LIVRE II
ALGEBRE
CHAPITRE VIII (ETAT 2)
FORMES BILINEAIRES ET FORMES QUADRATIQUES

Rédaction n° 074

Nombre de pages : 80

Nombre de feuilles : 80

Algèbre
Formes bilinéaires
Formes quadratiques
Chap. VIII Etat 2
74

M. Delsarte

A 72

2

LIVRE II

ALGÈBRE

CHAPITRE VIII (Etat 2)

FORMES BILINÉAIRES ET FORMES QUADRATIQUES.

Sommaire.

LIVRE II

ALGÈBRE

CHAPITRE VIII (État 2)

FORMES BILINÉAIRES ET FORMES QUADRATIQUES.

§ 1. Formes bilinéaires et dualités.

1. Formes bilinéaires.

Soient A un anneau (commutatif ou non) ayant un élément unité ; soient E un A-module unitaire à gauche, F un A-module unitaire à droite. Nous avons défini (chap. III, App. II, n°3, déf. 3) une forme bilinéaire sur $E \times F$ comme une application f de E F dans A, satisfaisant aux identités

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x,y+y')=f(x,y)+f(x,y') \\ f(x+x',y)=f(x,y)+f(x',y) \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} f(\alpha x,y)=\alpha f(x,y) \\ f(x,y\beta)=f(x,y)\beta \end{cases} \qquad \text{pour } \alpha\in A,\ \beta\in A.$$

Rappelons (chap. III, App. II, n°3, prop. 2) qu'il existe une correspondance biunivoque canonique entre les formes bilinéaires sur $E\times F$ et les applications linéaires de E dans le dual F^* de F, ainsi qu'entre les formes bilinéaires sur $E\times F$ et les applications linéaires de F dans E^*. De façon précise, pour tout $x\in E$, l'application partielle $y\to f(x,y)$ est une forme linéaire sur F ; si on la désigne par $g(x)$, on a identiquement

$$(3) \qquad f(x,y)=\langle g(x),y\rangle \quad (*)$$

où g est une application linéaire de E dans F^* (qui est, comme E, un A-module à gauche) ; de même, pour tout $y\in F$, l'application partielle $x\to f(x,y)$ est une forme linéaire sur E ; si on la dési-

(*) Rappelons que, comme F est un module à droite, on note $\langle y',y\rangle$ la forme bilinéaire canonique sur $F^*\times F$ (chap. II, § 4, n°1).

gne par $h(y)$, on a identiquement

(4) $$f(x,y)=\langle x,h(y)\rangle$$

et h est une application linéaire de F dans E^* (A-module à droite).

Inversement , à toute application linéaire g de E dans F^* (resp. à toute application linéaire h de F dans E^*) la formule (3) (resp. (4)) fait correspondre une forme bilinéaire sur $E\times F$.

PROPOSITION 1 .- Lorsque E et F ont des bases finies , les applications linéaires g et h définies par (3) et (4) sont transposées l'une de l'autre .

Il est sous-entendu dans cet énoncé que E et F sont identifiés canoniquement à leurs biduals (chap.II, § 4, n°4) ; la proposition est alors conséquence de l'identité $\langle g(x),y\rangle=\langle x,{}^tg(y)\rangle=\langle x,h(y)\rangle$, qui montre que $h={}^tg$.

En particulier , lorsque A est un corps , E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur A , il résulte de la prop.1 que les rangs de g et de h ~~se~~ sont égaux . Ce résultat est encore valable lorsque E et F sont des espaces vectoriels quelconques (de dimension finie ou non) : en effet , l'identité $\langle g(x),y\rangle=\langle x,h(y)\rangle$ montre que si y est orthogonal à $g(E)$, $h(y)=0$ et réciproquement ; si $g(E)$ est de dimension finie p dans F^*, $\overset{-1}{h}(0)$, orthogonal à $g(E)$, est de codimension finie p ~~XXX~~ dans E (chap.II, § 4, th.1) ; donc g et h ont même rang (en entendant par là que si l'une de ces deux applications a un rang infini , il en est de même de l'autre).

DÉFINITION 1 .- Etant donnés un espace vectoriel à gauche E et un espace vectoriel à droite F sur un corps K , on appelle rang ~~XX~~ d'une forme bilinéaire f sur $E\times F$ le rang de chacune des deux applications linéaires g,h définies par (3) et (4) .

2 . Transformée d'une forme bilinéaire .

Soient A un anneau ayant un élément unité ; soient E,E_1 deux A-modules unitaires à gauche , F,F_1 deux A-modules unitaires à droite . Soient u une application linéaire de E_1 dans E , v une application linéaire de F_1 dans F . Si

f est une forme bilinéaire sur $E\times F$, l'application $(x_1,y_1)\to f(u(x_1),v(y_1))$ est une forme bilinéaire f_1 sur $E_1\times F_1$; on dit que f_1 est <u>transformée</u> de la forme bilinéaire f par les applications linéaires u et v. Soit g_1 l'application linéaire de E_1 dans F_1 qui correspond canoniquement à f_1 ; on a, par définition $\langle g_1(x_1),y_1\rangle=\langle g(u(x_1)),v(y_1)\rangle$, ou encore $\langle {}^tv(g(u(x_1))),y_1\rangle=$ $=\langle g_1(x_1),y_1\rangle$, autrement dit

(5) $$g_1={}^tv\circ g\circ u .$$

On voit de même que si h_1 est l'application linéaire de F_1 dans E_1 qui correspond canoniquement à f_1, on a

(6) $$h_1={}^tu\circ h\circ v .$$

Lorsque E et F ont des bases <u>finies</u> sur A et que A est <u>commutatif</u>, on sait (chap. III, § 1, n°5) qu'on peut identifier le A-module des formes bilinéaires sur $E\times F$ avec le <u>produit tensoriel</u> $E^*\otimes F^*$ des duals de E et de F, le produit tensoriel $x'\otimes y'$ de deux formes linéaires $x'\in E^*$, $y'\in F^*$ étant identifié à la forme bilinéaire $(x,y)\to\langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle$. Soient de même E_1,F_1 deux A-modules ayant des bases finies et soit u une application linéaire de E_1 dans E, v une application linéaire de F_1 dans F; la <u>transformée</u> par u et v de la forme bilinéaire $(x,y)\to\langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle$ est la forme bilinéaire $(x_1,y_1)\to\langle u(x_1),x'\rangle\langle v(y_1),y'\rangle=$ $=\langle x_1,{}^tu(x')\rangle\langle y_1,{}^tv(y')\rangle$; autrement dit, c'est la forme bilinéaire ${}^tu(x')\otimes{}^tv(y')$, ou encore l'image de $x'\otimes y'$ par la <u>transposée</u> de l'application linéaire $u\otimes v$ (chap. III, § 1, prop. 12).

3. Matrice d'une forme bilinéaire

Soient E un A-module unitaire à gauche, F un A-module unitaire à droite, et supposons que E et F aient chacun une base <u>finie</u> sur A. Soit $(a_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de E, $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de F, et soient $x=\sum_{i=1}^{m}\xi_i a_i$, $y=\sum_{j=1}^{n}b_j\eta_j$ des éléments de E et F respectivement ; on a alors

$$f(x,y)=\sum \xi_i f(a_i,b_j)\eta_j .$$

Si on pose $\alpha_{ij}=f(a_i,b_j)$, on voit qu'à toute forme bilinéaire f sur $E\times F$ correspond ainsi une matrice $R=(\alpha_{ij})$ à m lignes et n colonnes , à éléments dans A ; on dit que R est la matrice de la forme bilinéaire f , par rapport aux bases (a_i) et (b_j). Inversement , pour toute matrice $R=(\alpha_{ij})$ à m lignes et n colonnes sur A , il existe une forme bilinéaire f et une seule sur $E\times F$ telle que $f(a_i,b_j)=\alpha_{ij}$ $(1\leq i\leq m\ ,\ 1\leq j\leq n)$.

D'après la formule (4) , on a $\langle a_i,h(b_j)\rangle=\alpha_{ij}$, ou encore , en désignant par $(a'_i)_{1\leq i\leq m}$ la base duale de (a_i) dans E^* (chap.II, § 4,n°4) , $h(b_j)=\sum_{i=1}^{m} a'_i\alpha_{ij}$; cela montre que la matrice R n'est autre que la matrice de l'application linéaire h de F dans E^* , par rapport aux bases (b_j) et (a'_i) . Si on identifie comme d'ordinaire un élément $y=\sum_{j=1}^{n} b_j\eta_j$ de F à la matrice à une colonne (η_j), un élément $x'=\sum_{i=1}^{m} a'_i\xi'_i$ de E^* à la matrice à une colonne (ξ'_i) (chap.II, § 6,n°4) on peut écrire $h(y)=R.y$ (chap.II, § 6,n°4,formule (10)) . D'après nos conventions générales (chap.II, § 6) E , qui est un A-module à gauche , peut être considéré comme un module à droite sur l'anneau A^o opposé ~~XX~~ à A : un élément $x=\sum_{i=1}^{m}\xi_i a_i$ de E doit alors être identifié à la matrice à une colonne (ξ_i) , dont les éléments doivent être considérés comme appartenant à A^o ; la transposée ${}^t x$ de cette matrice est alors une matrice à une ligne , dont les éléments doivent être considérés comme appartenant à A , et la formule (4) équivaut à $f(x,y)={}^t x.h(y)$ (cf.chap.II, § 6,formule (13), E étant identifié à son bidual) ; en d'autres termes , on a

$$f(x,y)={}^t x.R.y \tag{7}$$

Si on considère E et F comme des modules à droite sur A^o , la matrice de l'application linéaire g , par rapport aux bases (a_i) et (b'_j) (duale de (b_j)) est la transposée ${}^t R$, comme il résulte de la prop.1 .

Lorsque A est un corps , le rang de la forme bilinéaire f est donc égal au rang de sa matrice R par rapport à des bases quelconques de E et de F . —

Soient E_1 un A-module unitaire à gauche , F_1 un A-module unitaire à droite , ayant des bases finies . Soient $(c_h)_{1\leq h\leq p}$ une base de E_1 , $(d_k)_{1\leq k\leq q}$ une base de F_1 . Soient u une application linéaire de E_1 dans E , v une application linéaire de F_1 dans F . Soit $\underline{Q}$ la matrice (à éléments dans A) de v , par rapport aux bases (d_k) et (b_j) . D'autre part , quand on considère E_1 et E comme des A^o-modules à droite , u est une application linéaire de E_1 dans E ; soit $\underline{P}$ sa matrice (à éléments dans A^o) par rapport aux bases (c_h) et (a_i) . La formule (6) (ou la formule (7)) montre que la matrice de la forme bilinéaire transformée $f_1(x_1,y_1)=f(u(x_1),v(y_1))$ par rapport aux bases (c_h) et (d_k) est

(8) $$\underline{R}_1={}^t\underline{P}.\underline{R}.\underline{Q} \quad .$$

Considérons en particulier le cas où $E_1=E$, $F_1=F$, et où u et v sont respectivement les applications <u>identiques</u> de E et F sur eux-mêmes ; $\underline{P}$ est alors la <u>matrice de passage</u> (chap.II,§ 6,n°9) de la base (a_i) à la base (c_h), et $\underline{Q}$ la matrice de passage de la base (b_j) à la base (d_k) ; la matrice $\underline{R}_1$ est alors la matrice de f par rapport aux nouvelles bases (c_h) et (d_k) , et la formule (8) donne son expression en fonction de la matrice $\underline{R}$ de f par rapport aux anciennes bases (a_i) et (b_j) .

<u>4 . Formes sesquilinéaires</u> .

Si A est un anneau <u>commutatif</u> (ayant un élément unité) , E un A-module unitaire , on peut considérer E à la fois comme A-module à gauche et A-module à droite , et par suite définir une <u>forme bilinéaire sur</u> $E\times E$ (chap.III,§ 1,n°1).Ceci n'est par contre plus possible en général lorsque A est <u>non commutatif</u> et que E est un A-module <u>à droite</u> , mais n'est pas muni d'une structure de A-module à gauche . Toutefois , on peut généraliser , comme nous allons le voir , la notion de forme bilinéaire , lorsque A est non commutatif , mais <u>isomorphe à l'anneau opposé</u> A^o . Autrement dit , il existe alors au moins une

8

application biunivoque $\lambda \to \lambda^\sigma$ de A sur lui-même telle que $(\lambda+\mu)^\sigma = \lambda^\sigma + \mu^\sigma$ et $(\lambda\mu)^\sigma = \mu^\sigma\lambda^\sigma$; une telle application s'appelle un antiautomorphisme de l'anneau A ; c'est à la fois un isomorphisme de A sur A° et de A° sur A ; l'application réciproque $\lambda \to \lambda^{\sigma^{-1}}$ est aussi un antiautomorphisme de A .

Exemples .- 1) Pour un anneau commutatif , la notion d'antiautomorphisme se confond avec celle d'automorphisme .

2) Pour toute algèbre de quaternions A , on a vu (chap.II, § 7,n°8) que l'application $x \to \bar{x}$ qui fait correspondre à chaque quaternion son conjugué, est un antiautomorphisme .

3) Soit M un module unitaire sur un anneau commutatif C , et soit A= ~~XX(E~~ =T(M) l'algèbre tensorielle (chap.III, § 4,n°6) sur M . Si , à chaque tenseur décomposable $x_1x_2\ldots x_p$ on fait correspondre le tenseur décomposable $x_px_{p-1}\ldots x_2x_1$, on définit une application linéaire biunivoque $z \to z'$ de A sur lui-même , dont on vérifie aussitôt que c'est un antiautomorphisme . On définit de la même manière un antiautomorphisme de l'algèbre extérieure $B = \bigwedge M$ sur M (chap.III, § 5,n°9).

4) Le composé de deux antiautomorphismes d'un anneau A est un automorphisme de A ; le composé d'un antiautomorphisme et d'un automorphisme (ou d'un automorphisme et d'un antiautomorphisme) est un antiautomorphisme .

Soit donc $\lambda \to \lambda^\sigma$ un antiautomorphisme de A . Si E est un A-module à droite, on peut alors définir sur E une structure de A-module à gauche au moyen de l'antiautomorphisme σ , en posant $\lambda x = x\lambda^{\sigma^{-1}}$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in A$ (les axiomes des modules à gauche se vérifient aussitôt). Pour éviter toute confusion , nous désignerons par E_σ le A-module à gauche ainsi défini . Nous pouvons maintenant considérer une forme bilinéaire sur $E_\sigma \times E$; nous dirons qu'une telle forme est une forme sesquilinéaire (relative à l'antiautomorphisme σ) sur $E\times E$ (ou, par abus de langage, sur E) ; il revient au même de poser la définition suivante :

DÉFINITION 2 .- Soit $\lambda\to\lambda^\sigma$ un antiautomorphisme d'un anneau A . Si E est un A-module à droite, on appelle forme sesquilinéaire sur $E\times E$ (relative à σ) une application f de $E\times E$ dans A, qui vérifie les identités (1) et

(9)
$$\begin{cases} f(x\alpha,y)=\alpha^\sigma f(x,y) \\ f(x,y\beta)=f(x,y)\beta \end{cases}.$$

Lorsque A est commutatif, une forme bilinéaire sur $E\times E$ peut donc être considérée comme une forme sesquilinéaire correspondant à l'automorphisme identique de A sur lui-même (qui est évidemment dans ce cas un antiautomorphisme).

Lorsque E est un A-module à gauche, E peut être considéré comme A^o-module à droite ; une forme sesquilinéaire sur $E\times E$ relative à σ, vérifiera donc les conditions

$$\begin{cases} f(\alpha x,y)=f(x,y)\alpha^\sigma \\ f(x,\beta y)=\beta f(x,y) \end{cases}$$

qui correspondent à (9).

Remarques .- 1) Les relations (9) montrent que, si f est une forme sesquilinéaire sur $E\times E$, relative à l'antiautomorphisme σ, $f_1(x,y)= =(f(y,x))^{\sigma^{-1}}$ est une forme sesquilinéaire sur $E\ \ E$, relative à l'antiautomorphisme σ^{-1}, car on a

$$(f(y,x\alpha))^{\sigma^{-1}}=(f(y,x)\alpha)^{\sigma^{-1}}=\alpha^{\sigma^{-1}}(f(y,x))^{\sigma^{-1}}$$

et
$$(f(y\beta,x))^{\sigma^{-1}}=(\beta^\sigma f(y,x))^{\sigma^{-1}}=(f(y,x))^{\sigma^{-1}}\beta .$$

2) Si f est une forme sesquilinéaire sur $E\times E$, relative à l'antiautomorphisme σ, et ρ un scalaire $\neq 0$, la fonction $f_1(x,y)=\rho f(x,y)$ est une forme sesquilinéaire sur $E\times E$, relative à l'antiautomorphisme $\lambda\to\rho\lambda^\sigma\rho^{-1}$ car on a $f_1(x\alpha,y)=\rho f(x\alpha,y)=(\rho\alpha^\sigma\rho^{-1})\rho f(x,y)=(\rho\alpha^\sigma\rho^{-1})f_1(x,y)$.

5 . Propriétés des formes sesquilinéaires .

Soit f une forme sesquilinéaire sur $E \times E$ (relative à σ) ; pour tout $x \in E$, $y \rightarrow f(x,y)$ est une forme linéaire sur le A-module à droite E ; si nous la désignons par $g(x)$, on a encore la relation

$$f(x,y)=\langle g(x),y\rangle \quad (3)$$

En outre , la première relation (9) montre que $g(x\alpha)=\alpha^{\sigma}g(x)$; en d'autres termes , g est une application linéaire du A-module à gauche E_{σ} dans le A-module à gauche E^{*} ; on peut aussi considérer que g est une application semi-linéaire (chap.II, Appendice) du A-module à droite E dans le A°-module à droite E^{*} , relatif à l'isomorphisme σ de A sur A° . De même , l'application $x \rightarrow (f(x,y))^{\sigma^{-1}}$ est une forme linéaire sur E ; si on la désigne par $h(y)$, on a

$$f(x,y)=\langle h(y),x\rangle^{\sigma} \quad (10)$$

et on a $h(y\beta)=\beta^{\sigma^{-1}}h(y)$; h est donc une application semi-linéaire de E dans E^{*} relative à l'isomorphisme σ^{-1} de A sur A° . On déduit aussitôt de ces formules que , lorsque E a une base finie , g et h sont transposées l'une de l'autre (chap.II, Appendice , n°4).

Lorsque A est un corps , g et h ont même rang ; ce rang est encore appelé le rang de la forme sesquilinéaire f .

Soit F un second A-module à droite , F_{σ} le A-module à gauche déduit de F comme il a été expliqué ci-dessus ; si u est une application linéaire de F dans E , u est aussi une application linéaire de F_{σ} dans E_{σ} , car on a $u(\lambda x)=u(x\lambda^{\sigma^{-1}})=u(x)\lambda^{\sigma^{-1}}=\lambda u(x)$ par définition des structures de A-module de E_{σ} et F_{σ}.

Cela étant , si u est une application linéaire de F dans E , l'application $(x_1,y_1)\rightarrow f(u(x_1),u(y_1))$ est une forme sesquilinéaire f_1 sur $F \times F$, qu'on appelle encore la transformée de f par l'application linéaire u ; si g_1 et h_1 sont les applications semi-linéaires de F dans F^{*} qui sont associées à f_1 , on a

$$g_1 = {}^t u \circ g \circ u \tag{11}$$

$$h_1 = {}^t u \circ h \circ u \quad . \tag{12}$$

Supposons maintenant que E admette une base *finie*, et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E ; si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i$, on a

$$f(x,y) = \sum_{i,j} \xi_i^{\sigma} f(a_i, a_j) \eta_j \quad .$$

Si on pose $\alpha_{ij} = f(a_i, a_j)$, à toute forme sesquilinéaire f sur $E \times E$ correspond ainsi une *matrice carrée* $\underline{R} = (\alpha_{ij})$ d'ordre n , à éléments dans A ; on dit que $\underline{R}$ est *la matrice de la forme sesquilinéaire f par rapport à la base* (a_i). Inversement, pour toute matrice carrée $\underline{R} = (\alpha_{ij})$ d'ordre n , il existe une forme sesquilinéaire f et une seule (relative à σ) telle que $f(a_i, a_j) = \alpha_{ij}$ pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

Soit (a'_i) la base duale de (a_i) dans E^* ; on voit comme au n°3 qu'on a $h(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^{\sigma^{-1}} a'_i$; autrement dit, $\underline{R}^{\sigma^{-1}}$ est la matrice de l'application semi-linéaire h , et ${}^t\underline{R}$ la matrice de g (transposée de h) par rapport aux bases (a_i) et (a'_i) (ces matrices étant considérées comme ayant leurs éléments dans A°) ; la formule (7) est remplacée par

$$f(x,y) = {}^t x^{\sigma} . \underline{R} . y \tag{13}$$

(où les éléments des matrices ${}^t x^{\sigma}$, $\underline{R}$ et y doivent être considérés comme appartenant à A). Si A est un *corps* , le rang de la forme sesquilinéaire f est donc égal au *rang* de la matrice $\underline{R}$.

Enfin, soit F un A-module à droite ayant une base finie , et soit $(b_j)_{1 \leq j \leq m}$ une base de F ; soit u une application linéaire de F dans E , et soit $\underline{P}$ sa matrice par rapport aux bases (b_j) et (a_i) . La formule (11) (ou la formule (13)) montre que la matrice $\underline{R}_1$ de la forme $(x_1, y_1) \to f(u(x_1), u(y_1))$ transformée de f par u , est donnée par la formule

$$\underline{R}_1 = {}^t\underline{P}^{\sigma} . \underline{R} . \underline{P} \quad . \tag{14}$$

6 . Sommes directes de formes sesquilinéaires .

Supposons que le A-module à droite E soit <u>somme directe</u> de m sous-modules E_i $(1 \leq i \leq m)$. Pour chaque indice i , soit f_i une forme sesquilinéaire sur E_i , toutes ces formes étant relatives à un même antiautomorphisme σ de A . Pour tout couple (x,y) d'éléments de E , soit $x=\sum_{i=1}^{m} x_i$, $y=\sum_{i=1}^{m} y_i$, où x_i et y_i appartiennent à E_i $(1 \leq i \leq m)$; si on pose $f(x,y)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i,y_i)$, il est clair que f est une <u>forme sesquilinéaire</u> sur E (relative à σ). On dit que f est <u>somme directe</u> des m formes f_i , et on écrit $f=\sum_{i=1}^{m} f_i$. Cette notation se justifie si on remarque que chacune des formes f_i peut se prolonger en une forme sesquilinéaire sur $E \times E$ tout entier , en posant $f_i(x,y)=0$ ~~XXXX(XXX)XXEXXXEX~~ lorsque x ~~XXX~~ ou y appartient à $\sum_{j \neq i} E_j$.

Le <u>dual</u> E^* de E peut alors être identifié canoniquement à la somme directe des duals E_i^* des sous-modules E_i de E (chap.II, § 4, n°3, prop.5) ; si g_i est l'application semi-linéaire de E_i dans E_i^* telle que $f_i(x_i,y_i)=\langle g_i(x_i),y_i \rangle$, et si g est l'application semi-linéaire de E dans E^* telle que $f(x,y)=\langle g(x),y \rangle$, g n'est autre que l'application égale à g_i dans E_i pour $1 \leq i \leq m$.

Soit B_i une base finie de E_i , $\underline{R}_i$ la matrice de f_i par rapport à cette base ; si B est la réunion des B_i , qui est une base de E , la matrice de f par rapport à B sera

$$\begin{pmatrix} \underline{R}_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \underline{R}_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \underline{R}_m \end{pmatrix}$$

Lorsque E est un <u>espace vectoriel</u> sur un corps K , le <u>rang</u> de f est la <u>somme</u> des rangs des f_i .

<u>7 . Extensions d'une forme sesquilinéaire</u> .

Soit A un anneau <u>commutatif</u> ayant un élément unité , σ un automorphisme de A, et soit E un A-module unitaire . La donnée d'une forme sesquilinéaire f (relative à σ) équivaut à la donnée d'une application semi-linéaire g (relative à σ) de E dans son dual E^* (n°5) . Cela permet de définir diverses applications semi-linéaires dans les <u>espaces tensoriels</u> sur E (chap. III, § 4) . Considérons par exemple l'espace $T^p_q(E)$ des tenseurs p fois contravariants et q fois covariants sur E ; si , à tout tenseur décomposable $z=x_1 \ldots x_p x'_1 x'_2 \ldots x'_q$ on fait correspondre le tenseur $x_2 \ldots x_p g(x_1) x'_1 \ldots x'_q$, p-1 fois contravariant et q+1 fois covariant , on définit de la sorte une application semi-linéaire (pour σ) de $T^p_q(E)$ dans $T^{p-1}_{q+1}(E)$; on dit que cette application consiste à <u>faire descendre le premier indice contravariant</u> d'un tenseur de $T^p_q(E)$ (au moyen de la forme sesquilinéaire f) . Lorsque E admet une base finie , il est facile d'exprimer les composantes du tenseur ainsi obtenu à l'aide des composantes du tenseur initial , par rapport à une même base (e_i) de E . Soit (α_{ij}) la matrice de la forme sesquilinéaire f par rapport à cette base ; si $(\xi^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q})$ sont les composantes d'un tenseur z de $T^p_q(E)$ par rapport à cette base , $(\zeta^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}}_{j_1 j_2 \ldots j_{q+1}})$ celles du tenseur obtenu en faisant descendre le premier indice contravariant de z , on a

$$\zeta^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}}_{j_1 j_2 \ldots j_{q+1}} = \sum_k \alpha_{k j_1} \xi^{k i_1 i_2 \ldots i_{p-1}}_{j_2 j_3 \ldots j_{q+1}}$$

comme il résulte aussitôt de la définition .

On généralise aisément cette définition . Soit $G=\bigotimes_{\nu=1}^{p+q} E_\nu$ un module de tenseurs p fois contravariants et q fois covariants sur E , avec $E_\nu=E$ pour les indices ν d'une partie J de p éléments de $[1,p+q]$, $E_\nu=E^*$ pour les q indices $\nu \notin J$. Soit J_0 une partie non vide de J , et soit φ une permutation de $[1,p+q]$. Soit $z=y_1 y_2 \ldots y_{p+q}$ un tenseur décomposable de G ; faisons-lui correspondre le tenseur décomposable $t_1 t_2 \ldots t_{p+q}$, où $t_{\varphi(\nu)}=y_\nu$ si $\nu \notin J_0$, et $t_{\varphi(\nu)}=g(y_\nu)$ si $\nu \in J_0$; on définit de la sorte une application semi-linéaire de G dans un module de tenseurs (p-r) fois contravariants et q+r fois covariants (si r est le nombre d'éléments de J_o) ; on dit encore qu'elle consiste à faire descendre les indices contravariants de l'ensemble J_o (à l'aide de la permutation φ et de la forme sesquilinéaire f).

Bornons-nous dans la suite de ce n° au cas où E admet une base finie ; on sait alors (chap.III, § 1,n°5) que le module $T_p(E)$ des tenseurs p fois covariants est canoniquement isomorphe au dual du module $T^p(E)$ des tenseurs p fois contravariants ; d'après ce qui précède , on définit une application semi-linéaire de $T^p(E)$ dans $T_p(E)$ (relative à σ) en faisant correspondre à tout tenseur contravariant $x_1x_2..x_p$ le tenseur covariant $g(x_1)g(x_2)..g(x_p)$; l'application ainsi définie est la puissance tensorielle p-ème de g (chap.III, § 1,n°4) ; nous la noterons encore g si aucune confusion n'en résulte . Comme cette application peut être identifiée à une application semi-linéaire du module $T^p(E)$ dans son dual , on voit qu'elle définit une forme sesquilinéaire (relative à σ) sur $T^p(E)\times T^p(E)$; nous dirons que cette forme est l'extension canonique de f au module $T^p(E)$ (ou puissance tensorielle p-ème de f) , et nous la noterons encore f si aucune confusion n'en résulte ; cette extension est donc définie par la relation

$$f(x_1x_2..x_p,y_1y_2..y_p)=f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)..f(x_p,y_p) \tag{15}$$

pour tout couple de tenseurs décomposables $x_1x_2..x_p,y_1y_2..y_p$.

Si $\underline{R}$ est la matrice de f par rapport à une base (e_i) de E , la matrice de son extension canonique à $T^p(E)$, par rapport à la base de ce module , produit tensoriel de (e_i) p fois par elle-même , n'est autre que la puissance tensorielle p-ème de la matrice $\underline{R}$ (chap.III, § 1,n°6).

De même , le prolongement canonique de g à l'algèbre extérieure $\bigwedge E$ sur E (prolongement que nous noterons encore g s'il n'en résulte pas de confusion) est une application semi-linéaire (pour σ) définie pour tout p-vecteur décomposable $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$, par la formule $g(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) = g(x_1) \wedge g(x_2) \wedge \ldots \wedge g(x_p)$ (chap.III, § 5, n°9) . Comme $\bigwedge E^*$ est identifié au module dual de $\bigwedge E$ (chap.III, § 8, n°2) , ce prolongement canonique de g définit une forme sesquilinéaire sur $(\bigwedge E) \times (\bigwedge E)$, que nous noterons encore f si aucune confusion n'en résulte , et qui est appelée l'extension canonique de f à $\bigwedge E$; si u est un p-vecteur , v un q-vecteur et si $q \neq p$, on a donc $f(u,v)=0$ (en d'autres termes , f est somme directe (n°6) de ses restrictions aux sous-modules $\overset{p}{\bigwedge} E$ de $\bigwedge E$) ; d'autre part , pour deux p-vecteurs décomposables , on a (cf. chap.III, § 8, formule (6))

$$f(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p, y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p) = \det(f(x_i, y_j)) \quad (16)$$

La restriction de f à $(\overset{p}{\bigwedge} E) \times (\overset{p}{\bigwedge} E)$ est appelée extension canonique de f à $\overset{p}{\bigwedge} E$ ou encore puissance extérieure p-ème de f . Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E , (e_H) la base correspondante de $\overset{p}{\bigwedge} E$, et si $\underline{R}$ est la matrice de f par rapport à (e_i) , la matrice de la puissance extérieure p-ème de f par rapport à (e_H) n'est autre que la puissance extérieure p-ème de $\underline{R}$ (chap.III, § 6, n°3).

En particulier , la puissance extérieure n-ème de f , rapportée à la base de $\overset{n}{\bigwedge} E$ formée de l'unique élément $e = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$, est la forme sesquilinéaire $(\lambda, \mu) \to \lambda^{\sigma} . \Delta . \mu$, où $\Delta = \det \underline{R}$; on dit que Δ est le discriminant de la forme sesquilinéaire f par rapport à la base $\{e\}$ de $\overset{n}{\bigwedge} E$ (ou par rapport à la base (e_i) de E).

8 . Isomorphismes entre p-vecteurs et (n-p)-vecteurs .

Le prolongement canonique de g permet aussi de définir le produit intérieur gauche (resp. droit) relatif à la forme f , de deux éléments x et y de $\bigwedge E$: ce sont respectivement l'élément $x \lrcorner g(y)$ de $\bigwedge E^*$, et l'élément $x \llcorner g(y)$ de $\bigwedge E$; si x est un p-vecteur , y un q-vecteur , $x \lrcorner g(y)$ est nul pour $p > q$, et une (q-p)-forme pour $p \leq q$; $x \llcorner g(y)$ est nul pour $p < q$, et est un (p-q)-vecteur pour $p \geq q$ (chap.III, § 8, n°4)

Enfin, soit φ un <u>isomorphisme canonique</u> de $\bigwedge E$ sur $\bigwedge E^*$ (relatif à une base e de $\bigwedge^n E$ (chap. III, § 8, n°5) ; $\overset{-1}{\varphi_p}\circ g$ est une application semi-linéaire de $\bigwedge E$ dans lui-même, qui applique $\bigwedge^p E$ dans $\bigwedge^{n-p} E$, et qu'on note $z \to \tilde{z}$ quand aucune confusion n'en résulte ; d'ailleurs, comme $\overset{-1}{\varphi}(x') = e \,\llcorner\, x'$ par définition, on a $\tilde{z} = e \,\llcorner\, g(z)$.

PROPOSITION 2. - <u>Soit Δ le discriminant de la forme f par rapport à e ; si φ est l'isomorphisme canonique de $\bigwedge E$ sur $\bigwedge E^*$ relatif à e, et g_p le prolongement canonique de g à $\bigwedge^p E$, on a</u>

$$(17) \qquad {}^t g_p \circ \overset{-1}{\varphi_p} \circ g_{n-p} = (-1)^{p(n-p)} \Delta^{\sigma^{-1}} \varphi_{n-p} .$$

En effet, pour tout p-vecteur z et tout (n-p)-vecteur x, on a, par définition de la transposée d'une application semi-linéaire (chap. II, Appendice, n°4)

$$\langle z, {}^t g_p(\overset{-1}{\varphi_p}(g_{n-p}(x)))\rangle^{\sigma} = \langle \overset{-1}{\varphi_p}(g_{n-p}(x)), g_p(z)\rangle$$

d'où, par définition de $\overset{-1}{\varphi_p}$ (chap. III, § 8, formule (27))

$$(18) \qquad \langle z, {}^t g_p(\overset{-1}{\varphi_p}(g_{n-p}(x)))\rangle^{\sigma} e' = g_{n-p}(x)\wedge g_p(z) = (-1)^{p(n-p)} g_p(z)\wedge g_{n-p}(x) = $$
$$= (-1)^{p(n-p)} g_n(z\wedge x)$$

Mais, par définition de φ_{n-p}, on a $z\wedge x = \langle z, \varphi_{n-p}(x)\rangle e$, d'où $g_n(z\wedge x) = \langle z, \varphi_{n-p}(x)\rangle^{\sigma} g_n(e) = \langle z, \varphi_{n-p}(x)\rangle^{\sigma} \Delta e'$; en substituant dans (18), on a $\langle z, {}^t g_p(\overset{-1}{\varphi_p}(g_{n-p}(x)))\rangle = \Delta^{\sigma^{-1}} \langle z, g_{n-p}(x)\rangle$, ce qui équivaut à (17), puisque z est un p-vecteur arbitraire.

COROLLAIRE. - <u>La composée des applications $\overset{-1}{\varphi}\circ g$ et $\overset{-1}{\varphi}\circ {}^t g$ $(= \overset{-1}{\varphi}\circ h)$ de $\bigwedge E$ dans lui-même est l'application linéaire qui, à tout p-vecteur z, fait correspondre le p-vecteur $(-1)^{p(n-p)}\Delta z$.</u>

En effet, on vérifie aussitôt qu'on a $h_n(e) = \Delta^{\sigma^{-1}} e'$, d'où le corollaire, en appliquant (17) à h au lieu de g.

On peut dire encore que $(\overset{-1}{\varphi}\circ g)\circ(\overset{-1}{\varphi}\circ {}^t g) = \Delta \eta^{n+1}$, en désignant par η l'application linéaire de $\bigwedge E$ sur lui-même qui, à tout p-vecteur z, fait correspondre $(-1)^p z$ (chap.III, § 8, n°6).

Produit vectoriel de deux vecteurs .- Considérons en particulier le cas où E admet une base de trois éléments sur E. Alors, pour tout couple de vecteurs x, y de E, l'application $z \to \tilde{z}$ fait correspondre au bivecteur $x \wedge y$ un vecteur qu'on note $x \bar{\wedge} y$ et qu'on appelle produit vectoriel de x et de y (relatif à la forme sesquilinéaire f et à la base e choisie dans $\overset{3}{\wedge} E$). Il est clair que l'on a $x \bar{\wedge} x = 0$, $y \bar{\wedge} x = -x \bar{\wedge} y$, $x \bar{\wedge}(y_1+y_2) = x \bar{\wedge} y_1 + x \bar{\wedge} y_2$, $(x_1+x_2)\bar{\wedge} y = x_1 \bar{\wedge} y + x_2 \bar{\wedge} y$, et $(\lambda x)\bar{\wedge} y = x \bar{\wedge}(\lambda y) = \lambda^{\sigma}(x \bar{\wedge} y)$.

En outre, on a

(19) $$f(x, x \bar{\wedge} y) = f(y, x \bar{\wedge} y) = 0 .$$

En effet, on peut écrire

$$f(x, x\bar{\wedge} y) = \langle g(x), \varphi^{-1}(g(x \wedge y)) \rangle = \langle x, {}^t g(\varphi^{-1}(g(x \wedge y))) \rangle = (g(x \wedge y) \wedge g(x))^{\sigma^{-1}}$$

Mais par définition $g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y)$, donc $g(x \wedge y) \wedge g(x) = 0$; on démontre de même la seconde relation (19).

9. Semi-dualités.

Soit A un anneau (commutatif ou non) ayant un élément unité, E un A-module unitaire à droite admettant une base finie ; on dit qu'une application semi-linéaire g de E dans son dual E^*, relative à un antiautomorphisme σ de A, est une semi-dualité si c'est une application biunivoque de E sur E^*. La transposée h de g est alors aussi une semi-dualité. Lorsque A est commutatif et que σ est l'automorphisme identique, une semi-dualité est appelée dualité.

Lorsque A est un corps, pour que g soit une semi-dualité, il faut et il suffit que g soit de rang égal à la dimension n de E (chap.II, § 3, prop.11) ; il revient au même de dire que la forme sesquilinéaire f correspondant à g par la formule (3) doit être de rang n.

Lorsque A est un anneau commutatif, pour que g soit une semi-dualité, il faut et il suffit que le discriminant (n°7) de la forme sesquilinéaire f (par rapport à une base quelconque) soit inversible dans A (chap III, § 6, prop. 5).

Si g est une semi-dualité de E sur E^*, son application réciproque, que nous noterons $\overset{-1}{g}$, est une semi-dualité de E^* sur E (relative à l'antiautomorphisme σ^{-1}, E^* étant considéré comme A-module à gauche ou A°-module à droite) ; il en est de même de la contragrédiente $\check{g}=\overset{-1}{h}$ de g (relativement à l'antiautomorphisme σ). A ces semi-dualités correspond donc sur $E^*\times E^*$ une forme sesquilinéaire $\hat{f}$, définie par

$$(20) \qquad \hat{f}(x',y')=f(\overset{-1}{g}(y'),\overset{-1}{g}(x'))=\langle y',\overset{-1}{g}(x')\rangle=\langle x',\overset{-1}{h}(y')\rangle^{\sigma^{-1}}$$

telle que $\quad \hat{f}(\alpha x',y')=\hat{f}(x',y')\alpha^{\sigma^{-1}} \quad , \quad \hat{f}(x',\beta y')=\beta\hat{f}(x',y')$.

On dit que la forme sesquilinéaire $\hat{f}$ est l'inverse de la forme f ; on a $\hat{\hat{f}}=f$. Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E, (a_i') la base duale de E^* ; si $\underline{R}$ est la matrice de la forme f par rapport à (a_i), la matrice de la semi-dualité $\overset{-1}{h}$ par rapport aux bases (a_i') et (a_i) est $\underline{R}^{-1}$ (E^* étant considéré comme A°-module à droite), d'où résulte aussitôt la formule

$$(21) \qquad \hat{f}(x',y')=({}^tx'.\underline{R}^{-1}.y'^{\sigma})^{\sigma^{-1}}$$

(x' et y' étant considérés comme des matrices à une colonne à éléments dans A°, et par suite ${}^tx'$, y'^{σ} et $\underline{R}^{-1}$ comme des matrices à éléments dans A).

Supposons toujours que f soit une forme sesquilinéaire telle que les applications semi-linéaires correspondantes g et $h=g$ soient des semi-dualités. Soit u un endomorphisme quelconque de E ; on peut écrire

$$f(u(x),y)=\langle h(y),u(x)\rangle^{\sigma}=\langle {}^tu(h(y)),x\rangle^{\sigma}=\langle h(u^*(y)),x\rangle^{\sigma}$$

en posant

$$(22) \qquad u^*=\overset{-1}{h}\circ{}^tu\circ h=\check{g}\circ{}^tu\circ{}^tg \,.$$

L'application linéaire u^* est un endomorphisme de E, qu'on appelle l'adjoint de u (relativement à la forme f) ; on a donc, par définition

(23) $$f(u(x),y)=f(x,u^*(y)) .$$

De (22) ou (23) on tire que , si u et v sont deux endomorphismes de E , on a

(24) $$(u\circ v)^* = v^* \circ u^* .$$

En outre , il résulte de (22) que , si $\underline{U}$ est la matrice d'un endomorphisme u de E par rapport à une base (a_i) , et $\underline{R}$ la matrice de la forme f par rapport à la même base , la matrice de u^* par rapport à cette base est $\underline{R}^{-1} . {}^t\underline{U}^\sigma . \underline{R}$ Si E est un espace vectoriel , les <u>rangs</u> de u et de u^* sont <u>égaux</u> .

Supposons toujours que g soit une semi-dualité , mais que l'anneau A soit <u>commutatif</u> . Alors , on peut définir , à l'aide de la semi-dualité $\overset{-1}{g}$, de nouvelles applications semi-linéaires dans les espaces tensoriels sur E , en permutant les rôles de E et de E^* dans les applications définies au n°7 . Par exemple , on fera <u>monter le premier indice covariant</u> d'un tenseur de $T_q^p(E)$, en faisant correspondre à tout tenseur décomposable $x_1x_2\ldots x_p x_1' x_2' \ldots x_q'$ le tenseur $\overset{-1}{g}(x_1')x_1\ldots x_p x_2' \ldots x_q'$, p+1 fois contravariant et q-1 fois covariant.

Dans les mêmes conditions , la formule (17) donne , pour p=n-1

$$\Delta^{\sigma^{-1}} \overset{-1}{g} = (-1)^{n-1} \overset{-1}{\varphi_1} \circ {}^t g_{n-1} \circ \overset{-1}{\varphi}_{n-1}$$

Tenant compte de la relation ${}^t\varphi_{n-1} = (-1)^{n-1}\varphi_1$ (chap.III, § 8,n°5) , on a $\langle \varphi_{n-1}(z), \overset{-1}{\varphi_1}(t')\rangle = (-1)^{n-1}\langle \varphi_{n-1}(z), \check{\varphi}_{n-1}(t')\rangle = (-1)^{n-1}\langle z,t'\rangle$ pour deux éléments quelconques $z \in \bigwedge^{n-1} E$ et $t' \in E^*$, d'où

$$\Delta^{\sigma^{-1}}\langle y', \overset{-1}{g}(x')\rangle = \langle \overset{-1}{\varphi}_{n-1}(y'), {}^t g_{n-1}(\overset{-1}{\varphi}_{n-1}(x'))\rangle$$
$$= \langle g_{n-1}(\overset{-1}{\varphi}_{n-1}(y')), \overset{-1}{\varphi}_{n-1}(x')\rangle^{\sigma^{-1}} .$$

En d'autres termes , si f_{n-1} est la <u>puissance extérieure</u> (n-1)-<u>ème</u> de f , définie par $f_{n-1}(u,v) = \langle g_{n-1}(u),v\rangle$ (n°7) pour deux (n-1)-vecteurs quelconques, on voit que l'<u>inverse</u> $\hat{f}$ de f s'exprime à l'aide de f_{n-1} par la formule

$$\hat{f}(x',y') = (\Delta^{-1} f_{n-1}(\overset{-1}{\varphi}_{n-1}(y'), \overset{-1}{\varphi}_{n-1}(x')))^{\sigma^{-1}} .$$

Ceci conduit à considérer sur $E^* \times E^*$ la forme sesquilinéaire $\tilde{f}(x',y') = (f_{n-1}(\overset{-1}{\varphi}_{n-1}(y'), \overset{-1}{\varphi}_{n-1}(x')))^{\sigma^{-1}}$ <u>même lorsque</u> g <u>n'est pas une semi-dualité</u> ; on dit que cette forme est l'*adjointe* de la forme f . Lorsque g est une semi-dualité , on a donc $\tilde{f}(x',y')=\Delta^{\sigma^{-1}}\hat{f}(x',y')$.

10 . Eléments conjugués par rapport à une forme sesquilinéaire .

DÉFINITION 3 .– *Soit E un A-module à droite , f une forme sesquilinéaire sur E×E , relative à un antiautomorphisme σ de A . On dit qu'un élément $y\in E$ est conjugué (par rapport à f) d'un élément $x\in E$ si $f(x,y)=0$.*

D'après les relations (3) et (9) , il revient au même de dire (avec la même signification de g et h) que y est *orthogonal* à l'élément $g(x)\in E^*$, ou que $h(y)\in E^*$ est *orthogonal* à x .

Par exemple , nous avons montré au n°8 que , si A est commutatif et si E admet une base de 3 éléments , le produit vectoriel $x\wedge y$ de deux vecteurs de E est *conjugué* de x et de y .

Une partie N de E est dite *conjuguée* d'une partie M de E si tout élément de N est conjugué de tout élément de M ; cela signifie que N est orthogonale à g(M) (ou h(N) orthogonale à M) . Si M est une partie quelconque de E , l'ensemble M° des $y\in E$ qui sont conjugués de *tous* les éléments de M est un *sous-module* de E , *totalement orthogonal* à la partie g(M) de E^* ; si M' est le sous-module de E^* orthogonal à M , on a aussi $M^\circ=\overset{-1}{h}(M')$. On dit que M° est le sous-module de E *totalement conjugué* de M (ou simplement *conjugué* de M , s'il n'en résulte pas de confusion).

PROPOSITION 3 .– *Soit A un corps , E un espace vectoriel de dimension n sur A, f une forme sesquilinéaire sur E×E ; pour tout sous-espace vectoriel M de E , de dimension k , si μ est la dimension de $M\cap\overset{-1}{g}(0)$, la dimension du sous-espace M° totalement conjugué de M par rapport à f est $n-k+\mu$.*

En effet , g(M) est de dimension $k-\mu$.

En particulier (toujours lorsque A est un corps) , si M=xA est de dimension un , on a $\mu \leq 1$, donc le sous-espace M^0 conjugué de M est de dimension $n-1$ ou de dimension n : ce dernier cas ne se produit que si $M \subset \overset{-1}{g}(0)$, c'est-à-dire si $f(x,y)=0$ pour tout $y \in E$.

PROPOSITION 4 .- Soient M_1, M_2 deux sous-modules de E .

1° Le conjugué de M_1+M_2 est l'intersection des conjugués de M_1 et de M_2 .

2° Si A est un corps et g une semi-dualité , le conjugué de $M_1 \cap M_2$ est la somme des conjugués de M_1 et de M_2 .

La première partie est immédiate , puisque $g(M_1+M_2)=g(M_1)+g(M_2)$ (cf.chap.II, § 4,n°2) . Si A est un corps , et si M'_1, M'_2 sont les sous-espaces de E^* orthogonaux respectivement à M_1 et M_2 , le sous-espace orthogonal à $M_1 \cap M_2$ est $M'_1+M'_2$ (chap.II,§ 4,prop.8) ; en outre , comme h est alors une application biunivoque de E sur E^* , on a $\overset{-1}{h}(M'_1+M'_2)=\overset{-1}{h}(M'_1)+\overset{-1}{h}(M'_2)$.

2

La seconde partie de la prop.4 ne s'étend pas au cas où A n'est pas un corps (cf.chap.II,§ 4,exerc.8 et chap.III,§ 4,exerc.6 d)) , ni au cas où g n'est pas une semi-dualité . Considérons par exemple le cas où E est de dimension 2 sur un corps commutatif K , et où g est l'application linéaire de E dans E^* définie de la façon suivante : (e_1,e_2) étant une base de E , (e'_1,e'_2) la base duale de E^* , on suppose que $g(e_1)=g(e_2)=e'_1$. Si on prend $M_1=Ke_1$, $M_2=Ke_2$, on a $M_1 \cap M_2=\{0\}$, donc le sous-espace conjugué de $M_1 \cap M_2$ est E tout entier ; mais les conjugués de M_1 et de M_2 sont tous deux identiques à Ke_2 ,donc aussi leur somme .

PROPOSITION 5 .- Soit u un endomorphisme de E . Si g est une semi-dualité , pour tout sous-module M de E , le conjugué de $u(M)$ est $\overset{-1}{u^*}(M^0)$.

En effet , en raison de (23) , la relation $f(u(x),y)=0$ équivaut à $f(x,u^*(y))=0$; pour que y soit conjugué de $u(x)$, il faut et il suffit que $u^*(y)$ soit conjugué de x , d'où la proposition .

Supposons enfin que A soit un corps commutatif , E un espace vectoriel de dimension n sur A , et g une <u>semi-dualité</u> ; si z est un p-<u>vecteur décomposable</u> sur E , correspondant à un sous-espace M de E , de dimension p (chap.III, § 7, n°3) , g(z) est une p-forme décomposable correspondant au sous-espace g(M) de E^* , donc $\tilde{z}=\varphi^{-1}(g(z))$ est un (n-p)-vecteur <u>décomposable</u> sur E , correspondant au sous-espace M^0 <u>conjugué</u> de M (chap.III, § 8, prop.7).

<u>11 . Formes sesquilinéaires réflexives</u> .

Soit f une forme sesquilinéaire sur $E\times E$; en général , si y est conjugué de x par rapport à f , x n'est pas conjugué de y par rapport à f ; autrement dit, la relation f(x,y)=0 n'entraîne pas nécessairement f(y,x)=0 . On dit que f est <u>réflexive</u> si les relations f(x,y)=0 et f(y,x)=0 sont <u>équivalentes</u> .

Par exemple , si A est <u>commutatif</u> et f une <u>forme bilinéaire alternée</u> sur $E\times E$ (chap.III, § 5, n°2) , f est réflexive , puisque f(y,x)=-f(x,y) . De même , supposons que σ soit un antiautomorphisme <u>involutif</u> de A sur lui-même (c'est-à-dire tel que $(\lambda^\sigma)^\sigma=\lambda$) que nous noterons alors $\lambda\to\bar{\lambda}$; si f est une forme sesquilinéaire quelconque relative à cet antiautomorphisme , $\overline{f(y,x)}$ est aussi une forme sesquilinéaire relative au <u>même</u> antiautomorphisme ; si on a identiquement $f(x,y)=\overline{f(y,x)}$, on dit que f est une forme sesquilinéaire <u>hermitienne</u>; il est clair qu'alors elle est réflexive . On notera que , si f est alternée, les applications linéaires g et h correspondantes de E dans E sont telles que h=-g ; si f est hermitienne , on a h=g .

Inversement , si g=h , on a ~~g(x)(y)xx~~ $\langle g(x),y\rangle=\langle g(y),x\rangle^\sigma$, d'où , pour tout scalaire λ , $\langle g(x),y\rangle\lambda=\langle\lambda^\sigma g(y),x\rangle^\sigma=\lambda^{\sigma^2}\langle g(y),x\rangle^\sigma$. S'il existe x et y dans E tels que $\langle g(x),y\rangle=1$ (ce qui sera le cas lorsque g est une <u>semi dualité</u> , ou lorsque $f\neq 0$ et que A est un <u>corps</u>) on en tire $\lambda^{\sigma^2}=\lambda$ pour tout $\lambda\in$ ~~K~~ , puis $f(x,y)=(f(y,x))^\sigma$, ce qui montre que f est <u>hermitienne</u> .

Dans le cas particulier où A est <u>commutatif</u> et σ l'automorphisme identique de A , une forme bilinéaire hermitienne n'est autre qu'une forme bilinéaire *symétrique* , c'est-à-dire telle que $f(y,x)=f(x,y)$ identiquement (chap. III, § 5, n°1).

Remarquons enfin que , si f est une forme sesquilinéaire réflexive , il en est de même de ρf , pour tout élément $\rho \in A$.

THÉORÈME 1 (Kaplansky) .- *Soit E un espace vectoriel à droite sur un corps K ; pour qu'une forme sesquilinéaire f sur* $E \times E$, *de rang* >1 , *soit réflexive , il faut et il suffit qu'il existe* $\rho \in K$ *non nul , tel que* ρf *soit une forme alternée* (ce qui ne peut se produire que si K est *commutatif*) *ou une forme hermitienne* .

Soient g et h les applications semi-linéaires de E dans E^* correspondant à la forme donnée f ; par hypothèse , la relation $\langle g(x),y\rangle=0$ est équivalente à $\langle h(x),y\rangle=0$, autrement dit , les formes linéaires $g(x)$ et $h(x)$ s'annulent pour les mêmes vecteurs de E , ce qui , pour tout x tel que $g(x)\neq 0$, entraîne l'existence d'un scalaire $m(x)\neq 0$ tel que $h(x)=m(x)g(x)$. Soient x et y deux vecteurs de E tels que $g(x)$ et $g(y)$ soient linéairement indépendants; alors $g(x-y)=g(x)-g(y)\neq 0$, donc $h(x-y)=m(x-y)g(x-y)$, ce qui donne la relation

$$(25) \qquad m(x-y)(g(x)-g(y))=m(x)g(x)-m(y)g(y)$$

et par suite $m(x-y)=m(x)=m(y)$. Si maintenant on suppose seulement que x et y soient deux vecteurs de E tels que $g(x)$ et $g(y)$ soient $\neq 0$, ou bien $g(x)$ et $g(y)$ sont linéairement indépendants , et nous venons de voir que dans ce cas $m(x)=m(y)$; ou bien $g(x)$ et $g(y)$ sont linéairement dépendants , mais alors , comme $\dim g(E)\geqslant 2$, il existe $t\in E$ tel que $g(x)$ et $g(t)$ soient linéairement indépendants , et par suite aussi $g(y)$ et $g(t)$; on en conclut que $m(x)=m(t)$ et $m(y)=m(t)$, d'où encore $m(x)=m(y)$. En résumé , il existe un

24

scalaire $\mu\neq 0$ tel que $h(x)=\mu g(x)$ pour tout x tel que $g(x)\neq 0$; d'ailleurs , lorsque $g(x)=0$, on a aussi $h(x)=0$, donc la relation $h(x)=\mu g(x)$ a lieu pour <u>tout</u> $x\in E$. Elle s'écrit encore $f(x,y)=\langle h(y),x\rangle^{\sigma}=\langle \mu g(y),x\rangle^{\sigma}=\langle g(y),x\rangle^{\sigma}\mu^{\sigma}=$ $=(f(y,x))^{\sigma}\mu^{\sigma}$, ou , en posant $\lambda=(\mu^{\sigma})^{-1}$

(26) $$(f(y,x))^{\sigma}=f(x,y)\lambda \quad .$$

On tire de là que $(f(x,y))^{\sigma^2}=(f(y,x)\lambda)^{\sigma}=\lambda^{\sigma}(f(y,x))^{\sigma}=\lambda^{\sigma}f(x,y)\lambda$. Comme $f(x,y)$ peut prendre toute valeur scalaire dans K , on a donc l'identité

(27) $$\xi^{\sigma^2}=\lambda^{\sigma}\xi\lambda \qquad \text{pour tout } \xi\in K$$

et en particulier $\lambda^{\sigma}\lambda=1=\lambda\lambda^{\sigma}$.

Supposons d'abord que l'on ait $\xi+\lambda\xi^{\sigma}=0$ pour tout $\xi\in K$; si on prend en particulier $\xi=1$, cela donne $\lambda=-1$, et σ est donc l'application identique , ce qui prouve que K est <u>commutatif</u> ; la relation (26) devient alors $f(y,x)=-f(x,y)$. Si K n'est pas de caractéristique 2 , cela prouve que f est <u>alternée</u> ; sinon , la relation précédente s'écrit $f(y,x)=f(x,y)$, et f est une forme bilinéaire <u>symétrique</u> .

En second lieu , supposons qu'il existe $\alpha\in K$ tel que $\beta=\alpha+\lambda\alpha^{\sigma}\neq 0$; on a alors, en tenant compte de (27)

(28) $$\beta^{\sigma}=\alpha^{\sigma}+\alpha^{\sigma^2}\lambda^{\sigma}=\alpha^{\sigma}+\lambda^{\sigma}\alpha=\lambda^{\sigma}(\lambda\alpha^{\sigma}+\alpha)=\lambda^{\sigma}\beta \quad .$$

Posons $f_1(x,y)=\beta f(x,y)$; pour tout $\gamma\in K$, on a $f_1(x\gamma,y)=\beta f(x\gamma,y)=$ $=(\beta\gamma^{\sigma}\beta^{-1})f_1(x,y)$; autrement dit , f_1 est une forme sesquilinéaire pour l'antiautomorphisme σ_1 défini par $\xi^{\sigma_1}=\beta\xi^{\sigma}\beta^{-1}$. Or , on a , d'après (28) et (27)

$$\xi^{\sigma_1^2}=\beta(\beta^{\sigma})^{-1}\xi^{\sigma^2}\beta^{\sigma}\beta^{-1}=(\lambda^{\sigma})^{-1}\xi^{\sigma^2}\lambda^{\sigma}=\xi\lambda\lambda^{\sigma}=\xi$$

et enfin , en vertu de (26), (27) et (28)

$$(f_1(y,x))^{\sigma_1}=\beta(f_1(y,x))^{\sigma}\beta^{-1}=\beta(f(y,x))^{\sigma}\beta^{\sigma}\beta^{-1}=\beta(f(y,x))^{\sigma}\lambda^{\sigma}=\beta f(x,y)\lambda\lambda^{\sigma}=\beta f(x,y)=$$
$$=f_1(x,y)$$

ce qui achève la démonstration .

Le théorème ne s'étend pas aux formes de rang 1 , car pour tout antiautomorphisme σ de K , la forme $(\xi,\eta) \to \xi^{\sigma}\alpha\eta$ (où $\alpha \neq 0$) sur $K \times K$ est réflexive .

Si E admet une base finie , une forme sesquilinéaire hermitienne f sur E admet par rapport à une base de E une matrice $\underline{R}$ satisfaisant à la relation

(29) $$\underline{R}^{\sigma} = {}^{t}\underline{R}$$

On dit qu'une telle matrice est hermitienne . De même, la matrice d'une forme alternée (sur un anneau A commutatif) est caractérisée par la relation

(30) $${}^{t}\underline{R} = -\underline{R}$$

et le fait que les éléments de la diagonale principale de $\underline{R}$ sont tous nuls (ce qui est une conséquence de (30) lorsque A est de caractéristique $\neq 2$) ; on dit qu'une telle matrice est alternée .

Toute transformée d'une forme sesquilinéaire hermitienne (resp. alternée) est encore hermitienne (resp. alternée).

Toute somme directe de formes sesquilinéaires hermitiennes relatives à un même antiautomorphisme (resp. de formes alternées) est encore une forme sesquilinéaire hermitienne (resp. alternée).

Lorsque A est commutatif , les extensions d'une forme sesquilinéaire hermitienne f aux modules $T^r(E)$ et $\overset{r}{\wedge} E$ sont hermitiennes ; si f est alternée , l'extension de f à $T^r(E)$ ou à $\overset{r}{\wedge} E$ est alternée si r est impair , symétrique si r est pair .

Soit f une forme sesquilinéaire hermitienne (resp. alternée) telle que g soit une semi-dualité ; alors la relation g=h (resp. g=-h) entraîne g=h (resp. g=-h) , donc la forme $\hat{f}$ inverse de f est encore une forme hermitienne (resp. alternée) . En outre , pour tout endomorphisme u de E , on a $u^{*} = \underline{g}^{-1} \circ {}^{t}u \circ g$, et $f(x,u^{*}(y)) = \overline{f(u^{*}(y),x)} = \overline{f(y,u^{**}(x))} = f(u^{**}(x),y)$ identiquement, d'où $u^{**}=u$: l'adjoint de l'adjoint u^{*} de u est identique à u ; démonstraanalogue lorsque f est alternée .

Remarque .- Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie , l'étude d'une forme sesquilinéaire hermitienne (resp. alternée) quelconque sur $E \times E$ peut être ramenée à celle d'une forme de rang égal à la dimension de l'espace où elle est définie . En effet , soit alors $V = \overset{-1}{g}(0) = \overset{-1}{h}(0)$; V est le sous-espace des $x \in E$ tels que $f(x,y)=f(y,x)=0$ pour tout $y \in E$ (autrement dit , c'est le sous-espace conjugué de E) ; il en résulte que les relations $x_1 - x_2 \in V$, $y_1 - y_2 \in V$ entraînent $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$. On peut donc , par passage aux quotients (pour x et y) définir sur $(E/V) \times (E/V)$ une forme sesquilinéaire $\mathring{f}(\mathring{x},\mathring{y})$ comme égale à la valeur commune des éléments $f(x,y)$ pour tous les $x \in \mathring{x}$ et tous les $y \in \mathring{y}$. Il est immédiat que cette forme sesquilinéaire est hermitienne (resp. alternée) ; en outre , la relation $\mathring{f}(\mathring{x},\mathring{y})=0$ pour tout $\mathring{y} \in E/V$ signifie que $f(x,y)=0$ pour tout $y \in E$ et pour tout $x \in \mathring{x}$, c'est-à-dire , par définition, que $\mathring{x}=0$. L'application semi-linéaire $\mathring{g}$ associée à $\mathring{f}$ est donc biunivoque , et par suite une semi-dualité , ce qui prouve que $\mathring{f}$ a un rang égal à la dimension de E/V .

On aura soin de noter que si M est un sous-espace vectoriel de E , M^0 le sous-espace conjugué de M , le sous-espace (totalement) conjugué de M^0 n'est pas M en général , mais bien $M+V$.

§ 2 . Équivalence des formes sesquilinéaires réflexives .

1 . Équivalence des formes bilinéaires alternées .

Dans tout le reste de ce chapitre , nous ne considérerons plus que des formes sesquilinéaires réflexives sur un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps K ; d'après le th.1 du § 1 , une telle forme peut s'écrire ρf , où $\rho \in K^*$, et où f est , soit une forme bilinéaire alternée (ce qui suppose K commutatif) , soit une forme sesquilinéaire hermitienne , relative à un antiautomorphisme <u>involutif</u> $\lambda \to \bar{\lambda}$ de K ; un cas particulier important des formes de ce second type est celui où K est <u>commutatif</u> , $\lambda \to \lambda$ l'automorphisme <u>identique</u> , et f une forme bilinéaire <u>symétrique</u> .

Nous allons nous proposer de chercher à quelles conditions deux formes sesquilinéaires réflexives f_1, f_2 sur $E \times E$ sont <u>transformées</u> l'une de l'autre (§ 1,n°5) par un <u>automorphisme</u> u de l'espace vectoriel E , autrement dit , sont telles que l'on ait identiquement $f_2(x,y)=f_1(u(x),u(y))$ (ce qui entraîne $f_1(x,y)=f_2(v(x),v(y))$ si v est l'automorphisme réciproque de u) . Nous dirons dans ce cas que f_1 et f_2 sont <u>équivalentes relativement au groupe linéaire</u> GL(E) (ou simplement qu'elles sont <u>équivalentes</u> si cela n'entraîne pas confusion (cf. § 4)). Il est clair que si f_1 et f_2 sont équivalentes , il en est de même de ρf_1 et ρf_2 pour tout $\rho \in K$; nous pourrons donc nous borner à considérer uniquement le cas où f_1 et f_2 sont toutes deux <u>alternées</u> (K étant alors supposé <u>commutatif</u>) et le cas où f_1 et f_2 sont toutes deux <u>hermitiennes</u> relativement à un même antiautomorphisme involutif .

Dire que f_1 et f_2 sont équivalentes signifie encore qu'il existe deux bases de E telles que la matrice de f_1 par rapport à l'une soit <u>la même</u> que la matrice de f_2 par rapport à l'autre ; ou enfin , si $\underline{R}_1$ et $\underline{R}_2$ sont les matrices de f_1 et f_2 par rapport à la <u>même</u> base , qu'il existe une matrice carrée inversible $\underline{P}$ telle que

(1) $$\underline{R}_2 = {}^t\underline{P}^{\sigma} . \underline{R}_1 . \underline{P} .$$

<u>Remarque</u> .- Plus généralement , si E_1, E_2 sont deux espaces vectoriels sur K de <u>même</u> dimension , f_1, f_2 des formes sesquilinéaires sur $E_1 \times E_1$ et $E_2 \times E_2$ respectivement (relatives au <u>même</u> antiautomorphisme σ de K) on dira encore que f_1 et f_2 sont <u>équivalentes</u> s'il existe un <u>isomorphisme</u> u de E_1 sur E_2 tel que f_1 soit la transformée de f_2 par u . Si $\underline{R}_1$ et $\underline{R}_2$ sont les matrices de f_1 et f_2 respectivement par rapport à

des bases quelconques de E_1 et E_2 ~~respectivement~~, on a encore la relation (1) entre $\underline{R}_1$ et $\underline{R}_2$, pour une matrice carrée inversible $\underline{P}$ convenable.

THÉORÈME 1 .- <u>Toute forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel E est de rang pair ; pour que deux formes bilinéaires alternées sur E soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles aient même rang</u> .

Commençons par le cas où f est une forme bilinéaire alternée sur $E\times E$, de rang <u>égal</u> à la dimension n de l'espace E ; nous allons montrer que n est un nombre <u>pair</u> 2ν, et qu'il existe une base (a_i) de E telle que, si $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i$ $y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i a_i$, on ait

(2) $$f(x,y)=\sum_{i=1}^{\nu}(\xi_i\eta_{i+\nu}-\xi_{i+\nu}\eta_i) .$$

Il en résultera bien que toute autre forme bilinéaire alternée f_1 de rang n sur E est équivalente à f, puisqu'il existe une base de E par rapport à laquelle f_1 a une matrice égale à celle de f par rapport à (a_i) .

Nous procéderons par récurrence sur n, la proposition étant évidente pour n=0 . Soit ~~e~~ $e_1\neq 0$ un vecteur quelconque de E ; le sous-espace H <u>conjugué</u> de la droite Ke_1 par rapport à f est un hyperplan qui contient e_1, puisque $f(e_1,e_1)=0$ (§ 1, n°10, prop.3) ; il existe donc un vecteur e_2 n'appartenant pas à H, donc tel que $f(e_1,e_2)\neq 0$; en multipliant au besoin e_2 par un scalaire $\neq 0$, on peut supposer que $f(e_1,e_2)=1$, d'où $f(e_2,e_1)=-1$. Soit P le plan Ke_1+Ke_2, et soit V le sous-espace conjugué de P, de dimension n-2 (§ 1, prop.3) ; nous allons faire voir que $P\cap V=\{0\}$, autrement dit, que V est <u>supplémentaire</u> de P . En effet, si un élément $y=\eta_1e_1+\eta_2e_2$ appartient à V, on a $f(e_1,y)=f(e_2,y)=0$ par hypothèse, ce qui donne $\eta_1=\eta_2=0$, et par suite y=0 . Il en résulte que si $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$, où x_1 et y_1 sont dans P, ~~et~~ x_2 et y_2 dans V, on a $f(x,y)=f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$; en d'autres termes, f est <u>somme directe</u> de ses restrictions à P et à V (§ 1, n°6) ; son rang étan égale à la somme des rangs de ces restrictions, on voit en particulier que la restriction de f à V est de rang n-2 . L'hypothèse de récurrence montre donc que $n-2$ est un nombre pair, et par suite il en est de même de n ; en outre, il existe une base $(b_i)_{1\leq i\leq 2\nu-2}$ de V telle que l'on ait $f(b_i,b_j)=0$ pour $i<j$, sauf pour $j=i+\nu-1$, où $f(b_i,b_{i+\nu-1})=1$; si on pose $a_i=b_i$ pour $1\leq i\leq \nu-1$, $a_\nu=e_1$, $a_{i+\nu}=b_{i+\nu-1}$ pour $1\leq i\leq\nu-1$ et $a_{2\nu}=e_2$, la base (a_i) de E répond à la question.

Si maintenant f est une forme bilinéaire alternée de rang $r<n$, et si V est le sous-espace conjugué de E, de dimension $n-r$, on définit par passage aux quotients à partir de f une forme bilinéaire alternée $\mathring{f}$ sur E/V (§ 1, n°11, Remarque) de rang égal à la dimension r de E/V ; donc r est un nombre pair 2ν. D'ailleurs, si W est un sous-espace supplémentaire de V dans E pour tout couple de points x,y de W, on a $f(x,y)=\mathring{f}(\mathring{x},\mathring{y})$ ($\mathring{x}$ et $\mathring{y}$ classes de x et y modulo V) ; il existe donc une base $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ de E, dont les 2ν premiers vecteurs a_i $(1\leq i\leq 2\nu)$ forment une base de W, les $n-2\nu$ derniers une base de V, et qui est telle que l'on ait

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{\nu}(\xi_i\eta_{i+\nu}-\xi_{i+\nu}\eta_i) \tag{3}$$

On voit donc que toutes les formes bilinéaires alternées de rang 2ν sur E sont équivalentes.

Lorsque f est de rang $n=2\nu$ égal à la dimension de E, toute base (a_i) de E par rapport à laquelle la forme f a l'expression (2), c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} f(a_i,a_j)=0 & \text{pour } i<j \text{ et } j\neq i+\nu \\ f(a_i,a_{i+\nu})=1 & \text{pour } 1\leq i\leq\nu \end{cases} \tag{4}$$

est dite base symplectique de E (pour la forme f). La matrice $\underline{R}$ de f par rapport à une telle base est donc égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{I}_\nu \\ -\underline{I}_\nu & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que le second membre de (3) est l'expression canonique d'une forme bilinéaire alternée de rang 2ν .

COROLLAIRE .- Toute matrice carrée alternée $\underline{R}$ d'ordre n sur un corps commutatif K est de rang pair 2ν , et il existe une matrice carrée inversible $\underline{P}$ d'ordre n telle que

$$(5)\qquad {}^t\underline{P}.\underline{R}.\underline{P}=\begin{pmatrix} 0 & \underline{I}_\nu & 0 \\ -\underline{I}_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 . Pfaffien et discriminant d'une forme bilinéaire alternée .

On sait (chap.III, § 8,n°2) que toute forme bilinéaire alternée f sur $E\times E$ peut être identifiée canoniquement à une biforme sur E , c'est-à-dire à un élément de la puissance extérieure $\overset{2}{\wedge} E^*$ du dual E^* de E ; si (e_i) est une base de E , (e'_i) la base duale de E^* , $\underline{R}=(\alpha_{ij})$ la matrice (alternée) de la forme f par rapport à (e_i) , f est ainsi identifiée canoniquement à la biforme $\sum_{i<j} \alpha_{ij}e'_i\wedge e'_j$. Pour tout entier $r>0$, nous désignerons par f^r la (2r)-forme sur E obtenue en faisant le produit extérieur de r biformes identiques à f (puissance r-ème de f dans l'algèbre extérieure $\wedge E^*$). Il est clair que si $f^r=0$, on a aussi $f^{r+k}=0$ pour tout entier $k>0$.

PROPOSITION 1 .- Si le corps commutatif K est de caractéristique 0 , pour toute forme bilinéaire alternée f de rang 2ν , le nombre ν est le plus grand des nombres r tels que $f^r\neq 0$.

En effet , il résulte du th.1 qu'il existe une base (a_i) de E telle que

$$(6)\qquad f=a'_1\wedge a'_{\nu+1}+a'_2\wedge a'_{\nu+2}+\dots+a'_\nu\wedge a'_{2\nu} .$$

Pour $r>\nu$, on a $f^r=0$, puisqu'alors f^r est une somme de (2r)-vecteurs décomposables (sur E^*) dont chacun est un produit de 2r vecteurs de E^* dont deux au moins sont identiques . D'autre part , on a

$$f^\nu=\sum_\sigma a'_{\sigma(1)}\wedge a'_{\nu+\sigma(1)}\wedge a'_{\sigma(2)}\wedge a'_{\nu+\sigma(2)}\dots\wedge a'_{\sigma(\nu)}\wedge a'_{\nu+\sigma(\nu)}$$

où σ parcourt le groupe symétrique $\mathfrak{S}_\nu$; comme $u\wedge v\wedge w=w\wedge u\wedge v$ pour trois vecteurs quelconques de E^{*}_{ν} , on a

(7) $$f^{\nu}=\nu!(a'_1\wedge a'_{\nu+1}\wedge a'_2\wedge a'_{\nu+2}\wedge\dots\wedge a'_{\nu}\wedge a'_{2\nu})$$

ce qui montre que $f^{\nu}\neq 0$, d'où la proposition .

Bornons-nous désormais au cas où E est un espace de dimension <u>paire</u> $n=2m$, et supposons d'abord que le corps K soit <u>de caractéristique 0</u> . Soit e' une base de l'espace (de dimension 1) $\bigwedge^{n} E^{*}$ des <u>n-formes</u> sur E ; on peut alors écrire $f^m=\alpha e'$, où α est un scalaire ; le scalaire $\frac{1}{m!}\alpha$ est appelé le <u>pfaffien</u> de la forme bilinéaire alternée f , par rapport à la base e' de $\bigwedge^{n} E^{*}$; si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E , (e'_i) la base duale de E , $\underline{R}=(\alpha_{ij})$ la matrice (alternée) de f par rapport à (e_i) , le pfaffien de f par rapport à la base $e'=e'_1\wedge e'_{m+1}\wedge e'_2\wedge e'_{m+2}\wedge\dots\wedge e'_m\wedge e'_{2m}$ est encore appelé le <u>pfaffien de la matrice alternée $\underline{R}$</u> , et noté $\mathrm{Pf}(\underline{R})$ ou $\mathrm{Pf}(\alpha_{ij})$. Or , on a évidemment

$$\Big(\sum_{i<j}\alpha_{ij}e'_i\wedge e'_j\Big)^m=\Big(\sum_{\sigma\in\Gamma}\varepsilon_\sigma\alpha_{\sigma(1)\sigma(m+1)}\alpha_{\sigma(2)\sigma(m+2)}\cdots\alpha_{\sigma(m)\sigma(2m)}\Big).e'$$

la somme étant étendue à l'ensemble Γ des permutations $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma(k)<\sigma(m+k)$ pour $1\leq k\leq m$; on a donc

(8) $$\mathrm{Pf}(\alpha_{ij})=\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\Gamma}\varepsilon_\sigma\alpha_{\sigma(1)\sigma(m+1)}\cdots\alpha_{\sigma(m)\sigma(2m)} .$$

Soit σ une permutation de l'ensemble Γ ; pour toute permutation ϖ de $\mathfrak{S}_m$ soit τ la permutation de $\mathfrak{S}_n$ telle que $\tau(k)=\sigma(\varpi(k))$ pour $1\leq k\leq m$, et $\tau(m+k)=\sigma(\varpi(k)+m)$; il est clair que τ appartient aussi à Γ ; lorsque ϖ est une transposition , on a $\varepsilon_\sigma=\varepsilon_\tau$, d'où on déduit que cette relation est vraie pour tout $\varpi\in\mathfrak{S}_m$ (qui est un produit de transpositions) ; en outre , on a

$$\alpha_{\tau(1)\tau(m+1)}\cdots\alpha_{\tau(m)\tau(2m)}=\alpha_{\sigma(1)\sigma(m+1)}\cdots\alpha_{\sigma(m)\sigma(2m)} .$$

Désignons alors par Δ l'ensemble des permutations $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma(k)<\sigma(m+k)$ pour $1\leq k\leq m$, et telles en outre que la suite des $\sigma(k)$ pour $1\leq k\leq m$ soit <u>strictement croissante</u> : ce qui précède montre que la relation (8) peut aussi s'écrire

(9) $$\mathrm{Pf}(\alpha_{ij})=\sum_{\sigma\in\Delta}\varepsilon_\sigma\alpha_{\sigma(1)\sigma(m+1)}\alpha_{\sigma(2)\sigma(m+2)}\cdots\alpha_{\sigma(m)\sigma(2m)}$$

Par définition , le second membre de la relation (9) sera encore appelé le pfaffien de la matrice XX alternée $\underline{R}=(\alpha_{ij})$ lorsque K est un corps XX commutatif de caractéristique quelconque ; on dira aussi que c'est le pfaffien de la forme bilinéaixe alternée f , par rapport à la base XXXXXXXXXXXX (e_i) de E .

PROPOSITION 2 .- Pour toute matrice $\underline{P}$ d'ordre n , on a

(10) $$\mathrm{Pf}({}^t\underline{P}.\underline{R}.\underline{P})=(\det \underline{P}).\mathrm{Pf}(\underline{R}) .$$

En effet , soit u l'endomorphisme de E dont $\underline{P}$ est la matrice par rapport à la base (e_i) ; si f_1 est la transformée par u de la forme bilinéaire alternée f correspondant à la matrice $\underline{R}$, on a $f_1=\sum_{i<j}\alpha_{ij}\,{}^tu(e_i')\wedge {}^tu(e_j')$. Si K est de caractéristique 0 , et $\underline{R}_1$ la matrice de f_1 par rapport à la base (e_i) , on a donc $f_1^m=m!(\det u)\mathrm{Pf}(\underline{R})$, ce qui dans ce cas démontre (10) . Comme les deux membres de (10) sont des polynomes à coefficients entiers par rapport aux éléments des matrices $\underline{P}$ et $\underline{R}$, le principe de prolongement des identités algébriques (chap.IV, § 2,n°5,Scholie) montre que la relation (10) est encore vraie pour un corps K de caractéristique quelconque .

COROLLAIRE 1 .- Pour toute matrice alternée $\underline{R}$, on a

(11) $$\det \underline{R}=(\mathrm{Pf}\ \underline{R})^2 .$$

En effet , prenons une base (a_i) de E telle que la forme bilinéaire alternée f s'écrive sous la forme canonique (6) ; on a alors $\alpha_{ij}=0$ sauf pour $j=m+i$ et $1\leq i\leq\nu$. On en déduit aussitôt que si $\nu<m$, $\mathrm{Pf}(\alpha_{ij})=0$; si $\nu=m$, dans la formule (9) , XXX la seule permutation $\sigma\in\Delta$ pour laquelle les termes $\alpha_{\sigma(i)\sigma(m+i)}$ soient tous $\neq 0$ est la permutation identique , puisqu'on doit avoir $\sigma(m+i)=\sigma(i)+m$ pour $1\leq i\leq m$, ce qui impose $\sigma(i)\leq m$ pour $1\leq i\leq m$; la suite des $\sigma(i)$ ne peut alors être strictement croissante pour $1\leq i\leq m$ que si $\sigma(i)=i$. On a donc dans ce cas $\mathrm{Pf}(\alpha_{ij})=\det(\alpha_{ij})=1$, donc (11) est bien vérifiée . Comme il existe toujours (cor. du th.1) une matrice inversible $\underline{P}$ telle que la matrice ${}^t\underline{P}.\underline{R}.\underline{P}$ corresponde à la forme canonique (6) , le corollaire résulte de la formule (10

et de la formule $\det({}^{t}\underline{P}.\underline{R}.\underline{P})=(\det \underline{P})^2(\det \underline{R})$.

COROLLAIRE 2 .- Pour qu'une matrice alternée soit inversible , il faut et il suffit que son pfaffien ne soit pas nul .

3 . Réduction d'une forme hermitienne à une somme de termes carrés .

Soit K un corps commutatif ou non , et soit $\lambda \to \bar{\lambda}$ un antiautomorphisme involutif de K ; soit E un espace vectoriel à droite de dimension n sur K . Pour toute forme sesquilinéaire hermitienne f sur E , la fonction $F(x)=f(x,x)$ est appelée forme quadratique hermitienne associée à f (ou simplement forme hermitienne associée à f , lorsque cela ne peut entraîner de confusion) ; dans le cas particulier où K est commutatif et $\lambda \to \bar{\lambda}$ l'automorphisme identique (en d'autres termes , lorsque f est une forme bilinéaire symétrique) la fonction F correspondante est simplement appelée la forme quadratique associée à f .

Il résulte donc de cette définition qu'on a

(12) $$F(x\lambda+y\mu)=\bar{\lambda}F(x)\lambda+\bar{\lambda}f(x,y)\mu+\bar{\mu}.\overline{f(x,y)}\lambda+\bar{\mu}F(y)\mu$$

(13) $$\overline{F(x)}=F(x) \quad \text{pour tout } x\in E .$$

PROPOSITION 3 .- Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $f(x,x)=0$ pour tout $x\in V$. Alors on a $f(x,y)=0$ pour tout couple d'éléments x,y de V , sauf lorsque K est un corps commutatif de caractéristique 2 et f une forme bilinéaire symétrique .

On peut se borner au cas où V=E . Pour tout couple d'éléments x,y de E et tout $\rho\in K$, on a $F(x+y\rho)=F(x)+\bar{\rho}F(y)\rho+f(x,y)\rho+\bar{\rho}.\overline{f(x,y)}$; l'hypothèse entraîne donc $f(x,y)\rho+\bar{\rho}.\overline{f(x,y)}=0$ pour tout couple d'éléments x,y de E et tout $\rho\in K$. En particulier , pour $\rho=1$, $f(x,y)+\overline{f(x,y)}=0$ d'où $f(x,y)\rho-\bar{\rho}.f(x,y)=0$ pour tout $\rho\in K$. Si on n'est pas dans le cas d'exception de l'énoncé , cela entraîne $f(x,y)=0$; en effet , dans le cas contraire , $\lambda\to\bar{\lambda}$ serait un automorphisme intérieur de K, donc K serait commutatif ; mais alors $\lambda \to \bar{\lambda}$ serait l'automorphisme identique, et il viendrait $2f(x,y)=0$, ce qui n'est compatible avec l'hypothèse $f(x,y)\neq 0$ que si K est de caractéristique 2.

COROLLAIRE. — L'application qui, à toute forme sesquilinéaire hermitienne f sur E, fait correspondre la forme quadratique hermitienne $F(x)=f(x,x)$ associée, est biunivoque si on n'est pas dans le cas d'exception de la prop. 3.

Lorsque K est commutatif, la détermination de f à partir de F peut se faire explicitement. Supposons d'abord que f soit une forme bilinéaire (K étant de caractéristique $\neq 2$) ; alors $F(x+y)=F(x)+F(y)+2f(x,y)$, d'où

(14) $$f(x,y)=\tfrac{1}{2}(F(x+y)-F(x)-F(y))=\tfrac{1}{4}(F(x+y)-F(x-y)) .$$

Si l'automorphisme $\lambda \to \bar{\lambda}$ n'est pas l'automorphisme identique, soit K_0 le corps des invariants de cet automorphisme ; K est une extension séparable et de degré 2 de K_0. Si K n'est pas de caractéristique 2, on a $K=K_0(\omega)$, où $\omega^2=\alpha$ n'est pas un carré dans K_0 ; on a donc $\bar{\omega}=-\omega$, d'où

$$F(x+y\omega)=F(x)+\alpha F(y)+\omega(f(x,y)-\overline{f(x,y)})$$

et par suite $2\omega(f(x,y)-\overline{f(x,y)})=F(x+y\omega)-F(x-y\omega)$; d'autre part, on a de même $2(f(x,y)+\overline{f(x,y)})=F(x+y)-F(x-y)$, d'où finalement

(15) $$4\omega f(x,y)=F(x+y\omega)-F(x-y\omega)+\omega(F(x+y)-F(x-y)) .$$

Lorsque K est de caractéristique 2, on a $K=K_0(\theta)$, où θ est racine d'une équation irréductible $x^2+x+\beta=0$ dans K_0 ; alors $\bar{\theta}=\theta+1$ et on obtient de même la formule

(16) $$f(x,y)=F(x+y\theta)-F(x)-\beta F(y)-(\theta+1)(F(x+y)-F(x)-F(y)) .$$

Remarques. — 1) Lorsque K est commutatif et de caractéristique 2, toute forme bilinéaire alternée sur E est aussi une forme bilinéaire symétrique ; on voit donc que la restriction faite dans la prop. 3 est essentielle (cf.exerc.16 et 20) .

2) On notera que la démonstration de la prop.3 est encore valable lorsque V est de dimension infinie .

Dans tout le reste de ce chapitre , lorsqu'il sera question d'une forme sesquilinéaire hermitienne f sur un espace vectoriel E , il sera sous-entendu qu'on n'est pas dans le cas où K est commutatif et de caractéristique 2 , et où f est symétrique .

Nous dirons alors que f est la forme polaire de la forme quadratique hermitienne F qui lui est associée . En raison de la correspondance biunivoque entre formes sesquilinéaires hermitiennes et formes quadratiques hermitiennes , on dira que la matrice d'une forme sesquilinéaire $f(x,y)$ par rapport à une base de E est la matrice de la forme quadratique $F(x)=f(x,x)$ associée (par rapport à cette base) ; de même , le rang de F sera par définition le rang de f . Si u est un automorphisme de E , f_1 la transformée $(x,y) \to f(u(x),u(y))$ de f par u , f_1 est la forme polaire de la forme quadratique hermitienne $F_1(x)=F(u(x))$, dite transformée de F par u ; pour que deux formes sesquilinéaires hermitiennes soient équivalentes , il faut et il suffit que les formes quadratiques hermitiennes correspondantes soient transformées l'une de l'autre par un automorphisme de E ; on dit encore que deux telles formes sont équivalentes .

Le problème d'équivalence de deux formes sesquilinéaires (ou quadratiques) hermitiennes est incomparablement plus difficile que le problème d'équivalence des formes bilinéaires alternées , et n'est complètement résolu que dans un petit nombre de cas particuliers .

Nous dirons qu'une forme quadratique hermitienne F (ou la forme sesquilinéaire f polaire de F) est diagonale par rapport à une base (e_i) si sa matrice par rapport à cette base est diagonale ; si $x=\sum_{i=1}^{n} e_i\xi_i$, on a donc $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\bar{\xi}_i\alpha_i\xi_i$, où $\alpha_i=F(e_i)$ est tel que $\bar{\alpha}_i=\alpha_i$. On dit aussi que par rapport à la base (e_i) , la forme F *ne contient que des termes carrés* ; le nombre des α_i non nuls est évidemment le *rang* de la forme F , et est donc le même pour toute base par rapport à laquelle F est diagonale .

Il revient au même aussi de dire que la forme f est *somme directe* de formes sesquilinéaires définies dans des sous-espaces *de dimension 1* (et par suite de rang 0 ou 1) .

Une base (e_i) de E par rapport à laquelle la forme F est diagonale est appelée *base orthogonale* pour F (ou pour f) ; elle est caractérisée par les propriétés $f(e_i,e_j)=0$ pour $i\neq j$, autrement dit , par le fait que deux vecteurs distincts quelconques de la base sont *conjugués* par rapport à f .

THÉORÈME 2 .- *Pour toute forme quadratique hermitienne* F *sur un espace vectoriel* E , *il existe une base de* E *qui est une base orthogonale pour* F .

Soit f la forme polaire de F . Supposons que F ne soit pas nulle (sans quoi le théorème est évident) ; alors il existe $e_1\neq 0$ dans E tel que $F(e_1)=f(e_1,e_1)\neq 0$. L'ensemble des éléments $x\in E$ *conjugués* de e_1 par rapport à f , c'est-à-dire tels que $f(e_1,x)=0$ (§ 1,n°10) est alors un *hyperplan* E_1 ne contenant pas e_1 , donc supplémentaire de e_1K . Comme f est hermitienne , on a aussi $f(x,e_1)=0$ pour tout $x\in E_1$, d'où résulte aussitôt que f est *somme directe* de ses restrictions à E_1 et à e_1K . Il suffit alors de raisonner par récurrence sur n pour démontrer le théorème .

COROLLAIRE .- *Pour toute matrice carrée hermitienne* $\underline{R}$ *d'ordre n et de rang r, il existe une matrice carrée inversible* $\underline{P}$ *d'ordre n telle que*

$$(17)\qquad {}^t\underline{\bar{P}}.\underline{R}.\underline{P}=\begin{pmatrix} \underline{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\underline{D}$ *est une matrice diagonale d'ordre r , dont tous les éléments sont* $\neq 0$ *et* invariants par l'antiautomorphisme $\xi \rightarrow \bar{\xi}$.

Le th.2 permet de résoudre le problème d'équivalence dans un cas important:

PROPOSITION 4 .- Soit K un corps tel que tout élément invariant par l'antiautomorphisme $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ soit de la forme $\bar{\rho}\rho$, où $\rho \in K$. Dans ces conditions , pour que deux formes hermitiennes sur E soient équivalentes , il faut et il suffit qu'elles aient même rang .

Nous savons déjà que la condition est nécessaire . Pour voir qu'elle est suffisante , considérons une forme hermitienne F de rang r ; d'après le th.2 il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que , par rapport à cette base , on ait $F(x)=\sum_{i=1}^{r} \bar{\xi}_i \alpha_i \xi_i$, avec $\bar{\alpha}_i=\alpha_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$; en vertu de l'hypothèse , il existe dans K r éléments ρ_i tels que $\bar{\rho}_i \rho_i = \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq r$; si on pose $b_i=e_i \rho_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq r)$, on voit aussitôt que les b_i forment , avec $e_{r+1}, \dots, e_n$, une base de E par rapport à laquelle la matrice de la forme F est

$$R=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Toute forme hermitienne de rang r ayant pour matrice $\underline{R}$ par rapport à une base convenable , deux formes quelconques de rang r sont équivalentes .

Les hypothèses de la prop.4 sont vérifiées dans deux cas importants :

1° K est commutatif et algébriquement clos , $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ l'automorphisme identique ; tout élément de K est en effet carré d'un élément de K .

2° K est un corps fini , extension quadratique(séparable)d'un sous-corps K_o , et $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ est l'unique K_o-automorphisme de K distinct de l'automorphisme identique . On sait alors que K_o est identique à l'ensemble des éléments invariants par cet automorphisme , et que tout élément de K_o est norme d'un élément de K , c'est-à-dire de la forme $\bar{\rho}\rho$ (chap.V, § 11,cor. du th.3).

5 . Equivalence des sommes directes de formes hermitiennes .

Soient f_1 et f_2 deux formes hermitiennes sur E (relativement au même antiautomorphisme $\xi \to \bar{\xi}$ de K). Supposons que f_1 (resp. f_2) soit *somme directe* de deux formes hermitiennes ~~XX~~ f'_1, f''_1 (resp. f'_2, f''_2) ; il est clair que si f'_1 est *équivalente* à f'_2 et f''_1 *équivalente* à f''_2, f_1 est *équivalente* à f_2. Cette remarque admet une importante réciproque partielle :

THÉORÈME 3 (Witt).- *Soient G et H deux sous-espaces supplémentaires dans E, f une forme hermitienne dans G, f_1 et f_2 deux formes hermitiennes dans H. On suppose que tous les éléments $f(x,x)$ de K ($x \in G$) sont de la forme $\mu + \bar{\mu}$ où $\mu \in K$, et que la somme directe de f et f_1 soit équivalente à la somme directe de f et f_2 ; dans ces conditions, f_1 et f_2 sont équivalentes.*

En prenant dans G une base par rapport à laquelle la forme f est diagonale (th.2) et en raisonnant par récurrence sur le rang de f, on se ramène aussitôt à prouver le théorème dans le cas où G est de dimension 1 et où $f \neq 0$. Prenons dans E une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $e_1 \in G$, et que les e_i d'indice ≥ 2 forment une base de H. Alors, par rapport à cette base, les matrices de $f+f_1$ et $f+f_2$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \underline{R}_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \underline{R}_2 \end{pmatrix}$ respectivement, $\underline{R}_1$ et $\underline{R}_2$ étant les matrices de f_1 et f_2 par rapport à la base $(e_i)_{2 \leq i \leq n}$ de H, et λ un élément $\neq 0$ de K tel que $\bar{\lambda} = \lambda$ et $\lambda = \rho + \bar{\rho}$; rappelons qu'on a aussi ${}^t\overline{\underline{R}}_1 = \underline{R}_1$ et ${}^t\overline{\underline{R}}_2 = \underline{R}_2$. Par hypothèse, il existe une matrice carrée inversible $\begin{pmatrix} \alpha & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix}$ ($\alpha \in K$, $\underline{D}$ matrice carrée d'ordre n-1, $\underline{B}$ matrice à une ligne, $\underline{C}$ matrice à une colonne) telle que l'on ait

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & {}^t\overline{\underline{C}} \\ {}^t\overline{\underline{B}} & {}^t\overline{\underline{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \underline{R}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \underline{R}_2 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut aux conditions

$$(10) \qquad \begin{cases} {}^t\overline{\underline{C}} \cdot \underline{R}_1 \cdot \underline{C} = \lambda - \bar{\alpha}\lambda\alpha & \qquad {}^t\overline{\underline{D}} \cdot \underline{R}_1 \cdot \underline{C} = -{}^t\overline{\underline{B}}\lambda\alpha \\ {}^t\overline{\underline{D}} \cdot \underline{R}_1 \cdot \underline{D} = \underline{R}_2 - {}^t\overline{\underline{B}}\lambda\underline{B} & \end{cases}$$

Il s'agit de prouver qu'il existe une matrice carrée $\underline{X}$ d'ordre $n-1$ telle que

(20) $${}^t\overline{\underline{X}}\cdot\underline{R}_1\cdot\underline{X}=\underline{R}_2 \quad .$$

Nous allons montrer qu'on peut trouver un élément $\mu\in K$ tel que la matrice $\underline{X}=\underline{D}+\underline{C}\mu\underline{B}$ répobde à la question . En utilisant les relations (19) , il vient par un calcul immédiat

(21) $$({}^t\overline{\underline{D}}+{}^t\overline{\underline{B}}\cdot\overline{\mu}\cdot{}^t\overline{\underline{C}})\underline{R}_1(\underline{D}+\underline{C}\mu\underline{B})=\underline{R}_2+{}^t\overline{\underline{B}}\cdot(\overline{\mu}\lambda\mu-(\overline{\mu}\overline{\alpha}+1)\lambda(\alpha\mu+1))\cdot\underline{B}$$

et par suite , la relation (20) sera vérifiée si on peut choisir μ satisfaisant à la condition

$$\mu=\alpha\mu+1$$

ce qui est toujours possible si $\alpha\neq 1$. D'autre part , si $\alpha=1$, le second membre de (21) devient $\underline{R}_2-{}^t\overline{\underline{B}}\cdot(\lambda+\lambda\mu+\overline{\mu}\lambda)\cdot\underline{B}$; comme par hypothèse $\lambda=\rho+\overline{\rho}$, il suffit de prendre $\mu=-\lambda^{-1}\rho$ pour vérifier encore la relation (20) , ce qui achève la démonstration .

COROLLAIRE .- <u>Soient</u> f_1, f_2 <u>deux formes sesquilinéaires hermitiennes sur</u> E , <u>telles que toutes les valeurs</u> $f_1(x,x)$ <u>et</u> $f_2(x,x)$ <u>soient de la forme</u> $\rho+\overline{\rho}$. <u>On suppose que</u> f_1 (resp. f_2) <u>est somme directe de deux formes</u> f_1', f_1'' (resp. f_2', f_2'') . <u>Si</u> f_1 <u>et</u> f_2 <u>sont équivalentes , et si</u> f_1' <u>et</u> f_2' <u>sont équivalentes , alors</u> f_1'' <u>et</u> f_2'' <u>sont équivalentes</u> .

En effet , supposons que f_1' (resp. f_2') soit définie dans le sous-espace V_1 (resp. V_2) , et que f_1'' (resp. f_2'') soit définiedans un supplémentaire W_1 (resp. W_2) de V_1 (resp. V_2) . Il existe par hypothèse un automorphisme u de E tel que $f_2'(x,y)=f_1'(u(x),u(y))$ pour tout couple de points x,y de V_2 , et tel en outre que $u(W_2)=W_1$. Considérons alors la forme $f_3(x,y)=f_1(u(x),u(y))$; f_3 est somme directe de f_2' et de $f_3''(x,y)=f_1''(u(x),u(y))$ définie dans W_2 , et par ailleurs f_3 est équivalente à f_2 . Le th.3 montre alors que f_2'' et f_3'' sont équivalentes , et par suite f_1'' et f_2'' sont équivalentes .

<u>Remarque</u> .- L'hypothèse du th.3 relative à la forme f est vérifiée par <u>toute</u>

forme sesquilinéaire hermitienne dans les cas suivants :

1° K <u>est de caractéristique</u> $\neq 2$: pour tout $\lambda \in K$ tel que $\bar{\lambda} = \lambda$, on peut en effet écrire alors $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})$.

2° K est de caractéristique 2 , mais il existe au moins un élément γ du <u>centre</u> de K tel que $\bar{\gamma} \neq \gamma$ (c'est toujours le cas si K est en outre <u>commutatif</u> , $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ n'étant pas l'automorphisme identique) ; si on pose $\beta = \gamma + \bar{\gamma}$, on a donc $\bar{\beta} = \beta$, β appartient au centre de K , et comme K est de caractéristique 2 et $\bar{\gamma} \neq \gamma$, on a $\beta \neq 0$; cela étant , si $\bar{\lambda} = \lambda$, on peut écrire $\lambda = \beta^{-1}\gamma\lambda + \bar{\lambda}\bar{\gamma}\bar{\beta}^{-1}$ en raison du fait que γ et $\bar{\gamma}$ appartiennent au centre de K .

<u>Remarques</u> .- 1) Lorsque K est de caractéristique 2 et que tout élément du centre de K est invariant par l'antiautomorphisme $\xi \rightarrow \bar{\xi}$, on peut donner des exemples de formes sesquilinéaires hermitiennes f telles que $f(x,x)$ prenne des valeurs qui ne sont pas de la forme $\rho + \bar{\rho}$, et auxquelles le th.3 ne s'étend pas .

2) On notera que l'hypothèse que $f(x,x)$ soit de la forme $\rho + \bar{\rho}$ pour tout $x \in E$ signifie que f est <u>alternée</u> lorsque K est commutatif et de caractéristique 2 , et que $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ est l'automorphisme identique .

5 . <u>Transformation du discriminant</u> .

Supposons K <u>commutatif</u> ; soit f une forme sesquilinéaire hermitienne sur E, $\underline{R}$ sa matrice par rapport à une base (e_i) de E ; on sait que toute forme f_1 équivalente à f a par rapport à la même base une matrice de la forme ${}^t\underline{\bar{P}}.\underline{R}.\underline{P}$, où $\underline{P}$ est inversible ; on en déduit pour le discriminant de f_1 par rapport à la base (e_i) ,

$$\det({}^t\underline{\bar{P}}.\underline{R}.\underline{P}) = \alpha\bar{\alpha} \det \underline{R}$$

où on a posé $\alpha = \det \underline{P}$. On peut donc dire que , dans le groupe multiplicatif K^* , la <u>classe</u> du discriminant d'une forme f de rang n , par rapport au sous-groupe Γ des éléments de la forme $\rho\bar{\rho}$ ne dépend pas de la base choisie dans E pour définir le discriminant de f , et est la <u>même</u> pour deux formes équivalentes . On notera que si $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ est l'automorphisme identique , Γ est le groupe des <u>carrés</u> des éléments de K^* ; dans le cas contraire , Γ est le groupe des <u>normes</u> des éléments de K^* par rapport au corps des invariants K_o de $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$; dans ce cas d'ailleurs , la relation ${}^t\underline{R}=\underline{R}$ montre que le discriminant de f <u>appartient à</u> K_o .

6 . Formes hermitiennes sur un corps ordonné .

Dans ce n° , nous ferons sur le corps K et l'antiautomorphisme $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ l'<u>une</u> des trois hypothèses suivantes :

1° K est un <u>corps commutatif ordonné</u> (chap.VI, §   ) , et $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ l'automorphisme identique ; dans les raisonnements qui suivent , on désignera alors par K_o le corps K lui-même .

2° K est une extension quadratique $K_o(\omega)$ d'un corps commutatif <u>ordonné</u> K_o , ω^2 étant égal à un élément $\alpha < 0$ de K_o ; la norme $\xi\bar{\xi}$ d'un élément $\xi=\lambda+\omega\mu$ de K est alors égale à $\lambda^2-\alpha\mu^2$, donc on a $\xi\bar{\xi}>0$ pour tout $\xi\neq 0$ dans K .

3° K est un <u>corps de quaternions</u> sur un corps <u>ordonné</u> K_o , correspondant à un couple (α,β) d'éléments <0 de K_o , $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ est l'antiautomorphisme de K qui fait correspondre à tout quaternion son <u>conjugué</u> (chap.II, § 7, n°8) ; on notera que la relation $\bar{\xi}=\xi$ entraîne $\xi \in K_o$ et réciproquement . La <u>norme</u> $N(\xi)=\xi\bar{\xi}=\bar{\xi}\xi$ d'un élément $\xi=a+bu+cv+dw$ de K est égale à $a^2-\alpha b^2-\beta c^2+\alpha\beta d^2$; comme par hypothèse $\alpha<0$ et $\beta<0$ dans K_o , on a $N(\xi)>0$ pour tout $\xi\neq 0$ dans K .

Toute forme quadratique hermitienne F sur un espace E de dimension n par rapport à K prend ses valeurs <u>dans</u> K_o ; le th.2 montre donc qu'il existe une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\xi}_i\xi_i$ pour tout $x=\sum_{i=1}^{n}e_i\xi_i$, avec $\alpha_i\in K_o$ (α_i est donc permutable avec tout élément de K). On a en outre ici le théorème suivant :

THÉORÈME 4 (loi d'inertie).- *Soient F une forme quadratique hermitienne sur un espace vectoriel E de dimension n par rapport à un corps K (satisfaisant à une des trois hypothèses de ce n°) . Si $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux bases orthogonales de E ~~pour~~ relativement à la forme F , le nombre de termes strictement positifs dans les matrices de F par rapport à ces deux bases est le même* .

Supposons qu'on ait $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i\overline{\xi}_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\overline{\eta}_i$ pour tout $x=\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i=\sum_{i=1}^{n}b_i\eta_i$; soit h le nombre des α_i qui sont >0 , k le nombre des β_i qui sont >0 . Supposons par exemple qu'on ait $k>h$, et montrons qu'on aboutit ainsi à une conclusion absurde . On peut supposer qu'on a $\alpha_i>0$ pour $1\leq i\leq h$ et $\beta_i>0$ pour $1\leq i\leq k$; alors l'ensemble H des $x\in E$ tels que $\xi_i=0$ pour $1\leq i\leq h$ et $\eta_i=0$ pour $k+1\leq i\leq n$ est un sous-espace de dimension ≥ 1 , puisqu'il est défini par $h+(n-k)\leq n-1$ équations linéaires (chap. II, § 4, th. 1). Mais , pour $x\in H$, on a $F(x)=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\eta_i\overline{\eta}_i\geq 0$; d'autre part , on a $F(x)=\sum_{i=h+1}^{n}\alpha_i\xi_i\overline{\xi}_i\leq 0$, d'où nécessairement $F(x)=0$; l'hypothèse $\beta_i>0$ pour $1\leq i\leq k$ entraîne donc $\eta_i=0$ pour $1\leq i\leq k$, et par suite $\eta_i=0$ pour $1\leq i\leq n$, pour tout $x\in H$. Mais cela signifie que H serait réduit à 0 , et nous obtenons ainsi une contradiction .

Au § 3 , nous donnerons une autre démonstration de ce théorème , basée sur le th. de Witt .

Pour toute base orthogonale de E pour la forme F , soit s le nombre de termes >0 , t le nombre de termes <0 dans la matrice de F ; ces nombres ne dépendent pas de la base orthogonale particulière considérée , en vertu du th. 4 , et on a $s+t=r$, r étant le *rang* de F ; on dit que le couple (s,t) est la *signature* de la forme F (ou de la forme sesquilinéaire correspondante f). Si $t=0$ (resp. $s=0$) , on a $F(x)\geq 0$ (resp. $F(x)\leq 0$) pour *tout* $x\in E$; on dit alors que la forme quadratique hermitienne F (ou la forme sesquilinéaire f) est *positive* (resp.

négative) dans E . Si de plus on a $r=n$, la relation $f(x)=0$ entraîne $x=0$; autrement dit , on a $f(x)>0$ (resp. $f(x)<0$) pour tout $x\neq 0$; par abus de langage(*) , on dit alors que la forme f est strictement positive (resp. strictement négative) dans E .

Le th.4 permet de résoudre le problème d'équivalence de deux formes hermitiennes dans de nouveaux cas . Le corps K_o étant défini comme ci-dessus , on a en effet le résultat suivant :

PROPOSITION 5 .- On suppose que , dans le corps ordonné K_o , tout élément ≥ 0 soit un carré . Alors , pour que deux formes hermitiennes sur E soient équivalentes , il faut et il suffit qu'elles aient même signature .

La condition est nécessaire d'après le th.4 . Pour voir qu'elle est suffisante , considérons une forme hermitienne F de signature (s,t) ; par hypothèse , il existe une base $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que , par rapport à cette base, on ait $F(x)=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\xi_i\overline{\xi}_i-\sum_{i=s+1}^{s+t}\beta_i\xi_i\overline{\xi}_i$, où les α_i et β_i sont >0 dans K_o . Or , il existe dans K_o s éléments γ_i $(1\leq i\leq s)$ et t éléments δ_i $(s+1\leq i\leq s+t)$ tels que $\gamma_i^2=\alpha_i$ et $\delta_i^2=\beta_i$. Si on pose $b_i=a_i\gamma_i^{-1}$ pour $1\leq i\leq s$, $b_i=a_i\delta_i^{-1}$ pour $s+1\leq i\leq s+t$ et $b_i=a_i$ pour $i>s+t$, les b_i forment une base de E par rapport à laquelle la matrice de F est

$$\underline{R}=\begin{pmatrix} \underline{I}_s & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{I}_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*) Il est clair que la somme de deux formes hermitiennes positives est positive : la relation "f_1-f_2 est positive" est donc une relation d'ordre dans le groupe additif des formes hermitiennes sur E . Conformément aux définitions générales (chap.VI, § 1) on devrait réserver le nom de formes strictement positives aux formes hermitiennes positives F telles que $F(x)>0$ pour un $x\in E$ au moins (ce qui n'implique nullement que $F(x)>0$ pour tout $x\neq 0$) ; mais ces formes n'intervenant jamais dans les applications , l'abus de langage que nous faisons ici n'a aucun inconvénient .

44

Toute forme de signature (s,t) admet donc la matrice $\underline{R}$ par rapport à une base convenable , ce qui montre que deux formes de même signature sont équivalentes .

On notera que les hypothèses de la prop.5 sont en particulier remplies lorsque le corps ordonné K_o est <u>maximal</u> (chap.VI, §).

§ 3 . Groupes associés aux formes sesquilinéaires réflexives .

<u>1 . Groupe associé à une forme fondamentale</u> .

Soit E un espace vectoriel ~~KK~~ à droite de dimension n sur un corps K , $\xi \to \overline{\xi}$ un antiautomorphisme involutif de K . Dans tout ce paragraphe et le suivant , nous appellerons <u>forme fondamentale</u> sur E une forme <u>sesquilinéaire</u> f , <u>hermitienne</u> ou <u>alternée</u> (ce dernier cas ne pouvant se produire que si K est commutatif et $\xi \to \overline{\xi}$ l'automorphisme identique) , et <u>de rang égal à n</u> (n étant donc pair si f est alternée) . Conformément aux conventions du § 2 , nous excluons le cas où K est commutatif et de caractéristique 2 , $\xi \to \overline{\xi}$ l'automorphisme identique , et f une forme symétrique <u>non alternée</u> . Nous avons vu (§ 1,n^{os} 1 et 4) que la donnée de f équivaut à la donnée d'une <u>semi-dualité</u> g de E sur E^*(relative à l'antiautomorphisme $\xi \to \overline{\xi}$) , f et g étant liées par la relation

(1) $$f(x,y)=\langle g(x),y\rangle \ .$$

En outre , on a ${}^tg=g$ si f est hermitienne , ${}^tg=-g$ si f est alternée . Dans toute question où la forme fondamentale f est fixée une fois pour toutes , on écrit (par abus de langage) $\langle x,y\rangle$ la valeur $f(x,y)$ de cette forme pour tout couple de vecteurs x,y de E (x étant donc identifié à la forme linéaire g(x)) et on appelle cette valeur le <u>produit scalaire</u> de x et de y ; $\langle x,x\rangle$ est aussi appelé le <u>carré scalaire</u> de x . On a donc

(2) $$\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle} \quad , \quad \overline{\langle x,x\rangle}=\langle x,x\rangle$$

si la forme f est hermitienne , et

(3) $$\langle x,y\rangle = -\langle y,x\rangle \quad , \quad \langle x,x\rangle = 0$$

si f est alternée . Si u est un endomorphisme de E , l'endomorphisme adjoint u^* (§ 1, n°9) est défini par la relation

(4) $$\langle u(x),y\rangle = \langle x,u^*(y)\rangle$$

et on a $u^{**}=u$ (§ 1, n°11) .

La donnée , sur un ensemble E , d'une structure d'espace vectoriel de dimension n , et d'une forme fondamentale f , définit sur E une nouvelle structure (Ens. R, § 8). Nous dirons que le groupe des automorphismes de cette structure (chap. I, § 7, prop. 2) est le groupe associé à la forme fondamentale f. Il revient au même de donner la définition suivante :

DÉFINITION 1 .- On appelle groupe associé à une forme bilinéaire fondamentale $f(x,y)=\langle x,y\rangle$ sur E , le groupe G(f) des applications linéaires biunivoques u de E sur lui-même , satisfaisant à l'identité

(5) $$\langle u(x),u(y)\rangle = \langle x,y\rangle .$$

Autrement dit , G(f) est constitué par les automorphismes de l'espace vectoriel E qui transforment la forme fondamentale f en elle-même (ou encore qui la laissent invariante) .

Il résulte aussitôt de la déf. 1 que toute transformation $u \in G(f)$ transforme deux vecteurs conjugués en deux vecteurs conjugués .

Remarques .- 1) Tout endomorphisme u de E satisfaisant à (5) est nécessairement un automorphisme de E et appartient donc à G(f) , car la relation $u(x)=0$ entraîne alors $\langle x,y\rangle=0$ pour tout $y \in E$, et par suite $x=0$, puisque la forme fondamentale est de rang n .

2) Comme on a $\langle u(x),u(y)\rangle = \langle x,u^*(u(y))\rangle$, la relation (5) est équivalente à

(6) $$u^* = u^{-1}$$

ou encore , puisque $u^* = g^{-1} \circ {}^t u \circ g$, à

(7) $$ {}^t u \circ g = g \circ u^{-1} .$$

3) Si on rapporte E à une base , et si $\underline{R}$ est la matrice de la forme fondamentale par rapport à cette base , le groupe G(f) est isomorphe au groupe des matrices carrées inversibles $\underline{U}$ telles que

(8) $$ {}^t\underline{U}.\underline{R}.\underline{U}=\underline{R} .$$

La matrice de l'endomorphisme u^* adjoint de u , par rapport à la même base , est alors égale à $\underline{U}^{-1}$.

PROPOSITION 1 .- Pour tout scalaire $\alpha\neq 0$ appartenant au centre de K , les groupes G(f) et G(αf) sont ~~isomorphes~~ identiques .

PROPOSITION 2 .- Si f_1 et f_2 sont deux formes fondamentales équivalentes sur E , les groupes $G(f_1)$ et $G(f_2)$ sont transformés l'un de l'autre par un automorphisme intérieur du groupe linéaire $GL_n(K)$.

En effet , si $f_2(x,y)=f_1(w(x),w(y))$, où w est un automorphisme de E, la relation $f_2(u_2(x),u_2(y))=f_2(x,y)$ équivaut à $f_1(u_1(x),u_1(y))=f_1(x,y)$, avec $u_1=wu_2w^{-1}$; d'où $G(f_1)=wG(f_2)w^{-1}$.

Soit K' un surcorps de K , tel que l'antiautomorphisme $\xi\rightarrow\bar{\xi}$ de K se prolonge en un antiautomorphisme (noté encore $\xi\rightarrow\bar{\xi}$) de K' ; soit E' l'espace vectoriel sur K' obtenu par extension à K' du corps des scalaires de E (chap.III, § 2(amélioré)) ; il est immédiat que la forme fondamentale f se prolonge d'une seule manière en une forme sesquilinéaire f' sur E'$\times$E' ; si $\underline{R}$ est la matrice de f par rapport à une base (e_i) de E , on sait que (e_i) est aussi une base de E' sur K' , et $\underline{R}$ est évidemment la matrice de f' par rapport à cette base , ce qui montre que f' est fondamentale . Il est clair alors (par exemple , en raison de la relation (8)) que le groupe G(f) est l'intersection du groupe G(f') et du groupe linéaire $GL_n(K)$ (considéré comme sous-groupe de $GL_n(K')$.

Si f est une forme fondamentale sur E , la forme inverse $\hat{f}$ (§ 1,n°9) est une forme fondamentale sur le dual E^* de E , correspondant à la semi-dualité g^{-1}

de E^* sur E. La relation (7), qui définit les transformations u de $G(f)$, s'écrit aussi, en prenant les transposées

$$^t u^{-1} \circ g = g \circ u$$

ou encore
$$u \circ g^{-1} = g^{-1} \circ {}^t u^{-1}$$

ce qui montre que la <u>contragrédiente</u> $\check{u} = {}^t u^{-1}$ de u (et aussi la transposée $^t u$) <u>appartient au groupe</u> $G(\hat{f})$; l'application $u \rightarrow \check{u}$ est donc un <u>isomorphisme</u> de $G(f)$ sur $G(\hat{f})$.

Supposons maintenant que K soit <u>commutatif</u>, et désignons encore par $\langle z, t\rangle$ l'<u>extension canonique</u> de la forme fondamentale $f(x,y) = \langle x, y\rangle$ à un quelconque des espaces vectoriels $T^p(E)$ (resp. $\overset{p}{\bigwedge} E$) (§ 1, n°7) ; il est clair que cette extension est aussi une forme <u>fondamentale</u>. Alors, si $u \in G(f)$, la <u>puissance tensorielle</u> p-<u>ème</u> (resp. <u>puissance extérieure</u> p-<u>ème</u>) u_p de u est telle, par définition, que $\langle u_p(z), u_p(t)\rangle = \langle z, t\rangle$ identiquement. Autrement dit, l'application $u \rightarrow u_p$ est un <u>isomorphisme</u> du groupe $G(f)$ <u>dans</u> le groupe associé à l'extension canonique de f à $T^p(E)$ (resp. $\overset{p}{\bigwedge} E$).

Considérons en particulier l'extension canonique de f à $\overset{p}{\bigwedge} E$; en désignant encore par g la semi-dualité de $\overset{p}{\bigwedge} E$ sur $\overset{p}{\bigwedge} E^*$ définie par la forme fondamentale $\langle z, t\rangle$, on a $g \circ u_p = \check{u}_p \circ g$. Cette relation permet de déterminer, pour tout p-vecteur $z \in \overset{p}{\bigwedge} E$, l'expression de $u_{n-p}(\check{z})$, où $\check{z} = \varphi^{-1}(g(z))$ est le $(n-p)$-vecteur qui correspond à z par l'application canonique provenant de la forme f et d'une base e de $\overset{n}{\bigwedge} E$ (§ 1, n°8). On a en effet $u_{n-p} \circ \varphi^{-1} = \Delta \varphi^{-1} \circ \check{u}_p$ (chap. III, § 8, prop. 5) donc

$$u_{n-p}(\check{z}) = \Delta\, \widetilde{u_p(z)} \tag{9}$$

Δ étant le déterminant de u par rapport à la base e.

<u>2. Représentation paramétrique de Cayley</u>.

Rapportons la forme fondamentale f à une base de E, et soit $\underline{R}$ sa matrice par rapport à cette base ; nous supposons $G(f)$ identifié au groupe des matrices U satisfaisant à la relation (8) .

PROPOSITION 3 .- Si K n'est pas de caractéristique 2 , toute matrice U du groupe G(f) telle que $I+U$ soit inversible , peut s'écrire d'une seule manière sous la forme

(10) $$U=(I+R^{-1}S)^{-1}(I-R^{-1}S)$$

où S est une matrice telle que

(11) $$\begin{cases} {}^t\overline{S}=-S & \text{si f est hermitienne} \\ {}^t\overline{S}=S & \text{si f est alternée .} \end{cases}$$

Inversement , pour toute matrice S vérifiant (11) et telle que $I+R^{-1}S$ soit inversible , la matrice U définie par (10) appartient au groupe G(f) .

En effet , s'il existe une matrice S satisfaisant à (10) (pour une matrice U quelconque) , on a $(I+R^{-1}S)U=I-R^{-1}S$, ou $R^{-1}S(I+U)=I-U$; si $I+U$ est inversible , on tire de là $R^{-1}S=(I-U)(I+U)^{-1}$; réciproquement , si $I+U$ est inversible et si ~~XX~~ S est donnée par la formule précédente , on a $(I+R^{-1}S)(I+U)=2I$, et comme ~~XXX~~ K n'est pas de caractéristique 2 , $I+R^{-1}S$ est inversible , et on a la relation (10). On notera que $I-U$ et $(I+U)^{-1}$ sont permutables , puisque $I-U$ et $I+U$ le sont , donc on peut encore écrire $R^{-1}S=(I+U)^{-1}(I-U)$, ou $I-U=(I+U)R^{-1}S$; on en conclut que $I-{}^t\overline{U}={}^t\overline{S}.{}^t\overline{R}^{-1}(I+{}^t\overline{U})$. Supposons maintenant que U appartienne à G(f) et multiplions à droite la dernière relation par RU; tenant compte de (8) et de la relation ${}^t\overline{R}=\varepsilon R$ (avec $\varepsilon=+1$ si f est hermitienne, $\varepsilon=-1$ si f est alternée), il vient $R(U-I)=\varepsilon\,{}^t\overline{S}(U+I)$; en multipliant à droite par $(I+U)^{-1}$, on obtient (11) .

Réciproquement , supposons que S satisfasse à (11) et soit telle que $I+R^{-1}S$ soit inversible ; de (10) , on tire $(I+U)(I+R^{-1}S)=2I$, donc $I+U$ est inversible Comme $I-R^{-1}S$ et $(I+R^{-1}S)^{-1}$ sont permutables , on a aussi $U=(I-R^{-1}S)(I+R^{-1}S)^{-1}$; de la relation $(I+R^{-1}S)U=I-R^{-1}S$, on tire ${}^t\overline{U}(I+{}^t\overline{S}.{}^t\overline{R}^{-1})=I-{}^t\overline{S}.{}^t\overline{R}^{-1}$; multipliant à droite par R , et tenant compte de (11) et de ${}^t\overline{R}=\varepsilon R$, il vient

${}^t\underline{U}.\underline{R}(\underline{I}-\underline{R}^{-1}\underline{S})=\underline{R}(\underline{I}+\underline{R}^{-1}\underline{S})$, d'où la relation (8) en multipliant à droite par $(\underline{I}+\underline{R}^{-1}\underline{S})^{-1}$.

On notera que la formule (10) ne peut jamais représenter toutes les matrices du groupe $G(f)$, car $-\underline{I}$ appartient toujours à ce groupe .

3 . Sous-espaces isotropes .

DÉFINITION 2 .- On dit qu'un sous-espace V de E est isotrope (pour la forme fondamentale f) si l'intersection de V et du sous-espace V° conjugué de V (pour la forme f) n'est pas réduite à 0 .

Si un sous-espace V est isotrope , il en est de même de son conjugué V° .Dire que V est non isotrope signifie que V et son conjugué V° sont supplémentaires , ou encore que les restrictions de f à V et V° sont des formes fondamentales dans ces deux sous-espaces . On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 4 .- Soient V un sous-espace non isotrope , V° le sous-espace conjugué de V (pour la forme f) ; soient f_1,f_2 les restrictions de f à V et V° . Le sous-groupe de G(f) laissant invariant le sous-espace V laisse aussi invariant V° et est isomorphe à $G(f_1)\times G(f_2)$; le sous-groupe de G(f) laissant invariant chaque vecteur de V est isomorphe à $G(f_2)$.

En effet , si $u\in G(f)$ laisse invariant un sous-espace quelconque V , il laisse aussi invariant son conjugué V° ; si V est non isotrope , V et V° sont supplémentaires , et pour tout couple d'éléments $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$ de E (où x_1 et y_1 sont dans V , x_2 et y_2 dans V°) , on a

(12) $$\langle x,y\rangle=\langle x_1+x_2,y_1+y_2\rangle=\langle x_1,y_1\rangle+\langle x_2,y_2\rangle$$

puisque V et V° sont conjugués ; en d'autres termes , f est somme directe des formes f_1 et f_2 . Tout automorphisme $u\in G(f)$ laissant invariant V est alors déterminé par ses restrictions u_1,u_2 à V et V° , qui appartiennent respectivement à $G(f_1)$ et $G(f_2)$; réciproquement , si u_1 et u_2 sont des transformations quelconques de $G(f_1)$ et $G(f_2)$ respectivement , il résulte de (12) que

Freym. Ode 14-19
Bourbaki 17 ru. Aug. Vacquerie

50

l'automorphisme u de E qui se réduit à u_1 dans V et à u_2 dans V° appartient à G(f) ; le groupe Γ des $u \in G(f)$ laissant invariant V est donc isomorphe à $G(f_1) \times G(f_2)$. Le sous-groupe Γ_o de Γ formé des automorphismes de E laissant invariant <u>chaque</u> élément de V est évidemment isomorphe au sous-groupe de $G(f_1) \times G(f_2)$ formé des couples (u_1, u_2) où u_1 est l'application identique ; Γ_o est donc isomorphe à $G(f_2)$ (avec lequel on l'identifie souvent).

4 . <u>Sous-espaces totalement isotropes</u> .

DÉFINITION 3 .- <u>On dit qu'un sous-espace</u> V <u>de</u> E <u>est totalement isotrope</u> (pour la forme f) <u>s'il est contenu dans le sous-espace conjugué</u> V° .

Il revient au même de dire que la restriction de f à V est <u>nulle</u> ; autrement dit , on a f(x,y)=0 quels que soient x et y dans V . En particulier , on a f(x,x)=0 pour tout $x \in V$; en vertu de la prop.3 du § 2 , cette condition nécessaire est aussi suffisante pour que V soit totalement isotrope lorsque f est <u>hermitienne</u> (mais non bien entendu lorsque f est alternée).

En particulier , un vecteur x $\neq 0$ est dit <u>isotrope</u> lorsque $\langle x,x \rangle = 0$; il revient au même de dire que le sous-espace xK de dimension 1 est totalement isotrope.

PROPOSITION 5 .- <u>Si</u> V <u>est un sous-espace totalement isotrope de dimension r</u> , <u>on a</u> $2r \leq n$.

En effet , comme $V \subset V°$, on a $r \leq n-r$.

La valeur <u>maxima</u> ν de la dimension d'un sous-espace totalement isotrope pour la forme f est appelée l'<u>indice</u> de la forme f ; on a donc $2\nu \leq n$. Il est clair que deux formes équivalentes ont le même indice .

PROPOSITION 6 .- <u>Soient</u> V <u>un sous-espace</u> <u>isotrope</u> , V° <u>son conjugué ; le sous-espace</u> $V \cap V°$ <u>est totalement isotrope , et tout sous-espace</u> W <u>supplémentaire de</u> $V \cap V°$ <u>par rapport à</u> V <u>est non isotrope</u> .

La première partie est une conséquence évidente des définitions . D'autre part , si $x \in W$ est conjugué de tout élément de W , comme x est aussi conjugué de tout élément de $V\cap V^o$, il est conjugué de tout élément de $V=W+(V\cap V^o)$, ce qui montre que $x\in V^o$, et par suite que $x=0$.

Dans tout ce qui suit , nous supposerons que les valeurs de $\langle x,x\rangle$ sont de la forme $\rho+\bar{\rho}$ (cf. § 2, n°5).

PROPOSITION 7 .- Soit V un sous-espace totalement isotrope de dimension r .

1° Il existe au moins un sous-espace totalement isotrope W de dimension r , tel que $V\cap W=\{0\}$ et que $V+W$ soit non isotrope .

2° Pour tout sous-espace vectoriel W totalement isotrope ayant ces propriétés, il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de V et une base $(e_i)_{r+1\leqslant i\leqslant 2r}$ de W telle que $\langle e_i,e_{r+j}\rangle=\delta_{ij}$ (indice de Kronecker) pour $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant r$.

Soit e_1 un vecteur de V , non nul , et soit a un vecteur tel que $\alpha=\langle e_1,a\rangle\neq 0$; montrons qu'on peut déterminer λ et μ de sorte que $e_{r+1}=e_1\lambda+a\mu$ soit un vecteur isotrope satisfaisant à $\langle e_1,e_{r+1}\rangle=1$. Cette dernière condition s'écrit $\alpha\mu=1$; d'autre part , on a par hypothèse $\langle a,a\rangle=\rho+\bar{\rho}$; la relation $\langle e_1\lambda+a\mu,e_1\lambda+a\mu\rangle=0$ s'écrit alors $\bar{\mu}(\bar{\alpha}\lambda+\rho\mu)+(\bar{\lambda}\alpha+\bar{\mu}\bar{\rho})\mu=0$ et comme par hypothèse $\alpha\neq 0$, en déterminant λ par la relation $\bar{\alpha}\lambda+\rho\alpha^{-1}=0$, on satisfera à l'équation précédente .

Cela étant , le plan P déterminé par e_1 et e_{r+1} est non isotrope ; donc son conjugué P^o de dimension $n-2$ est non isotrope et supplémentaire de P . En outre $P^o\cap V$ est l'intersection de V et des hyperplans conjugués de e_1 et e_{r+1} ; mais V est contenu dans l'hyperplan conjugué de e_1 , et non contenu dans l'hyperplan conjugué de e_{r+1} , ce qui prouve que $P^o\cap V$ est un sous-espace totalement isotrope de P^o de dimension $r-1$. Il suffit alors de raisonner par récurrence sur r pour démontrer la première partie de la proposition . Quant à la seconde , elle se démontre de même , en choisissant le vecteur a dans le sous-espace W donné de façon que $\langle e_1,a\rangle\neq 0$; cela est possible en raison de l'hypothèse que V+W n'est pas isotrope , car e_1 , qui est conjugué de tout vecteur de V , ne peut l'être de tout vecteur de W .

COROLLAIRE 1 .- Soient V et W deux sous-espaces totalement isotropes de dimension maxima ν et tels que $V \cap W = \{0\}$. Alors , il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq \nu}$ de V et une base $(e_i)_{\nu+1 \leq i \leq 2\nu}$ de W telles que $\langle e_i, e_{\nu+j} \rangle = \delta_{ij}$ $(1 \leq i \leq \nu, 1 \leq j \leq \nu)$.

Il suffit de prouver que $V+W$ est non isotrope . Or , s'il existait dans $V+W$ un vecteur $x \neq 0$ conjugué de $V+W$, on aurait $x \notin V$ ou $x \notin W$; si par exemple $x \notin V$, le sous-espace $V+xK$ de dimension $\nu+1$ serait alors totalement isotrope , contrairement à la définition de ν .

COROLLAIRE 2 .- Si $\nu > 0$, les vecteurs isotropes de E forment un système de générateurs de l'espace E tout entier .

En effet , si $e_1 \neq 0$ est un vecteur isotrope , et a un vecteur non conjugué à e_1 , nous avons vu dans la démonstration de la prop.7 qu'il existe un vecteur isotrope non conjugué à e_1 dans le plan défini par e_1 et a . Or , il existe une base de E formée de e_1 et de vecteurs a_k $(1 \leq k \leq n-1)$ non conjugués à e_1 , savoir les vecteurs $a_k = e_k + a$, où les e_k $(1 \leq k \leq n-1)$ forment une base de l'hyperplan conjugué de e_1 . Cela établit le corollaire .

Remarque .- Le cor.1 de la prop.7 montre en particulier que si $n=2m$ est pair toutes les formes hermitiennes de rang n et d'indice m sont équivalentes .

5 . Transformation des sous-espaces vectoriels par $G(f)$.

THÉORÈME 1 .- Pour que deux sous-espaces vectoriels V_1, V_2 de même dimension soient transformés l'un de l'autre par une transformation $u \in G(f)$, il faut et il suffit que les restrictions de la forme fondamentale f à V_1 et V_2 soient équivalentes .

La condition est évidemment nécessaire . Supposons inversement qu'elle soit vérifiée ; les rangs des restrictions f_1, f_2 de f à V_1 et V_2 étant égaux , les sous-espaces totalement isotropes $V_1 \cap V_1^0$, $V_2 \cap V_2^0$ ont même dimension r . Soit W_1 (resp. W_2) un supplémentaire de $V_1 \cap V_1^0$ (resp. $V_2 \cap V_2^0$) par rapport à V_1 (resp. V_2) ; W_1 et W_2 sont non isotropes (prop.6) et les restrictions de f à

W_1 et W_2 sont <u>équivalentes</u> . Soient W_1^o et W_2^o les sous-espaces conjugués de W_1 et W_2 respectivement ; f est somme directe de ses restrictions à W_1 et W_1^o , et aussi de ses res restrictions à W_2 et W_2^o respectivement . Si f est hermitienne, il résulte du th. de Witt (§ 2,th.3) que les restrictions de f à W_1^o et W_2^o sont équivalentes ; il existe donc une application linéaire biunivoque v de W_1 sur W_2 et une application linéaire biunivoque w de W_1^o sur W_2^o telles que $\langle v(x),v(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ pour x et y dans W_1 et $\langle w(x),w(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ pour x et y dans W_1^o ; l'application linéaire u dont les restrictions à W_1 et W_1^o sont v et w appartient donc à G(f) . Si f est alternée , on parvient encore plus aisément à cette conclusion en raison du th.1 du § 2 .

On peut donc supposer (en effectuant au besoin la transformation u) que $W_1=W_2$ $W_1^o=W_2^o$. Posons $M_i=V_i\cap V_i^o$ (i=1,2) ; dans l'espace W_1^o , soit N_i (i=1,2) un sous-espace totalement isotrope de dimension r tel que $M_i\cap N_i=\{0\}$ et que M_i+N_i soit non isotrope (prop.7) . Il résulte de la prop.7 que les restrictions de f aux sous-espaces M_1+N_1 et M_2+N_2 sont équivalentes , donc le raisonnement précédent montre qu'il existe une transformation du groupe G(f) laissant invariants les éléments de W_1 et transformant M_1 en M_2 et N_1 en N_2 , ce qui achève la démonstration .

COROLLAIRE 1 .- <u>Pour tout sous-espace totalement isotrope</u> V <u>de dimension r , il existe un sous-espace totalement isotrope</u> W <u>de dimension maximale</u> ν <u>contenant</u> V .

En effet , soit W_1 un sous-espace totalement isotrope de dimension maximale ν et soit V_1 un sous-espace quelconque de W_1 , de dimension r ; le th.1 montre qu'il existe une application $u\in G(f)$ telle que $u(V_1)=V$; $W=u(W_1)$ est alors un sous-espace totalement isotrope de dimension ν contenant V .

COROLLAIRE 2 .- <u>Soient</u> V_1,W_1,V_2,W_2 <u>quatre sous-espaces totalement isotropes de</u>

dimension maximale ν , tels que $V_1 \cap W_1 = V_2 \cap W_2 = \{0\}$; il existe alors une transformation $u \in G(f)$ telle que $u(V_1)=V_2$ et $u(W_1)=W_2$.

Il suffit en effet d'appliquer le th.1 aux sous-espaces V_1+W_1 et V_2+W_2 , en tenant compte de la prop.7 et de son cor.1 .

Remarque .- Soit K_o un corps ordonné et K un corps vérifiant l'une des trois hypothèses du § 2,n°6 (K est donc égal à K_o , ou extension quadratique de K_o , ou corps des quaternions sur K_o) ; soit K_o' un corps ordonné maximal contenant K_o et dont l'ordre induit sur K_o l'ordre donné ; si K est l'extension quadratique $K_o(\omega)$, on posera $K'=K_o'(\omega)$; si K est le corps des quaternions sur K_o correspondant au couple (λ,μ) , K' sera le corps des quaternions sur K_o' correspondant à (λ,μ) . Cela étant ,soit $f(x,y)$ une forme sesquilinéaire hermitienne sur l'espace E de dimension n sur K ; soit f' son prolongement à l'espace vectoriel E' sur K' obtenu par extension à K du corps des scalaires de E (n°1) . Supposons que pour une base $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ de E , on ait

$$f(x,x)=\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i\xi_i\bar{\xi}_i-\beta_i\xi_{r+i}\bar{\xi}_{r+i})+\varepsilon\sum_{j=2r+1}^{n}\gamma_j\xi_j\bar{\xi}_j$$

où les $\alpha_i,\beta_i,\gamma_j$ sont tous >0 dans K_o , et $\varepsilon=1$ ou $\varepsilon=-1$. Nous allons montrer que le nombre r est égal à l'indice de la forme f' . En effet, dans K_o' , les coefficients $\alpha_i,\beta_i,\gamma_j$ sont tous des carrés ; il en résulte aussitôt (cf.§ 2,prop.5) qu'il existe dans E' une base (b_i) par rapport à laquelle

$$f'(x,x)=\sum_{i=1}^{r}(\xi_i\bar{\xi}_i-\xi_{r+i}\bar{\xi}_{r+i})+\varepsilon\sum_{j=2r+1}^{n}\xi_j\bar{\xi}_j \quad .$$

On voit aussitôt que les r vecteurs b_i+b_{r+i} , ainsi que les r vecteurs b_i-b_{r+i} $(1\leq i\leq r)$ engendrent respectivement deux sous-espaces V,W totalement isotropes , tels que $V\cap W=\{0\}$ et que $V+W$ soit non isotrope . En outre , il est clair que le sous-espace U conjugué de $V+W$ ne contient pas de vecteur isotrope $\neq 0$. Le cor.1 du th.1 montre donc que r est bien l'i dice de f' .

On notera que ce raisonnement donne une nouvelle démonstration de la loi d'inertie (§ 2, th.4) et prouve en même temps que si f a la signature (s,t), l'indice de f' est égal à $\mathrm{Min}(s,t)$. On remarquera que l'indice de f peut être strictement inférieur à ce nombre ; par exemple, sur le corps Q, la forme $\xi_1^2-2\xi_2^2$ a un indice égal à 0 .

6 . Involutions dans $G(f)$.

On dit qu'une transformation $u\in G(f)$ est une involution si u^2 est la transformation identique, autrement dit, si $u^2(x)=x$ pour tout $x\in E$.

PROPOSITION 8 .- Soit u une involution de $G(f)$. Si K n'est pas de caractéristique 2 , il existe un sous-espace V non isotrope tel que u laisse invariants tous les éléments de V , et que $u(x)=-x$ pour tout élément du conjugué V^o de V ; réciproquement, toute transformation ayant ces propriétés est une involution de $G(f)$.

D'une façon générale, soit u une involution du groupe linéaire $GL_n(K)$ (où K n'est pas de caractéristique 2). Soit V le sous-espace des x E tels que $u(x)=x$, W le sous-espace des $x\in E$ tels que $u(x)=-x$; il est clair que $V\cap W=\{0\}$; d'autre part, pour tout $x\in E$ on a $x=\frac{1}{2}(x+u(x))+\frac{1}{2}(x-u(x))$, et on vérifie aussitôt que $x+u(x)\in V$ et $x-u(x)\in W$, donc V et W sont supplémentaires . Reste à voir que, si $u\in G(f)$, V et W sont non isotropes et conjugués ; or, si $x\in V$ et $y\in W$, on a $\langle x,y\rangle=\langle u(x),u(y)\rangle=-\langle x,y\rangle$, d'où $\langle x,y\rangle=0$. Si p est la dimension de V , W est de dimension $n-p$ et tous les éléments de W sont conjugués de V , donc W est le sous-espace conjugué de V ; comme $V\cap W=\{0\}$, V et W sont non isotropes .

Remarque .- Les homothéties $x\rightarrow x\gamma$ qui appartiennent au groupe $G(f)$ sont nécessairement centrales , autrement dit, telles que γ appartienne au centre Z de K (chap.II, § 2) ; en outre, on doit avoir, en vertu de la déf.1 ,

$\bar{\gamma}\gamma=1$. On ramène aisément aux involutions la recherche des transformations $u \in G(f)$ telles que $u^2(x)=x\gamma$ lorsque γ est le carré d'un élément μ du centre Z de K . En effet , $v=\mu^{-1}u$ est alors une involution du groupe linéaire $GL_n(K)$; comme on a $(\bar{\mu}\mu)^2=\bar{\gamma}\gamma=1$, il vient $\bar{\mu}\mu=1$ ou $\bar{\mu}\mu=-1$. Dans le premier cas , v est une involution du groupe G(f) ; dans le second , on a $\langle v(x);v(y)\rangle = -\langle x,y\rangle$ quels que soient x et y dans E . Soient alors V et W les sous-espaces supplémentaire tels que $v(x)=x$ dans V , $v(x)=-x$ dans W ; on voit aussitôt que si x et y sont dans V (resp. dans W) , on a $\langle x,y\rangle=0$ (K étant supposé de caractéristique $\neq 2$); autrement dit , V et W sont totalement isotropes (ce qui implique que n est pair et que $2\nu=n$) : la réciproque est immédiate .

7 . Groupe symplectique .

Nous allons maintenant examiner les propriétés de G(f) qui découlent d'hypothèses plus particulières sur la forme fondamentale f . Supposons en premier lieu que K soit commutatif , $\xi \to \bar{\xi}$ l'automorphisme identique , et f une forme fondamentale alternée (ce qui implique n pair ; nous poserons n=2m) ; le groupe G(f) est alors appelé groupe symplectique associé à la forme f , et noté $Sp_{2m}(K,f)$. On sait que deux formes fondamentales alternées f,f_1 sur deux espaces de même dimension 2m sur K , sont équivalentes (§ 2,th.1) ; il résulte alors de la prop.2 que les groupes symplectiques $Sp_{2m}(K,f)$ et $Sp_{2m}(K,f_1)$ sont isomorphes . On peut donc se borner à étudier le groupe G(f) correspondant à la forme f définie sur l'espace $E=K^{2m}$, et dont la matrice est $\underline{R}=\begin{pmatrix} 0 & \underline{I}_m \\ -\underline{I}_m & 0 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique (chap.II,§ 3) de K^{2m} ; nous désignerons ce groupe par la notation $Sp_{2m}(K)$, et nous dirons que c'est le groupe symplectique sur le corps K , pour la dimension 2m . Les éléments de $Sp_{2m}(K)$ seront appelés transformations symplectiques dans $E=K^{2m}$; la matrice $\underline{U}=\begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix}$ d'une telle transformation par rapport à la base canonique est dite matrice symplectique;

la relation (8) équivaut aux trois relations

$$(13)\qquad \begin{cases} {}^t\underline{A}\circ\underline{C}={}^t\underline{C}\circ\underline{A} \\ {}^t\underline{B}\circ\underline{D}={}^t\underline{D}\circ\underline{B} \\ {}^t\underline{A}\circ\underline{D}-{}^t\underline{C}\circ\underline{B}=\underline{I}_m \end{cases} .$$

Toute transformation symplectique transforme toute <u>base symplectique</u> (§ 2, n°1) en une base symplectique ; inversement, un endomorphisme de E qui transforme <u>une</u> base symplectique en une base symplectique est une transformation symplectique.

PROPOSITION 9. - <u>Le déterminant de toute transformation symplectique est égal à 1.</u>

Pour toute matrice symplectique $\underline{U}$, on a en effet (§ 2, prop. 2)

$$\mathrm{Pf}(\underline{R})=\mathrm{Pf}({}^t\underline{U}\circ\underline{R}\circ\underline{U})=(\det \underline{U})\circ\mathrm{Pf}(\underline{R})$$

d'où $\det \underline{U}=1$.

Pour une forme alternée, tout sous-espace de E de dimension <u>impaire</u> est <u>isotrope</u> (§ 2, th. 1) ; en particulier, tout <u>hyperplan</u> est isotrope. Si V est un sous-espace non isotrope, de dimension 2r, le sous-groupe de $Sp_{2m}(K)$ qui laisse invariant V est isomorphe au groupe produit $Sp_{2r}(K)\times Sp_{2(m-r)}(K)$; le sous-groupe qui laisse invariants tous les éléments de V est isomorphe à $Sp_{2(m-r)}(K)$ (prop. 4).

PROPOSITION 10. - <u>L'indice d'une forme alternée de rang 2m est égal à m.</u>

En effet, si $(e_i)_{1\leq i\leq 2m}$ est une base symplectique, on a $\langle e_i, e_j\rangle=0$ pour $1\leq i\leq m$ et $1\leq j\leq m$, ce qui montre que le sous-espace engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_m$ est totalement isotrope.

Notons enfin que les seules homothéties qui soient des transformations symplectiques sont l'application identique et la symétrie $x\to -x$ (cette dernière étan d'ailleurs l'application identique lorsque K est de caractéristique 2).

8 . Groupe unitaire et groupe orthogonal .

Supposons maintenant que K soit un corps commutatif ou non , et f une forme sesquilinéaire hermitienne fondamentale sur E . Le groupe G(f) est alors appelé groupe unitaire relatif à la forme f , et noté $U_n(K,f)$. Pour que $u \in U_n(K,f)$ il suffit d'ailleurs qu'on ait identiquement $\langle u(x),u(x)\rangle = \langle x,x\rangle$ (§ 2,prop.3). Les éléments de ce groupe sont appelés transformations unitaires . Toute transformation unitaire transforme toute base orthogonale (§ 2,n°3) en une base orthogonale ; réciproquement , si un endomorphisme u de E transforme une base orthogonale $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E de sorte que $\langle u(e_i),u(e_j)\rangle=0$ pour $i\neq j$ et $\langle u(e_i),u(e_i)\rangle = \langle e_i,e_i\rangle$ pour $1\leq i\leq n$, u est une transformation unitaire .

On dit qu'une base orthogonale (e_i) est orthonormale si on a $\langle e_i,e_i\rangle=1$ pour $1\leq i\leq n$, ou , en d'autres termes , si la matrice de la forme fondamentale par rapport à cette base est la matrice unité $\underline{I}$. La matrice $\underline{U} = (\alpha_{ij})$ d'une transformation unitaire quelconque par rapport à une base orthonormale satisfait alors à la relation

$$(14)\qquad {}^t\overline{\underline{U}}.\underline{U}=\underline{I}$$

équivalente à ${}^t\overline{\underline{U}}=\underline{U}^{-1}$, ou encore aux n(n+1)/2 relations

$$(15)\qquad \begin{cases} \overline{\alpha}_{1i}\alpha_{1i}+\overline{\alpha}_{2i}\alpha_{2i}+\dots+\overline{\alpha}_{ni}\alpha_{ni}=1 & (1\leq i\leq n) \\ \overline{\alpha}_{1i}\alpha_{1j}+\overline{\alpha}_{2i}\alpha_{2j}+\dots+\overline{\alpha}_{ni}\alpha_{nj}=0 & (i<j) \end{cases}$$

Une matrice $\underline{U}$ qui satisfait à (14) est dite matrice unitaire .

2 Il faut remarquer qu'il n'existe pas toujours de base orthonormale . Par exemple , si K est un corps commutatif ordonné maximal , il ne peut exister de base orthonormale pour une forme quadratique f que si la signature (§ 2,n°6) de f est (n,0) , autrement dit , si f est strictement positive . Sur le corps Q des nombres rationnels , il n'existe pas de base orthonormale pour la forme strictement positive $\xi_1^2+2\xi_2^2$, car le discriminant de cette forme est 2 , et le discriminant de toute forme admet-

tant une base orthonormale est un carré dans Q .

Lorsqu'il n'y a pas de confusions à craindre , on dit que deux vecteurs (resp. sous-espaces) conjugués par rapport à une forme hermitienne fondamentale sont des vecteurs (resp. sous-espaces) orthogonaux .

Dans toute la suite de ce paragraphe , nous supposerons que le corps K est commutatif , et désignerons par K_o le sous-corps des invariants de l'automorphisme $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ de K . Lorsque $K_o=K$ (c'est-à-dire lorsque f est une forme bilinéaire symétrique) , le groupe associé à f prend le nom de groupe orthogonal et se note $O_n(K,f)$; ses éléments sont appelés transformations orthogonales . Lorsque , dans ce cas , il existe en outre une base orthonormale pour f , la matrice $\underline{U}$ d'une transformation orthogonale quelconque par rapport à cette base est telle que

$$ {}^t\underline{U}.\underline{U}=\underline{I} \; ; \tag{16} $$

on dit qu'une telle matrice est une matrice orthogonale .

Toute forme hermitienne de rang 1 étant de la forme αf_o , où $\alpha \in K_o$ et $f_o(\xi,\eta)=\bar{\xi}\eta$, tous les groupes unitaires $U_1(K,f)$ sont isomorphes au groupe multiplicatif N des éléments de K tels que $\bar{\rho}\rho=1$; lorsque $K_o \neq K$, ce groupe est le groupe des éléments de K de norme 1 sur K_o ; lorsque $K_o=K$, N est le groupe des deux éléments $-1,+1$ (rappelons que , dans ce cas , K n'est pas de caractéristique 2 en vertu de nos hypothèses).

9 . Groupe des rotations .

PROPOSITION 11 .- Soit K un corps commutatif , f une forme hermitienne fondamentale sur E . L'image du groupe G(f) par la représentation $\underline{U} \rightarrow \det \underline{U}$ dans le groupe multiplicatif K^* , est le sous-groupe N des éléments de K tels que $\bar{\rho}\rho=1$.

En effet , en prenant les déterminants dans les deux membres de (8) , il vient , en posant $\Delta=\det \underline{U}$

(17) $$\bar{\Delta}\Delta=1 .$$

Reste à voir que pour tout élément $\rho\in K$ tel que $\bar{\rho}\rho=1$, il existe une matrice $\underline{U}$ du groupe $U_n(K,f)$ telle que det $\underline{U}=\rho$; or , si (e_i) est une base orthogonale de E , l'automorphisme u de E défini par $u(e_1)=\rho e_1$, $u(e_i)=e_i$ pour $2\leq i\leq n$, appartient à $U_n(K,f)$ et a un déterminant égal à ρ .

COROLLAIRE .- Toute transformation du groupe orthogonal $O_n(K,f)$ a un déterminant égal à 1 ou à -1 .

Le noyau de la représentation $\underline{U}\to$ det $\underline{U}$, c'est-à-dire l'ensemble des transformations unitaires de déterminant 1 , se note $U_n^+(K,f)$ et s'appelle groupe des rotations (relatives à la forme f) ; c'est donc un sous-groupe distingué du groupe unitaire , et le groupe quotient $U_n(K,f)/U_n^+(K,f)$, isomorphe à N , est abélien , ce qui montre que $U_n^+(K,f)$ contient le groupe des commutateurs de $U_n(K,f)$, auquel il n'est d'ailleurs pas nécessairement égal (exerc.).

Dans le cas du groupe orthogonal $O_n(K,f)$, le groupe des rotations se note $O_n^+(K,f)$; c'est un sous-groupe distingué d'indice 2 .

Nous allons étudier comment se transforment les sous-espaces vectoriels de E par le groupe des rotations .

THÉORÈME 2 .- Si deux sous-espaces V_1,V_2 de même dimension r sont tels que les restrictions de la forme fondamentale à V_1 et V_2 soient équivalentes , il existe une rotation transformant V_1 en V_2 sauf si $K_o=K$, $2r=n$, et si V_1 et V_2 sont totalement isotropes ; dans ce dernier cas , pour qu'il existe une rotation transformant V_1 en V_2 , il faut et il suffit que la dimension de V_1 V_2 ait même parité que r .

D'après le th.1 , il existe une transformation unitaire v telle que $v(V_1)=V_2$; nous allons d'abord montrer que pour tout sous-espace V_1 de E autre qu'un sous espace totalement isotrope de dimension $n/2$, il existe une transformation unitaire w laissant invariant V_1 et dont le déterminant est un élément arbitraire $\rho \in N$; alors , en prenant w tel que $\det w = (\det v)^{-1}$, $u = vw$ sera une rotation transformant V_1 en V_2 . Or , soit V_1^o le sous-espace conjugué de V_1 ; par hypothèse , on a $V_1^o \neq V_1$, donc on a $V_1 \neq V_1 \cap V_1^o$ ou $V_1^o \neq V_1 \cap V_1^o$. Supposons par exemple que $V_1 \neq V_1 \cap V_1^o$; il existe alors un sous-espace W supplémentaire de $V_1 \cap V_1^o$ par rapport à V_1 et non isotrope . Par suite (prop.11) , il existe une transformation unitaire w laissant invariant W et tous les éléments du sous-espace conjugué W^o , et de déterminant ρ arbitrairement donné dans N ; il est clair que w laisse invariant V_1 . On raisonne de même lorsque $V_1 = V_1 \cap V_1^o$, mais $V_1 \neq V_1^o$.

Considérons maintenant un sous-espace V totalement isotrope de dimension (maxima) r , telle que $2r = n$; nous allons étudier les transformations unitaires u laissant invariant V . Soit W un sous-espace totalement isotrope de dimension r , supplémentaire de V (prop.7) , et prenons une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que les e_i d'indice $\leq r$ forment une base de V , ceux d'indice $> r$ une base de W , avec les conditions $\langle e_i, e_{r+j} \rangle = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq r$ (prop.7). Soit $A = (\alpha_{ij})$ la matrice carrée(d'ordre r) de la restriction de u à V , par rapport à la base $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$. On vérifie aussitôt que la transformation v de matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t\bar{A}^{-1} \end{pmatrix}$ par rapport à la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, est une transformation unitaire . Si $\delta = \det A$, le déterminant de v est $\delta/\bar{\delta}$. Soit alors $w = uv^{-1}$; c'est une transformation unitaire laissant invariant tout élément de V . Pour tout $x \in W$ et tout $y \in V$, on doit donc avoir $\langle y, w(x) \rangle = \langle y, x \rangle$, donc $\langle y, w(x) - x \rangle = 0$, ce qui prouve que $w(x) - x \in V$ pour tout $x \in W$; la matrice de w par rapport à la base (e_i) est donc de la forme $\begin{pmatrix} I_r & S \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$, et par suite son déterminant est égal à 1 . Nous avons ainsi montré que le déterminant de u est de la forme $\delta/\bar{\delta}$. La première partie du théorème résulte donc du fait que , dans l'extension quadratique séparable K de K_o , tout élément de norme 1 est de la forme $\delta/\bar{\delta}$ (chap.V, § 11, th.3).

Considérons maintenant le cas où $K=K_0$, $\xi \to \bar{\xi}$ étant l'automorphisme identique. Nous avons alors démontré dans ce qui précède que toute transformation orthogonale u laissant invariant V est une rotation. Si maintenant V_1 et V_2 sont deux sous-espaces totalement isotropes de dimension r (avec 2r=n), et si une transformation orthogonale u transformant V_1 en V_2 a un déterminant Δ (=±1), toute autre transformation orthogonale transformant V_1 en V_2 aura le même déterminant Δ.

Soit alors q la dimension de $V_1 \cap V_2$; le sous-espace conjugué de $V_1 \cap V_2$ contient V_1 et V_2, donc V_1+V_2, et il est de dimension n-q=2r-q, ce qui est précisément la dimension de V_1+V_2 ; ce dernier est donc conjugué de $V_1 \cap V_2$. Soit W un sous-espace non isotrope supplémentaire de $V_1 \cap V_2$ par rapport à V_1+V_2, de dimension 2(r-q). Dans W les sous-espaces $W_1=V_1 \cap W$, et $W_2=V_2 \cap W$ sont des sous-espaces totalement isotropes supplémentaires de dimension r-q ; donc (prop.7), il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq 2(r-q)}$ de W telle que les r-q premiers vecteurs e_i forment une base de W_1, les r-q autres une base de W_2, et qu'on ait $(e_i, e_{r-q+j}) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i \leq r-q$, $1 \leq j \leq r-q$. Cela étant, la transformation u telle que $u(e_i)=e_{r-q+i}$ et $u(e_{r-q+i})=e_i$ pour $1 \leq i \leq r-q$, et qui laisse invariants les points du sous-espace W^o conjugué (et supplémentaire) de W, est une transformation orthogonale, et on a $\det u=(-1)^{r-q}$; ce qui achève la démonstration.

On voit donc que si $n=2\nu$ est pair, et si f est une forme bilinéaire symétrique d'indice ν, il y a deux classes d'intransitivité P_ν, P'_ν pour le groupe des rotations $O_n^+(K,f)$ dans l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de dimension maxima ν ; si V_1 et V_2 appartiennent à une même classe, la dimension de $V_1 \cap V_2$ a même parité que ν ; si au contraire V_1 et V_2 appartiennent à des classes différentes, la dimension de $V_1 \cap V_2$ a une parité différente de celle de ν.

Notons encore , pour les transformations orthogonales , la propriété suivante:

PROPOSITION 12 .- Pour toute transformation orthogonale u de déterminant -1 , il existe un vecteur $x\neq 0$ dans E tel que $u(x)=-x$. Si l'espace E est de dimension impaire , pour toute rotation u , il existe un vecteur $x\neq 0$ invariant par u .

Supposons en effet que $\det \underline{U}=-1$; d'après (8) , on a

$$^t\underline{U}.\underline{R}(\underline{I}+\underline{U})=(^t\underline{U}+\underline{I})\underline{R}$$

d'où , en prenant les déterminants , et remarquant que $^t\underline{U}+\underline{I}={}^t(\underline{I}+\underline{U})$, il vient $-\det(\underline{I}+\underline{U})=\det(\underline{I}+\underline{U})$, ou encore $\det(\underline{I}+\underline{U})=0$; cela prouve que la matrice $\underline{I}+\underline{U}$ est de rang $<n$, et établit la première partie de la proposition . D'autre part , si n est impair , et si u est une rotation , $x\to -u(x)$ a un déterminant égal à -1 , d'où la seconde partie de la proposition .

10 . Relations entre les groupes $G(f)$.

Soit K un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, extension quadratique séparable d'un corps K_o ; on a donc $K=K_o(\omega)$, où $\omega^2=\alpha$, α étant un élément de K_o non carré dans ce corps . Soit E un espace de dimension n sur K (donc de dimension $2n$ sur K_o) , et soit $f(x,y)$ une forme sesquilinéaire hermitienne sur E (pour le K_o-automorphisme $\xi\to\bar{\xi}$ de K , distinct de l'automorphisme identique) . Posons $f(x,y)=f_1(x,y)+\omega f_2(x,y)$, où $f_1(x,y)$ et $f_2(x,y)$ appartiennent à K_o ; si nous désignons par E_o l'espace E considéré comme espace vectoriel sur K_o , il est clair que f_1 et f_2 sont des formes bilinéaires sur E_o . En outre , l'application $x\to\omega x$ de E_o sur lui-même est un automorphisme u_o de cet espace vectoriel , tel que $u_o^2(x)=\alpha x$; la relation $f(x\omega,y)=\bar{\omega}f(x,y)=-\omega f(x,y)$ entraîne donc

(18) $$f_1(u_o(x),y)=-\alpha f_2(x,y) .$$

Enfin , la relation $f(y,x)=\overline{f(x,y)}$ équivaut aux deux relations

(19) $$f_1(y,x)=f_1(x,y)$$

(20) $$f_2(y,x)=-f_2(x,y) \quad .$$

On voit donc que f_1 est une forme bilinéaire symétrique et f_2 une forme bilinéaire alternée sur E_o , ces formes étant liées par la relation (18) ; il est clair que si f est une forme fondamentale , il en est de même de f_1 et f_2 . On notera enfin qu'on a

(21) $$f_1(u_o(x),u_o(y))=-\alpha f_1(x,y)$$

(22) $$f_2(u_o(x),u_o(y))=-\alpha f_2(x,y) \quad .$$

PROPOSITION 13 .- Soit u un automorphisme de l'espace vectoriel E_o (sur K_o). Pour que u ~~soit~~ appartienne au groupe unitaire $U_n(K,f)$, il faut et il suffit qu'il vérifie deux quelconques des trois conditions suivantes :

a) u est permutable avec u_o ;

b) u appartient au groupe $O_{2n}(K_o,f_1)$;

c) u appartient au groupe $Sp_{2n}(K_o,f_2)$.

En effet , la relation $f(u(x),u(y))=f(x,y)$ équivaut aux deux relations $f_1(u(x),u(y))=f_1(x,y)$ et $f_2(u(x),u(y))=f_2(x,y)$; cette dernière s'écrit aussi d'après (18) , sous la forme $f_1(u_o(u(x)),u(y))=f_1(u_o(x),y)$, et comme $f_1(u_o(x),v)=f_1(u(u_o(x)),u(y))$, il vient ($u(y)$ étant arbitraire dans E_o) , $uu_o=u_ou$; la réciproque est immédiate . Comme on a aussi $f_2(u_o(x),y)=-f_1(x,y)$ d'après (18) , on montre de la même manière que les relations $f_2(u(x),u(y))=$ $=f_2(x,y)$, et $uu_o=u_ou$ entraînent $f_1(u(x),u(y))=f_1(x,y)$.

COROLLAIRE .- On a $U_n(K,f)=O_{2n}(K_o,f_1)\cap Sp_{2n}(K_o,f_2)$.

Les résultats précédents admettent une réciproque . Soit E_o un espace vectoriel sur un corps commutatif K_o de caractéristique $\neq 2$, f_1 une forme bilinéaire symétrique sur E_o , α un élément de K_o non carré dans ce corps , et u_o un automorphisme de E_o satisfaisant à $u_o^2(x)=\alpha x$ et à la condition (21) . Soit $K=K_o(\omega)$ l'extension quadratique de K_o obtenue en adjoignant à K_o une racine ω du polynome $X^2-\alpha$; nous allons montrer qu'on définit sur E_o une structure d'espace vectoriel <u>par rapport à</u> K , en posant , pour $x \in E_0$, $\lambda \in K_0$ et $\mu \in K_0$, $(\lambda+\omega\mu)x=\lambda x+\mu u_0(x)$; il suffit en effet de vérifier qu'on a bien , avec cette définition , $\omega(\omega x)=\alpha x$, ce qui résulte de l'hypothèse $u_0^2(x)=\alpha x$.

On notera en passant que ce résultat montre que si E_0 est de dimension finie sur K_0 , cette dimension est nécessairement <u>paire</u> s'il existe un automorphisme u_0 ayant les propriétés précédentes .

Posons alors $f_2(x,y)=-\frac{1}{\alpha}f_1(u_0(x),y)$; on a $f_2(y,x)=-\frac{1}{\alpha}f_1(u_0(y),x)=$ $=-\frac{1}{\alpha^2}f_1(u_0^2(x),u_0(y))=\frac{1}{\alpha}f_1(\cancel{\alpha}u_0(x),y)$ en vertu de (21) , ce qui montre que f_2 est <u>alternée</u> sur E_0 . Si E désigne l'espace vectoriel obtenu en munissant E_0 de la structure d'espace vectoriel <u>sur</u> K définie ci-dessus , et si on pose $f(x,y)=f_1(x,y)+\omega f_2(x,y)$, il est immédiat alors que f est une forme <u>sesquilinéaire hermitienne</u> sur E (pour le K_0-automorphisme $\xi \to \bar{\xi}$ de K distinct de l'identité).

On pourrait aussi , au lieu de considérer une forme bilinéaire symétrique sur E_0 , partir d'une forme <u>alternée</u> f_2 sur E_0 et d'un automorphisme u_0 de E tel que $u_0^2(x)=\alpha x$, et satisfaisant à (22) . On définit alors $f_1(x,y)$ par la relation $f_1(x,y)=-f_2(u_0(x),y)$, puis f comme ci-dessus .

Enfin , si on désigne par g_1 et g_2 les dualités définies par f_1 et f_2 , la relation (18) s'écrit $g_1 \circ u_0=-\alpha g_2$, ou encore $g_1^{-1}\circ g_2=-\frac{1}{\alpha}u_0$. Inversement , le raisonnement précédent montre que si $g_1^{-1}\circ g_2=v_0$ est un automorphisme de E_0 tel que $v_0^2(x)=\frac{1}{\alpha}x$, où α n'est pas un carré dans K_0 , $f=f_1+\omega f_2$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E .

Lorsque K est un corps de <u>quaternions</u> sur K_0 , f une forme sesquilinéaire hermitienne pour l'antiautomorphisme $\lambda \to \bar{\lambda}$ de K , on a des propriétés analogues pour le groupe unitaire $U_n(K,f)$ (exerc.16).

§ 4 . Réduction d'une forme hermitienne à ses axes .

<u>1. Formes fondamentales strictement positives</u> .

Soit K_o un corps commutatif <u>ordonné</u> , $K=K_o(\omega)$ une extension quadratique de K_o ω^2 étant égal à un élément $\alpha<0$ de K_o ; rappelons que la norme $\xi\bar{\xi}$ d'un élément $\xi\in K$ par rapport à K_o est alors >0 pour tout $\xi\neq 0$ dans K . Soit E_o un espace vectoriel de dimension n sur K_o , et soit E l'espace vectoriel de dimension n sur K , obtenu par extension à K du corps des scalaires de E_o (chap.III,§ 2). On a vu (§ 3,n°1) que toute forme <u>bilinéaire</u> symétrique f_o sur E_o se prolonge d'une seule manière en une forme <u>sesquilinéaire</u> hermitienne f sur E ; il est clair que par rapport à une même base <u>de</u> E_o (qui est aussi une base <u>de</u> E) les deux formes f_o et f ont même matrice ; en particulier , elles ont <u>même signature</u> (§ 2,n°6). Nous allons dans ce qui suit considérer les propriétés des formes sesquilinéaires hermitiennes sur E ; la relation précédente nous permettra d'en déduire les propriétés correspondantes des formes bilinéaires symétriques sur E_o .

Considérons sur E une forme hermitienne <u>fondamentale</u> (§ 3,n°1) que nous noterons $\langle x,y\rangle$; nous supposerons dans tout ce paragraphe que cette forme fondamentale est <u>strictement positive</u> (§ 2,n°6) . Tout sous-espace V de E non réduit à 0 est alors <u>non isotrope</u> ; V et le sous-espace orthogonal V° sont supplémentaires et la forme $\langle x,y\rangle$ est <u>somme directe</u> de ses restrictions à V et V° . Le composant sur V d'un vecteur $x\in E$, dans la décomposition de E en somme directe de V et V° , s'appelle encore <u>projection orthogonale</u> (ou simplement <u>projection</u> de x sur V et se désigne par $\underline{P}_V(x)$; l'application $\underline{P}_V$ est dit <u>projecteur</u> de E sur V ; $\underline{P}_V(x)$ est l'unique élément de V tel que $x-\underline{P}_V(x)$ soit <u>orthogonal à</u> V . Le fait que f soit somme directe de ses restrictions à V et V° se traduit par la relation

(1) $$\langle x,x\rangle=\langle \underline{P}_V(x),\underline{P}_V(x)\rangle+\langle \underline{P}_{V^\circ}(x),\underline{P}_{V^\circ}(x)\rangle$$

(<u>théorème de Pythagore</u>) ; on en déduit aussitôt que

(2) $$\langle \underline{P}_V(x),\underline{P}_V(x)\rangle\leq\langle x,x\rangle \;;$$

autrement dit , la carré scalaire de la projection de x sur un sous-espace V est au plus égal au carré scalaire de x , l'égalité de pouvant avoir lieu , d'après (1) , que si $x \in V$.

Cherchons en particulier la projection d'un vecteur x sur le sous-espace Ky de dimension 1 engendré par un vecteur $y \neq 0$; si λy est cette projection , $x-\lambda y$ doit être orthogonal à y , ce qui donne $\langle x,y\rangle - \bar{\lambda}\langle y,y\rangle = 0$, et par suite $\bar{\lambda} = \langle x,y\rangle / \langle y,y\rangle$. Si on écrit que $\langle \lambda y, \lambda y\rangle \leq \langle x,x\rangle$ (inégalité (2)) , il vient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle x,y\rangle \cdot \overline{\langle x,y\rangle} \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle \tag{3}$$

l'égalité n'ayant lieu que si $x \in Ky$.

Plus généralement , si f est une forme hermitienne positive sur E , on a encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$f(x,y)\overline{f(x,y)} \leq f(x,x)f(y,y) \tag{4}$$

quels que soient x et y dans E . En effet , si V est le sous-espace orthogonal à E tout entier (pour la forme f) , la forme hermitienne sur E/V déduite de f par passage aux quotients , est strictement positive , et il suffit de lui appliquer l'inégalité (3) pour obtenir (4) .

Si on considère en particulier le cas où E est de dimension 2 , on voit que la relation $a\lambda\bar{\lambda} + b\bar{\lambda}\mu + \bar{b}\lambda\bar{\mu} + c\mu\bar{\mu} \geq 0$ pour tout couple d'éléments , de K (avec $a \in K_0$, $c \in K_0$ et $b \in K$) entraîne $b\bar{b} \leq ac$; c'est ce qui résulte d'ailleurs aussi de l'identité

$$a(a\lambda\bar{\lambda} + b\bar{\lambda}\mu + \bar{b}\lambda\bar{\mu} + c\mu\bar{\mu}) = (a\lambda + b\mu)(\overline{a\lambda + b\mu}) + (ac - b\bar{b})\mu\bar{\mu} .$$

2 . Orthogonalisation d'une base .

Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base quelconque de E . On peut en déduire une base orthogonale $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ par le procédé de récurrence suivant : on prend $e_1 = a_1$; supposons ensuite déterminés $e_1, e_2, \dots, e_p$ de sorte que le sous-espace vectoriel

V_p engendré par ces vecteurs soit identique au sous-espace (de dimension p) engendré par $a_1, a_2, \ldots, a_p$; soit a'_{p+1} la projection de a_{p+1} sur V_p , et prenons $e_{p+1}=a_{p+1}-a'_{p+1}$. Il est immédiat que la base (e_i) ainsi déterminée possède les deux propriétés suivantes :

1° pour tout p tel que $1 \leq p \leq n$, le sous-espace vectoriel engendré par $a_1, a_2, \ldots, a_p$ est identique au sous-espace engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_p$;

2° on a $\langle a_p, e_p \rangle > 0$ pour tout indice p .

Inversement , on voit aussitôt , par récurrence sur p , que , pour toute base (b_i) ayant ces deux propriétés , on a $b_i=\mu_i e_i$ avec $\mu_i > 0$, pour tout indice i .

Supposons maintenant que tout carré scalaire $\langle x, x \rangle$ soit une norme d'un élément de K ; cela équivaut au fait qu'il existe une base orthonormale pour la forme fondamentale $\langle x, x \rangle$, et en outre que , dans K_0 , toute somme de normes soit une norme ; on observera que cette dernière propriété est vérifiée ~~est vérifiée~~ si K_0 est un corps ordonné pythagoricien (chap.VI, §) . On peut alors achever de déterminer la base (b_i) en lui imposant la condition d'être orthonormale; les μ_i sont alors soumis aux conditions $\mu_i \bar{\mu}_i \langle e_i, e_i \rangle = 1$, ce qui , joint aux conditions $\mu_i > 0$, les détermine entièrement ; on dit que la base (b_i) ainsi obtenue est déduite de (a_i) par orthonormalisation .

Ce résultat est équivalent au suivant :

PROPOSITION 1 .- On suppose que , dans K_0 , toute somme de normes d'éléments de K soit une norme . Si A est une matrice carrée inversible quelconque d'ordre n sur K , il existe un couple de matrices (L,U) d'ordre n , et un seul , tel que U soit une matrice unitaire , que $L=(\lambda_{ij})$ n'ait que des zéros au-dessous de sa diagonale principale et des termes diagonaux λ_{ii} appartenant à K_0 et >0 , et enfin que A=LU .

En effet , dans $E=K^n$, soit (e_i) la base canonique , a_i la colonne d'indice i de $\underline{A}$, b_i la colonne d'indice i de $\underline{U}$ pour $1\leq i\leq n$; la relation $\underline{A}=\underline{LU}$ équivaut à $a_i=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ki}b_k$, et les hypothèses sur $\underline{L}$ et $\underline{U}$ expriment simplement que pour la forme hermitienne fondamentale dont la base par rapport à (e_i) est la matrice unité , la base (b_i) est déduite de la base (a_i) par orthonormalisation .

<u>Remarque</u> .- D'après la remarque du début du n°1 , de chacune des propriétés précédentes des formes hermitiennes strictement positives ,on déduit aussitôt une propriété correspondante des formes quadratiques strictement positives : il suffit , dans tous les énoncés , de remplacer partout l'automorphisme $\xi\to\bar{\xi}$ de K par l'automorphisme identique de K_o ; la <u>norme</u> d'un élément de K est donc remplacée par le <u>carré</u> d'un élément de K_o . Pour que l'orthonormalisation d'une base quelconque de E_o soit possible , il faut et il suffit que tout carré scalaire $\langle x,x\rangle$ soit <u>carré</u> d'un élément de K_o ; il revient au même de dire qu'il existe <u>une</u> base orthonormale pour la forme fondamentale , et que K_o est un corps ordonné <u>pythagoricien</u> . Si K_o est pythagoricien , toute matrice carrée inversible $\underline{A}$ d'ordre n sur K_o se met d'une seule manière sous la forme $\underline{LU}$, où $\underline{U}$ est une matrice <u>orthogonale</u> sur K_o , et $\underline{L}$ une matrice (λ_{ij}) sur K_o , dont les termes au-dessous de la diagonale sont nuls et ~~XXX~~ dont les termes diagonaux λ_{ii} sont >0 .

<u>3 . Endomorphismes normaux</u> .

La forme fondamentale $\langle x,y\rangle$ étant toujours supposée <u>strictement positive</u> , rappelons que pour tout endomorphisme u de E , on appelle <u>adjoint</u> de u l'endomorphisme u^* défini par la relation

(5) $$\langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle$$

(§ 1,n°9) ; si (e_i) est une base <u>orthonormale</u> de E , et si $\underline{U}$ est la matrice de u par rapport à cette base , la matrice de u^* par rapport à la même base est ${}^t\underline{U}$, que l'on notera encore $\underline{U}^*$.

DÉFINITION 1 .- <u>On dit qu'un endomorphisme u de E est normal</u> (relativement à la forme fondamentale $\langle x,y\rangle$) <u>s'il est permutable avec son adjoint</u> .

On dit que la matrice $\underline{U}$ d'un endomorphisme normal u par rapport à une base <u>orthonormale</u> est une matrice <u>normale</u> ; une telle matrice est donc caractérisée par la relation $\underline{U}\underline{U}^*=\underline{U}^*\underline{U}$.

Deux types particuliers d'endomorphismes normaux sont spécialement importants :

1° les transformations <u>unitaires</u> (pour la forme fondamentale) , caractérisé pas la relation $u^*=u^{-1}$ (§ 3, n°1) ;

2° les endomorphismes u tels que $u^*=u$, qu'on appelle endomorphismes <u>hermitiens</u> ou <u>autoadjoints</u> ; par rapport à une base orthonormale , la matrice $\underline{U}$ d'un tel automorphisme est telle que $\underline{U}^*=\underline{U}$. Si u est un endomorphisme hermitien , $\langle u(x),y\rangle$ est une <u>forme sesquilinéaire hermitienne</u> , car $\langle u(y),x\rangle = \langle y,u(x)\rangle=\overline{\langle u(x),y\rangle}$. Inversement , soit f_1 une forme sesquilinéaire hermitienne <u>quelconque</u> sur E ; comme la forme fondamentale définit une dualité de E sur E^* , pour tout $x\in E$, il existe un élément $u(x)\in E$ et un seul tel que $f_1(x,y)=\langle u(x),y\rangle$ pour tout $y\in E$; on vérifie immédiatement que u est un endomorphisme de E , et la relation $f_1(y,x)=\overline{f_1(x,y)}$ entraîne $\langle u(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle$ c'est-à-dire $u^*=u$.

On dit qu'un endomorphisme hermitien u est <u>positif</u> (resp. <u>strictement positif</u>) si la forme hermitienne $\langle u(x),y\rangle$ qu'il définit est positive (resp. strictement positive) , c'est-à-dire si on a $\langle u(x),x\rangle\geqslant 0$ (resp. $\langle u(x),x\rangle>0$) pour tout $x\neq 0$.

Comme exemple d'endomorphismes hermitiens positifs , citons les <u>projecteurs</u> . En effet , comme $y-\underline{P}_V(y)$ est orthogonal à V pour tout $y\in E$

on a

$$\langle \underline{P}_V(x), y\rangle = \langle \underline{P}_V(x), \underline{P}_V(y)\rangle = \langle x, \underline{P}_V(y)\rangle$$

et

$$\langle \underline{P}_V(x), x\rangle = \langle \underline{P}_V(x), \underline{P}_V(x)\rangle \geqslant 0 \quad .$$

Ni la somme ni le produit de deux endomorphismes normaux ne sont en général des endomorphismes normaux . Toutefois , il est clair que ~~les~~ produit de deux transformations unitaires est une transformation unitaire , et que la somme de deux endomorphismes hermitiens est un endomorphisme hermitien . En outre , on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2 .- *Pour tout endomorphisme u de* E , uu^* *et* u^*u *sont des endomorphismes hermitiens positifs* .

On a en effet $(uu^*)^* = (u^*)^* u^* = uu^*$; d'autre part , pour tout $x \in E$, on a $\langle u(u^*(x)), x\rangle = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle \geqslant 0$.

4 . Forme canonique d'un endomorphisme normal .

Dans toute la suite de ce paragraphe , nous supposerons que le corps K_o est un corps ordonné maximal (chap.VI, §) ; le corps K est alors algébriquement clos (chap.VI, § , th.) , et il existe des bases orthonormales pour la forme fondamentale . Etant donné un endomorphisme u de E , nous allons nous proposer de trouver une base orthonormale de E par rapport à laquelle la matrice de u soit aussi simple que possible . Si (a_i) est une base orthonormale quelconque , $\underline{A}$ la matrice de u par rapport à cette base , (b_i) une autre base orthonormale de E , la matrice de passage (chap.II, § 6, n°9) $\underline{U}$ de (a_i) à (b_i) est une matrice unitaire (§ 3) ; la matrice de u par rapport à (b_i) est $\underline{U}^{-1}\underline{AU} = \underline{U}^*\underline{AU}$. Le problème que nous considérons paut donc encore s'énoncer en disant qu'on cherche une matrice unitaire $\underline{U}$ telle que $\underline{U}^{-1}\underline{AU}$ ait une forme aussi simple que possible .

PROPOSITION 3 .- *Pour toute matrice carrée* $\underline{A}$, *il existe une matrice unitaire*

<u>U telle que $U^{-1}AU$ soit une matrice triangulaire (λ_{ij}) , n'ayant que des zéros au-dessous de la diagonale ; les λ_{ii} sont alors les valeurs propres de A</u> .

La dernière partie de la proposition est une conséquence immédiate de la première (chap.VII,§ ,prop.). Pour démontrer celle-ci , procédons par récurrence sur n ; comme K est algébriquement clos , il existe au moins une <u>valeur propre</u> λ de l'endomorphisme u auquel correspond la matrice $\underline{A}$; soit a_1 un vecteur propre correspondant à λ , de sorte que $u(a_1)=\lambda a_1$; on peut supposer que $\langle a_1,a_1\rangle=1$ en multipliant a_1 par un scalaire convenable . Soit H l'hyperplan orthogonal à a_1 ; il est supplémentaire de Ka_1 , et pour tout $x\in E$, on peut donc écrire $u(x)=v(x)+\varphi(x)a_1$, où $v(x)\in H$ et $\varphi(x)\in K$; v est donc un endomorphisme de H . D'après l'hypothèse de récurrence , il existe une base orthonormale $(a_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ de H par rapport à laquelle la matrice de v n'a que des zéros au-dessous de la diagonale ; il est clair alors que la base $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale de E par rapport à laquelle la matrice de u n'a que des zéros au-dessous de la diagonale .

Pour les endomorphismes <u>normaux</u> , on peut aller plus loin , en raison de la proposition suivante :

PROPOSITION 4 .- <u>Soit u un endomorphisme normal de E , λ une valeur propre de u , x_0 un vecteur propre correspondant à λ . Si H est l'hyperplan orthogonal à x_0 , on a $u(H)\subset H$</u> .

Remarquons d'abord que l'on a $\langle u(x_0),x_0\rangle=\langle\lambda x_0,x_0\rangle=\langle x_0,\bar\lambda x_0\rangle=\langle x_0,u^*(x_0)\rangle$ ou encore $\langle x_0,u^*(x_0)-\bar\lambda x_0\rangle=0$, ce qui signifie que $u^*(x_0)-\bar\lambda x_0\in H$; autrement dit , on peut écrire $u^*(x_0)=\bar\lambda x_0+z$, avec $z\in H$; nous allons d'abord prouver que $z=0$. En effet , on a d'une part

$$\langle x_0,u^*(u(x_0))\rangle=\langle x_0,\lambda u^*(x_0)\rangle=\lambda\langle x_0,u^*(x_0)\rangle=\lambda\langle u(x_0),x_0\rangle=\lambda\bar\lambda\langle x_0,x_0\rangle$$

et d'autre part

$$\langle x_0, u(u^*(x_0))\rangle = \langle u^*(x_0), u^*(x_0)\rangle = \langle \bar{\lambda}x_0+z, \bar{\lambda}x_0+z\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle x_0, x_0\rangle + \langle z, z\rangle$$

Comme par hypothèse , on a $uu^*=u^*u$, on a nécessairement $\langle z,z\rangle=0$, c'est-à-dire $z=0$. Cela étant , pour tout $y\in H$, on a

$$\langle u(y), x_0\rangle = \langle y, u^*(x_0)\rangle = \bar{\lambda}\langle y, x_0\rangle = 0$$

ce qui prouve que $u(y)\in H$ et achève la démonstration .

THÉORÈME 1 .- Pour tout endomorphisme normal u de E , il existe une base orthonormale de E par rapport à laquelle la matrice de u est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de u .

En effet , soit λ_1 une valeur propre de u , a_1 un vecteur propre correspondant à λ_1 , qu'on peut supposer tel que $\langle a_1, a_1\rangle=1$. Soit H l'hyperplan orthogonal à a_1 ; en vertu de la prop.4 , la restriction de u à H est un endomorphisme de H , qui est évidemment normal . Raisonnons alors par récurrence sur n : s'il existe une base orthonormale $(a_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ de H telle que la matrice par rapport à cette base de la restriction de u à H soit diagonale , il est clair que par rapport à la base orthonormale $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, la matrice de u est diagonale .

COROLLAIRE 1 .- Pour qu'une matrice carrée $\underline{A}$ soit normale , il faut et il suffit qu'il existe une matrice unitaire $\underline{U}$ telle que $\underline{U}^{-1}\underline{A}\underline{U}$ soit une matrice diagonale .

La condition est évidemment nécessaire en vertu du th.1 ; elle est suffisante , car un endomorphisme dont la matrice $\underline{A}$ par rapport à une base orthonormale est une matrice diagonale , est permutable avec son adjoint , dont la matrice est $\bar{\underline{A}}$ par rapport à la même base .

COROLLAIRE 2 .- Les diviseurs élémentaires d'un endomorphisme normal sont simples .

Soient λ_k $(1\leqslant k\leqslant r)$ les valeurs propres distinctes d'un endomorphisme normal u , et soit n_k la multiplicité de λ_k (avec $\sum_{k=1}^{r} n_k=n$) . Pour chaque indice k , il résulte du th.1 que l'ensemble des x tels que $u(x)=\lambda_k x$ (vecteurs propres correspondant à λ_k) est un sous-espace E_k de E, de dimension n_k, que E est somme directe des E_k et que ces sous-espaces sont deux à deux orthogonaux ; nous dirons que les E_k sont les sous-espaces propres de l'endomorphisme normal u.

5. Valeurs propres des endomorphismes unitaires ou hermitiens.

Pour les endomorphismes unitaires ou hermitiens, la prop.4 se précise de la façon suivante :

PROPOSITION 5.- Soit u un endomorphisme unitaire ou hermitien de E ; si V est un sous-espace vectoriel de E tel que $u(V)\subset V$, et V^o le sous-espace de E orthogonal à V, on a aussi $u(V^o)\subset V^o$.

La proposition est évidente si u est unitaire, puisque u est alors un automorphisme de E, et que la relation $u(V)\subseteq V$ signifie $u(V)=V$. Si u est hermitien, on a par hypothèse $\langle u(x),y\rangle=0$ pour $x\in V$ et $y\in V^o$, ce qui s'écrit aussi $\langle x,u(y)\rangle=0$ et montre que $u(y)$ est orthogonal à V, donc que $u(V^o)\subset V^o$.

PROPOSITION 6.- Les valeurs propres de toute transformation unitaire sont des éléments de K de norme 1.

En effet, d'après le th.1, il existe une base orthonormale de E par rapport à laquelle une transformation unitaire u a une matrice diagonale $\underline{A}$; soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ la diagonale de $\underline{A}$; en écrivant que $\underline{A}\underline{A}^*=\underline{I}$, il vient $\lambda_i\bar{\lambda}_i=1$ pour $1\leq i\leq n$.

PROPOSITION 7.- Les valeurs propres de tout endomorphisme hermitien appartiennent à K_o.

En effet, d'après le th.1, il existe une base orthonormale de E par rapport à laquelle un endomorphisme hermitien u a une matrice diagonale $\underline{A}$; soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ la diagonale de $\underline{A}$; en écrivant que $\underline{A}=\underline{A}^*$, il vient $\lambda_i=\bar{\lambda}_i$ pour $1\leq i\leq n$

c'est-à-dire $\lambda_i \in K_o$.

Comme on l'a vu au n°3 , il y a correspondance biunivoque entre les endomorphismes hermitiens de E et les formes sesquilinéaires hermitiennes sur E . On dira que les valeurs propres d'un endomorphisme hermitien u sont les valeurs propres de la forme hermitienne $\langle u(x),y\rangle$ correspondante . Si λ_i $(1\leq i\leq n)$ sont ces valeurs propres , qui appartiennent à K_o d'après la prop.7 , le th.1 montre qu'il existe une base $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ orthonormale (pour la forme fondamentale) , par rapport à laquelle la forme $\langle u(x),y\rangle$ s'écrit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\xi}_i \eta_i$; les a_i forment donc pour cette forme une base orthogonale . On dit que les sous-espaces Ka_i sont les axes de la forme hermitienne $\langle u(x),y\rangle$; ils ne sont entièrement déterminés que si toutes les valeurs propres λ_i sont simples . Dans le cas contraire , pour chaque valeur propre α_k de multiplicité n_k , on peut prendre pour vecteurs a_i correspondant à $\lambda_i=\alpha_k$ des vecteurs formant une base orthonormale quelconque du sous-espace propre E_k de u correspondant à la valeur propre α_k .

Ces résultats peuvent encore s'exprimer comme suit : étant donnés la forme fondamentale (strictement positive) f , et deux formes hermitiennes f_1, f_2 , pour que f_2 soit transformée de f_1 par une transformation unitaire $V\in U_n(K,f)$, il faut et il suffit que les polynomes caractéristiques de f_1 et f_2 soient identiques ; on dit encore dans ce cas que f_1 et f_2 sont équivalentes par rapport au groupe unitaire .

Les valeurs propres d'une forme hermitienne peuvent se caractériser comme suit , en les supposant rangées en une suite $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ pour $1\leq i\leq n-1$:

PROPOSITION 8 .- La plus grande (resp. plus petite) valeur propre λ_1 (resp. λ_n) est égale à la plus grande (resp. plus petite) valeur de la forme

$\langle u(x),x\rangle$ *dans l'ensemble* S *des* $x\in E$ *tels que* $\langle x,x\rangle=1$. *Si* F_V *est la restriction de la forme* $\langle u(x),x\rangle$ *à un sous-espace vectoriel* V *de* E , *la valeur propre* λ_k *est la plus petite des plus grandes valeurs propres des* F_V , *lorsque* V *parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension* n-k+1 *de* E .

En effet , soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormale de E par rapport à laquelle $\langle u(x),x\rangle=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k\bar{\xi}_k$; si $\langle x,x\rangle=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\bar{\xi}_k=1$, on a donc $\langle u(x),x\rangle=\lambda_1-\sum_{k=2}^{n}(\lambda_1-\lambda_k)\xi_k\bar{\xi}_k \leq \lambda_1$, puisque par hypothèse $\lambda_k\leq\lambda_1$ pour $k>1$, et $\xi_k\bar{\xi}_k\geq 0$; en outre , on a $\langle u(a_1),a_1\rangle=\lambda_1$ et $\langle a_1,a_1\rangle=1$, ce qui démontre que λ_1 est la plus grande valeur de $\langle u(x),x\rangle$ dans S ; on montre de même que λ_n est la plus petite valeur de cette forme dans S .

Soit W_0 le sous-espace de dimension k engendré par les vecteurs $a_1,a_2,\dots,a_k$; pour tout sous-espace V de dimension n-k+1 , $V\cap W_0$ est un sous-espace de dimension ≥ 1 ; si $x\neq 0$ appartient à $V\cap W_0$, on a en ce point $\xi_h=0$ pour $h\geq k+1$, donc $\langle u(x),x\rangle=\sum_{k=1}^{k}\lambda_h\xi_h\bar{\xi}_h\geq\lambda_k\sum_{h=1}^{k}\xi_h\bar{\xi}_h=\lambda_k\langle x,x\rangle$; il en résulte que la plus grande valeur propre de la forme hermitienne F_V est $\geq\lambda_k$, en vertu de ce qui précède . D'autre part , si on prend pour V le sous-espace V_0 engendré par $a_k,a_{k+1},\dots,a_n$, on a , pour $x\in V_0$, $\langle u(x),x\rangle=\sum_{h=k}^{n}\lambda_h\xi_h\bar{\xi}_h$, donc la plus grande valeur propre de F_{V_0} est égale à λ_k , ce qui achève la démonstration .

COROLLAIRE .- *Pour qu'un endomorphisme hermitien u soit positif* (resp. *strictement positif*) , *il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres soient positives* (resp. *strictement positives*) .

En effet , pour tout $x\neq 0$ dans E , il existe $\mu\in K$ tel que $\langle\mu x,\mu x\rangle=1$; il revient donc au même de dire que la forme $\langle u(x),x\rangle$ est positive (resp. strictement positive) ou qu'elle prend des valeurs positives (resp. strictement positives) dans S .

Remarques .- 1) Si $\underline{U}$ est une matrice unitaire sur K , telle que $\underline{I}+\underline{U}$ soit inversible , la représentation paramétrique de Cayley montre qu'on peut l'écrire $\underline{U}=(\underline{I}+i\underline{S})^{-1}(\underline{I}-i\underline{S})$, où $\underline{S}$ est une matrice <u>hermitienne</u> et $i^2=-1$ (§ 2;n°2) . Inversement , pour <u>toute</u> matrice hermitienne $\underline{S}$, $\underline{I}+i\underline{S}$ est inversible ; en effet , ses valeurs propres sont $1+i\lambda_k$, où les λ_k sont les valeurs propres de $\underline{S}$; comme ces dernières appartiennent à K_o, on a $1+i\lambda_k\neq 0$, ce qui démontre notre assertion ; il en résulte que $\underline{U}=(\underline{I}+i\underline{S})^{-1}(\underline{I}-i\underline{S})$ est <u>unitaire</u> , et que les valeurs propres de $\underline{U}$ sont $(1-i\lambda_k)/(1+i\lambda_k)$.

2) Le résultat du th.1 peut encore s'exprimer de la façon suivante : si α_k $(1\leq k\leq r)$ sont les valeurs propres distinctes de l'endomorphisme normal u , et E_k le sous-espace propre de u correspondant à α_k , on a $u=\sum_{k=1}^{r}\alpha_k \underline{P}_k$, où $\underline{P}_k=\underline{P}_{E_k}$ est le <u>projecteur</u> sur le sous-espace E_k .

6 . Racine carrée d'un endomorphisme hermitien positif .

PROPOSITION 9 .- <u>Soit u un endomorphisme hermitien positif . Pour tout entier $m\geq 0$, il existe un endomorphisme hermitien positif v et un seul tel que</u> $v^m=u$.

En effet , si β_k $(1\leq k\leq r)$ sont les valeurs propres distinctes d'un tel endomorphisme v , E_k $(1\leq k\leq r)$ les sous-espaces propres correspondants , il est immédiat que les $\alpha_k=\beta_k^m$ sont distincts (puisque $\beta_k\geq 0$) , donc ce doivent être les valeurs propres de u , et les E_k les sous-espaces propres correspondants .Inversement , l'équation $\xi^n=\alpha$ a toujours une seule solution ≥ 0 dans K_o lorsque $\alpha\geq 0$ (chap.VI, §   ) ; il existe donc un endomorphisme v de E défini par les conditions $v(x)=\beta_k x$ avec $\beta_k^m=\alpha_k$, pour tout $x\in E_k$ et $1\leq k\leq r$, et il est immédiat que v est un endomorphisme hermitien positif tel que $v^m=u$.

On dit que l'endomorphisme v est la <u>racine m-ème de u</u> .

PROPOSITION 10 .- <u>Tout automorphisme u de E peut se mettre d'une manière et</u>

seule sous la forme $u=wv$, où v est un endomorphisme hermitien strictement positif, et w une transformation unitaire.

En effet (prop.2), l'endomorphisme u^*u est hermitien et strictement positif (puisqu'il est de rang n), donc (prop.9), il existe un endomorphisme hermitien strictement positif et un seul v tel que $v^2=u^*u$; on peut aussi écrire cette relation $v^*v=u^*u$, ou encore $(uv^{-1})^*=(uv^{-1})^{-1}$, ce qui prouve que $w=uv^{-1}$ est unitaire. Inversement, si $u=w_1v_1$, où v_1 est hermitien positif et w_1 unitaire, on a $(uv_1^{-1})^*=(uv_1^{-1})^{-1}$, ce qui s'écrit $v_1^*v_1=u^*u$, ou encore $v_1^2=u^*u$, puisque v_1 est hermitien ; l'unicité de v résulte donc de la prop.9.

7. Valeurs propres des endomorphismes symétriques ou orthogonaux.

Considérons maintenant les analogues des résultats qui précèdent pour les endomorphismes de l'espace E_o. L'adjoint u^* d'un tel endomorphisme u a été défini au § 1,n°9 ; si (e_i) est une base orthonormale de E_o et $\underline{U}$ la matrice de u par rapport à cette base, la matrice de u^* par rapport à la même base est cette fois ${}^t\underline{U}$. On définit encore un endomorphisme *normal* par la propriété d'être permutable à son adjoint. Une transformation *orthogonale* u est caractérisée par la propriété $u^*=u^{-1}$, donc est normale ; on appelle *symétrique* un endomorphisme u de E_o tel que $u^*=u$; les endomorphismes symétriques de E_o sont en correspondance biunivoque avec les *formes bilinéaires symétriques* sur E_o, à tout endomorphisme u de cette nature correspondant la forme symétrique $\langle u(x),y\rangle$. On dit encore qu'un endomorphisme symétrique u est *positif* (resp. *strictement positif*) si la forme bilinéaire correspondante est *positive* (resp. *strictement positive*). Tout endomorphisme u de E_o se prolonge d'une seule manière en un endomorphisme $\bar{u}$ de E ; pour que $\bar{u}$ soit normal (resp. unitaire, hermitien), il faut et il suffit que u soit normal (resp. orthogonal, symétrique).

Cela étant , les prop.2,4 et 5 restent valables quand on y remplace "unitaire" par "orthogonal" , et "hermitien" par "symétrique" . Mais le th.1 ne subsiste plus pour un endomorphisme ~~normal~~ quelconque dans E_0 , car un tel endomorphisme n'a pas nécessairement de valeurs propres dans K_0 (ce peut être le cas , par exemple , pour une transformation orthogonale) ; il en est de même à plus forte raison de la prop.3 . On a toutefois l'analogue de la prop.7 :

PROPOSITION 11 .- Pour tout endomorphisme symétrique u de E_0 , il existe une base orthonormale de E_0 par rapport à laquelle la matrice de u est une matrice diagonale , dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de u .

En effet , les valeurs propres du prolongement $\overline{u}$ de u à E sont alors dans K_0 ; le raisonnement du th.1 peut alors s'appliquer dans E_0 , d'où la proposition .

Les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique de E_0 appartenant à K_0 , les prop.8,9 et 10 sont encore valables en y remplaçant "unitaire" par "orthogonal" , et "hermitien" par "symétrique" .

8 . Réduction simultanée d'un ensemble d'endomorphismes normaux .

THÉORÈME 2 .- Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble d'endomorphismes normaux de E, deux à deux permutables , et tels que , pour tout $u \in \mathfrak{A}$, on ait $u^* \in \mathfrak{A}$. Dans ces conditions , il existe une décomposition de E en somme directe de sous-espaces E_k $(1 \leq k \leq r)$ deux à deux orthogonaux et tels que la restriction de tout $u \in \mathfrak{A}$ à E_k soit une homothétie (pour $1 \leq k \leq r$).

En d'autres termes , tous les vecteurs de E_k $(1 \leq k \leq r)$ sont vecteurs propres de chacun des $u \in \mathfrak{A}$, pour la même valeur propre (dépendant bien entendu de u).

Pour démontrer ce théorème , considérons une décomposition de E en somme directe de sous-espaces E_k ($1\leqslant k\leqslant r$) deux à deux orthogonaux et invariants par chacun des $u\in\mathfrak{A}$; et supposons en outre que parmi toutes les décompositions de E ayant ces propriétés, la décomposition formée des E_k ait le plus grand nombre r de termes possible~~s~~ ; nous allons montrer que les E_k satisfont aux conditions du théorème. Remarquons d'abord qu'en vertu de l'hypothèse, pour tout $u\in\mathfrak{A}$, on a $u^*\in\mathfrak{A}$, donc $u^*(E_k)\subset E_k$ pour $1\leqslant k\leqslant r$; il en résulte que la restriction à E_k ($1\leqslant k\leqslant r$) de chacun des endomorphismes $u\in\mathfrak{A}$ est encore un endomorphisme normal du sous-espace E_k. Cela étant, raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un indice k et un $u_o\in\mathfrak{A}$ tels que la restriction de u_o à E_k ne soit pas une homothétie. Comme cette restriction est un endomorphisme normal de E_k, il existerait en vertu du th.1 une décomposition de E_k en sous-espaces propres E'_{ik} ($1\leqslant i\leqslant s$, avec $s\geqslant 2$) de u_o, deux à deux orthogonaux. Or, soit λ_i la valeur propre de u_o correspondant à E'_{ik} ; pour tout $x\in E'_{ik}$ et tout $u\in\mathfrak{A}$, on a $u_o(u(x))=u(u_o(x))$ $=u(\lambda_i x)=\lambda_i u(x)$, et par suite $u(x)\in E'_{ik}$. Les E'_{ik} seraient donc invariants par tous les $u\in\mathfrak{A}$, et nous aurions obtenu une décomposition de E en somme directe de r+1 sous-espaces au moins, deux à deux orthogonaux et invariants par tout $u\in\mathfrak{A}$, contrairement à l'hypothèse.

Remarque.- Dans E_o, le th.2 n'est plus exact pour les endomorphismes normaux, mais il est encore valable quand on y remplace le mot "normal" par "symétrique", en raison de la prop.11.
