1), on voit de même que $p(\underline{X})p(\underline{Y})$ divise $p(\underline{XY})$; d'autre part, le p.g.c.d. des éléments de la matrice $\underline{G}(\underline{X})\underline{G}(\underline{Y})$ est 1, sans quoi, en spécialisant les x_{ij} ou les y_{ij}, on en conclurait que le p.g.c.d. des éléments de $\underline{G}(\underline{X})$ ou de $\underline{G}(\underline{Y})$ n'est pas constant ; on voit donc que $p(\underline{XY})$ divise $p(\underline{X})p(\underline{Y})$, d'où finalement, en multipliant p par une constante convenable, $p(\underline{XY})=p(\underline{X})p(\underline{Y})$, et par suite $\underline{G}(\underline{XY})=\underline{G}(\underline{X})\underline{G}(\underline{Y})$; on est bien ramené à des représentations dont les matrices ont pour éléments des polynomes en x_{ij}.

Considérons donc une représentation matricielle $\underline{X} \longrightarrow \underline{F}(\underline{X})$ de $L_n(K)$ où les éléments de la matrice $\underline{F}(\underline{X})$ sont des polynomes par rapport aux éléments de $\underline{X}$; nous supposerons en outre que les coefficients de ces polynomes appartiennent à un surcorps algèbriquement stable Ω de K. Nous commencerons par déterminer la forme de la matrice $\underline{F}(\underline{X})$ lorsque $\underline{X}$ est une matrice du centre du groupe $L_n(K)$, c'est-à-dire de la forme $\lambda \underline{I}_n$, où λ parcourt l'ensemble K^* des éléments $\neq 0$ de K. Si on pose $\underline{G}(\lambda)=\underline{F}(\lambda \underline{I}_n)$, l'application $\lambda \longrightarrow \underline{G}(\lambda)$ est une représentation matricielle du groupe multiplicatif K^*. On doit donc avoir $\underline{G}(\lambda)\underline{G}(1+\mu)=\underline{G}(\lambda+\lambda\mu)$ quels que soient $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq -1$; si $\underline{G}(\lambda)=(f_{ij}(\lambda))$, la formule de Taylor, appliquée aux polynomes f_{ij}, permet d'écrire $\underline{G}(\lambda+\xi)=\underline{G}(\lambda)+\xi\underline{G}'(\lambda)+\frac{\xi^2 \underline{G}''}{2}(\lambda)+\ldots$, où on pose $\underline{G}^{(p)}(\lambda)=(f_{ij}^{(p)}(\lambda))$, la somme étant étendue à tous les exposants au plus égaux au plus grand des degrés des f_{ij}. On a donc l'identité

$$\underline{G}(\lambda)\underline{G}(1)+\mu\underline{G}(\lambda)\underline{G}'(1)+\ldots = \underline{G}(\lambda)+\lambda\mu\underline{G}'(\lambda)+\ldots$$

qui doit avoir lieu pour tout $\mu \neq -1$; comme K est infini, c'est une identité algèbrique en μ, qui donne donc, en posant $\underline{P}=\underline{G}'(1)$,

(2) $$\lambda\, \underline{G}'(\lambda)=\underline{G}(\lambda)\underline{P}$$

Par une même similitude sur $\underline{G}(\lambda)$ et sur $\underline{P}$, on peut supposer (Ω étant algèbriquement stable) que $\underline{P}$ est mise sous la forme canonique de Jordan (chap.V) ; nous allons voir que les matrices de Jordan correspondantes sont toutes des matrices à un élément (a), où a est un entier $\geqslant 0$. En effet, supposons par exemple que $\underline{P}$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

L'identité (2) donne alors, en particulier

(3) $$\lambda f'_{11}(\lambda) = af_{11}(\lambda)$$

(4) $$f_{11}(\lambda)+af_{12}(\lambda)=\lambda f'_{12}(\lambda)$$

Ces relations doivent être vérifiées pour tout $\lambda \neq 0$, et sont par suite des identités algèbriques ; comme f_{11} n'est pas identiquement nul (puisque $f_{11}(1)=1$), la relation (3) ne peut être une identité que si $a=m$ est entier et $f_{11}(\lambda)=\lambda^m$; mais alors l'identité (4) ne peut être vérifiée par aucun polynome f_{12}, comme le montre l'examen des termes de plus haut degré aux deux membres.

La matrice $\underline{P}$ étant ainsi ramenée à une matrice <u>diagonale</u> à coefficients entiers $\geqslant 0$, l'identité (2) montre aussitôt que $\underline{G}(\lambda)=\underline{Q}.\underline{E}(\lambda)$, où $\underline{Q}$ est une matrice indépendante de λ, et $\underline{E}(\lambda)$ une matrice diagonale dont tous les éléments sont des puissances entières de λ ;

comme on a $\underline{G}(1)=\underline{E}(1)=\underline{I}$ (matrice unité), il vient $\underline{Q}=\underline{I}$, $\underline{G}(\lambda)=\underline{E}(\lambda)$.

Ecrivons maintenant que les matrices $\underline{E}(\lambda)$ sont permutables avec toutes les matrices $\underline{F}(\underline{X})$ et qu'on a $\underline{F}(\lambda\underline{X})=\underline{E}(\lambda)\underline{F}(\underline{X})$; on peut supposer (en permutant convenablement lignes et colonnes de $\underline{E}(\lambda)$) qu'on a

$$\underline{E}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{m_1}\underline{I}_{k_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^{m_2}\underline{I}_{k_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda^{m_r}\underline{I}_{k_r} \end{pmatrix}$$

où les m_i sont des entiers <u>distincts</u> $\geqslant 0$; écrivant la matrice $\underline{F}(\underline{X})$ sous forme d'un tableau carré $(\underline{F}_{ij}(\underline{X}))$ correspondant aux mêmes partitions des ensembles d'indices que $\underline{E}(\lambda)$, la relation $\underline{E}(\lambda)\underline{F}(\underline{X})=\underline{F}(\underline{X})\underline{E}(\lambda)$ donne, pour $i\neq j$, $\lambda^{m_i}\underline{F}_{ij}(\underline{X})=\lambda^{m_j}\underline{F}_{ij}(\underline{X})$ identiquement en λ , ce qui entraîne $\underline{F}_{ij}(\underline{X})=0$ pour $i\neq j$; $\underline{F}(\underline{X})$ est alors un <u>tableau diagonal</u> de matrices carrées $\underline{F}_{ii}(\underline{X})$, telles que $\underline{F}_{ii}(\lambda\underline{X})=\lambda^{m_i}\underline{F}_{ii}(\underline{X})$: ce qui signifie que les applications $\underline{X}\longrightarrow\underline{F}_{ii}(\underline{X})$ sont des représentations matricielles du groupe $L_n(K)$, telles que les éléments de la matrice $\underline{F}_{ii}(\underline{X})$ soient des polynomes <u>homogènes</u> de même degré par rapport aux éléments de $\underline{X}$. En résumé :

<u>Proposition 1</u>. <u>Toute représentation matricielle $\underline{X}\longrightarrow\underline{F}(\underline{X})$ du groupe $L_n(K)$, telle que les éléments de $F(X)$ soient des polynomes par rapport aux éléments de $\underline{X}$, à coefficients dans un surcorps algèbriquement stable Ω de K , est semblable à une somme directe de représentations $\underline{X}\longrightarrow\underline{F}_i(\underline{X})$, où les éléments de $\underline{F}_i(\underline{X})$ sont des polynomes de même degré et homogènes (à coefficients dans Ω) par rapport aux éléments de X .</u>

<u>Tenseurs irréductibles</u>. Conformément à la prop.1, considérons une représentation matricielle $\underline{X} \rightarrow \underline{F}(\underline{X})$ de $L_n(K)$, où les éléments de $\underline{F}(\underline{X})$ sont des polynomes homogènes de même degré f par rapport aux éléments de $\underline{X}$; nous dirons que f est la <u>hauteur</u> de la représentation considérée. Si $\underline{X}=(\xi_{ij})$, et si $\alpha=(\alpha_h)_{1\leqslant h\leqslant f}$, $\beta=(\beta_h)_{1\leqslant h\leqslant f}$ sont deux suites quelconques de f entiers appartenant à l'intervalle $[1,n]$, nous poserons $\xi_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha_1\beta_1}\xi_{\alpha_2\beta_2}\dots\xi_{\alpha_f\beta_f}$; d'autre part, pour toute permutation $s\in\mathfrak{S}_f$, nous désignerons par $s(\alpha)$ la suite $(\alpha'_h)_{1\leqslant h\leqslant f}$ telle que $\alpha'_h=\alpha_{s^{-1}(h)}$; il est clair alors qu'on a $\xi_{s(\alpha),s(\beta)}=\xi_{\alpha\beta}$ quelle que soit la permutation $s\in\mathfrak{S}_f$. Cela étant, tout polynome homogène de degré f par rapport aux ξ_{ij} peut se mettre d'une seule manière sous la forme $\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\xi_{\alpha\beta}$, avec la condition que $a_{s(\alpha),s(\beta)}=a_{\alpha\beta}$ quelle que soit $s\in\mathfrak{S}_f$ (parce que la division par tout entier est possible dans K).

Remarquons encore que les $\xi_{\alpha\beta}$ ne sont autres que les éléments de la <u>puissance tensorielle</u> $f^{\text{ème}}$ $\underline{X}^{(f)}$ de $\underline{X}$; si $\underline{Y}=(\eta_{ij})$ est une autre matrice de $L_n(K)$, et $\underline{Z}=\underline{XY}=(\zeta_{ij})$, on a donc $\zeta_{\alpha\gamma}=\sum_{\beta}\xi_{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma}$ quelles que soient les suites α et γ, β parcourant dans la somme l'ensemble de toutes les suites distinctes de f entiers appartenant à $[1,n]$; cela exprime en effet que $\underline{X}\rightarrow\underline{X}^{(f)}$ est une <u>représentation</u> de $L_n(K)$ sur sa puissance tensorielle $f^{\text{ème}}$ (chap.II).

Mettons alors chaque élément ρ_{hk} de $\underline{F}(\underline{X})$ sous la forme $\rho_{hk}=\sum_{\alpha,\beta}a_{hk\alpha\beta}\xi_{\alpha\beta}$, avec $a_{hk,s(\alpha),s(\beta)}=a_{hk\alpha\beta}$ quelle que soit $s\in\mathfrak{S}_f$. Le fait que $\underline{X}\rightarrow\underline{F}(\underline{X})$ est une représentation s'exprime par les identités

$$(5) \qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{h\ell\alpha\beta}\, \xi_{\alpha\gamma} \eta_{\gamma\beta} = \sum_{k,\alpha,\beta,\gamma,\delta} a_{hk\alpha\beta}\, a_{k\ell\gamma\delta}\, \xi_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta}$$

qui doivent être valables pour toutes les valeurs des ξ_{ij} et η_{ij} satisfaisant aux relations $\boxed{\xi_{ij}} \neq 0$ et $\boxed{\eta_{ij}} \neq 0$; d'après le principe d'inconséquence des inégalités algèbriques, ces relations sont donc des identités algèbriques, c'est-à-dire que les coefficients des termes de mêmes degrés par rapport aux ξ_{ij} et η_{ij} aux deux membres de (5) doivent être égaux. On peut encore exprimer ce résultat de la manière suivante ; si on remplace aux deux membres de chacune des relations (5) tous les $\xi_{s(\alpha),s(\beta)}$ se déduisant d'un même $\xi_{\alpha\beta}$ par les permutations $s \in \mathfrak{S}_f$ par <u>une même indéterminée</u> $x_{\alpha\beta}$, et de même tous les $\eta_{s(\alpha),s(\beta)}$ par une même indéterminée $y_{\alpha\beta}$, les polynomes par rapport aux $x_{\alpha\beta}$ et $y_{\alpha\beta}$ obtenus aux deux membres de (5) doivent être <u>identiques</u>.

Soit alors A l'ensemble des matrices carrées $(u_{\alpha\beta})$ d'ordre n^f sur le corps K , soumises aux conditions $u_{s(\alpha),s(\beta)} = u_{\alpha\beta}$ quels que soient les suites α, β et la permutation $s \in \mathfrak{S}_f$; nous dirons pour abréger que A est l'ensemble des matrices <u>bisymétriques</u> d'ordre n^f . A est une algèbre sur K , car si $(u_{\alpha\beta})$ et $(v_{\alpha\beta})$ sont deux matrices de A , on a $\sum_\beta u_{s(\alpha),\beta} v_{\beta,s(\gamma)} = \sum_\beta u_{s(\alpha),s(\beta)} v_{s(\beta),s(\gamma)} = \sum_\beta u_{\alpha\beta} v_{\beta\gamma}$. Le résultat précédent, joint au fait que les éléments de $\underline{F}(\underline{X})$ sont linéaires par rapport aux $\xi_{\alpha\beta}$, signifie que, si pour toute matrice $\underline{U} = (u_{\alpha\beta})$ de A , on désigne par $\underline{F}(\underline{U})$ la matrice dont les éléments sont $\sum_{\alpha,\beta} a_{hk\alpha\beta} u_{\alpha\beta}$, l'application $\underline{U} \to \underline{F}(\underline{U})$ est une <u>représentation matricielle</u> de l'algèbre A . Inversement, il est clair que toute représentation matricielle $\underline{U} \to \underline{F}(\underline{U})$ de A s'obtient d'une manière et d'une seule à partir d'une représentation de hauteur f de $L_n(K)$, la matrice correspondant à $\underline{X} \in L_n(K)$ n'étant autre que $\underline{F}(\underline{X}^{(f)})$.

110

Il y a donc correspondance biunivoque entre représentations de hauteur f de $L_n(K)$ et représentations de l'algèbre A ; dans cette correspondance, à une représentation irréductible (resp. complètement réductible) correspond évidemment une représentation irréductible (resp. complètement réductible). Nous sommes ainsi ramenés à étudier les représentations de l'algèbre A .

Il est facile de voir, d'ailleurs que, dans l'anneau des matrices carrées d'ordre n^f sur K , A est le <u>sous-anneau engendré par les matrices $\underline{X}^{(f)}$</u> , où $\underline{X}$ parcourt $L_n(K)$. De façon plus précise, A est le <u>sous-espace vectoriel</u> V engendré par ces matrices. Il suffit pour le voir de montrer que toute relation de la forme

(5 bis) $$\sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} = 0$$

vérifiée lorsqu'on remplace les $u_{\alpha\beta}$ par les termes $\xi_{\alpha\beta}$ d'une matrice $\underline{X}^{(f)}$ quelconque, est encore vérifiée quand on remplace les u par les termes d'une matrice bisymétrique quelconque (V étant l'intersection des hyperplans qui contiennent toutes les matrices $\underline{X}^{(f)}$) .

Or, si, dans (5 bis), on remplace les $\xi_{\alpha\beta}$ par leur expression en fonction des ξ_{ij} , on obtient un lynome par rapport à ces variables, qui doit être nul lorsque $\boxed{\xi_{ij}} \neq 0$, donc qui est identiquement nul, ce qui donne les relations $\sum_{s \in \mathfrak{S}_f} b_{s(\alpha),s(\beta)}=0$ pour tout couple (α,β), et démontre par suite la proposition, d'après la définition des matrices de A .

Nous allons d'abord interprèter autrement la définition de l'algèbre A . Les matrices bisymétriques correspondent à des endomorphismes de la puissance tensorielle $E^{(f)}$ de l'espace vectoriel $E=K^n$; si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la base canonique de E , la base canonique de $E^{(f)}$ est formée des n^f tenseurs $e_\alpha=e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_f}$, α parcourant l'ensemble de toutes les suites

de f entiers appartenant à $[1,n]$; l'endomorphisme g correspondant à une matrice $\underline{U}=(u_{\alpha\beta})$ est donc défini par $g(e_\alpha)=\sum_\beta u_{\alpha\beta}e_\beta$. Cela étant, pour toute permutation $s\in\mathfrak{S}_f$, posons $s.e_\alpha=e_{s(\alpha)}$, ce qui définit un automorphisme $x\to s.x$ de l'espace $E^{ⓕ}$; on a $g(s.e_\alpha)=g(e_{s(\alpha)})=$
$=\sum_\beta u_{s(\alpha),\beta}e_\beta=\sum_\beta u_{s(\alpha),s(\beta)}e_{s(\beta)}=s.(\sum_\beta u_{s(\alpha),s(\beta)}e_\beta)$. Dire que la matrice $\underline{U}$ est bisymétrique équivaut à dire que $g(s.e_\alpha)=s.g(e_\alpha)$ quel que soit α , et par suite $g(s.x)=s.g(s)$ pour tout $x\in E^{ⓕ}$ et tout $s\in\mathfrak{S}_f$. Autrement dit, les endomorphismes g qui correspondent aux matrices bisymétriques sont caractérisés par la condition d'être <u>permutables avec tous les automorphismes</u> $x\to s.x$, dans l'anneau $\mathcal{L}(E^{ⓕ})$ des endomorphismes de l'espace vectoriel $E^{ⓕ}$. Il revient naturellement au même de dire que A est le sous-anneau de $\mathcal{L}(E^{ⓕ})$ formé des éléments de cet anneau permutables avec tous ceux du <u>sous-anneau</u> B_o engendré par les automorphismes $x\to s.x$; ou encore (puisque A et B_o contiennent évidemment l'élément unité de $\mathcal{L}(E^{ⓕ})$, et par suite aussi son centre), que A est l'<u>algèbre commutante</u> de la sous-algèbre B_o de $\mathcal{L}(E^{ⓕ})$.

Or, si à tout élément $\sum_s\lambda_s.s$ de l'algèbre B du groupe $\mathfrak{S}_f$ relative au corps K , on fait correspondre l'endomorphisme $x\to\sum_s\lambda_s s.x$ de $E^{ⓕ}$, on voit aussitôt (en vertu de la relation $e_{t(s(\alpha))}=e_{ts(\alpha)}$) qu'on définit une <u>représentation</u> de l'algèbre B <u>sur</u> l'algèbre B_o . Comme K est de caractéristique 0, B est <u>semi-simple</u> ; B_o , étant isomorphe à une algèbre quotient de B , est aussi semi-simple. Mais alors, comme $\mathcal{L}(E^{ⓕ})$ est une algèbre <u>simple</u>, on déduit du th.3 du § 4 que la sous-algèbre A des matrices bisymétriques est, elle aussi, <u>semi-simple</u>. Résumant les résultats obtenus jusqu'ici, on voit donc (en tenant compte du cor. de la prop.2 du § 5) que :

<u>Théorème 1</u>. <u>Toute représentation matricielle $\underline{X} \rightarrow \underline{F}(\underline{X})$</u> du groupe $L_n(K)$, <u>dans laquelle les éléments de $\underline{F}(\underline{X})$ sont des fonctions rationnelles</u> (à coefficients dans un surcorps algèbriquement stable de K) <u>des éléments de $\underline{X}$, est complètement réductible</u>.

<u>Remarques</u>. 1) L'hypothèse que les éléments de $\underline{F}(\underline{X})$ sont fonctions <u>rationnelles</u> des éléments de $\underline{X}$, est essentielle pour la validité de ce théorème, comme le montre l'exemple suivant : si on prend pour K le corps des nombres réels, la représentation

$$\underline{X} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \log\left|\boxed{\underline{X}}\right| & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{du groupe } L_n(R)$$

n'est pas complètement réductible.

2) Deux représentations irréductibles de hauteurs différentes du groupe $L_n(K)$ ne peuvent jamais être semblables, car en restreignant ces représentations au centre de $L_n(K)$, on aurait des représentations identiques de ce centre, ce qui est absurde d'après la forme de ces représentations déterminée plus haut, et la définition de la hauteur d'une représentation.

On voit en outre que les représentations irréductibles de hauteur f de $L_n(K)$ sont fournies par les représentations irréductibles de l'algèbre semi-simple A ; nous allons étudier de plus près ces dernières.

Compte tenu du fait que le corps K est commutatif, l'étude générale de l'algèbre commutante d'une sous-algèbre semi-simple d'une algèbre simple, faite au §4, conduit aux résultats suivants : l'espace vectoriel $E^{(f)}$, considéré comme <u>module à gauche par rapport à l'anneau A</u> , est complètement réductible ; de façon plus précise, si $B_o = \sum_i \mathcal{l}_i$ est une décomposition de l'anneau semi-simple B_o en idéaux à gauche minimaux, et si $1 = \sum_i e_i$ est la décomposition correspondante de l'élément unité de B_o , $E^{(f)}$ est somme directe des sous-modules simples $e_i.E^{(f)}$; en outre, pour chaque idéal à gauche minimal de l'algèbre A , il existe au moins un indice i tel que $e_i.E^{(f)}$ soit isomorphe à cet idéal.

On voit donc qu'on obtiendra <u>toutes</u> les représentations irréductibles de l'algèbre A en prenant une famille ($\mathfrak{l}_\lambda$) d'idéaux à gauche minimaux de B_o , non isomorphes deux à deux et telle que tout idéal à gauche minimal de B_o soit isomorphe à un $\mathfrak{l}_\lambda$; si d_λ est un élément de $\mathfrak{l}_\lambda$ tel que $\mathfrak{l}_\lambda = B_o d_\lambda$, les $F_\lambda = d_\lambda .E^{(f)}$ sont des A-modules simples correspondant à toutes les représentations irréductibles de A . En effet, on peut supposer qu'il existe un indice i tel que $\mathfrak{l}_\lambda = B_o e_i$, donc il existe u et v dans B_o tels que $d_\lambda = ue_i$, $e_i = vd_\lambda$; on a $F_\lambda = u.(e_i.E^{(f)})$ et $e_i.E^{(f)} = v.F_\lambda$; mais, comme A est l'algèbre commutante de B_o , l'application $x \to u.x$ (resp. $x \to v.x$) est une représentation du A-module $E^{(f)}$ dans lui-même ; comme par cette représentation, F_λ est l'image de $e_i.E^{(f)}$, (resp. $e_i E^{(f)}$ l'image de F_λ), on en conclut que F_λ est un A-module simple isomorphe à $e_i.E^{(f)}$.

Au lieu de prendre pour les $\mathfrak{l}_\lambda$ des idéaux de B_o , on peut aussi bien prendre des idéaux de B ; la seule différence est qu'ici un certain nombre des F_λ seront <u>nuls</u> (à savoir ceux qui correspondent aux idéaux à gauche de B dont l'image est nulle dans B_o) .

Or, nous avons déterminé au §7 une telle famille d'idéaux à gauche minimaux de B : ce sont les idéaux $\mathfrak{l}_\alpha = Bc_\alpha$, correspondant aux schémas d'Young Σ_α , α parcourant l'ensemble de toutes les suites décroissantes (α_h) telles que $\sum_{h=1}^{r} \alpha_h = f$, où Σ_α est un quelconque des schémas d'Young d'indice α ; les A-modules simples $F_\alpha = c_\alpha .E^{(f)}$ non nuls fourniront toutes les représentations irréductibles de l'algèbre A , et par suite toutes les représentations irréductibles de hauteur f du groupe $L_n(K)$.

Voyons de façon plus précise comment sont formés les tenseurs qui composent le sous-espace tensoriel F_a de $E^{(f)}$: ce sont tous les tenseurs $c_a.x$, où x parcourt $E^{(f)}$; on peut naturellement se borner au cas où $x=x_1x_2...x_f$ est le produit symbolique de f vecteurs quelconques $x_i \in E$ $(1 \leqslant i \leqslant f)$, et même au cas où les x_i sont des vecteurs d'une <u>base</u> de E ; les tenseurs obtenus formerons un <u>système de générateurs de</u> F_a . Avec les notations du § 7, on a $c_a = a_a b_a$; il faut donc former successivement $b_a.x$ et $a_a.(b_a.x)$.

On peut toujours supposer que le schéma $\sum_a$ choisi est le suivant

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \beta_1+1 & \beta_1+\beta_2+1 & \ldots\ldots & \beta_1+\beta_2+..+\beta_{t-1}+1 \\
2 & \beta_1+2 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \beta_1+\beta_2+..+\beta_t=f \\
\vdots & \vdots & \beta_1+\beta_2+\beta_3 & & \\
\beta_1 & \beta_1+\beta_2 & & &
\end{array}$$

en désignant par $\beta_1,\beta_2,..,\beta_t$ les longueurs des colonnes de $\sum_a$ $(t=a_1)$. On peut donc écrire $x=y_1y_2..y_t$, avec $y_1=x_1..x_{\beta_1}$, $y_2=x_{\beta_1+1}...x_{\beta_1+\beta_2}$,...., $y_t=x_{\beta_1+..+\beta_{t-1}+1}...x_{\beta_1+...+\beta_t}$. Par définition, on a $b_a = \sum_q \varepsilon_q.q$, où q parcourt le groupe $C(\sum_a)$ des permutations laissant invariantes les colonnes de $\sum_a$. Or, toute permutation $q \in C(\sum_a)$ peut s'écrire $q=q_1q_2..q_t$, où $q_i(m)=q(m)$ si m appartient à la colonne d'indice i , $q_i(m)=m$ dans le cas contraire ; dans ce produit, q_i parcourt le groupe de toutes les permutations des éléments de la i-ème colonne (isomorphe à $\mathfrak{S}_{\beta_i}$) ; il en résulte qu'on a $b_a = \prod_{i=1}^{t}(\sum_{q_i} \varepsilon_{q_i} q_i)$, q_i parcourant toutes les permutations des nombres de la i-ème colonne. D'après la définition des q_i , on a donc

$$b_a.x = \prod_{i=1}^{t}(\sum_{q_i} \varepsilon_{q_i}(q_i.y_i)) = \prod_{i=1}^{t}\Delta(y_i)$$

en désignant en général par $\Delta(y)$, pour un tenseur y d'ordre k, le tenseur y antisymétrisé, c'est-à-dire le tenseur antisymétrique d'ordre k qui correspond canoniquement à y (chap.III). Pour obtenir ensuite $a_\alpha.(b_\alpha.x)$, il faut d'après la définition de a_α faire la somme de tous les tenseurs $p.(b_\alpha.x)$, où p parcourt l'ensemble des permutations laissant invariantes les lignes de Σ_α. Le résultat final est donc le suivant : posons $p.x=x'_1x'_2\ldots x'_f$, avec $x'_i=x_{p^{-1}(i)}$, puis désignons par $y_i^{(p)}$ le tenseur d'ordre β_i

$$x'_{\beta_1+\ldots+\beta_{i-1}+1}x'_{\beta_1+\ldots+\beta_{i-1}+2}\ldots x'_{\beta_1+\ldots+\beta_i}$$

Avec ces notations, on a

$$c_\alpha.x = \sum_p \Big(\prod_{i=1}^{t} \Delta(y_i^{(p)})\Big) \tag{6}$$

On sait (chap.III) qu'un tenseur antisymétrique d'ordre k sur un espace vectoriel de dimension $<k$ est nul ; la formule précédente prouve donc tout d'abord qu'on a $F_\alpha=0$ pour tous les indices α tels que $\beta_1>n$, autrement dit, pour les indices $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ formés de suites de plus de n termes.

Au contraire, si $r=\beta_1\leqslant n$, F_α n'est pas réduit à 0 ; en effet, partons du tenseur x pour lequel les x_i dont l'indice parcourt la i-ème ligne du schéma Σ_α sont tous égaux à un même vecteur a_i, les a_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ forment un système libre. Alors on a $y_i^{(p)}=y_i$ quelle que soit la permutapion $p\in L(\Sigma_\alpha)$, et par suite $c_\alpha.x$ est un multiple entier de $b_\alpha.x$; mais en affectuant le produit $\prod_{i=1}^{t}\Delta(y_i)$ et rapportant E à une base dont les a_i sont r vecteurs, on voit alors que deux termes quelconques de la somme obtenue ne peuvent jamais se réduire, donc ce tenseur est $\neq 0$.

__Représentations de degré 1.__ On dit que les tenseurs qui forment le A-module simple F_α sont des __tenseurs irréductibles__ de __signature__ $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$; d'après ce qui précède, on peut toujours supposer que $r\leq n$, et il est commode de prendre toujours $r=n$, étant entendu qu'on complète au besoin la suite d'indices α par des zéros. On dit aussi que α est la __signature__ de la représentation irréductible de $L_n(K)$ correspondant à F_α .

Nous allons chercher pour quelle signature α la représentation irréductible de $L_n(K)$ correspondant au module F_α est de degré 1 , ou, ce qui revient au même, pour quelles signatures F_α est un sous-espace vectoriel à __une__ dimension de $E^{(f)}$.

Remarquons d'abord que la représentation irréductible correspondant à un F_α est l'application qui, à tout automorphisme u de E , fait correspondre l'automorphisme u_α obtenu par restriction à F_α de l'automorphisme $u^{(f)}$, puissance tensorielle f-ième de u ; autrement dit, u_α fait correspondre au tenseur $c_\alpha.x$ donné par la formule (6), le tenseur $\sum_p \left(\prod_{i=1}^{s} \Delta(u^{(\beta_i)}(y_i^{(p)}))\right)$. Cela étant, considérons le cas où la première colonne du schéma Σ_α a pour longueur n ; alors, si __a__ est le déterminant de l'automorphisme u , on a, pour tout tenseur y d'ordre n, $\Delta(u^{(n)}(y))=a.\,\Delta(y)$ (chap.III) ; on en conclut que, dans la matrice qui correspond à u_α , tous les termes contiennent le déterminant __a__ en facteur ; quand on met __a__ en facteur, il reste une matrice qui correspond à la restriction de $u^{(f-n)}$ au sous-espace de $E^{(f-n)}$ formé des tenseurs obtenus en supprimant, dans la somme (6), tous les facteurs $\Delta(y_1^{(p)})$ des termes de cette somme. Or, il est clair que ce sous-espace est invariant par les automorphismes $u^{(f-n)}$, donc est un module par rapport à l'anneau des matrices bisymétriques d'ordre n^{f-n} ; il est en outre contenu dans le module simple $F_{\alpha'}$, correspondant au schéma d'Young $\Sigma_{a'}$, obtenu à partir de Σ_a par <u>suppression de la première colonne</u> ; il est par suite <u>identique</u> à $F_{a'}$. Nous arrivons donc au résultat suivant :

<u>Proposition 2</u>. <u>Si le schéma d'Young</u> Σ_a <u>a ses e premières colonnes de longueur n , la représentation</u> $\underline{X} \to \underline{F}(\underline{X})$ de $L_n(K)$ <u>correspondant à</u> Σ_a <u>est semblable à la représentation</u>

$$\underline{X} \to \boxed{\underline{X}}^e . \underline{G}(\underline{X})$$

<u>où</u> $\underline{X} \to \underline{G}(\underline{X})$ <u>est la représentation qui correspond au schéma</u> $\Sigma_{a'}$, <u>obtenu par suppression des e premières colonnes de</u> Σ_a .

On voit donc que toute représentation irréductible de $L_n(K)$ est <u>de même degré</u> qu'une représentation correspondant à un schéma dont toutes les colonnes ont une longueur $< n$, ou encore une représentation de signature $a=(a_1,\ldots,a_n)$ où $a_n=0$. On peut donc se limiter à considérer les représentations de cette nature pour chercher les représentations irréductibles de degré 1 ; or, il n'y a <u>aucune</u> représentation qui ait cette propriété, en dehors de la représentation qui fait correspondre l'unité à toute matrice. En effet, reprenons les tenseurs x pour lesquels les x_i dont l'indice appartient à la i-ème ligne de Σ_a sont tous égaux à un même vecteur a_i , les a_i étant linéairement indépendants ; les tenseurs $c_a.x$ correspondant à ces tenseurs x forment un espace vectoriel ayant plus d'une dimension, comme on le voit en remplaçant dans x un des a_i par un vecteur b_i indépendant des a_i (vecteur qui existe, puisque le nombre des a_i est $< n$). En résumé :

<u>Proposition 3</u>. <u>Toute représentation du premier degré</u> $\underline{X} \to p(\underline{X})$ <u>du groupe</u> $L_n(K)$, <u>telle que</u> $p(X)$ <u>soit un polynome par rapport aux éléments de la matrice</u> $\underline{X}$, <u>est de la forme</u> $\underline{X} \to \boxed{\underline{X}}^e$, <u>où</u> e <u>est un entier</u> $\geqslant 0$.

Cette proposition, jointe au th.1, résout complètement le problème posé au début de ce paragraphe :

<u>Théorème 2. Toute représentation irréductible $\underline{X} \to \underline{F}(\underline{X})$ du groupe</u> $L_n(K)$, <u>dans laquelle les éléments de $\underline{F}(\underline{X})$ sont des fonctions rationnelles des éléments de $\underline{X}$, est semblable à une représentation de la forme</u>

$$(7) \qquad \underline{X} \to \boxed{\underline{X}}^e \, \underline{G}(\underline{X})$$

<u>où e est un entier positif ou négatif, et $\underline{X} \to \underline{G}(\underline{X})$ une représentation de signature</u> $(\alpha_1,..,\alpha_n)$, <u>avec</u> $\alpha_n=0$.

On dit que la représentation (7) est une représentation de signature $(\alpha_1+e,\alpha_2+e,...,e)$; à toute suite décroissante $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ de n entiers <u>positifs ou négatifs</u> correspond donc une représentation irréductible de $L_n(K)$, et (à une similitude près) une seule, deux représentations de signatures différentes n'étant jamais semblables.

Le produit kroneckérien de deux représentations de $L_n(K)$ de type rationnel est évidemment encore une représentation de même type ; en particulier, si on considère le produit kroneckérien de deux classes irréductibles (de type rationnel), on obtient une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'un certain nombre de classes irréductibles ; le calcul de ces coefficients peut se faire à l'aide des <u>caractères</u> des deux classes dont on fait le produit, et on montre qu'ils sont entièrement déterminés par les signatures de ces deux classes ; nous n'abordons pas ce calcul dans cet ouvrage.

<u>Contragrédiente d'une représentation irréductible</u>. La contragrédiente (§ 6) d'une représentation de type rationnel de $L_n(K)$ est évidemment encore de type rationnel ; si on considère une représentation irréductible de signature $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_n)$, sa contragrédiente est encore une représentation irréductible ; nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 4. La contragrédiente d'une représentation de signature $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est une représentation de signature $(-\alpha_n,\dots,-\alpha_1)$.

La démonstration reposera sur une propriété élémentaire des caractères des représentations irréductibles de $L_n(K)$ (comme nous l'avons dit plus haut, nous n'abordons pas le calcul complet de ces caractères).

Considérons d'abord le cas où $\alpha_n \geqslant 0$. Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E, choisie une fois pour toutes. On sait que le sous-espace F_α des tenseurs irréductibles de signature α est engendré par les tenseurs $c_\alpha . x$ où x parcourt l'ensemble de tous les produits symboliques de f vecteurs pris parmi les a_i. On peut donc trouver une base de F formé d'un certain nombre de tenseurs $c_\alpha . x_h$ $(1\leqslant h\leqslant r)$ du type précédent ; désignons par λ_{ih} le nombre des vecteurs égaux à a_i dans le produit symbolique x_h ; on a $\lambda_{ih}\geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ih}=f$; nous dirons que la suite $\lambda_h=(\lambda_{1h},\lambda_{2h},\dots,\lambda_{nh})$ est le poids du tenseur $c_\alpha . x_h$.

Considérons alors l'automorphisme u de E défini par les relations $u(a_i)=t_i a_i$, les t_i étant n éléments arbitraires de K : u, rapporté à la base (a_i), correspond à la matrice diagonale $\underline{T}$, dont la diagonale est formée de n éléments arbitraires t_i. On a $u^{(f)}(c_\alpha . x_h)= t_1^{\lambda_{1h}}t_2^{\lambda_{2h}}\dots t_n^{\lambda_{nh}}(c_\alpha . x_h)$; autrement dit, la matrice $\underline{T}_\alpha$ qui correspond à $\underline{T}$ dans la représentation de $L_n(K)$ de signature α, est encore une matrice diagonale, dont la diagonale est formée des produits $t_1^{\lambda_{1h}}t_2^{\lambda_{2h}}\dots t_n^{\lambda_{nh}}$.

On en conclut que le caractère de T dans cette représentation est le polynome en $t_1,t_2,\dots,t_n$

$$(8)\qquad \chi_\alpha(\underline{T}) = \sum_{h=1}^{r} t_1^{\lambda_{1h}}t_2^{\lambda_{2h}}\dots t_n^{\lambda_{nh}}$$

Ordonnons lexicographiquement les poids des tenseurs $c_\alpha . x$ en posant $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) < (\mu_1,\ldots,\mu_n)$ si, pour le plus petit indice i tel que $\lambda_i \neq \mu_i$, on a $\lambda_i < \mu_i$. Pour cette relation d'ordre, le <u>plus grand</u> des poids des tenseurs $c_\alpha . x$ non nuls lorsque x parcourt l'ensemble des produits symboliques de f vecteurs pris parmi les a_i) est $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. En effet, si dans $x=z_1 z_2 \ldots z_f$ il y a plus de α_1 facteurs z_i égaux à a_1, les indices i ayant cette propriété, considérés comme des éléments du schéma Σ_α, sont tels que toute colonne du schéma contient au moins deux de ces indices, et il en est encore ainsi pour tout schéma $p.\Sigma_\alpha$. La formule (6) prouve alors que $c_\alpha . x=0$. Si α_1 des facteurs z_i sont égaux à a_1, on peut toujours supposer, par une permutation laissant invariantes les colonnes de Σ_α, que les indices de ces facteurs sont ceux de la première ligne de Σ_α ; le même raisonnement prouve alors qu'il ne peut y avoir plus de α_2 autres facteurs égaux à a_2, et s'il y en a exactement α_2, on peut supposer que leurs indices forment la seconde ligne de Σ_α. On poursuit le raisonnement par récurrence, et on voit que le plus grand poids possible sera obtenu en prenant, dans x, tous les facteurs dont l'indice forme la k-ième ligne de Σ_α, égaux à a_k ; nous avons déjà vu ci-dessus que le tenseur $c_\alpha . x$ correspondant est bien $\neq 0$.

De la même manière, on prouve que le <u>plus petit</u> des poids des tenseurs $c_\alpha . x$ non nuls est $(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)$. Comme on peut toujours prendre une base de F_α contenant un tenseur de plus grand poids (ou un tenseur de plus petit poids), et que le caractère $\chi_\alpha(\underline{T})$ est indépendant de la base choisie, on voit que, dans le polynome (8), dont on ordonne lexicographiquement les degrés des termes, le plus grand des degrés (pour cet ordre) est $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ et le plus petit $(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)$.

Il est immédiat que ce résultat est encore valable lorsque on ne suppose plus nécessairement α_n positif, en vertu de la formule (7).

Cela étant, comme $\underline{T}_\alpha$ est une matrice diagonale, sa contragrédiente $\check{\underline{T}}_\alpha$ est identique à son inverse $\underline{T}_\alpha^{-1}$; donc le caractère de $\underline{T}$ dans la représentation contragrédiente de celle de signature α s'obtient en remplaçant dans le polynome (8) chacun des exposants λ_{ih} par son opposé ; il est immédiat alors que le plus grand des degrés des monômes qui composent cette somme est $(-\alpha_n,\ldots,-\alpha_1)$, d'où la proposition.

§ 9. Invariants et covariants des groupes linéaires.

Covariants vectoriels d'un groupe. Considérons un groupe Γ , et deux représentations matricielles de ce groupe : on suppose donc donnés (§ 6) deux espaces vectoriels F et G sur un corps K, et pour chacun d'eux une loi externe $(\sigma,x) \to \sigma.x$ dont Γ est le domaine d'opérateurs, telle que $x \to \sigma.x$ soit un automorphisme u_σ (resp. v_σ) de l'espace vectoriel F (resp. G), et l'application $\sigma \to u_\sigma$ (resp. $\sigma \to v_\sigma$) une représentation de Γ dans le groupe des automorphismes de F (resp. G). Conformément aux définitions générales, (chap.1, § 7) si f est une application de F dans G , on dira que $f(x) \in G$ est un covariant de l'argument $x \in F$ (ou du vecteur générique de F) si, quel que soit $\sigma \in \Gamma$ et $x \in F$, on a identiquement $f(u_\sigma(x))=v_\sigma(f(x))$, ou encore

$$f(\sigma.x)=\sigma.f(x) \tag{1}$$

Les covariants particuliers du groupe Γ définis de cette façon sont appelés covariants vectoriels de Γ ; lorsque G a une dimension, et qu'on pose $f(x)=\lambda(x).a$, où a engendre G , on dit que la fonction scalaire λ est un invariant (vectoriel) relatif du groupe Γ : on a dans ce cas $\lambda(\sigma.x)=d(\sigma)\lambda(x)$, où $d(\sigma)$ est un scalaire (le **multiplicateur** de l'invariant relatif λ), tel que $\sigma \to d(\sigma)$ soit une **représentation** de Γ ; en particulier, si $d(\sigma)=1$ quel que soit σ, λ est un **invariant** du groupe Γ au sens défini au chap.I, § 7 : on dit (pour préciser) que c'est un **invariant** (vectoriel) **absolu**.

On aura souvent à considérer le cas où l'espace E est un **produit** de plusieurs espaces vectoriels E_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ dont chacun est muni d'une loi externe ayant Γ comme groupe d'opérateurs, la loi externe sur E étant le produit des lois externes sur les E_i. Un covariant de $x=(x_1,\dots,x_h)$ est alors une fonction f des composantes des h vecteurs x_i, telle que

$$f(\sigma.x_1,\sigma.x_2,\dots,\sigma.x_h) = \sigma.f(x_1,\dots,x_h)$$

On dit que f est un **covariant simultané** des h vecteurs x_i.

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que le corps K est de caractéristique 0 (donc est infini), et nous ne considérerons que des covariants vectoriels f(x) tels que les composantes de f(x) (relatives à une base quelconque de G) soient des **fonctions rationnelles** des composantes de x (relatives à une base quelconque de F), à coefficients dans K ; nous dirons que ces covariants sont **de type rationnel**. Nous allons voir qu'on peut ramener leur recherche à un problème plus simple.

Proposition 1. *Tout covariant de type rationnel d'un groupe Γ est de la forme $g(x)/p(x)$, où $g(x)$ est un covariant dont les composantes sont des polynomes par rapport aux composantes de x, et p(x) un invariant relatif, qui est aussi un polynome par rapport aux composantes de x.*

Soit f(x) un covariant de type rationnel, élément de l'espace vectoriel G à n dimensions ; on peut mettre ses composantes sous la forme $p(x)r_i(x)/q(x)$, où p et q sont des polynomes premiers entre eux, et les r_i sont n polynomes premiers entre eux dans leur ensemble. La relation (1) équivaut à un système de n identités scalaires

$$\frac{p(x)}{q(x)} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sigma)\, r_j(x) = \frac{p(\sigma.x)}{q(\sigma.x)}\, r_i(\sigma.x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

qu'on peut écrire aussi

$$(2) \quad p(x)q(\sigma.x) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sigma) r_j(x) = p(\sigma.x)q(x)r_i(\sigma.x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Comme K est infini, ces identités sont des identités algèbriques ; p(x) divise donc les seconds membres de ces identités, et par suite leur p.g.c.d. $p(\sigma.x)q(x)$; comme il est premier avec q(x), il divise $p(\sigma.x)$ et comme il est de même degré que ce dernier, on a $p(\sigma.x)=d(\sigma)p(x)$, où $d(\sigma)$ est un scalaire ; on déduit de cette identité que $d(\sigma\sigma')p(x)=d(\sigma)p(\sigma'.x)=d(\sigma)d(\sigma')p(x)$, donc $\sigma \to d(\sigma)$ est une représentation de Γ dans le groupe multiplicatif de K , p(x) est un invariant relatif de Γ . On voit de même que $q(\sigma.x)$ divise q(x), donc, par le même raisonnement, que q est un invariant relatif de Γ , d'où la proposition.

Soit donc f(x) un covariant dont les composantes sont des polynomes de degré $\leqslant r$ par rapport aux composantes de x ; en décomposant ces composantes en polynomes <u>homogènes</u>, on peut mettre f sous la forme $f_0+f_1+\dots+f_r$, où $f_k(x)$ est un vecteur dont les composantes sont des polynomes homogènes de degré k par rapport aux composantes de x .
La relation (1) donne alors

$$f_0+f_1(\sigma.x)+\dots+f_r(\sigma.x)=\sigma.f_0+\sigma.f_1(x)+\dots+\sigma.f_r(x)$$

Cette relation est une identité en σ et x ; remplaçant x par λx , où λ décrit K , on en tire l'identité en σ , λ et x

$$f_0+\lambda f_1(\sigma.x)+\dots+\lambda^r f_r(\sigma.x) = \sigma.f_0+\lambda(\sigma.f_1(x))+\dots+\lambda^r(\sigma.f_r(x))$$

Comme K est infini, cette identité en λ est une identité algèbrique, et par suite les f_k sont des <u>covariants</u>. On peut donc se restreindre à ne considérer que des covariants vectoriels dont les composantes sont des <u>polynomes homogènes de même degré</u> r par rapport aux composantes de x ; quand nous parlerons dans ce qui suit de covariants, sans préciser, c'est toujours de cevariants de cette nature qu'il s'agira ; un tel covariant est dit de <u>degré</u> r .

De la même manière, on voit que, si f est un covariant simultané de h vecteurs x_i , on peut le mettre sous la forme d'une somme de covariants dont chacun a des composantes qui sont des polynomes homogènes et d'un même degré r_i par rapport aux composantes de <u>chacun</u> des vecteurs x_i ; r_i est le <u>degré</u> d'un tel covariant <u>par rapport à</u> x_i ; son degré total r est bien entendu égal à $\sum_{i=1}^{h} r_i$.

On sait (chap.IV) que, si p(x) désigne un polynome homogène de degré r par rapport aux composantes d'un vecteur arbitraire x d'un espace vectoriel à n dimensions E , on appelle <u>forme polaire</u> de p(x) le coefficient de $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r$ dans le polynome $p(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_r x_r)$, où les x_i sont r vecteurs arbitraires de E ; c'est une <u>forme multilinéaire</u> $\pi(x_1,\dots,x_p)$ telle que $\pi(x,x,\dots,x)=r!p(x)$. Considérons alors un covariant f de degré r ; si, dans l'identité (1), on remplace x par $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_r x_r$, où les x_i sont r vecteurs arbitraires de F , il vient, en développant, une identité entre les x_i, les λ_i et σ ; comme K est infini, cette identité en λ_i est une identité algèbrique ; en identifiant les coefficients de $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r$ aux deux membres, et désignant par $\varphi(x_1,\dots,x_r)$ le coefficient de $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r$ dans $f(\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_r x_r)$ (c'est-à-dire le vecteur de G dont les composantes sont les coefficients de $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r$ dans les composantes de de $f(\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_r x_r)$), il vient

(3) $\varphi(\sigma.x_1,\sigma.x_2,\ldots,\sigma.x_r)=\sigma.\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_r)$

identiquement par rapport aux x_i et à σ ; autrement dit, si on considère l'espace vectoriel produit F^r, muni de la loi externe $(\sigma,(x_1,\ldots,x_r))\longrightarrow(\sigma.x_1,\ldots,\sigma.x_r)$ (qui correspond à la <u>somme directe</u> de r représentations identiques à la représentation matricielle de Γ correspondant à F), φ est un <u>covariant</u> de $(x_1,\ldots,x_r)$ (autrement dit, un <u>covariant simultané de r vecteurs génériques</u> x_i de F), <u>multilinéaire</u> par rapport aux x_i (c'est-à-dire dont les composantes sont des formes multilinéaires par rapport aux x_i). En outre, la connaissance du covariant φ entraîne réciproquement celle de f, car on a $f(x)=r!\varphi(x,x,\ldots,x)$. On dit que le covariant multilinéaire φ s'obtient à partir de f par <u>polarisation</u>, et le covariant f à partir de φ par <u>identification des r arguments</u> x_i.

Si f est un covariant simultané de h vecteurs $x_1,\ldots,x_h$, de degré r_k par rapport à x_k, on remplacera de même x_k par $\lambda_{k1}x_{k1}+\lambda_{k2}x_{k2}+\ldots+\lambda_{k,r_k}x_{k,r_k}$ où les x_{ki} sont r_k vecteurs arbitraires de E_k ; développant par rapport aux scalaires λ_{ki}, on voit que le coefficient du terme linéaire par rapport à chacun de ces scalaires est un <u>covariant multilinéaire</u> φ des $r=\sum_{k=1}^{h} r_k$ vecteurs x_{ki} ; en outre, le covariant f s'obtient (à un facteur constant près) en identifiant, dans φ, les r_k vecteurs x_{ki} à x_k pour $1\leqslant k\leqslant h$.

Remarquons maintenant que si φ est un covariant multilinéaire de r vecteurs x_i, les composantes de φ peuvent être considérées comme des formes <u>linéaires</u> par rapport aux composantes du <u>tenseur</u> $x_1x_2\ldots x_r$, produit symbolique des vecteurs x_i ; si on remplace chaque vecteur x_i

par $\sigma.x_i$, cela revient à remplacer le tenseur précédent par son transformé $u_\sigma^{(r)}(x_1 x_2 \ldots x_r)$ par la puissance tensorielle r-ième de l'application linéaire u_σ . Si, dans le produit tensoriel $F^{(r)}$, on pose $\sigma.x=u_\sigma^{(r)}(x)$ (loi externe qui correspond au produit tensoriel de r représentations de Γ identiques à la représentation de Γ correspondant à F), on a donc pour tout tenseur $z \in F^{(r)}$ (en se rappelant que tout tenseur est une somme de produits symboliques)

$$\varphi(\sigma.z) = \sigma.\varphi(z) \tag{4}$$

autrement dit, φ est un <u>covariant linéaire</u> du tenseur z , c'est-à-dire une <u>application linéaire</u> de $F^{(r)}$ dans G , qui est en même temps un <u>covariant</u> pour les représentations de Γ qui correspondent à ces deux espaces vectoriels.

On voit donc, en résumé, que <u>la connaissance de tous les covariants linéaires d'un groupe Γ permet de former tous les covariants de type rationnel de ce groupe</u> (bien entendu, il faut connaître les covariants linéaires de Γ pour <u>toutes</u> les représentations linéaires de ce groupe); en particulier la connaissance des <u>invariants</u> (relatifs) <u>linéaires</u> d'un groupe (pour toutes les représentations linéaires de ce groupe) permet de former tous les <u>invariants</u> (relatifs) <u>de type rationnel</u> de ce groupe.

La notion de covariant linéaire peut s'interpréter en un autre langage : dire que f est un covariant linéaire (relatif aux représentations de Γ qui correspondent à F et G) signifie que, si on considère F et G comme deux <u>groupes abéliens à opérateurs</u>, avec les deux lois externes $(\lambda, x) \to \lambda x$ à opérateurs dans K , et $(\sigma, x) \to \sigma.x$ à opérateurs dans Γ , f est une <u>représentation</u> du groupe à opérateurs F dans le groupe à opérateurs G . Lorsque F seul est donné, la détermination de tous les covariants d'un vecteur générique de F revient donc à la détermination de tous les <u>groupes quotients</u> de F , ou encore à celle de tous les <u>sous-groupes</u> (stables) du groupe à opérateurs F . On peut considérer ce problème comme résolu par exemple lorsque F est <u>complètement réductible</u> (chap.II), ce qui signifie, par définition, que la représentation matricielle de Γ correspondant à F est <u>complètement réductible</u> ; c'est ce qui aura lieu, en particulier, pour tout groupe <u>fini</u> (§ 6,th.). Si F est complètement réductible, et décomposé en une somme directe de p sous-groupes <u>simples</u> F_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, désignons par $k_i(x)$ le composant dans F_i d'un vecteur générique $x \in F$. Il est évident que $k_i(x)$ est un covariant linéaire de x ; en outre, si f est un covariant linéaire quelconque de x , on a $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f(k_i(x))$ et $f(k_i(x))$ est encore un covariant linéaire de x ; mais la restriction de f à F_i est une représentation de F_i , donc, comme F_i est simple, cette restriction est, soit identiquement nulle, soit un <u>isomorphisme</u> de F_i ; dans ce dernier cas, on peut identifier $f(F_i)$ avec un sous-groupe $\varphi(F_i)$de F , où φ est un automorphisme de F , et le covariant $f(k_i(x))$ est donc identifié avec $\varphi(k_i(x))$. Les covariants de cette forme sont dits <u>irréductibles</u> ; comme on sait déterminer tous les automorphismes de F , on voit qu'on peut considérer comme déterminés tous les covariants irréductibles de x , et par suite aussi tous les covariants linéaires de x .

<u>Covariants des groupes linéaires</u>. Ce qui précède s'appliquait à un groupe <u>quelconque</u> Γ . Nous allons désormais nous restreindre au cas où Γ est un <u>sous-groupe d'un groupe linéaire</u> $GL_n(K)$, c'est-à-dire un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel E à n dimensions sur K (ou, ce qui revient au même, un groupe de matrices carrées d'ordre n sur K) .

Nous nous bornerons en outre au cas où le vecteur générique x dont on recherche les covariants (relatifs au groupe Γ) parcourt, soit un espace tensoriel $T^p_q(E)$ sur E, soit un sous-espace tensoriel d'un tel espace, soit enfin (cas général) une somme directe d'un certain nombre de sous-espaces tensoriels formés de tenseurs d'ordres quelconques (si F est somme directe de m tels sous-espaces, un covariant de $x \in F$ est donc un covariant simultané des m tenseurs composants de x) ; on suppose naturellement que la loi externe $(u,x) \to u.x$ entre automorphismes $u \in \Gamma$ et tenseurs $x \in T^p_q(E)$ est l'application $(u,x) \to u^p_q(x)$ définie au chap.III où u^p_q est le produit tensoriel de p applications identiques à u et de q applications identiques à la contragrédiente $\check{u}$ de u . Comme le produit tensoriel d'un certain nombre d'espaces du type précédent est encore un espace du même type, toutes les considérations sur les covariants vectoriels relatifs à un groupe quelconque Γ , faites ci-dessus, sont encore valables pour les covariants de tenseurs (relatifs à un groupe linéaire Γ) : on saura déterminer tous les covariants de tenseurs relatifs à un sous-groupe Γ d'un groupe linéaire $GL_n(K)$, si on sait déterminer tous les covariants linéaires de tenseurs, relatifs à Γ .

Nous allons maintenant examiner avec plus de détails le problème de la recherche des covariants de tenseurs, en portant surtout notre attention sur les invariants relatifs, et en commençant par le cas le plus important, celui où Γ est le groupe linéaire ~~toute~~ tout entier $GL_n(K)$.

Notons en premier lieu que, si d(u) est le multiplicateur d'un invariant relatif pour $GL_n(K)$, $u \to d(u)$ est une représentation de type rationnel de $GL_n(K)$, du premier degré ; on a déterminé (§ 8) toutes ces représentations, et on a vu que d(u) est nécessairement une puissance entière Δ^g (positive ou négative) du <u>déterminant</u> de l'automorphisme u (ou de la matrice qui lui correspond) ; l'exposant g est appelé le <u>poids</u> de l'invariant considéré.

Considérons d'abord le cas où le tenseur générique x dont on cherche les covariants linéaires, parcourt l'espace $F=T^p(E)$ de <u>tous</u> les tenseurs contravariants d'ordre p sur E ; comme F est engendré par les produits symboliques $x_1 x_2 .. x_p$ de p vecteurs génériques de E , les covariants linéaires cherchés sont identiques aux <u>covariants multilinéaires de p vecteurs</u> . On a vu (§ 8) que F , considéré comme groupe à opérateurs par rapport à K et Γ , ou, ce qui revient au même, comme module par rapport à l'anneau A des matrices bisymétriques d'ordre n^p , est complètement réductible, et que chacun des sous-modules simples de F est isomorphe à un sous-module F_α formé des tenseurs irréductibles de signature $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ $(\alpha_n \geqslant 0)$.

A un automorphisme près de F , les <u>covariants irréductibles</u> de x sont donc les applications $x \longrightarrow c_\alpha . x$; nous les avons écrites explicitement au § 8 (en se bornant au cas où x parcourt les produits symboliques de p vecteurs).

Cherchons en particulier les <u>invariants irréductibles</u> : ce sont les covariants irréductibles correspondant aux signatures α telles que F_α ait <u>une</u> dimension (ou corresponde à une représentation du premier degré de $GL_n(K)$) ; nous avons vu au § 8 que ces signatures correspondent aux schémas Σ_α ayant toutes leurs colonnes de longueur n . Pour exprimer explicitement le résultat auquel nous parvenons ainsi, nous introduirons la notation suivante : étant donnés n vecteurs quelconques x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de E , rapporté à une base fixée une fois pour toutes $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, nous désignerons par $[x_1 x_2 \ldots x_n]$ le déterminant de la matrice carrée dont la ligne d'indice i est formée des composantes ξ_i^j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ de x_i . Alors :

Proposition 2. Il n'existe d'invariants multilinéaires de p vecteurs d'un espace à n dimensions (pour le groupe $GL_n(K)$ que si $p=en$ est un multiple de n . Tout invariant multilinéaire de $x_1,\ldots,x_p$ est alors un invariant de poids e , somme d'invariants irréductibles de la forme

$$[x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}][x_{i_{n+1}} \ldots x_{i_{2n}}] \ldots [x_{i_{e(n-1)+1}} \ldots x_{i_{en}}] \tag{5}$$

où $k \to i_k$ est une permutation quelconque de l'intervalle $[1,p]$.

De là on déduit aussitôt les invariants multilinéaires simultanés d'un nombre quelconque de tenseurs contravariants. Supposons pour fixer les idées qu'il s'agisse de trois tenseurs contravariants génériques x,y,z , d'ordres respectifs p,q,r . Tout invariant irréductible de ces trois tenseurs s'obtiendra en partant d'un invariant irréductible de $p+q+r$ vecteurs $x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q, z_1,\ldots,z_r$, puis, en remplaçant dans cet invariant (exprimé à l'aide des composantes des vecteurs considérés) chaque terme

$$\xi_1^{i_1}\ldots\xi_p^{i_p}\,\eta_1^{j_1}\ldots\eta_q^{j_q}\,\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_r^{k_r} \quad \text{par} \quad \xi^{i_1 i_2\ldots i_p}\,\eta^{j_1 j_2\ldots j_q}\,\zeta^{k_1 k_2\ldots k_r}.$$

Par exemple, si $n=3$, et si on considère un tenseur générique x d'ordre 2 et un vecteur générique y , l'invariant irréductible obtenu par ce procédé à partir de l'invariant $[x_1 x_2 y_1]$ est égal à

$$\eta^1(\xi^{23}-\xi^{32})+\eta^2(\xi^{31}-\xi^{13})+\eta^3(\xi^{12}-\xi^{21})$$

Si maintenant on cherche tous les invariants simultanés de x,y,z, ayant des degrés donnés h,h',h'' par rapport à x,y,z, il faut, d'après la méthode générale, considérer les invariants simultanés multilinéaires de h tenseurs d'ordre p , $x_1,\dots,x_h$, de h' tenseurs d'ordre q , $y_1,\dots,y_{h'}$, et de h" tenseurs d'ordre r , $z_1,\dots,z_{h''}$. On doit donc partir d'un invariant multilinéaire de $hp+h'q+h''r$ vecteurs $x_{\alpha i}$, $y_{\beta j}$, $z_{\gamma k}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant h,\ 1 \leqslant \beta \leqslant h',\ 1 \leqslant \gamma \leqslant h'',\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q,\ 1 \leqslant k \leqslant r)$, passer de là comme ci-dessus, à l'invariant multilinéaire correspondant des $h+h'+h''$ tenseurs x_α , y_β , z_γ , et enfin, dans l'invariant multilinéaire obtenu, identifier les x_α à x , les y_β à y et les z_γ à z . Cette méthode, et la prop.2 montre que, si g est le poids de l'invariant obtenu, on a la relation

$$ng = hp+h'q+h''r \tag{6}$$

On obtiendra par exemple un invariant du second degré d'un tenseur x d'ordre 2 sur un espace à 2 dimensions, en partant de l'invariant multilinéaire $\left[x_{11}x_{22}\right]\left[x_{12}x_{21}\right]$ de quatre vecteurs, qui donne d'abord l'invariant multilinéaire de deux tenseurs d'ordre 2 $\xi_1^{11}\xi_2^{22}+\xi_1^{22}\xi_2^{11}-\xi_1^{12}\xi_2^{12}-\xi_1^{21}\xi_2^{21}$
puis l'invariant du second degré de x

$$2\ \xi^{11}\xi^{22}-(\xi^{12})^2-(\xi^{21})^2$$

Nous avons considéré ci-dessus les invariants simultanés de plusieurs tenseurs <u>contravariants</u> ;on obtient de même les invariants simultanés de plusieurs tenseurs <u>covariants</u> : on se ramène en effet comme ci-dessus à la recherche des invariants multilinéaires de plusieurs <u>vecteurs covariants</u> (éléments x' du dual E^* de E) ; un tel invariant (irréductible) correspond à un sous-espace tensoriel à une dimension de l'espace $T_p(E)$ des tenseurs covariants (si p est le nombre de vecteurs considéré), c'est-à-dire à une représentation du premier degré de $GL_n(K)$; la contragrédiente de cette représentation est encore du premier degré, d'où résulte aussitôt que la prop.2 s'applique encore aux vecteurs covariants.

Pour examiner le cas général des invariants d'un ou de plusieurs tenseurs <u>mixtes</u>, nous étudierons au préalable les invariants de tenseurs contravariants ne parcourant que certains <u>sous-espaces tensoriels</u> des $T^p(E)$.

Comme $F=T^p(E)$ est complètement réductible, tout sous-espace tensoriel de F est somme directe d'un certain nombre de sous-espaces tensoriels isomorphes aux sous-espaces <u>irréductibles</u> F_α . On peut donc se borner à considérer les invariants simultanés de plusieurs tenseurs, dont chacun parcourt un F_α (les signatures α étant quelconques) ; en outre, conformément à la méthode générale, on se ramène à déterminer ceux de ces invariants qui sont <u>multilinéaires</u> par rapport aux tenseurs considérés.

Pour fixer les idées, considérons un invariant bilinéaire f de deux tenseurs, parcourant respectivement les espaces irréductibles F_α, F_β , et d'ordres respectifs p et q . On sait que l'application $x \longrightarrow c_\alpha . x$ est un covariant du tenseur générique x d'ordre p , et transforme $T^p(E)$ en F_α ; de même $y \longrightarrow c_\beta . y$ transforme $T^q(E)$ en F . On en conclut que $(x,y) \longrightarrow f(c_\alpha . x, c_\beta . y)$ est un invariant bilinéaire des tenseurs génériques x,y, x parcourant $T^p(E)$ et y parcourant $T^q(E)$; on sait d'autre part qu'on a $c_\alpha^2 = \mu_\alpha c_\alpha$ et $c_\beta^2 = \mu_\beta c_\beta$, μ_α et μ_β étant des entiers (§ 7) ; si on pose $g(x,y)=f(c_\alpha . x, c_\beta . y)$, on a donc $g(c_\alpha . x, c_\beta . y) = f(c_\alpha^2 . x, c_\beta^2 . y) = \mu_\alpha \mu_\beta f(c_\alpha . x, c_\beta . y)$. On voit donc qu'on obtiendra un invariant bilinéaire quelconque des tenseurs génériques $u \in F_\alpha$, $v \in F_\beta$, en <u>remplacant</u> x <u>par</u> u <u>et</u> y <u>par</u> v dans un invariant bilinéaire de deux tenseurs $x \in T^p(E)$, $y \in T^q(E)$. Or, un tel invariant s'obtient à partir d'un invariant multilinéaire de $p+q$ vecteurs

$x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_q$, en y remplaçant chaque composante du tenseur $x_1 \ldots x_p$ par la composante de mêmes indices de x , et de même pour $y_1 \ldots y_q$; un invariant de u et v s'obtiendra donc en remplaçant chaque composante de $x_1 x_2 \ldots x_p$ par la composante de mêmes indices du tenseur u, et de même chaque composante de $y_1 \ldots y_q$ par la composante de mêmes indices du tenseur v (en tenant compte, naturellement, que certaines de ces composantes doivent être exprimées en fonction des autres, à l'aide des équations de définition des sous-espaces F_α et F_β).

On observera que cette méthode s'applique aussi bien aux <u>covariants</u> qu'aux invariants, et qu'elle est valable, non seulement pour les covariants du groupe $GL_n(K)$, mais pour ceux d'un <u>sous-groupe</u> quelconque Γ de $GL_n(K)$ (en vertu du fait que $x \to c_\alpha . x$ est un covariant pour $GL_n(K)$, et à plus forte raison pour Γ) .

Nous allons examiner de plus près les résultats auxquels elle conduit dans les deux cas importants où on prend pour F_α l'espace des tenseurs <u>antisymétriques</u> ou celui des tenseurs <u>symétriques</u>.

<u>Invariants de tenseurs antisymétriques</u>. Considérons un invariant multilinéaire g d'un tenseur antisymétrique u d'ordre $p < n$ (ou, ce qui revient au même, d'un p-<u>vecteur</u> sur E), et d'un certain nombre d'autres tenseurs ou vecteurs. On l'obtient, d'après ce qui précède, en partant d'un invariant multilinéaire f de p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et d'un certain nombre d'autres vecteurs $y_1, \ldots, y_q$, puis en faisant la substitution suivante (dite "restitution" des x_i à u) : pour toute suite strictement croissante de p indices $i_1, i_2, \ldots, i_p$, et toute permutation σ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$, on remplace chacune des composantes $\xi_1^{i_{\sigma(1)}} \xi_2^{i_{\sigma(2)}} \ldots \xi_p^{i_{\sigma(p)}}$ par $\varepsilon_\sigma \pi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, où $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ est la composante d'indices $i_1, \ldots, i_p$

du p-vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$; on remplace les autres composantes $\xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \ldots \xi_p^{j_p}$ (correspondant aux suites (j_k) ayant aux moins deux termes égaux) par 0 .

Comme f est multilinéaire, il revient au même de former l'expression $f(\varepsilon_a.(x_1x_2..x_p),y_1,\ldots,y_q) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)},y_1,\ldots,y_q)$ dans laquelle les composantes de $x_1..x_p$, correspondant aux suites d'indices ayant deux termes égaux, disparaissent d'elles-mêmes, et les composantes de $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$ se mettent en facteur.

Lorsque le groupe Γ considéré est $GL_n(K)$, on peut, d'après la prop.2, se limiter au cas où f est un produit de déterminants formés avec les p+q vecteurs x_i et y_j . Un cas particulièrement simple où on obtient immédiatement l'invariant g est celui où tous les vecteurs x_i figurent dans le même déterminant : on a alors en effet

$$\varepsilon_\sigma\left[x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(p)}y_{\alpha_1}y_{\alpha_2}\ldots y_{\alpha_{n-p}}\right]=\left[x_1x_2\ldots x_p y_{\alpha_1}\ldots y_{\alpha_{n-p}}\right]$$

donc (au facteur numérique p! près), g s'obtient en développant le déterminant $\left[x_1x_2..x_p\ y_{\alpha_1}\ldots y_{\alpha_{n-p}}\right]$ suivant les p premières lignes par la règle de Laplace, et remplaçant par $\pi_{i_1i_2..i_p}$ le mineur formé de ces lignes et des colonnes d'indices $i_1,\ldots,i_p$.

Nous allons voir que le cas général peut se ramener à ce cas particulier, à l'aide d'une identité que nous allons d'abord énoncer et démontrer.

D'une façon générale, étant donné un polynome φ par rapport aux composantes de m vecteurs indéterminés $z_1,\ldots,z_m$, posons, pour $1 \leqslant k \leqslant m$

$$\varphi_k(z_1,z_2,\ldots,z_k,z_{k+1},\ldots z_m) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon_\sigma\varphi(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(k)},z_{k+1},\ldots,z_m)$$

Montrons d'abord comment on peut calculer les φ_k par <u>récurrence sur k</u> , par la formule

$$(7)\qquad \varphi_{k+1}(z_1,\dots,z_{k+1},\dots,z_m) = \varphi_k(z_1,\dots,z_k,z_{k+1},z_{k+2},\dots,z_m) + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\varphi_k(z_1,\dots,z_{j-1},z_{j+1},\dots,z_{k+1},z_j,z_{k+2},\dots,z_m)$$

Cette formule s'établit simplement en considérant séparément, dans la somme qui définit φ_{k+1}, tous les termes pour lesquels $\sigma(k+1)=j$ pour un même indice j ; en posant $\rho(i)=i$ pour $i<j$, $\rho(i)=i+1$ pour $j\leqslant i\leqslant k$, la restriction d'une telle permutation σ à l'ensemble des entiers $\leqslant k+1$ et $\neq j$ est de la forme $\rho\sigma'\rho^{-1}$, où σ' parcourt le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$, et on a $\varepsilon_\sigma=(-1)^{k-j}\varepsilon_{\sigma'}$; si on pose $z'_i=z_{\rho(i)}$ la somme $\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \varphi(z_{\sigma(1)},\dots,z_{\sigma(k+1)},\dots,z_m)$ étendue aux σ considérés est donc égale à $(-1)^{k-j}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_k}\varepsilon_{\sigma'}\varphi(z'_{\sigma'(1)},\dots,z'_{\sigma'(k)},z_j,z_{k+2},\dots,z_m)$.

Cela étant, on a par hypothèse (en changeant éventuellement les indices des y_j)

$$f(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q) = \left[x_1\dots x_k y_1\dots y_{n-k}\right]u(x_{k+1})\qquad (k<p)$$

où u est une <u>forme linéaire</u> dont les coefficients dépendent des vecteurs x_i et y_j non écrits ; avec les notations précédentes, il s'agit de calculer le polynome f_p ; or, on a $f_k=k!f$, donc d'après (7)

$$f_{k+1}(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q) = k!\left[x_1\dots x_k y_1\dots y_{n-k}\right]u(x_{k+1}) + k!\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\left[x_1\dots x_{j-1}x_{j+1}\dots x_{k+1}y_1\dots y_{n-k}\right]u(x_j)$$

Mais comme u est une forme linéaire, on a l'identité

$$\begin{vmatrix} u(x_1) & \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ u(x_2) & \xi_2^1 & \dots & \xi_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(x_{k+1}) & \xi_{k+1}^1 & & \xi_{k+1}^n \\ u(y_1) & \eta_1^1 & \dots & \eta_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(y_{n-k}) & \eta_{n-k}^1 & \dots & \eta_{n-k}^n \end{vmatrix} = 0$$

qui donne, en développant suivant la première colonne

$$(8) \quad \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \left[x_1 \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_{k+1} y_1 \ldots y_{n-k}\right] u(x_j) =$$

$$= (-1)^k \sum_{h=1}^{n-k} (-1)^h \left[x_1 \ldots x_{k+1} y_1 \ldots y_{h-1} y_{h+1} \ldots y_{n-k}\right] u(y_h)$$

A un facteur constant près, f_{k+1} est donc égal au second membre de (8) ; pour le calcul de f_{k+2} suivant la formule (7), on peut donc se ramener au cas où f_{k+1} est réduit à un seul des termes du second membre ; mais un tel terme est (aux indices des y_j près) de la forme

$$\left[x_1 x_2 \ldots x_{k+1} y_1 \ldots y_{n-k-1}\right] v(x_{k+2})$$

où v est une forme linéaire (dont les coefficients dépendent des vecteurs x_i et y_j non écrits). L'identité (8) (où on remplace k par k+1 et u par v) s'applique donc de nouveau, et de proche en proche on voit que f_p est une somme d'invariants irréductibles du type particulier considéré au début (c'est-à-dire dans lesquels tous les x_i figurent dans un même déterminant).

L'étude que nous venons de faire va nous permettre de résoudre le problème laissé en suspens de la recherche des invariants des tenseurs <u>mixtes</u>. La méthode générale ramène cette recherche à celle des invariants multilinéaires d'un certain nombre de <u>vecteurs contravariants</u> $x_1, \ldots, x_p$ et d'un certain nombre de <u>vecteurs covariants</u> $y'_1, \ldots, y'_q$. Or, on a vu (chap. III) que si, à un vecteur covariant y' de composantes η_i , on fait correspondre le (n-1)-vecteur contravariant $\varphi(y')$ de composantes $\pi_{1,2..(i-1),(i+1),..,n} = (-1)^{i-1} \eta_i$, on définit une application linéaire biunivoque de l'espace des vecteurs covariants sur l'espace des (n-1)-vecteurs contravariant, telle que, pour tout automorphisme u de E , au vecteur covariant $\check{u}(y')$ corresponde le (n-1)-vecteur $\Delta\, u_{n-1}(\varphi(y'))$ où Δ est le déterminant de u . Si donc, dans un invariant f de poids g , multilinéaire par rapport aux x_i et y'_j, on remplace chaque vecteur y'_j par son expression en fonction du (n-1)-vecteur z_j correspondant, f devient un invariant multilinéaire f_1 de poids q+g des vecteurs x_i et des (n-1)-vecteurs z_j. D'après la méthode générale, si, pour chaque indice j, on considère n-1 vecteurs contravariants z_{kj} $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, f_1 s'obtiendra à partir d'un invariant multilinéaire f_2 des p+q(n-1) vecteurs contravariants x_i et z_{kj}, par restitution des z_{kj} $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ à z_j pour chaque valeur de j ; il faudra ensuite remplacer de nouveau chaque z_j par $\varphi(y'_j)$ dans f_1 pour obtenir f.

Or (prop.2), on peut se borner au cas où f_2 est un produit de déterminants formés avec les vecteurs x_i et z_{kj} ; au moyen de l'identité (8), on se ramène au cas où les n-1 vecteurs z_{k1} $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ figurent dans un même déterminant, donc au cas où $f_2 = [z_{11} z_{21} \cdots z_{n-1}, y_1] f_3$, y_1 étant un des vecteurs restants, f_3 un produit de déterminants ne contenant plus les z_{k1} ; par restitution, et remplacement de z_1 par $\varphi(y'_1)$, il vient $\langle y_1, y'_1 \rangle f_3$. On peut opérer de même pour les autres z_k, tant qu'il subsiste des déterminants contenant au moins un z_{kj} ; on aboutit ainsi à un produit d'un certain nombre de déterminants ne contenant plus que les vecteurs x_i, et d'un certain nombre de facteurs de la forme $\langle y_j, y'_j \rangle$; s'il reste des vecteurs z_{kj} non restitués, ils sont nécessairement identiques à certains des y_j ; autrement dit, pour restituer les z_{k_j} restants, on est ramené à faire la restitution des vecteurs z_{kh} $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ à z_h dans un produit de la forme $\langle z_{1h}, y'_{j_1} \rangle \langle z_{2h}, y'_{j_2} \rangle \cdots$ $\cdots \langle z_{n-1,h}, y'_{j_{n-1}} \rangle$. Or, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon_\sigma \langle z_{\sigma(1),h}, y'_{j_1} \rangle \langle z_{\sigma(2),h}, y'_{j_2} \rangle \cdots \langle z_{\sigma(n-1),h}, y'_{j_{n-1}} \rangle = \boxed{\langle z_{kh}, y'_{j_\ell} \rangle}$$

$1 \leqslant k \leqslant n-1$
$1 \leqslant \ell \leqslant n-1$

et le déterminant du second membre n'est autre (chap.III) que $\langle z_{1h} \wedge z_{2h} \ldots \wedge z_{n-1,h}, y'_{j_1} \wedge y'_{j_2} \ldots \wedge y'_{j_{n-1}} \rangle$; le remplacement du (n-1)-vecteur z_h par $\varphi(y'_h)$ dans cette expression donne donc (au signe près) le déterminant $[y'_{j_1} y'_{j_2} \ldots y'_{j_{n-1}} y'_h]$, comme on le voit en développant ce dernier suivant sa dernière ligne. En résumé :

Théorème 1. Pour le groupe $GL_n(K)$, il n'existe d'invariants multilinéaires simultanés de p vecteurs contravariants x_i d'un espace E à n dimensions, et de q vecteurs covariants y'_j de son dual E^*, que si q-p est un multiple (positif ou négatif) de n . Tout invariant multilinéaire de ces p+q vecteurs est alors une somme de produits de facteurs de l'une des trois formes

$$[x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}], \quad [y'_{j_1} y'_{j_2} \ldots y'_{j_n}], \quad \langle x_i, y'_j \rangle.$$

Ce théorème résout donc, en principe, le problème de la recherche des invariants vectoriels du groupe $GL_n(K)$.

On observera qu'entre les trois types fondamentaux d'invariants énumérés dans le th.1, il existe des identités algèbriques, par exemple (chap.III)

$$(9) \qquad [x_1 x_2, \ldots x_n][y'_1 y'_2 \ldots y'_n] = \boxed{\langle x_i, y'_j \rangle}$$

ou encore (en vertu de l'identité (8))

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} [x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{n+1}][x_i x_{n+2} \ldots x_{2n}] = 0$$

Un même invariant multilinéaire pourra donc s'exprimer de beaucoup de manières différentes à l'aide des trois types d'invariants fondamentaux. En particulier, l'identité (9) montre que, si $q < p$, on peut toujours exprimer un invariant à l'aide des facteurs du premier et du troisième type seulement ; si $p < q$, on peut toujours l'exprimer à l'aide des facteurs du second et du troisième type ; enfin si p=q, l'invariant est exprimable uniquement à l'aide des facteurs du troisième type.

Invariants de formes n-aires. On a déja rappelé au début de ce paragraphe, la correspondance biunivoque entre polynomes de n variables et de degré r (formes n-aires de degré r), et formes multilinéaires symétriques de r vecteurs d'un espace E à n dimensions : toute forme n-aire de degré r s'obtenant par identification à $x=(\xi^i)$ des r vecteurs $x_j=(\xi^i_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ dans la forme multilinéaire symétrique $\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_r} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_r^{i_r}$ et cette dernière s'obtenant inversement par polarisation, à partir de la forme n-aire. Dans la forme n-aire correspondant à la forme multilinéaire précédente, le coefficient $\beta_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ du monome $(\xi^1)^{r_1} \ldots (\xi^n)^{r_n}$ $(r_1+r_2+\ldots+r_n=r)$ est égal à $\dfrac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!} a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ où pour $1 \leqslant k \leqslant n$, r_k des termes de la suite $(i_1, \ldots, i_r)$ sont égaux à k.

Nous écrirons désormais une forme n-aire arbitraire de degré r sous la forme $\sum \dfrac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!} a_{r_1 r_2 \ldots r_n} (\xi^1)^{r_1} \ldots (\xi^n)^{r_n}$ faisant apparaître les coefficients $a_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ de la forme multilinéaire correspondante. On sait (chap. IV) qu'on identifie les formes multilinéaires symétriques de r vecteurs $x_j \in E$, aux tenseurs covariants symétriques d'ordre r sur E. Etant données un certain nombre de formes n-aires génériques $f_1, f_2, \ldots, f_p$, un invariant de ces formes et d'un certain nombre de vecteurs covariants ou contravariants, sera par définition un invariant simultané de des vecteurs et des p tenseurs covariants symétriques correspondant aux formes f_i.

Pour rechercher ces invariants, on commence, suivant la méthode générale, à se ramener aux invariants multilinéaires : supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse des invariants de deux formes

$f = \sum \dfrac{r!}{r_1!\ldots r_n!} a_{r_1 \ldots r_n} (\xi^1)^{r_1} \ldots (\xi^n)^{r_n}$ de degré r,

$g = \sum \frac{s!}{s_1!\ldots s_n!} \beta_{s_1 \ldots s_n} (\xi^1)^{s_1} \ldots (\xi^n)^{s_n}$ de degré s, et d'un vecteur contravariant x, et qu'on cherche les invariants de degré p par rapport aux $\alpha_{r_1 r_2 \ldots r_n}$, de degré q par rapport aux $\beta_{s_1 \ldots s_n}$, et de degré m par rapport aux composantes de x. On commencera par chercher les invariants multilinéaires de p tenseurs covariants symétriques d'ordre r ; $u_1, u_2, \ldots, u_p$, de q tenseurs covariants symétriques d'ordre s ; $v_1, v_2, \ldots, v_q$, et de m vecteurs contravariants $x_1, \ldots, x_m$. Le deuxième stade consiste à remplacer chaque u_i par r vecteurs covariants y'_{ih} $(1 \leqslant h \leqslant r)$, et chaque v_j par s vecteurs covariants z'_{jk} $(1 \leqslant k \leqslant s)$, et à chercher les invariants multilinéaires simultanés des x_i, des y'_{ih} et des z'_{jk}. Ensuite, dans un tel invariant développé suivant les composantes des vecteurs qui y figurent, il faut, pour toute suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de r termes dans laquelle r_k des termes sont égaux à k pour $1 \leqslant k \leqslant n$ $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r)$, remplacer $\eta'_{i1\lambda_1} \eta'_{i2\lambda_2} \ldots \eta'_{ir\lambda_r}$ par $\alpha_{i\, r_1 r_2 \ldots r_n}$, et de même pour les termes provenant des z'_{jk}. Mais il est clair que cela revient à considérer, au lieu des r vecteurs distincts y'_{ih}, comme dans le cas général, r vecteurs identiques à un même vecteur y'_i, et à remplacer chaque monome $(\eta_{i1})^{r_1} (\eta_{i2})^{r_2} \ldots (\eta_{in})^{r_n}$ par rapport aux composantes de cet unique vecteur par $\alpha_{i\, r_1 r_2 \ldots r_n}$. On obtient donc la règle suivante :

Tout invariant multilinéaire φ de p formes de degré r, de q formes de degré s, et de m vecteurs contravariants, s'obtient à partir d'un invariant ψ de $p+q$ vecteurs covariants y'_i, z'_j et des m vecteurs contravariants donnés x_i, ψ étant de degré r par rapport à chacun des y'_i, de degré s par rapport à chacun des z'_j, et linéaire par rapport à chacun des x_i ; φ se déduit de ψ en remplaçant chaque monome $(\eta_{i1})^{r_1} \ldots (\eta_{in})^{r_n}$ (resp. $(\xi_{j1})^{s_1} \ldots (\xi_{jn})^{s_n}$) par le coefficient

$a_{i\,r_1 r_2 .. r_n}$ (resp. $\beta_{j\,s_1 s_2 .. s_n}$) de la forme correspondante.

Pour revenir enfin au problème initial, on remplacera tous les $a_{i\,r_1 r_2 .. r_n}$ par $a_{r_1 r_2 .. r_n}$, tous les $\beta_{j\,s_1 s_2 .. s_n}$ par $\beta_{s_1 s_2 .. s_n}$ et toutes les composantes ξ_i^k des x_i par ξ^k. L'application de la règle précédente (qui s'étend naturellement à un nombre quelconque de formes et de vecteurs) est dite méthode symbolique de recherche des invariants des formes n-aires ; l'invariant ψ est appelé l'expression symbolique de l'invariant φ. On observera en particulier que la forme f, considérée comme polynome par rapport aux $a_{r_1 .. r_n}$ et aux composantes ξ^k du vecteur contravariant x, est un invariant (de poids 0, donc absolu), dont l'expression symbolique est $\langle x, y' \rangle^r$. Notons aussi la relation entre le poids π de l'invariant φ et les nombres n,m,p,q,r,s (qui découle aussitôt du th.1)

$$n\pi = m - pr - qs \tag{10}$$

Exemple. Proposons-nous de chercher la forme générale des invariants φ (de degré quelconque) de deux formes binaires quadratiques

$$f = a_{11}(\xi^1)^2 + 2a_{12}\,\xi^1\xi^2 + a_{22}(\xi^2)^2 \,, \quad g = \beta_{11}(\xi^1)^2 + 2\beta_{12}\,\xi^1\xi^2 + \beta_{22}(\xi^2)^2$$

et d'un vecteur contravariant $x = (\xi^1, \xi^2)$.

La méthode symbolique et le th.1 conduisent à former les produits de facteurs de la forme

$$[y_i' y_k'] \,, \quad [z_j' z_e'] \,, \quad [y_i' z_j'] \,, \quad \langle x_h, y_i' \rangle \,, \quad \langle x_h, z_j' \rangle$$

(il est inutile d'introduire les facteurs $[x_h x_{h'}]$ qui s'annuleront quand on identifiera les x_h à x) ; dans un tel produit ψ, chacun des y_i' et des z_j' doit figurer deux fois et chacun des x_h une seule fois.

Supposons d'abord que dans Ψ figure le facteur $[y'_1 y'_2]$; comme chacun des y'_i doit figurer deux fois dans Ψ, Ψ contient un produit de l'une des formes

(11) $$[y'_1 y'_2]^2$$

(12) $$[y'_1 y'_2][y'_1 a'][y'_2 b']$$

(13) $$[y'_1 y'_2][y'_1 a']\langle x_h, y'_1\rangle$$

(14) $$[y'_1 y'_2]\langle x_h, y'_1\rangle\langle x_k, y'_2\rangle$$

où a' et b' sont deux quelconques des vecteurs y'_i, z'_j distincts de y'_1 et y'_2. (11) est l'expression symbolique de l'invariant $2d_1 = 2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)$. Pour examiner ce que donnent les autres possibilités, remarquons que, si on permute y'_1 et y'_2 dans Ψ, on obtient une expression symbolique du <u>même</u> invariant φ ; ceci montre déjà que l'invariant dont (14) est l'expression symbolique est égal à son opposé, donc nul ; on aurait aussi un invariant nul si on supposait que $a' = b'$ dans (12). Supposons donc $a' \neq b'$, et transformons (12) au moyen de l'identité (8) : on a

$$[y'_1 a'][y'_2 b'] - [y'_2 a'][y'_1 b'] + [y'_2 y'_1][a'b'] = 0$$

donc

$$\Psi = [y'_1 y'_2][y'_1 a'][y'_2 b']\theta = [y'_2 a'][y'_1 b'][y'_1 y'_2]\theta + [y'_1 y'_2]^2[a'b']\theta$$

Mais, dans le premier invariant du second membre, la permutation de y'_1 et y'_2 donne le premier membre changé de signe ; on en conclut que dans ce cas 2φ contient encore d_1 en facteur. On traite de même le cas (13) et on voit que, lorsque Ψ contient un facteur $[y'_1 y'_k]$, l'invariant φ dont il est l'expression symbolique contient le facteur d_1.

On montrerait de même que si Ψ contient un $[z'_j z'_\ell]$, φ contient le facteur $d_2 = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2$. En supprimant de φ un produit de puissances de d_1 et d_2 , on peut donc supposer que Ψ ne contient aucun facteur $[y'_i y'_k]$ ou $[z'_j z'_\ell]$.

Examinons ensuite le cas où Ψ contient un facteur $[y'_1 z'_1]$. Alors il contient un produit ayant l'une des formes

(15) $$[y'_1 z'_1]^2$$

(16) $$[y'_1 z'_1]\langle x_h, y'_1\rangle\langle x_k, z'_1\rangle$$

(17) $$[y'_1 z'_1]\,[y'_i z'_1]\,[y'_1 z'_j]$$

(18) $$[y'_1 z'_1]\,[y'_i z'_1]\langle x_h, y'_1\rangle$$

(19) $$[y'_1 z'_1]\,[y'_1 z'_j]\langle x_h, z'_1\rangle .$$

(15) est l'expression symbolique de l'invariant $d_{12} = \alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{22}\beta_{11} - 2\alpha_{12}\beta_{12}$, (16) celle de l'invariant

$$h = (\alpha_{11}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{11})(\xi^1)^2 + (\alpha_{11}\beta_{22} - \alpha_{22}\beta_{11})\xi^1\xi^2 + (\alpha_{12}\beta_{22} - \alpha_{22}\beta_{12})(\xi^2)^2$$

Dans le cas (17), on a, au moyen de l'identité (8)

$$\Psi = [y'_1 z'_1][y'_i z'_1][y'_1 z'_j]\theta = [y'_1 y'_i][z'_j z'_1][y'_1 z'_1]\theta + [y'_1 z'_1]^2[y'_i z'_j]\theta$$

donc φ est une somme de deux invariants, dont l'un contient d_1 , l'autre d_{12} en facteur ; on a une identité analogue dans chacun des deux autres cas. Par récurrence sur le nombre de facteurs de Ψ , on ramène donc φ à une somme d'invariants tels que chacun d'eux contienne en facteur un monome en d_1, d_2, d_{12} et h et, après suppression de ce monome, donne un invariant dont l'expression symbolique ne contient plus aucun déterminant. Mais un invariant de cette dernière espèce se décompose nécessairement en un produit de facteurs de la forme

$$\langle x_h, y'_i\rangle\langle x_k, y'_i\rangle \quad \text{ou} \quad \langle x_h, z'_j\rangle\langle x_k, z'_j\rangle$$

qui sont respectivement les expressions symboliques de f et de g .

Résumant la discussion précédente, on voit donc que <u>tout invariant de</u> f,g <u>et</u> x <u>est égal à un polynome en</u> f,g,h,d_1,d_2 <u>et</u> d_{12} . On dit que ces 6 invariants forment un <u>système complet d'invariants</u> de f, g et x .

<u>Les opérateurs de Sylvester</u>. Nous allons montrer que le résultat obtenu dans l'exemple précédent est général. Nous aurons besoin pour cela d'utiliser des propriétés de certains <u>opérateurs différentiels</u> que nous allons étudier au préalable.

Etant donné un polynome f par rapport aux composantes d'un vecteur contravariant $x \in E$ (et éventuellement d'autres vecteurs), rappelons (chap.IV) que, pour un $x \in E$ donné, la <u>différentielle</u> $d_x f$ de f au point x est une <u>forme linéaire</u> sur E , donc un vecteur covariant appartenant à E^*, ayant pour composantes sur la base duale de (e_i), les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial \xi^i}$; pour tout $h \in E$, $d_x f(h)$ est le coefficient de λ dans $f(x+\lambda h)$. Si u est un automorphisme de E , et qu'on pose $y=u(x)$, $g=f\circ u$, on a (théorème des fonctions composées, cf. chap.IV) , $d_x g = d_y f\circ u$, autrement dit

$$\langle u(h), d_y f\rangle = \langle h, d_x g\rangle$$

ce qui s'écrit encore, dans le dual E ,

$$d_y f = \check{u}(d_x g) = \check{u}(d_x(f\circ u))$$

On voit donc que la différentielle $d_x f$ se transforme comme un vecteur covariant, <u>indépendamment du point</u> x considéré. Cela étant, soient $f(x_1,\ldots,x_p)$, $g(y'_1,\ldots,y'_p)$ deux polynomes par rapport à p vecteurs contravariants x_i et p vecteurs covariants y'_i respectivement (et éventuellement par rapport à d'autres vecteurs). Par définition, le produit symbolique $g(d_{x_1},d_{x_2},\ldots,d_{x_p})f(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ est le polynome

$\varphi(x_1,x_2,\dots,x_p)$ obtenu en remplaçant, dans le produit ordinaire $g(y'_1,\dots,y'_p)f(x_1,\dots,x_p)$ chaque produit $(\underset{i}{\eta_1})^{r_1}\dots(\underset{i}{\eta_n})^{r_n}(\underset{i}{\xi^1})^{s_1}\dots(\underset{i}{\xi^n})^{s_n}$ $(\frac{\partial}{\partial\xi^1})^{r_1}\dots(\frac{\partial}{\partial\xi^n})^{r_n}\left[(\underset{i}{\xi^1})^{s_1}\dots(\underset{i}{\xi^n})^{s_n}\right]$. Il résulte de ce qu'on a vu ci-dessus que, pour tout automorphisme u de E, on a

(20) $\varphi(u(x_1),\dots,u(x_p))=g(\check{u}(d_{x_1}),\dots,\check{u}(d_{x_p}))f(u(x_1),\dots,u(x_p))$.

Cette formule générale entraîne en particulier la proposition suivante :

<u>Proposition 3 (Sylvester).</u> <u>Pour un sous-groupe</u> Γ <u>de</u> $GL_n(K)$, <u>soit</u> f <u>un invariant de</u> p <u>vecteurs contravariants</u> $x_1,\dots,x_p$ <u>et de</u> q <u>vecteurs covariants</u> $x'_1,\dots,x'_q$, g <u>un invariant de</u> r <u>vecteurs contravariants</u> $y_1,\dots,y_r$ <u>et de</u> s <u>vecteurs covariants</u> $y'_1,\dots,y'_s$. <u>Pour tout</u> $m\leqslant s$ <u>le polynome</u>

$$g(d_{x_1},\dots,d_{x_m},y'_{m+1},\dots,y'_s,y_1,\dots,y_r)f(x_1,\dots,x_p,x'_1,\dots,x'_q)$$

<u>est un invariant des vecteurs</u> $x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_r,x'_1,\dots,x'_q,y'_{m+1},\dots,y'_s$.

En effet, désignant ce polynome par φ, on voit que, pour tout automorphisme u de E, on a, d'après (20)

$$\begin{aligned}&\varphi(u(x_1),\dots,u(x_p),u(y_1),\dots,u(y_r),\check{u}(x'_1),\dots,\check{u}(x'_q),\check{u}(y'_{m+1}),\dots,\check{u}(y_s)) =\\ &= g(\check{u}(d_{x_1}),\dots,\check{u}(d_{x_m}),\check{u}(y'_{m+1}),\dots,\check{u}(y'_s),u(y_1),\dots,u(y_r)).\\ &\quad .f(u(x_1),\dots,u(x_p),\check{u}(x'_1),\dots,\check{u}(x'_q)) =\\ &\quad = \lambda_u\,\mu_u\,g(d_{x_1},\dots,y_r)f(x_1,\dots,x'_q)\end{aligned}$$

où λ_u et μ_u sont les multiplicateurs respectifs des invariants f et g pour l'automorphisme u.

En particulier, si Γ est identique au groupe $GL_n(K)$, et si ρ et σ sont les <u>poids</u> respectifs de f et g, le poids de φ est $\rho+\sigma$.

On pourrait encore généraliser cette proposition, en remplaçant dans g un certain nombre des vecteurs contravariants y_i par les différentielles $d_{x'_i}$ par rapport aux vecteurs covariants x'_i.

Nous utiliserons le cas particulier de la prop.3 correspondant à l'invariant $g=[y'_1 y'_2 \ldots y'_n]$; l'opérateur différentiel correspondant $[d_{x_1} d_{x_2} \ldots d_{x_n}]$ est appelé <u>opérateur de Cayley</u> relatif aux vecteurs $x_1, \ldots, x_n$, et se note d'ordinaire Ω quand il n'en résulte aucune ambiguité. A la puissance g^k du déterminant g correspond l'opérateur Ω^k , qui n'est autre que l'opérateur Ω itéré k fois. Pour tout invariant f de poids π , Ωf est un invariant de poids $\pi-1$; son degré par rapport à chacun des x_i est diminué d'une unité.

Notons encore que, si f est un polynome <u>homogène</u> par rapport à m variables scalaires $\xi_1, \ldots, \xi_m$; $f(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \sum a_{r_1 r_2 \ldots r_m} \xi_1^{r_1} \ldots \xi_m^{r_m}$ $(r_1+r_2+\ldots+r_m=r)$, dans le produit symbolique $f(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_m})\, f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, les termes $(\frac{\partial}{\partial \xi_1})^{r_1} \ldots (\frac{\partial}{\partial \xi_m})^{r_m} [\xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \ldots \xi_m^{s_m}]$ pour lesquels les suites (r_i) et (s_i) sont distinctes sont tous nuls car en vertu de la relation $\sum_i r_i = \sum_i s_i$, il existe alors au moins un indice i tel que $r_i < s_i$. On a par suite

$$f(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_m}) f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \sum r_1! r_2! \ldots r_m! \; a^2_{r_1 r_2 \ldots r_m}$$

et en particulier cette constante est certainement $\neq 0$ lorsque les coefficients $a_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ sont des entiers non tous nuls ; c'est le cas en particulier pour l'opérateur de Cayley et ses itérés, et on voit donc que, pour tout entier $k > 0$, $\Omega^k [x_1 x_2 \ldots x_n]^k$ est une <u>constante non nulle</u>.

<u>Les systèmes complets d'invariants</u>. Nous avons vu comment pour le groupe $GL_n(K)$ on peut former tous les invariants de degré donné p d'un certain nombre de tenseurs génériques $u_1, \ldots, u_m$: leur formation, et la prop.2 prouvent que tous ces invariants sont des combinaisons linéaires d'un nombre <u>fini</u> d'entre eux. Mais pour former ces derniers, il faut considérer les invariants multilinéaires d'un nombre de tenseurs

qui croît indéfiniment avec p ; le nombre des invariants linéairement indépendants que l'on forme ainsi croît donc lui-même indéfiniment avec p.

Toutefois, nous allons voir que, de même que dans l'exemple traité ci-dessus, on peut déduire tous les invariants d'un nombre déterminé de tenseurs génériques, à partir d'un nombre fini d'entre eux. De façon précise, nous dirons qu'un ensemble S d'invariants des tenseurs génériques $u_1,\dots,u_m$ est un système complet d'invariants de ces tenseurs, si tout invariant de ces tenseurs est identique à un polynome de la forme $\varphi(f_1,\dots,f_q)$, où φ est un polynome de q indéterminées, à coefficients dans le corps K , et les f_i des invariants appartenant à S .

Théorème 2 (Hilbert). Pour le groupe $GL_n(K)$, et un nombre quelconque de tenseurs génériques, il existe un système complet d'invariants formé d'un nombre fini d'invariants.

Nous nous bornerons au cas où il s'agit d'invariants d'un tenseur contravariant x et d'un tenseur covariant y (irréductibles ou non) ; le raisonnement est bien entendu général. En supposant par exemple que x soit un tenseur d'ordre p , y un tenseur d'ordre q , nous poserons comme d'ordinaire, pour tout automorphisme u de E , $u.x=u^{(p)}(x)$, $u.y=\check{u}^{(q)}(y)$.

Dans l'anneau P des polynomes (à coefficients dans K) par rapport aux composantes des tenseurs x et y , considérons l'idéal $\mathfrak{a}$ engendré par tous les invariants non constants de x et y . Comme K est un corps, P est un anneau de Noether (chap.V), et par suite $\mathfrak{a}$ est engendré par un nombre fini d'invariants non constants $f_1,\dots,f_m$. Autrement dit, tout invariant non constant f de x et y peut s'écrire sous la forme

(21) $$f(x,y)=\sum_{i=1}^{m} g_i(x,y)f_i(x,y)$$ où les g_i sont des polynomes.

Nous allons prouver que, dans la formule (21), on peut supposer que les g_i sont eux-mêmes des invariants.

On peut se borner au cas où f et les f_i sont homogènes par rapport aux composantes de x et par rapport à celles de y ; décomposant si nécessaire les g_i en une somme de polynomes homogènes, on voit alors que l'identité (21) subsiste lorsqu'on remplace chaque g_i par la partie homogène telle que le produit de cette partie et de f_i ait mêmes degrés que f par rapport à x et à y . On peut donc supposer désormais les g_i homogènes.

Cela étant, tout système libre (z_i) de n vecteurs contravariants détermine un automorphisme u de E par les relations $u(e_i)=z_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$: les composantes des z_i ne sont autres que les éléments de la matrice correspondant à u . Soit alors $\varphi(x,y)$ un polynome par rapport aux composantes de x et y. La fraction rationnelle $\psi(x,y;z_1,\ldots,z_n)=\varphi(u^{-1}.x,u^{-1}.y)$ est un invariant absolu des tenseurs x,y et des n vecteurs contravariants z_i ; en effet, pour tout automorphisme v de E , on a $v(z_i)=v(u(e_i))$ donc
$\psi(x,y;v(z_1),\ldots,v(z_n))=\varphi((u^{-1}v^{-1}).x,(u^{-1}v^{-1}).y)$, et par suite
$\psi(v(x),v(y);v(z_1),\ldots,v(z_n))=\varphi((u^{-1}v^{-1}v).x\ ,\ (u^{-1}v^{-1}v).y)=\psi(x,y;z_1,\ldots,z_n)$
On notera en outre que ψ est le quotient d'un polynome par rapport aux composantes de x,y et des z_i , et d'une puissance du déterminant $[z_1z_2\ldots z_n]$. Enfin, lorsque φ est un invariant de poids g des tenseurs x et y , on a $\psi(x,y;z_1,\ldots,z_n)=[z_1z_2\ldots z_n]^{-g}\varphi(x,y)$.

Remplaçons alors x par $u^{-1}(x)$ et y par $u^{-1}(y)$ dans l'identité (21) ; en utilisant les remarques précédentes, et en chassant les dénominateurs, il vient une identité de la forme

$$(22)\qquad [z_1z_2\ldots z_n]^k f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x,y;z_1,\ldots,z_n)f_i(x,y)$$

où les h_i sont des polynomes par rapport aux composantes de x,y et des z_i , qui sont des invariants de x,y et des z_i ; d'après la forme de l'identité (22), on voit que les h_i sont homogènes et de degré k par rapport à chacun des vecteurs z_i . Appliquons alors aux deux membres de (22) l'opérateur Ω^k relatif aux vecteurs z_i ; on sait que $\Omega^k [z_1 z_2 \ldots z_n]^k$ est une constante $c \neq 0$; d'autre part, comme les h_i sont de degré k par rapport à chacun des z_i , les $\Omega^k h_i$ ne contiennent plus les z_i , et, d'après la prop.3, sont donc des <u>invariants des tenseurs</u> x <u>et</u> y .

Ayant démontré que tout invariant homogène non constant peut se mettre sous la forme (21), où les g_i sont des invariants homogènes, il suffit, pour prouver que tout invariant homogène f peut se mettre sous la forme d'un polynome par rapport aux f_i , de raisonner par récurrence sur le degré de f , le théorème étant évident lorsque ce degré est nul. Si le degré μ de f est >0, f se met sous la forme (21), et comme les f_i ne sont pas constants, le degré de chacun des g_i est $\leqslant \mu - 1$; par hypothèse, les invariants g_i sont égaux à des polynomes par rapport aux f_i , et il en est par suite de même de f .

C.Q.F.D.

<u>Remarques</u>. 1) La démonstration précédente ne fournit aucun moyen de déterminer explicitement un système complet d'invariants de tenseurs génériques <u>explicités</u>, puisqu'elle suppose qu'on connaisse déjà un système de générateurs de l'idéal engendré par <u>tous</u> les invariants. Le plus souvent, des raisonnements analogues à ceux faits pour le cas particulier traité ci-dessus en exemple, permettront de déterminer effectivement un système complet d'invariants.

2) Les invariants f_i d'un système complets ne sont pas en général indépendants, mais sont liés par des identités du type $\Psi(f_1, \ldots, f_m) = 0$,

où $\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ est un polynome non identiquement nul (syzygies). Par exemple, dans le cas particulier traité plus haut, on a l'identité

$$h^2 = -d_2 f^2 + 2\, d_{12} fg - d_1 g^2$$

Le développement de Young-Deruyts. Nous avons vu au § 8 que tout tenseur covariant est une somme de tenseurs covariants irréductibles, dont nous avons déterminé la forme. Tenant compte de la correspondance biunivoque entre tenseurs covariants et formes multilinéaires, nous allons déduire de cette décomposition une décomposition analogue de toute forme multilinéaire, qui a de nombreuses applications à la recherche des invariants.

Considérons d'abord un tenseur covariant de la forme $a' = a'_1 a'_2 \ldots a'_f$, où les a'_i sont f vecteurs covariants (en d'autres termes, f formes linéaires sur E). Quels que soient les f vecteurs covariants $x_1, \ldots, x_f$, la valeur, pour ces f vecteurs, de la forme multilinéaire correspondant au tenseur a' est $\langle x_1 x_2 \ldots x_f, a'_1 \ldots a'_f \rangle = \langle x_1, a'_1 \rangle \langle x_2, a'_2 \rangle \ldots$ $\ldots \langle x_f, a'_f \rangle$. On en conclut que, pour toute permutation $s \in \mathfrak{S}_f$, on a $\langle x_1 x_2 .. x_f, s.(a'_1 .. a'_f) \rangle = \langle x_1, a'_{s^{-1}(1)} \rangle \ldots \langle x_f, a'_{s^{-1}(f)} \rangle =$

$$= \langle x_{s(1)}, a'_1 \rangle \ldots \langle x_{s(f)}, a'_f \rangle = \langle s^{-1}.(x_1 x_2 .. x_f), a'_1 a'_2 .. a'_f \rangle$$

Cette relation s'étend immédiatement au cas où a' est un tenseur covariant d'ordre f quelconque, puisque c'est une somme de produits symboliques de f vecteurs covariants.

Considérons alors l'opérateur $c_\alpha = a_\alpha b_\alpha$ défini au § 7. On a par définition $b_\alpha = \sum \varepsilon_q . q$, où q parcourt le groupe $C(\Sigma_\alpha)$; on aura, d'après ce qui précède

$$\langle x_1..x_f, b_\alpha.a'\rangle = \sum_q \varepsilon_q \langle q^{-1}.(x_1..x_f),a'\rangle = \langle b_\alpha.(x_1..x_f),a'\rangle$$

puisque $\varepsilon_{q^{-1}}=\varepsilon_q$. De même $\langle x_1..x_f, a_\alpha.a'\rangle = \langle a_\alpha.(x_1..x_f),a'\rangle$; combinant ces résultats, il vient

$$\langle x_1..x_f, c_\alpha.a'\rangle = \langle d_\alpha.(x_1..x_f),a'\rangle \tag{23}$$

où $d_\alpha = b_\alpha a_\alpha$.

Cela étant, le tenseur covariant a' peut s'écrire sous forme d'une somme de tenseurs irréductibles $e_i.a'$, dont chacun se déduit d'un tenseur $c_\alpha.a'$ par un automorphisme de l'espace tensoriel $T_f^0(E)$. On en conclut que la forme multilinéaire $\langle x_1..x_f,a'\rangle$ se décompose en une somme de formes $\langle d_\alpha.(x_1..x_f),a'\rangle$ (à une permutation près de $x_1,...,x_f$) : cette décomposition d'une forme multilinéaire est dite <u>développement de Young-Deruyts</u>.

Remarquons maintenant que toute permutation p du groupe $L(\Sigma_\alpha)$ peut s'écrire $p=p_1p_2..p_{\beta_1}$, où $p_i(m)=p(m)$ si m appartient à la ligne d'indice i du schéma Σ_α , $p_i(m)=m$ dans le cas contraire ; on a donc $a_\alpha = \prod_{i=1}^{\beta_1}(\sum_{p_i} p_i)$, p_i parcourant toutes les permutations des nombres de la i-ième ligne de Σ_α . Pour former l'expression $\langle a_\alpha.(x_1..x_f),a'\rangle$, il faut donc, dans la forme multilinéaire $\langle x_1..x_f,a'\rangle$, permuter de toutes les manières possibles les x_i dont l'indice appartient à une même ligne de Σ_α , et faire la somme de toutes les formes obtenues. Mais on sait (chap.IV) que premuter de toutes les manières possibles les arguments d'une forme multilinéaire et fairo la somme des expressions obtenues, revient à <u>identifier</u> tous ces arguments, puis à <u>polariser</u> la forme obtenue. Pour obtenir la forme $\langle a_\alpha.(x_1..x_f),a'\rangle$, on identifiera donc, dans la forme $\langle x_1..x_f,a'\rangle$, tous les x_i dont l'indice appartient à une même ligne de Σ_α ; on obtient ainsi une forme <u>de n variables au plus</u>, homogène en chacune des variables ;

on polarisera ensuite la forme ainsi obtenue par rapport à chacun de ses arguments.

Supposons maintenant donnée une représentation matricielle de degré n d'un groupe Γ, E étant donc muni d'une loi externe $(\sigma,x) \rightarrow \sigma.x$ dont Γ est le domaine d'opérateurs. Soit $\varphi(x_1,\ldots,x_f)$ un invariant relatif <u>multilinéaire</u> de f vecteurs de E pour la représentation considérée du groupe Γ ; il est immédiat que pour toute permutation $s \in \mathfrak{S}_f$, $\varphi(x_{s(1)},\ldots,x_{s(f)})$ est encore un invariant multilinéaire des x_i pour le groupe Γ (avec le même multiplicateur). Appliquons alors à φ le développement de Young-Deruyts ; φ est mis sous forme d'une somme d'invariants multilinéaires des x_i, dont chacun s'obtient en identifiant dans φ tous les x_i dont l'indice appartient à une même ligne de Σ_α, puis en polarisant l'invariant obtenu pour chacun de ses arguments, et enfin en permutant d'une certaine manière les arguments dans l'invariant multilinéaire obtenu. Le point important dans ces transformations est que chacun des invariants en lesquels se décompose φ provient, par polarisation, d'un invariant de <u>n vecteurs au plus</u>, de degré quelconque. On voit donc qu'<u>on saura trouver tous les invariants relatifs d'un nombre quelconque de vecteurs de E, pour le groupe Γ</u>, <u>si on sait déterminer tous les invariants relatifs de n vecteurs</u> (un invariant de moins de n vecteurs pouvant toujours être considéré comme un invariant de n vecteurs ne dépendant pas de certains d'entre eux).

On peut aller plus loin, en examinant de plus près les formes multilinéaires $\langle d_a.(x_1\ldots x_f),a'\rangle$. Supposons que le schéma Σ_α ait ses e premières colonnes de longueur n, les autres étant de longueur $< n$.

Si $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ sont n vecteurs covariants, $z_1, \ldots, z_n$, on a, avec les notations du §8, $\langle z_1 z_2 \ldots z_n, \Delta(y'_1 y'_2 \ldots y'_n)\rangle = [z_1 z_2 \ldots z_n][y'_1 y'_2 \ldots y'_n]$; on voit donc que la forme $\langle d_u.(x_1 \ldots x_f), a'\rangle$ est une somme de formes dont chacune contient en facteur un produit de e déterminants de la forme $[x_{i_1} \ldots x_{i_n}]$; en outre le coefficient de chacun de ces produits est une forme multilinéaire correspondant au schéma d'Young $\Sigma_{\alpha''}$ obtenu en supprimant les e premières colonnes de Σ_α (cf. §8). Comme $\Sigma_{\alpha'}$ a au plus n-1 lignes, on voit que ces formes proviendront par polarisation et permutation des arguments de formes de n-1 variables au plus.

Appliquant ces remarques aux invariants multilinéaires relatifs au groupe Γ, on voit qu'on saura déterminer tous les invariants relatifs d'un nombre quelconque de vecteurs de E si on sait déterminer les invariants (de degré quelconque) de n-1 vecteurs, puisque $[x_1 x_2 \ldots x_n]$ est un invariant pour le groupe Γ.

Montrons par exemple comment on retrouve ainsi la prop.2 donnant tous les invariants multilinéaires d'un nombre quelconque de vecteurs, pour le groupe $GL_n(K)$. D'après ce qui précède, on est ramené à déterminer les invariants relatifs (de degré quelconque) de n-1 vecteurs de E. Or, un tel invariant f est nécessairement une constante. En effet, si $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont n-1 vecteurs quelconques de E formant un système libre, il existe un automorphisme u de E, de déterminant 1, tel que $u(x_i) = e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$: il suffit de prendre une base de E formée des x_i et d'un n-ème vecteur x_n, et d'achever de déterminer u par la condition $u(x_n) = \lambda e_n$, étant égal à $[x_1 x_2 \ldots x_n]$.

On a alors $f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=f(e_1,e_2,\dots,e_{n-1})$; en vertu du principe d'inconséquence des inégalités algèbriques, cette identité est une identité algèbrique par rapport aux x_i , f est bien constant. L'application du développement de Young-Deruyts à un invariant multilinéaire d'un nombre quelconque de vecteurs redonne alors aussitôt la prop.2 .

Au chapitre IX, nous donnerons d'autres applications de cette méthode à la recherche des invariants de <u>sous-groupes</u> de $GL_n(K)$.
