LIVRE VII
MESURES ET DISTRIBUTIONS
CHAPITRE II (ETAT 5)
INTEGRALES DE RADON

Rédaction n° 071

Nombre de pages : 75

Nombre de feuilles : 75

Livre VII Mesures et Distributions
Chap. II. Etat 5
Intégrales de Radon
71

A 71 2

LIVRE VII

MESURES ET DISTRIBUTIONS

CHAPITRE II (Etat 5)

INTÉGRALES DE RADON

Sommaire

LIVRE VII

MESURES ET DISTRIBUTIONS

CHAPITRE II (Etat 5)

INTÉGRALES DE RADON

------

§ 1. Intégrales de Radon sur un espace compact.

1. Définition d'une intégrale de Radon.

Soit E un espace compact. Nous désignerons par $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des applications continues de E dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On sait que $\mathcal{C}(E)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ et que, sur cet espace, $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$ est une norme, qui définit sur $\mathcal{C}(E)$ la topologie de la convergence uniforme ; en outre, muni de cette norme, $\mathcal{C}(E)$ est complet, autrement dit, est un espace de Banach (Top.gén., chap.X, §§1 et 2).

Rappelons en outre que $\mathcal{C}(E)$ est une algèbre commutative sur $\mathbb{C}$ (le produit fg étant l'application $x \rightarrow f(x)g(x)$), et que la topologie définie ci-dessus est compatible avec cette structure d'algèbre : de façon précise, on a l'inégalité $\|fg\| \leqslant \|f\| . \|g\|$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$, nous désignerons par $\bar{f}$ l'application $x \rightarrow \overline{f(x)}$ (fonction complexe conjuguée de f). On a $\|\bar{f}\| = \|f\|$; l'application $f \rightarrow \bar{f}$ est donc un automorphisme involutif de l'algèbre normée $\mathcal{C}(E)$.

Nous désignerons par $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ la partie de $\mathcal{C}(E)$ formée des fonctions à valeurs réelles (finies), continues dans E . Si on munit $\mathcal{C}(E)$ de sa structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$, obtenue par restriction à $\mathbb{R}$ du corps des scalaires, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ est une sous-algèbre fermée de l'algèbre $\mathcal{C}(E)$ (sur $\mathbb{R}$).

DÉFINITION 1.- <u>On appelle intégrale de Radon sur un espace compact</u> E <u>toute forme linéaire continue sur l'espace de Banach</u> $\mathcal{C}(E)$.

Il revient au même (Top.gén., chap.IX, §3,th.1) de dire qu'une intégrale de Radon est une application $f \longrightarrow \mu(f)$ de $\mathcal{C}(E)$ dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, satisfaisant aux conditions suivantes :

(IR_I) $\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g)$ <u>quelles que soient les fonctions</u> $f \in \mathcal{C}(E)$ <u>et</u> $g \in \mathcal{C}(E)$;

(IR_{II}) $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f)$ <u>quels que soient</u> $\alpha \in \mathbb{C}$ <u>et</u> $f \in \mathcal{C}(E)$;

(IR_{III}) <u>il existe un nombre fini</u> $M \geqslant 0$ <u>tel que</u>

(1) $$|\mu(f)| \leqslant M \, \|f\|$$

<u>pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}(E)$.

La valeur d'une intégrale de Radon μ pour une fonction $f \in \mathcal{C}(E)$ se note, conformément aux notations générales, $\mu(f)$ ou $\langle f, \mu \rangle$; il est d'usage d'employer aussi la notation $\int f \, d\mu$ ou $\int f(x) \, d\mu(x)$; dans cette dernière notation, x est une variable <u>liée</u> (<u>Ens</u>.,chap. II, §1) et peut donc être remplacée par tout autre argument distinct des arguments qui entrent dans la démonstration où figure le "symbole fonctionnel" $\int f(x) d\mu(x)$, sans changer le sens de ce symbole (cf. <u>Fonct.var.réelle</u>, chap.II, §1,n°4).

<u>Remarques</u>.- 1) On emploie souvent le terme "<u>mesure de Radon</u>" comme synonyme d'"<u>intégrale de Radon</u>" ; nous reviendrons au chap.III sur les conditions d'emploi de cette terminologie.

2) Comme nous le verrons au §3, on est parfois conduit à noter une intégrale de Radon par plusieurs signes $\int$ juxtaposés, & à écrire par exemple $\iiint f(x) d\mu(x)$ au lieu de $\int f(x) d\mu(x)$.

Nous désignerons par $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des intégrales de Radon un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, qui n'est autre que sur E : c'est le <u>dual</u> de l'espace de Banach $\mathcal{C}(E)$ (<u>Esp.vect.top</u>., chap.I, §).

2. Exemples d'intégrales de Radon.

I. Soit E un espace compact, a un point de E ; il est clair que l'application $f \to f(a)$ est une intégrale de Radon sur E . Pour des raisons qui apparaîtront plus loin (§ 2,n°7), on dit que cette intégrale est définie par la masse unité placée au point a et on la note souvent par le symbole ε_a . On a donc, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$

$$\varepsilon_a(f) = \langle f, \varepsilon_a \rangle = f(a) \tag{2}$$

ou encore

$$\int f(x)d\varepsilon_a(x) = f(a). \tag{3}$$

II. Plus généralement, considérons une suite (finie ou infinie) $(a_n)_{n \in I}$ de points de E , et associons à chaque point a_n un nombre complexe α_n tel que $\sum_{n \in I} |\alpha_n| < +\infty$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$, la somme

$$\mu(f) = \sum_{n \in I} f(a_n)\alpha_n \tag{4}$$

a un sens, puisque, f étant continue, la suite $(|f(a_n)|)$ est bornée par le nombre $\|f\|$. Il est clair que μ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(E)$; elle est continue, car on a

$$|\mu(f)| \leqslant \sum_{n \in I} |f(a_n)| . |\alpha_n| \leqslant \|f\| . \sum_n |\alpha_n|$$

C'est donc une intégrale de Radon ; on dit qu'elle est définie par les masses α_n placées aux points $a_n \in E$.

III. Désignons par E l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$; c'est un espace compact ; pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$, nous avons défini l'intégrale (Fonct.var.réelle, chap.II, §1,n°4)

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx \quad . \tag{5}$$

C'est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(E)$, qui est continue car, en vertu du théorème de la moyenne, on a $|I(f)| \leqslant \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| = \|f\|$; donc $f \to I(f)$ est une intégrale de Radon sur E .

Le nom d'"intégrale de Radon" est évidemment une extension de la terminologie introduite pour ce cas particulier.

IV. Soit U le cercle unité $|z| = 1$ dans le corps $\mathbb{C}$; pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(U)$, le nombre complexe

$$\mu(f) = i\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$$

est défini, et l'application $f \rightarrow \mu(f)$ est continue dans $\mathcal{C}(E)$, car on a $|\mu(f)| \leqslant 2\pi \|f\|$ d'après le th. de la moyenne ; μ est donc une intégrale de Radon sur U ; on écrit encore $\mu(f) = \int_U f(z)dz$.

V. Soit μ une intégrale de Radon sur un espace compact E . Pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(E)$, l'application

$$f \rightarrow \mu(fg) = \int f(x)g(x)d\mu(x)$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(E)$; elle est continue sur $\mathcal{C}(E)$, puisque l'on a, d'après (1)

$$|\langle fg, \mu\rangle| \leqslant M\|fg\| \leqslant M.\|g\|.\|f\| .$$

C'est donc une intégrale de Radon que nous désignerons par la notation $g.\mu$, et appellerons <u>produit de la mesure de Radon</u> μ <u>par la fonction</u> g ; on dit encore que $g.\mu$ est <u>la mesure possèdant la densité</u> g <u>par rapport à</u> μ (cf. chap.IV) .

Bien entendu, on aura soin de ne pas confondre le nombre $(g.\mu)(f) = \langle f, g.\mu\rangle = \langle fg, \mu\rangle = \mu(fg)$ avec la fonction $x \rightarrow \mu(f)g(x)$ produit de la fonction g et du nombre $\mu(f)$. Pour éviter cette confusion, au lieu d'écrire $\nu = g.\mu$, on écrit souvent cette relation sous la forme "symbolique"

$$d\nu(x) = g(x)d\mu(x) .$$

On a évidemment $g.(\mu_1 + \mu_2) = g.\mu_1 + g.\mu_2$, $(g_1+g_2).\mu = g_1.\mu + g_2\mu$, et $(g_1g_2).\mu = g_1.(g_2.\mu)$; autrement dit, muni de la loi de composition externe $(g,\mu) \rightarrow g.\mu$, l'ensemble $\mathcal{M}(E)$ est un <u>module</u> sur l'anneau $\mathcal{C}(E)$.

VI. L'intégrale $I(f)$ étant définie par la formule (5) sur l'espace compact $E=[0,1]$, pour toute fonction complexe g <u>règlée</u> dans I (<u>Fonct. var.réelle</u>, chap.II, § 1, n°3) et toute fonction continue $f \in \mathcal{C}(E)$, la fonction fg est règlée, et on a

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leqslant \|f\| \cdot \int_0^1 |g(x)|dx$$

Il en résulte que l'application $f \to I(fg) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ définit une intégrale de Radon sur I, qu'on note encore $g.I$.

Pour éviter les confusions signalées plus haut, on écrit aussi, au lieu de $\mu = g.I$

$$d\mu(x) = g(x)dx .$$

Nous généraliserons au chap.IV le procédé de formation de nouvelles mesures de Radon utilisé dans les deux derniers exemples.

3. <u>Définition d'une intégrale sur un ensemble total.</u>

Soit H un ensemble <u>total</u> dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(E)$, c'est-à-dire (<u>Esp.vect.top.</u>, chap.I, §) un ensemble tel que le sous-espace vectoriel V engendré par H soit <u>partout dense</u> dans $\mathcal{C}(E)$ (ou, en d'autres termes, tel que toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$ puisse être <u>approchée uniformément</u> par des combinaisons linéaires (à coefficients complexes) de fonctions appartenant à H (<u>Top.gén.</u>, chap.X, 5)). Pour qu'une forme linéaire λ définie dans V se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(E)$, c'est-à-dire en une intégrale de Radon, il faut et il suffit qu'elle soit <u>continue</u> dans V, et son prolongement à $\mathcal{C}(E)$ est alors <u>unique</u> (<u>Esp. vect.top.</u>, chap.I, §). En particulier :

PROPOSITION 1.- <u>Soit H un ensemble total dans l'espace de Banach</u> $\mathcal{C}(E)$; <u>si</u> μ <u>et</u> ν <u>sont deux intégrales de Radon telles que</u> $\mu(f) = \nu(f)$ <u>pour toute fonction</u> $f \in H$, <u>on a</u> $\mu = \nu$.

COROLLAIRE.- _Pour qu'une intégrale de Radon_ μ _sur_ E _soit nulle, il faut et il suffit que l'on ait_ $\int f\, d\mu = 0$ _pour toute fonction_ f _d'un ensemble total dans_ $\mathcal{C}(E)$.

Exemples.- 1) Soit $E = [0,1]$; les monômes x^n (n entier $\geqslant 0$) forment un ensemble total dans $\mathcal{C}(E)$, en vertu du th. de Weierstrass (_Top.gén._, chap.X, §5,th.2). Il en résulte qu'il existe _au plus une_ intégrale de Radon μ pour laquelle les nombres $c_n = \int x^n d\mu(x)$ ont des valeurs données. Ces nombres sont appelés les _moments_ de la mesure μ ; la recherche des conditions que doit satisfaire une suite (c_n) de nombres complexes pour que les c_n soient les moments d'une mesure de Radon sur E est connue sous le nom de "problème des moments" .

2) Prenons pour E le cercle unité $\mathbb{U}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ identifié au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Les fonctions z^n (n entier positif ou négatif) forment un ensemble total dans $\mathcal{C}(E)$ (Top.gén.,chap.X, § 5,prop.8). Il existe donc encore _au plus une_ mesure de Radon μ sur E pour laquelle les nombres $c_n = \int z^n d\mu(z)$ ($n \in \mathbb{Z}$) aient des valeurs données. On dit que les c_n sont les _coefficients de Fourier_ de la mesure μ ; les conditions que doit satisfaire une suite de nombres (c_n) pour être la suite des coefficients d'une mesure de Radon sur $\mathbb{U}$ s'obtiennent par la théorie de la _transformation de Fourier_ (cf. chap.VI) .

4. Intégrales réelles.

DÉFINITION 2.- _On dit qu'une intégrale de Radon_ μ _sur un espace compact_ E _est réelle si, pour toute fonction réelle_ $f \in \mathcal{C}(E)$, _le nombre_ $\mu(f)$ _est réel_.

Par exemple, une intégrale définie par des masses α_n réelles placées en des points a_n de E (n°2, exemple II) est réelle.

Pour toute intégrale de Radon (complexe) μ sur E , posons , pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$

(6) $$\overline{\mu}(f) = \overline{\mu(\overline{f})}$$

Il est clair que l'application $f \longrightarrow \overline{\mu}(f)$ est une intégrale de Radon sur E , qu'on appelle l'intégrale complexe <u>conjuguée</u> de μ . On a $\overline{\overline{\mu}} = \mu$.

PROPOSITION 2.- <u>Toute intégrale de Radon μ sur un espace compact E peut s'écrire d'une seule manière sous la forme</u>

(7) $$\mu = \mu_1 + i\mu_2$$

<u>où $\mu_1 = \frac{1}{2}(\mu+\overline{\mu})$, $\mu_2 = \frac{1}{2i}(\mu-\overline{\mu})$ sont des intégrales réelles. En outre, pour que μ soit une intégrale réelle, il faut et il suffit que $\mu = \overline{\mu}$.</u>

La seconde partie de la proposition résulte aussitôt de la déf.2 ; elle entraîne donc que μ_1 et μ_2 sont réelles pour toute intégrale de Radon μ . D'ailleurs, si λ_1, λ_2 sont deux intégrales réelles telles que $\mu = \lambda_1 + i\lambda_2$, on en tire $\overline{\mu} = \lambda_1 - i\lambda_2$, d'où $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2$.

On dit que μ_1 et μ_2 sont les <u>parties réelle et imaginaire de</u> μ .

<u>Exemple</u>.- Si μ est définie par la masse α placée en un point a , $\overline{\mu}$ est définie par la masse $\overline{\alpha}$ placée au point a , μ_1 et μ_2 par les masses $\mathcal{R}(\alpha)$ et $\mathcal{I}(\alpha)$ placées en a , ce qui justifie la terminologie introduite ci-dessus.

<u>Remarque</u>.- Si μ est une intégrale de Radon réelle sur E , sa <u>restriction</u> à l'espace de Banach $\mathcal{C}_R(E)$ est une forme linéaire réelle et continue sur cet espace. Réciproquement, soit μ une fofme linéaire réelle et continue sur $\mathcal{C}_R(E)$; on prolonge

<u>d'une seule manière</u> μ en une forme linéaire (complexe) sur $\mathscr{C}(E)$ (qu'on notera encore μ) en posant $\mu(g+ih)=\mu(g)+i\,\mu(h)$ pour tout couple de fonctions continues réelles g,h définies dans E. En outre, comme il existe $M \geqslant 0$ tel que $|\mu(f)| \leqslant M.\|f\|$ pour toute fonction continue réelle f, on a $|\mu(g+ih)| \leqslant |\mu(g)| + |\mu(h)| \leqslant M(\|g\|+\|h\|) \leqslant 2M.\|g+ih\|$, la forme linéaire μ ainsi prolongée est <u>continue</u> dans $\mathscr{C}(E)$; en d'autres termes, c'est une intégrale de Radon <u>réelle</u>. On obtient ainsi une application linéaire biunivoque de l'espace $\mathscr{M}_{R}(E)$ des intégrales de Radon réelles définies sur E, <u>sur</u> le dual de l'espace de Banach (réel) $\mathscr{C}_{R}(E)$.

5. Intégrales positives.

L'espace vectoriel $\mathscr{C}_{R}(E)$ des fonctions continues réelles définies dans un espace compact E est un <u>espace de Riesz</u> pour la relation d'ordre $f \leqslant g$ (équivalente par définition à "quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$) (chap.I, § 1). Nous dirons qu'une intégrale de Radon réelle μ sur E est <u>positive</u> si sa restriction à $\mathscr{C}_{R}(E)$ est une <u>forme linéaire positive</u> sur l'espace de Riesz $\mathscr{C}_{R}(E)$: il revient au même de dire que, pour toute fonction continue réelle $f \geqslant 0$ dans E, on a $\mu(f) \geqslant 0$.

THÉORÈME 1.-<u>Soit</u> E <u>un espace compact. Pour qu'une forme linéaire</u> μ <u>sur l'espace de Riesz</u> $\mathscr{C}_{R}(E)$ <u>soit différence de deux formes linéaires positives</u> (autrement dit, soit <u>relativement bornée</u> (chap.I, § 2)), <u>il faut et il suffit que</u> μ <u>soit la restriction à</u> $\mathscr{C}_{R}(E)$ <u>d'une intégrale de Radon réelle</u>.

En effet, la relation d'ordre $|f| \leqslant 1$ dans $\mathscr{C}_{R}(E)$ est équivalente à $\|f\| \leqslant 1$. Si μ est relativement bornée, il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que $|\mu(f)| \leqslant M$ pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_{R}(E)$

telle que $|f| \leqslant 1$; cela signifie que μ est bornée dans la boule $\|f\| \leqslant 1$ de l'espace de Banach $\mathcal{C}_R(E)$, donc qu'elle est continue.

Inversement, si μ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_R(E)$, il existe $M \geqslant 0$ tel que $|\mu(f)| \leqslant M\|f\|$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_R(E)$; comme la relation $0 \leqslant g \leqslant f$ dans $\mathcal{C}_R(E)$ entraîne $\|g\| \leqslant \|f\|$, elle entraîne $|\mu(g)| \leqslant M\|g\| \leqslant M\|f\|$, ce qui montre que μ est relativement bornée.

COROLLAIRE.- <u>Toute forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_R(E)$ est continue</u>.

<u>Remarque</u>.- Soit V un sous-espace vectoriel <u>partout dense</u> de $\mathcal{C}_R(E)$, et soit μ une forme linéaire <u>positive</u> dans V ; montrons que μ est <u>continue dans</u> V , et par suite peut être prolongée d'une seule manière en une intégrale de Radon positive sur E . En effet, il existe une fonction $f_0 \in V$ telle que $\|1-f_0\| \leqslant \frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{2} \leqslant f_0$ dans $\mathcal{C}_R(E)$. Il en résulte que si $f \in V$, la relation $\|f\| \leqslant 1$ entraîne $|f| \leqslant 2f_0$; on en déduit comme dans la démonstration du th.1 que μ est continue dans V .

L'espace $\mathcal{M}_R(E)$ des intégrales de Radon <u>réelles</u> sur E est donc en correspondance biunivoque avec l'espace des formes linéaires relativement bornées sur $\mathcal{C}_R(E)$. On peut par suite définir sur cet espace une <u>relation d'ordre</u> $\mu \leqslant \nu$, qui équivaut à la relation "pour toute fonction continue réelle $f \geqslant 0$, $\mu(f) \leqslant \nu(f)$" , et signifie que $\nu - \mu$ est une intégrale de Radon <u>positive</u>.

THÉORÈME 2.- <u>L'espace $\mathcal{M}_R(E)$ des intégrales de Radon réelles sur un espace compact E est absolument réticulé</u>.

D'après ce qui précède, ce th. n'est autre que le th.2 du chap.I § 2 .

Conformément aux notations du chap.I, on posera, pour toute intégrale de Radon <u>réelle</u> μ sur E

$\mu^+ = \sup(\mu, 0)$, $\mu^- = \sup(-\mu, 0)$, $|\mu| = \sup(\mu, -\mu)$

Rappelons que l'on a, pour toute fonction <u>positive</u> $f \in \mathcal{C}_R(E)$

$$\int f\, d\mu^+ = \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \in \mathcal{C}_R(E)}} \int g\, d\mu \tag{6}$$

et que les intégrales μ, μ^+, μ^- et $|\mu|$ sont liées par les relations $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. En outre, on a $\inf(\mu^+, \mu^-) = 0$.

Soit maintenant μ une intégrale de Radon <u>complexe</u> quelconque sur E , et soit $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont réelles ; d'après ce qui précède, on peut écrire $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$, ce qui montre que μ est combinaison linéaire de quatre intégrales de Radon <u>positives</u>. Comme μ_1 et μ_2 sont relativement bornées dans $\mathcal{C}_R(E)$, on peut définir l'intégrale ~~positive~~ de Radon positive $\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$, qu'on notera $|\mu|$ par la condition

$$|\mu|(f) = \sup_{\mathfrak{P}(f)} \sum_i |\mu(f_i)| \tag{7}$$

pour toute fonction <u>positive</u> $f \in \mathcal{C}_R(E)$, la suite (f_i) parcourant l'ensemble $\mathfrak{P}(f)$ des "partitions" de f (chap.I, § 2), c'est-à-dire l'ensemble des suites de fonctions $\geqslant 0$ de $\mathcal{C}_R(E)$ telles que $\sum_i f_i = f$. Si μ est <u>réelle,</u> cette définition coïncide avec la définition de $|\mu|$ donnée ci-dessus. Il est clair que si μ et ν sont deux mesures de Radon quelconques, on a $|\mu + \nu| \leqslant |\mu| + |\nu|$ et, pour tout nombre complexe α , $|\alpha\mu| = |\alpha| . |\mu|$; enfin, on a $|\bar{\mu}| = |\mu|$, d'après (7).

PROPOSITION 3.- <u>Soit μ une intégrale de Radon sur un espace compact</u> E . <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}(E)$, <u>on a</u>

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leqslant \int |f| .\, d|\mu| \tag{8}$$

Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un recouvrement ouvert fini (A_k) de E tel que l'oscillatio[n] de f dans chacun des ensembles A_k soit $\leqslant \varepsilon$. Soit (g_k) une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement (A_k) (Top.gén.,chap.IX, § 4, prop.4). Soit x_k un point quelconque de A_k ; on a

$$\left| f(x)g_k(x)-f(x_k)g_k(x) \right| \leqslant \varepsilon \; g_k(x)$$

pour tout $x \in E$, et comme $f = \sum_k fg_k$

$$\left| f(x)- \sum_k f(x_k)g_k(x) \right| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $x \in E$. Par suite, on a

$$\left| \mu(f)- \sum_k f(x_k)\mu(g_k) \right| \leqslant a.\varepsilon$$

et le même raisonnement, appliqué à $|f|$ et $|\mu|$, donne

$$\left| \, |\mu|(|f|)- \sum_k |f(x_k)| . |\mu|(g_k) \right| \leqslant b.\varepsilon$$

(a et b constantes indépendantes de f et de ε). Comme les fonctions g_k sont $\geqslant 0$, on a $|\mu(g_k)| \leqslant |\mu|(g_k)$, et par suite

$$\left| \sum_k f(x_k)\mu(g_k) \right| \leqslant \sum_k |f(x_k)| . |\mu(g_k)| \leqslant \sum_k |f(x_k)| . |\mu|(g_k)$$

d'où

$$|\mu(f)| \leqslant |\mu|(|f|) + (a+b)\varepsilon$$

et comme ε est arbitraire, l'inégalité (8) est démontrée.

6. <u>Norme d'une intégrale de Radon</u>. <u>Topologie forte et topologie vague sur l'espace des intégrales de Radon</u>.

L'espace $\mathcal{M}(E)$ des intégrales de Radon sur un espace compact E étant le <u>dual</u> de l'espace de Banach $\mathcal{C}(E)$, on sait (<u>Esp.vect.top</u>. chap.III) qu'on définit sur $\mathcal{M}(E)$ une <u>norme</u> $\|\mu\|$; c'est le plus petit nombre $a \geqslant 0$ tel que $|\mu(f)| \leqslant a . \|f\|$ pour <u>toute</u> fonction $f \in \mathcal{C}(E)$; on peut aussi écrire $\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\mu(f)|$.

PROPOSITION 4.- <u>Pour toute intégrale de Radon</u> μ <u>sur un espace compact E , on a</u> $\|\mu\| = |\mu|(1) = \int d|\mu|$.

En effet, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$, on a $|f(t)| \leqslant \|f\|$ par définition pour tout $t \in E$, d'où, en vertu de la prop.3

$$|\mu(f)| \leqslant |\mu|(|f|) \leqslant \|f\| \cdot |\mu|(1)$$

ce qui prouve que l'on a $\|\mu\| \leqslant |\mu|(1)$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition continue (g_k) de l'unité telle que $|\mu|(1) \leqslant \sum_k |\mu(g_k)| + \varepsilon$ d'après la formule (7). Soit θ_k l'amplitude du nombre complexe $\mu(g_k)$ (comprise entre $-\pi$ et $+\pi$), et considérons la fonction $f = \sum_k e^{-i\theta_k} . g_k$; on a $\sum_k |\mu(g_k)| = \mu(f)$; d'autre part $|f| \leqslant \sum_k g_k = 1$, et par suite $\|f\| \leqslant 1$; on a donc $|\mu|(1) \leqslant \|\mu\| + \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, la proposition est démontrée.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> μ <u>est une intégrale de Radon réelle sur</u> E , <u>on a</u> $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$.

En effet $|\mu|(1) = \mu^+(1) + \mu^-(1) = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$.

Pour toute intégrale de Radon μ sur E , le nombre (complexe) $\mu(1)$ est appelé la <u>masse totale</u> de μ ; lorsque μ est une intégrale de Radon <u>positive</u>, sa masse totale est donc égale à sa norme. Une intégrale de Radon <u>positive</u> et de masse totale <u>égale à 1</u> est encore appelée une moyenne.

> Par exemple pour une intégrale μ définie par les masses α_n placées aux points a_n , la masse totale est $\mu(1) = \sum_n \alpha_n$, la norme $\|\mu\| = \sum_n |\alpha_n|$.

On sait que le dual $\mathcal{M}(E)$ de $\mathcal{C}(E)$, muni de la norme $\|\mu\|$, est un <u>espace de Banach</u> (<u>Esp.vect.top</u>.,chap.III) ; en outre, à côté de la topologie définie par cette norme, et appelée topologie <u>forte</u>, on sait qu'on considère aussi sur $\mathcal{M}(E)$ la topologie de la convergence <u>simple</u> dans $\mathcal{C}(E)$, qui est donc définie par les semi-normes $\mu \longrightarrow \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\mu(f_i)|$, où $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une suite finie quelconque de fonctions appartenant à $\mathcal{C}(E)$. Cette topologie (<u>moins fine</u> que la topologie forte) est ce que nous avons appelé en général la la topologie faible sur le dual d'un espace de Banach ; pour éviter des confusions, nous donnerons à cette topologie, sur l'espace particulier $\mathcal{M}(E)$ des intégrales de Radon, le nom de topologie vague. Dire qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{M}(E)$ converge pour cette topologie vers μ_0 (ou, comme nous dirons encore, converge vaguement vers μ_0) signifie donc que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$, on a $\mu_0(f) = \lim_{\mathfrak{F}} \mu(f)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$, l'application $\mu \to \mu(f)$ est une forme linéaire vaguement continue (et a fortiori fortement continue) sur l'espace $\mathcal{M}(E)$.

PROPOSITION 6.- Dans l'espace $\mathcal{M}(E)$ des intégrales de Radon sur un espace compact E, l'ensemble des intégrales réelles est vaguement fermé ; l'ensemble des intégrales positives est complet pour la structure uniforme déduite de la topologie vague.

La première partie de la proposition résulte de ce que $\mu \to \mu(f)$ est vaguement continue pour toute $f \in \mathcal{C}(E)$, et que l'ensemble des intégrales réelles est caractérisé par les relations $\mu(f) = \overline{\mu(\bar{f})}$ pour toute $f \in \mathcal{C}(E)$. D'autre part, considérons un filtre de Cauchy Φ pour la structure uniforme vague sur l'ensemble $\mathcal{M}_+(E)$ des intégrales de Radon positives ; par définition, $\mu_0(f) = \lim_{\Phi} \mu(f)$ existe pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$, et en vertu du principe de prolongement des inégalités, on a $\mu_0(f) \geqslant 0$ pour toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathcal{C}(E)$; μ_0 est donc une forme linéaire sur $\mathcal{C}(E)$ dont la restriction à l'espace de Riesz $\mathcal{C}_R(E)$ est une forme linéaire positive ; il en résulte (cor. du th.1) que μ_0 est une intégrale de Radon positive, ce qui démontre la proposition.

On notera au contraire que l'ensemble $\mathcal{M}_R(E)$ des intégrales réelles de signe quelconque n'est pas complet en général pour la structure uniforme vague (car le dual d'un espace de Banach n'est pas complet en général pour la topologie faible).

PROPOSITION 6.- Dans l'espace $\mathcal{M}(E)$ des intégrales de Radon sur un espace compact E, l'ensemble des intégrales de norme $\leqslant 1$ est vaguement compact.

Ce résultat n'est autre que la traduction du théorème général suivant lequel toute boule fermée dans le dual d'un espace de Banach est faiblement compacte (Esp.vect.top., chap.III).

COROLLAIRE 1.- L'ensemble des intégrales réelles (resp. positives) de norme $\leqslant 1$ est vaguement compact.

C'est une conséquence immédiate des prop.5 et 6.

COROLLAIRE 2.- L'ensemble des intégrales positives de norme (ou masse totale) égale à 1, est vaguement compact.

En effet c'est l'intersection de l'ensemble des intégrales positives de norme $\leqslant 1$, et de l'hyperplan fermé d'équation $\mu(1)=1$.

Par contre, on notera que l'ensemble des intégrales réelles (de signe quelconque) de masse totale 1, n'est pas vaguement compact en général.

PROPOSITION 7.- Soit E un espace compact, et pour tout $x \in E$, soit ε_x l'intégrale de Radon définie par la masse 1 placée au point x. L'application $x \longrightarrow \varepsilon_x$ est un homéomorphisme de E dans l'espace $\mathcal{M}(E)$ des mesures de Radon, muni de la topologie vague.

En effet, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$, on a $\langle f, \varepsilon_x - \varepsilon_y \rangle = f(x) - f(y)$ ce qui, en vertu de la continuité de f, démontre que l'application $x \rightarrow \varepsilon_x$ est continue. D'autre part, cette application est biunivoque ;

en effet, si x et y sont deux points distincts de E , il existe une fonction continue $f \in \mathcal{C}(E)$ telle que $f(x) \neq f(y)$ (Top.gén., chap.IX, § 1, th.2) ; on a donc $\langle f, \varepsilon_x - \varepsilon_y \rangle \neq 0$, ce qui montre que $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$. Comme E est compact, l'application continue biunivoque $x \to \varepsilon_x$ de E dans $\mathcal{M}(E)$ est un homéomorphisme (Top.gén., chap.I, § 10, th.1).

§ 2. Intégrales de Radon sur un espace localement compact.

1. L'espace $\mathcal{K}(E)$.

Etant donné un espace localement compact E , nous désignerons encore par $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des applications continues de E dans $\mathbb{C}$, par $\mathcal{C}^*(E)$ l'ensemble des applications continues bornées de E dans $\mathbb{C}$. On sait que $\mathcal{C}(E)$ et $\mathcal{C}^*(E)$ sont des algèbres commutatives sur $\mathbb{C}$; lorsqu'on les munit de la structure de la convergence uniforme dans E (ou de la structure de la convergence compacte), ce sont des espaces complets ; en outre, sur $\mathcal{C}^*(E)$, la topologie de la convergence uniforme est compatible avec la structure d'algèbre de $\mathcal{C}^*(E)$; de façon précise, sur $\mathcal{C}^*(E)$, cette topologie est définie par la norme $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$, et on a la relation $\|fg\| \leq \|f\| . \|g\|$; l'application $f \to \bar{f}$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{C}(E)$ et de $\mathcal{C}^*(E)$; en outre, pour $f \in \mathcal{C}^*(E)$ on a $\|\bar{f}\| = \|f\|$ (Top.gén., chap.X, § 2).

Etant donnée une application f de E dans un espace vectoriel F , on appelle support de f le plus petit ensemble fermé S dans E , tel que $f(x)=0$ dans le complémentaire de S (en d'autres termes, S est l'adhérence dans E de l'ensemble des $x \in E$ où $f(x) \neq 0$) . Nous désignerons par $\mathcal{K}(E)$ la partie de $\mathcal{C}^*(E)$ formée des fonctions continues (à valeurs dans $\mathbb{C}$) à support compact : une fonction f de $\mathcal{K}(E)$ peut donc encore être caractérisée comme une fonction continue telle que l'ensemble des $x \in E$ où $f(x) \neq 0$ soit un ensemble ouvert relativement compact.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1.- Soient E un espace localement compact, K une partie compacte de E, U un voisinage de K dans E, $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un recouvrement ouvert fini de K. Alors il existe n applications continues f_k de E dans $[0,1]$, telles que $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=1$ dans K, et que le support de f_k soit contenu dans $A_k \cap U$.

En effet, il existe un voisinage ouvert relativement compact V de K, car tout point de K admet un voisinage ouvert relativement compact et il existe un recouvrement de K formé d'un nombre fini de ces voisinages, dont la réunion V répond à la question. En remplaçant U par $U \cap V$, et A_k par $A_k \cap U \cap V$, on peut donc supposer que U est relativement compact et $A_k \subset U$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. L'espace $\overline{U}$ étant normal (Top.gén., chap.IX, § 4, prop.1), il existe n applications continues g_k de $\overline{U}$ dans $[0,1]$, telles que $\sum_{k=1}^{n} g_k(x)=1$ dans K, et que le support de g_k soit contenu dans A_k (Top.gén., chap.IX, § 4, cor. de la prop.4) ; on a en particulier $g_k(x)=0$ en tout point frontière de U, et par suite, si f_k est le prolongement de g_k à E obtenu en prenant $f_k(x)=0$ dans $\complement \overline{U}$, les f_k répondent à la question.

L'ensemble $\mathcal{K}(E)$ est évidemment un idéal de $\mathcal{C}(E)$, invariant par l'automorphisme $f \to \overline{f}$. Cet idéal n'est pas fermé en général dans $\mathcal{C}^*(E)$; de façon précise :

PROPOSITION 1.- Soit E un espace localement compact non compact. Si E' désigne l'espace compact obtenu en adjoignant à E un point à l'infini ω (Top.gén., chap.I, § 10, th.3), l'adhérence $\overline{\mathcal{K}}(E)$ de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathcal{C}^*(E)$ est identique à l'espace des fonctions continues dans E (à valeurs dans $\mathbb{C}$) tendant vers 0 lorsque x tend vers ω.

En effet, si f est adhérent à $\mathcal{K}(E)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{K}(E)$ telle que $\|f-g\| \leq \varepsilon$; si K est le support de g, on a donc $|f(x)-g(x)| \leq \varepsilon$ dans $\complement K$, ce qui montre que f tend vers 0 lorsque x tend vers ω. Inversement, si f a cette propriété pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact H tel que $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \complement H$. D'après le lemme 1, il existe une application continue h de E dans $[0,1]$, à support compact, égale à 1 dans H ; on a donc $|f(x)h(x)| \leq \varepsilon$ dans $\complement H$ et $f(x)=f(x)h(x)$ dans H ; comme fh appartient à $\mathcal{K}(E)$ et $\|f-fh\| \leq \varepsilon$, la proposition est démontrée.

Bien entendu, $\overline{\mathcal{K}}(E)$ est aussi un idéal de $\mathcal{C}(E)$, invariant par l'automorphisme $f \to \overline{f}$.

Si on identifie à l'algèbre $\mathcal{C}(E')$ des applications continues de l'espace compact E' dans $\mathbb{C}$, la sous-algèbre de $\mathcal{C}^*(E)$ formée des fonctions continues <u>ayant une limite finie</u> au point ω, l'algèbre normée $\overline{\mathcal{K}}(E)$ est identifiée à la sous-algèbre de $\mathcal{C}(E')$ formée des fonctions continues <u>nulles</u> au point ω. On notera que $\overline{\mathcal{K}}(E)$ est alors un <u>idéal maximal</u> (fermé) de l'algèbre normée $\mathcal{C}(E')$; en effet, toute fonction $f \in \mathcal{C}(E')$ peut s'écrire d'une seule manière $f=a+g$, où a est constante et $g(\omega)=0$, puisque cette relation donne $a=f(\omega)$; $\mathcal{C}(E')$ est donc <u>somme directe</u> de $\overline{\mathcal{K}}(E)$ et du sous-espace des fonctions <u>constantes</u> (isomorphe à $\mathbb{C}$).

Nous désignerons par $\mathcal{C}_{R}(E)$, $\mathcal{C}^*_{R}(E)$, $\mathcal{K}_{R}(E)$, $\overline{\mathcal{K}}_{R}(E)$ les parties des ensembles $\mathcal{C}(E)$, $\mathcal{C}^*(E)$, $\mathcal{K}(E)$, $\overline{\mathcal{K}}(E)$ respectivement, formées des fonctions <u>réelles</u> appartenant à ces ensembles ; ce sont des sous-algèbres <u>fermées</u> de $\mathcal{C}(E)$.

2. Définition d'une intégrale de Radon.

Soit E un espace localement compact. Pour tout ensemble compact $K \subset E$, l'ensemble $\mathcal{K}(E,K)$ des fonctions continues dans E (à valeurs complexes) dont le support est contenu dans K (autrement dit, qui sont nulles dans $\complement K$) est un idéal fermé dans l'algèbre $\mathcal{C}(E)$. On notera qu'on ne peut avoir $\mathcal{K}(E,K) = \mathcal{K}(E)$ pour un ensemble compact K que si $K = E$, c'est-à-dire si E est compact.

> Il se peut que $\mathcal{K}(E,K)$ soit réduit à 0 : il faut et il suffit pour cela que K ne contienne aucun point intérieur (Top.gén., chap.IX, § 1,th.2).

DÉFINITION 1.- *On appelle intégrale de Radon sur un espace localement compact* E *toute forme linéaire* μ *sur l'espace vectoriel* $\mathcal{K}(E)$, *vérifiant la condition suivante* :

(IR) *Pour tout sous-ensemble compact* $K \subset E$, *la restriction de* μ *au sous-espace* $\mathcal{K}(E,K)$ *des fonctions de* $\mathcal{K}(E)$ *à support contenu dans* K, *est continue pour la topologie de la convergence uniforme dans* K.

En d'autres termes, la déf.1 signifie que, pour toute partie compacte K de E, il existe un nombre $M_K \geq 0$, ne dépendant que de K et de μ, tel que l'on ait, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ *dont le support est contenu dans* K

$$(1) \qquad \left| \mu(f) \right| \leq M_K \cdot \| f \| .$$

Cette définition coïncide bien avec la définition donnée au § 1 lorsque E est compact. Si μ est une intégrale de Radon sur un espace localement compact E, la valeur $\mu(f)$ de cette intégrale pour $f \in \mathcal{K}(E)$ se notera encore $\langle f, \mu \rangle$, ou $\int f \, d\mu$ ou $\int f(x) \, d\mu(x)$ (et parfois avec plusieurs signes $\int$ juxtaposés).

Exemples.- I. Soit E un espace localement compact, a un point quelconque de E ; l'application $f \to f(a)$ est une intégrale de Radon sur E, qu'on désigne par ε_a (intégrale définie par la <u>masse unité placée au point</u> a). Plus généralement, soit N une partie de E , telle que pour tout ensemble compact $K \subset E$, $N \cap K$ soit <u>fini</u>. Soit h une fonction quelconque, à valeurs complexes, définie dans N ; pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, la somme $\mu(f) = \sum_{x \in N} h(x)f(x)$ est définie, puisqu'elle n'a qu'un nombre fini de termes $\neq 0$, savoir ceux pour lesquels x appartient au support K de f ; en outre si $M_K = \sum_{x \in N \cap K} |h(x)|$, on a $|\mu(f)| \leq M_K . \|f\|$, ce qui prouve que μ est une intégrale de Radon. On dit que cette intégrale est définie par les <u>masses</u> h(x) <u>placées aux points</u> $x \in N$. Par exemple, si E est un espace <u>discret</u>, on peut prendre $N=E$; les fonctions de $\mathcal{K}(E)$ sont les fonctions nulles en dehors d'un nombre fini de points de E , et si on prend $h(x)=1$ pour tout $x \in E$, on a $\mu(f) = \sum_{x \in E} f(x)$.

On généralise aussitôt cet exemple au cas où N est un ensemble quelconque, h une application de N dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout ensemble compact K , $\sum_{x \in N \cap K} |h(x)|$ soit <u>fini</u>.

II. Pour toute fonction f de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, il existe un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ en dehors duquel f est nulle ; l'intégrale

(2) $$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

est donc définie ; en outre, d'après le th. de la moyenne, on a $|I(f)| \leq (b-a). \|f\|$, ce qui montre que $f \rightarrow I(f)$ est une intégrale de Radon sur $\mathbb{R}$. On donne à cette intégrale de Radon particulière le nom d'<u>intégrale de Lebesgue</u> sur $\mathbb{R}$.

III. Soit μ une intégrale de Radon sur un espace localement compact E , et soit g une fonction quelconque de $\mathcal{C}(E)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, fg appartient à $\mathcal{K}(E)$, donc l'application $f \longrightarrow \mu(fg)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{K}(E)$; en outre, pour tout ensemble compact $K \subset E$, supposons qu'on ait $|\mu(f)| \leqslant a_K . \|f\|$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ à support contenu dans K ; si $b_K = \sup_{x \in K} |g(x)|$, on aura $|\mu(fg)| \leqslant a_K b_K \|f\|$, ce qui démontre que $f \to \mu(fg)$ est une intégrale de Radon sur E . Nous la noterons encore $g.\mu$, et l'appellerons <u>produit de la mesure de Radon</u> μ <u>par la fonction</u> g , <u>ou mesure possédant la densité g par rapport à</u> μ .

Au lieu d'écrire $\nu = g.\mu$, on écrira encore cette relation sous la forme "symbolique" $d\nu(x)=g(x)d\mu(x)$.

Etant donné un espace localement compact E , nous désignerons encore par $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des intégrales de Radon définies sur E ; c'est un <u>sous-espace vectoriel</u> de l'espace de toutes les formes linéaires sur $\mathcal{K}(E)$.

On voit comme au §1,n°2, que l'ensemble $\mathcal{M}(E)$, muni de la loi $(g,\mu) \to g.\mu$, est un <u>module</u> sur l'anneau $\mathcal{C}(E)$.

3. <u>Intégrales réelles ; intégrales positives</u>.

Comme au §1,n°4, nous dirons qu'une intégrale de Radon μ sur un espace localement compact E est <u>réelle</u> si, pour toute fonction réelle $f \in \mathcal{K}(E)$, $\mu(f)$ est réel. Pour toute intégrale de Radon (complexe) μ sur E , on pose encore, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ $\overline{\mu}(f) = \overline{\mu(\overline{f})}$; $\overline{\mu}$ est une intégrale de Radon sur E , dite complexe <u>conjuguée</u> de μ . On voit aussitôt, comme dans la prop.2 du §1, que toute intégrale de Radon μ sur E peut s'écrire d'une seule manière $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, où $\mu_1 = \frac{1}{2}(\mu + \overline{\mu})$ et $\mu_2 = \frac{1}{2i}(\mu - \overline{\mu})$ sont des intégrales de Radon réelles (<u>partie réelle</u> et <u>partie imaginaire</u> de μ); pour que μ soit réelle, il faut et il suffit que $\mu = \overline{\mu}$.

Si μ est une intégrale de Radon réelle sur E , sa <u>restriction</u> à l'espace $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$ des fonctions continues numériques à support compact est une forme linéaire (réelle) sur cet espace vectoriel réel, et, pour tout ensemble compact $K \subset E$, la restriction de μ au sous-espace $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E,K)$ des fonctions continues numériques à support contenu dans K, est *continue* pour la topologie de la convertence uniforme dans K. Inversement, on voit comme au § 1, n°4 que toute forme linéaire μ sur $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$ ayant la propriété précédente se prolonge d'*une seule manière* on une intégrale de Radon sur E (qu'on notera encore μ) en posant $\mu(g+ih) = \mu(g)+i\,\mu(h)$ pour tout couple de fonctions g, h de $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$.

L'espace $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$ est un *espace de Riesz* pour la relation $f \leqslant g$. Nous dirons qu'une intégrale de Radon réelle μ sur E est *positive* si sa restriction à $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$ est une *forme linéaire positive*, c'est-à-dire si pour toute fonction continue numérique $f \geqslant 0$, à support compact, on a $\mu(f) \geqslant 0$.

THEOREME 1.- *Soit* E *un espace localement compact*. *Pour qu'une forme linéaire* μ *sur l'espace de Riesz* $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$ *soit la restriction d'une intégrale de Radon réelle sur* E, *il faut et il suffit qu'elle soit relativement bornée*.

En effet, si μ est une intégrale de Radon réelle sur E, et f une fonction $\geqslant 0$ de $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$, la relation $0 \leqslant g \leqslant f$ dans $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$ entraîne que $\|g\| \leqslant \|f\|$ et que le support de g est contenu dans le support K de f ; comme par hypothèse, il existe $M_K \geqslant 0$ tel que $|\mu(h)| \leqslant M_K \cdot \|h\|$ pour toute fonction $h \in \mathcal{K}(E)$ de support contenu dans K, on a $|\mu(g)| \leqslant M_K \cdot \|g\| \leqslant M_K \cdot \|f\|$, ce qui prouve que est relativement bornée.

Inversement, supposons que μ soit relativement bornée, et considérons un ensemble compact $K \subset E$. Soit f_0 une fonction $\geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$, égale à 1 dans K (lemme 1) ; pour les fonctions de $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$ à support contenu dans K, la relation $\|f\| \leqslant 1$ est équivalente à $|f| \leqslant f_0$;

l'hypothèse sur μ montre donc qu'il existe une constante M_K telle que $|\mu(f)| \leq M_K$ pour toute fonction f de $\mathcal{K}_R(E,K)$ de norme ≤ 1, ce qui prouve que μ est continue dans $\mathcal{K}_R(E,K)$.

COROLLAIRE.- Toute forme linéaire positive sur $\mathcal{K}_R(E)$ est la restriction d'une intégrale de Radon.

L'ensemble $\mathcal{M}_R(E)$ des intégrales de Radon réelles sur E est donc en correspondance biunivoque avec l'espace des formes linéaires relativement bornées sur $\mathcal{K}_R(E)$; on définit par suite sur cet espace une relation d'ordre $\mu \leq \nu$, équivalent à la relation "pour toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathcal{K}_R(E)$, $\mu(f) \leq \nu(f)$". Le th.2 du chap.I, § 2 se traduit donc ici de la façon suivante :

THÉORÈME 2.- L'espace $\mathcal{M}_R(E)$ des intégrales de Radon réelles sur un espace localement compact E est absolument réticulé.

Comme pour les intégrales de Radon sur un espace compact (§ 1, n°5), on peut donc définir, pour toute intégrale de Radon réelle μ, les intégrales de Radon positives $\mu^+ = \sup(\mu, 0)$, $\mu^- = \sup(-\mu, 0)$, $|\mu| = \sup(\mu, -\mu)$; on a encore $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, et pour toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathcal{K}_R(E)$, la formule

(3) $$\int f \, d\mu^+ = \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \in \mathcal{K}_R(E)}} g \, d$$

analogue à la formule (6) du § 1. Toute intégrale de Radon complexe μ est combinaison linéaire d'intégrales de Radon positives, et on définit l'intégrale de Radon positive $|\mu|$ par la condition

(4) $$|\mu|(f) = \sup_{\mathcal{P}(f)} \sum_i |\mu(f_i)|$$

pour toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathcal{K}_R(E)$; lorsque μ est réelle, cette définition de $|\mu|$ coïncide avec la précédente. On a encore les relations $|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$, et, pour toute nombre complexe α, $|\alpha\mu| = |\alpha| . |\mu|$; enfin, on a $|\bar{\mu}| = |\mu|$.

PROPOSITION 2.- <u>Soit</u> μ <u>une intégrale de Radon sur un espace localement compact</u> E . <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}(E)$, <u>on a</u>

(5) $$\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \int |f| . \, d|\mu| \quad .$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle de la prop.3 du § 1: si K est le support de f , V un voisinage compact de K , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement ouvert fini (A_k) de K dont les ensembles sont contenus dans V et sont tels que l'oscillation de f dans chacun des A_k soit $\leqslant \varepsilon$. D'après le lemme 1, il existe donc une suite (g_k) de fonctions de $\mathcal{K}_{R}(E)$ telles que $g_k(x)=0$ dans $\complement A_k$, $0 \leqslant g_k(x) \leqslant 1$ dans E et $\sum_k g_k(x)=1$ dans K, d'où $f = \sum_k fg_k$; la fin du raisonnement se fait alors comme dans la prop.3 du § 1 .

COROLLAIRE 1.- <u>L'intégrale</u> $|\mu|$ <u>est la plus petite des intégrales de Radon positives</u> ν <u>telles que</u> $|\mu(f)| \leqslant \nu(|f|)$ <u>pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}(E)$.

En effet, cette relation entraîne, d'après la définition de $|\mu|$ que, pour toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$, on a $|\mu|(f) \leqslant \nu(f)$, c'est-à-dire $|\mu| \leqslant \nu$.

COROLLAIRE 2.- <u>Pour toute fonction</u> $g \in \mathcal{C}(E)$, <u>on a</u> $|g.\mu| \leqslant |g|.|\mu|$.

En effet, on a $|\mu(fg)| \leqslant |\mu|(|fg|)$, et le corollaire résulte donc du cor.1.

4. <u>Intégrales bornées</u>.

Soit E un espace localement compact <u>non compact</u>. En général, une intégrale de Radon quelconque sur E <u>n'est pas continue</u> dans l'espace $\mathcal{K}(E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme (définie par la norme $\|f\|$).

2

DEFINITION 2.- <u>On dit qu'une intégrale de Radon</u> μ <u>sur un espace localement compact</u> E <u>est bornée si elle est continue dans l'espace normé</u> $\mathcal{K}(E)$.

Il revient au même de dire qu'il existe un nombre $M \geqslant 0$ tel que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, on ait

(6) $$|\mu(f)| \leqslant M.\|f\|.$$

<u>Exemples</u>.- 1) L'intégrale ε_a définie par la masse unité en un point a est bornée, car pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, on a $|f(a)| \leqslant \|f\|$.

2) L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ n'est pas bornée ; en effet, pour tout entier $n > 0$, il existe une fonction f de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, à valeurs dans $[0,1]$, et égale à 1 dans $[-n,+n]$ (lemme 1) ; on a donc $\|f\|=1$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \geqslant \int_{-n}^{+n} f(x)dx \geqslant 2n$, ce qui montre qu'il n'existe aucun nombre M satisfaisant à la relation (6).

3) Sur la droite numérique $\mathbb{R}$, $f \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)dx}{1+x^2}$ est une intégrale de Radon bornée, car pour toute fonction f de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, on a

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)dx}{1+x^2} \right| \leqslant \|f\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.\|f\| .$$

4) Soit μ une intégrale de Radon <u>quelconque</u> sur un espace localement compact E, et soit g une fonction continue dans E (à valeurs complexes), et <u>à support compact</u> (autrement dit, une fonction de $\mathcal{K}(E)$) ; alors l'intégrale $g.\mu$ est <u>bornée</u>. En effet, soit K le support de g ; pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, le support de fg est contenu dans K, et on a donc, en vertu de l'inégalité (1)

$$|\mu(fg)| \leqslant M_K \|fg\| \leqslant M_K \|g\|.\|f\|$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (6), avec $M = M_K\|g\|$.

L'exemple 3 montre que $g.\mu$ peut être bornée sans que g soit à support compact (cf. chap.IV, §).

Les intégrales de Radon bornées sur E forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{M}^1(E)$ de l'espace $\mathcal{M}(E)$: ce sous-espace n'est autre par définition que le <u>dual</u> de l'espace <u>normé</u> $\mathcal{K}(E)$. Les intégrales de Radon réelles bornées forment un sous-espace vectoriel réel $\mathcal{M}^1_R(E) = \mathcal{M}^1(E) \cap \mathcal{M}_R(E)$, qui est en correspondance biunivoque avec le dual de l'espace normé réel $\mathcal{K}_R(E)$.

PROPOSITION 3.- <u>Toute intégrale de Radon positive, majorée par une intégrale bornée, est elle-même bornée.</u>

En effet, supposons que $0 \leqslant \mu \leqslant \nu$ et que ν soit bornée. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, on a

$$|\mu(f)| \leqslant \mu(|f|) \leqslant \nu(|f|) \leqslant M.\|f\|$$

d'où la proposition.

PROPORITION 4.- <u>Pour qu'une intégrale de Radon</u> μ <u>soit bornée, il faut et il suffit que</u> $|\mu|$ <u>le soit</u>.

La condition est évidemment suffisante en vertu de la prop.2. Inversement, supposons μ bornée ; il en est de même alors de $\overline{\mu}$, donc les parties réelles μ_1 et μ_2 de μ sont bornées ; comme $|\mu| \leqslant |\mu_1| + |\mu_2|$, tout revient à démontrer la proposition lorsque μ est <u>réelle</u>, et comme on a alors $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, on est ramené à prouver que μ^+ est bornée (puisque $\mu^- = (-\mu)^+$). Or, soit f une fonction $\geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$; par hypothèse, il existe un nombre $M \geqslant 0$ tel que l'on ait $|\mu(g)| \leqslant M.\|g\|$ pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$. En particulier, si $0 \leqslant g \leqslant f$, on a $\|g\| \leqslant \|f\|$, donc

$$\mu(g) \leqslant |\mu(g)| \leqslant \underbrace{M.\|f\|}_{\|g\| \leqslant M.} \text{ ; d'où } \mu^+(f) = \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \in \mathcal{K}(E)}} \mu(g) \leqslant M.\|f\| .$$

Comme toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ peut s'écrire $f = f_1^+ - f_1^- + i(f_2^+ - f_2^-)$, où $f_1 = \mathcal{R} f$ et $f_2 = \mathcal{I} f$, et que les normes $\|f_1^+\|, \|f_1^-\|, \|f_2^+\|$ et $\|f_2^-\|$ sont toutes $\leqslant \|f\|$, on voit que $|\mu^+(f)| \leqslant 4M. \|f\|$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE.- <u>L'espace</u> $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}^1(E)$ <u>des intégrales de Radon bornées est absolument réticulé</u>.

En effet, si A est un ensemble d'intégrales de Radon positives, majoré par une intégrale de Radon bornée μ_0 , la borne supérieure de A dans $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(E)$ est majorée par μ_0 , donc est bornée.

Comme $\mathcal{M}^1(E)$ est le dual de l'espace normé $\mathcal{K}(E)$, on définit sur $\mathcal{M}^1(E)$ la <u>norme</u> $\|\mu\|$ d'une intégrale de Radon bornée μ comme le plus petit nombre $a \geqslant 0$ tel que $|\mu(f)| \leqslant a. \|f\|$ pour <u>toute</u> fonction $f \in \mathcal{K}(E)$; autrement dit $\|\mu\| = \sup\limits_{\|f\| \leqslant 1} |\mu(f)|$. Muni de cette norme, $\mathcal{M}^1(E)$ est un <u>espace de Banach</u>.

PROPOSITION 5.- <u>Pour toute intégrale de Radon bornée</u> μ <u>sur un espace localement compact</u> E , <u>on a</u>

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{0 \leqslant f \leqslant 1 \\ f \in \mathcal{K}(E)}} |\mu|(f) \tag{7}$$

En effet, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ non nulle, $g = |f| / \|f\|$ appartient à $\mathcal{K}(E)$ et on a $0 \leqslant g \leqslant 1$, d'où $|\mu(g)| \leqslant |\mu|(g) \leqslant M$, en posant $M = \sup\limits_{\substack{0 \leqslant f \leqslant 1 \\ f \in \mathcal{K}(E)}} |\mu|(f)$; ce qui donne $|\mu(f)| \leqslant M. \|f\|$, et par suite $\|\mu\| \leqslant M$. D'autre part, pour toute fonction f de $\mathcal{K}(E)$ telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition (f_k) de f telle que $|\mu|(f) \leqslant \sum\limits_k |\mu(f_k)| + \varepsilon$; si θ_k est l'amplitude de de $\mu(f_k)$ et si $g = \sum_k e^{-i\theta_k} f_k$, on a $\sum_k |\mu(f_k)| = \mu(g)$, et $\|g\| \leq 1$, donc $\mu(g) = |\mu(g)| \leq \|\mu\|$, d'où $|\mu|(f) \leq \|\mu\| + \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $|\mu|(f) \leqslant \|\mu\|$; on en conclut aussitôt que $\|\mu\| = M$.

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> μ <u>est une intégrale de Radon bornée, et</u> g <u>une fonction complexe continue et bornée dans</u> E , <u>l'intégrale de Radon</u> $g.\mu$ <u>est bornée, et on a</u> $\|g.\mu\| \leqslant \|g\| . \|\mu\|$.

En effet, $|g.\mu| \leqslant |g|.|\mu|$, donc si $0 \leqslant f \leqslant 1$ $(f \in \mathcal{K}(E))$, $|g.\mu|(f) \leqslant |\mu|(f|g|) \leqslant \|g\|.|\mu|(f) \leqslant \|g\|.\|\mu\|$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> μ <u>et</u> ν <u>sont deux intégrales de Radon positives et bornées, on a</u>

$$\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\| . \tag{8}$$

On a évidemment $\|\mu + \nu\| \leqslant \|\mu\| + \|\nu\|$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe, d'après la prop.5, deux fonctions g et h de $\mathcal{K}(E)$ telles que $0 \leqslant g \leqslant 1$, $0 \leqslant h \leqslant 1$, et $\mu(g) \geqslant \|\mu\| - \varepsilon$, $\nu(h) \geqslant \|\nu\| - \varepsilon$. La fonction $f = \sup(g,h)$ appartient à $\mathcal{K}(E)$, et on a $0 \leqslant f \leqslant 1$; comme $\mu(f) \geqslant \|\mu\| - \varepsilon$, $\nu(f) \geqslant \|\nu\| - \varepsilon$, on a aussi $\mu(f) + \nu(f) \geqslant \|\mu\| + \|\nu\| - 2\varepsilon$ d'où a fortiori $\|\mu + \nu\| \geqslant \|\mu\| + \|\nu\| - 2\varepsilon$ et comme ε est arbitraire on a $\|\mu + \nu\| \geqslant \|\mu\| + \|\nu\|$.

On sait que le dual d'un espace normé F peut être <u>identifié</u> au dual du <u>complété</u> $\hat{F}$ de F , toute forme linéaire continue sur F se prolongeant d'une seule manière à $\hat{F}$ par continuité. Toute intégrale de Radon <u>bornée</u> μ sur E se prolonge donc par continuité à toutes les fonctions de $\overline{\mathcal{K}}(E)$; on désignera encore par $\mu(f)$, ou $\langle f, \mu \rangle$, ou $\int f \, d\mu$, ou $\int f(x) d\mu(x)$ sa valeur pour une fonction f de $\overline{\mathcal{K}}(E)$.

On a vu que $\overline{\mathcal{K}}(E)$ peut être identifié à l'ensemble des fonctions (complexes) continues dans l'espace compact E' (obtenu par adjonction à E d'un point à l'infini ω) et <u>nulles au point</u> ω. Comme $\overline{\mathcal{K}}(E)$ est ainsi identifié à un <u>hyperplan</u> fermé de l'espace de Banach $\mathcal{C}(E')$, toute intégrale de Radon bornée μ sur E peut être <u>prolongée</u> en une intégrale de Radon μ' sur E' ; la valeur $\mu'(1)$ peut être choisie arbitrairement ; toute fonction $f \in \mathcal{C}(E')$ pouvant s'écrire $f=a+g$, où a est une constante et $g \in \mathcal{K}(E)$, on aura $\mu'(f)=a\,\mu'(1)+\mu(g)$. Réciproquement, il est évident que la restriction à $\mathcal{K}(E)$ d'une intégrale de Radon quelconque sur E' est une intégrale de Radon bornée sur E ; ces dernières peuvent donc être caractérisées comme les intégrales de Radon sur E pouvant être <u>prolongées</u> en intégrales de Radon sur E'.

5. <u>Topologie vague et topologie forte sur l'espace des intégrales de Radon</u>.

L'espace $\mathcal{M}(E)$ des intégrales de Radon sur un espace localement compact E étant un espace de formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathcal{K}(E)$, on peut considérer sur $\mathcal{M}(E)$ la topologie de la convergence <u>simple</u> dans $\mathcal{K}(E)$, que nous appellerons encore <u>topologie vague</u> sur $\mathcal{M}(E)$. C'est une topologie d'espace localement convexe séparé sur $\mathcal{M}(E)$, définie par les semi-normes $\sup_{1\leq i\leq n} |\mu(f_i)|$, où $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une suite finie quelconque de fonctions appartenant à $\mathcal{K}(E)$. A côté de cette topologie, on considère aussi parfois sur $\mathcal{M}(E)$ une topologie <u>plus fine</u>, dite <u>topologie forte</u>, et qu'on définit comme suit ; pour toute partie compacte K de E, soit S_K <u>l'ensemble des fonctions</u> $f \in \mathcal{K}(E)$ <u>telles que</u> $\|f\| \leq 1$ <u>et que le support de f soit contenu dans</u> K (boule unité dans le sous-espace $\mathcal{K}(E,K)$ des fonctions de $\mathcal{K}(E)$ à support contenu dans K) ; la topologie forte sur $\mathcal{M}(E)$ est la topologie de la <u>convergence uniforme dans les ensembles</u> S_K.

On vérifie aussitôt que cette topologie est une topologie d'espace localement convexe sur $\mathcal{M}(E)$, définie par les semi-normes

$$N_K(\mu) = \sup_{f \in S_K} |\mu(f)| = \sup_{f \in S_K} |\mu|(|f|) .$$

PROPOSITION 6.- <u>L'espace</u> $\mathcal{M}(E)$ <u>est complet pour la structure uniforme déduite de la topologie forte</u>.

En effet, si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur $\mathcal{M}(E)$ pour cette structure uniforme, il converge simplement vers une forme linéaire μ_o sur $\mathcal{K}(E)$, et la restriction de μ_o à chacun des sous-espaces $\mathcal{K}(E,K)$ est limite uniforme de formes linéaires continues dans $\mathcal{K}(E,K)$, donc est elle-même continue dans $\mathcal{K}(E,K)$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 7.- <u>Dans l'espace</u> $\mathcal{M}(E)$, <u>l'ensemble des intégrales réelles est vaguement fermé</u> ; <u>l'ensemble des intégrales positives est complet pour la structure uniforme déduite de la topologie vague</u>.

La démonstration est tout à fait analogue à celle de la prop.5 du § 1, en remplaçant partout $\mathcal{C}(E)$ par $\mathcal{K}(E)$; nous laissons au lecteur le soin de la développer.

On notera que ni $\mathcal{M}(E)$, ni $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(E)$ ne sont complets pour la structure uniforme vague.

PROPOSITION 8.- <u>Pour qu'un ensemble</u> Φ <u>d'intégrales de Radon sur E soit relativement compact pour la topologie vague</u>, <u>il faut et il suffit qu'il soit vaguement borné</u>, <u>c'est-à-dire que</u>, <u>pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}(E)$, <u>on ait</u> $\sup_{\mu \in \Phi} |\mu(f)| < +\infty$. <u>Dans ce cas l'ensemble</u> Φ <u>est fortement borné</u>.

La condition est nécessaire, puisque l'application $\mu \longrightarrow \mu(f)$ de Φ dans $\mathbb{C}$, étant continue pour la topologie vague, est bornée dans Φ , qui est relativement compact.

La condition est suffisante. En effet, soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre sur Φ ; en vertu de l'hypothèse, pour toute $f \in \mathcal{K}(E)$ l'image de $\mathfrak{F}$ par l'application $\mu \longrightarrow \mu(f)$ est un ultrafiltre <u>borné</u> dans $\mathcal{C}$, donc convergent ; autrement dit, $\mathfrak{F}$ est simplement convergent vers une forme linéaire μ_o sur $\mathcal{K}(E)$. Remarquons maintenant que, pour tout ensemble compact $K \subset E$, les restrictions à $\mathcal{K}(E,K)$ d'un ensemble vaguement borné d'intégrales de Radon sur E forment un ensemble <u>faiblement borné</u> dans le dual de l'espace de Banach $\mathcal{K}(E,K)$ et on sait qu'un tel ensemble est relativement <u>faiblement compact</u> ; il en résulte que la restriction de μ_o à $\mathcal{K}(E,K)$ est continue, et par suite que μ_o est une intégrale de Radon sur E, ce qui montre que $\mathfrak{F}$ a une limite dans $\mathcal{M}(E)$, autrement dit, que Φ est relativement compact pour la topologie vague. En outre, les restrictions des intégrales $\mu \in \Phi$ à l'espace $\mathcal{K}(E,K)$ forment un ensemble <u>fortement borné</u> dans le dual de cet espace ; d'après la définition de la topologie forte sur $\mathcal{M}(E)$, cela prouve que $\mathfrak{F}$ est <u>fortement borné</u>.

On peut donc parler d'ensemble <u>borné</u> dans $\mathcal{M}(E)$ sans spécifier s'il s'agit de la topologie vague ou de la topologie forte.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> μ_o <u>une intégrale de Radon positive sur</u> E ; <u>l'ensemble des intégrales de Radon</u> μ <u>telles que</u> $|\mu| \leq \mu_o$ <u>est vaguement compact</u>.

En effet, la relation $|\mu| \leq \mu_o$ entraîne $|\mu(f)| \leq |\mu|(|f|) \leq \mu_o(|f|)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$; ceci montre d'une part que l'ensemble des intégrales de Radon μ telles que $|\mu| \leq \mu_o$ est vaguement borné, et d'autre part qu'il est vaguement fermé (cor. de la prop.2).

PROPOSITION 9.- L'application $(g, \mu) \to g.\mu$ de $\mathcal{C}(E) \times \mathcal{M}(E)$ dans $\mathcal{M}(E)$ est continue quand on munit $\mathcal{C}(E)$ de la topologie de la convergence compacte, et $\mathcal{M}(E)$ de la topologie forte (ou de la topologie vague).

En effet, soit (g_o, μ_o) un élément de $\mathcal{C}(E) \times \mathcal{M}(E)$, et soit K une partie compacte quelconque de E . On peut écrire $g.\mu - g_o.\mu_o = (g-g_o).\mu + g_o.(\mu - \mu_o)$; si on pose $N_K(\mu) = \sup_{f \in S_K} |\mu(f)| = \sup_{f \in S_K} |\mu|(|f|)$, les relations $N_K(\mu - \mu_o) \leqslant \varepsilon$ et $\sup_{x \in K} |g(x) - g_o(x)| \leqslant \varepsilon$ entraînent donc

$$N_K(g.\mu - g_o.\mu_o) \leqslant \varepsilon.(N_K(\mu_o) + \varepsilon) + \|g_o\| \varepsilon$$

ce qui démontre la proposition (lorsque $\mathcal{M}(E)$ est muni de la topologie forte) ; la démonstration est analogue (et plus simple) lorsque $\mathcal{M}(E)$ est muni de la topologie vague.

6. Topologie faible et topologie ultraforte sur l'espace des intégrales de Radon bornées (en petits caractères).

Nous avons vu plus haut que l'espace $\mathcal{M}^1(E)$ des intégrales de Radon bornées sur un espace localement compact non compact E est le dual de l'espace de Banach $\overline{\mathcal{K}}(E)$; on peut donc considérer sur $\overline{\mathcal{M}^1}(E)$, d'une part la topologie définie par la norme $\|\mu\|$ ($n^o 4$), que nous appellerons topologie ultraforte sur $\mathcal{M}^1(E)$ et pour laquelle $\mathcal{M}^1(E)$ est un espace de Banach ; d'autre part, la topologie de la convergence simple dans $\overline{\mathcal{K}}(E)$, qui n'est autre que la topologie faible sur le dual d'un espace de Banach. On voit aussitôt que sur $\mathcal{M}^1(E)$, la topologie ultraforte est plus fine que la topologie forte définie ci-dessus, et que la topologie faible est plus fine que la topologie vague. Toutefois, sur une partie bornée H de $\mathcal{M}^1(E)$, la topologie faible et la topogie vague sont <u>identiques</u>, puisque $\mathcal{K}(E)$ est partout dense dans $\overline{\mathcal{K}}(E)$ (<u>Esp.vect.top.</u>,chap.II, §).

Par contre, sur $\mathcal{M}^1(E)$ tout entier, la topologie faible et la topologie vague sont distinctes. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}$, et soit μ_n l'intégrale définie par la masse n au point n ($n \in \mathbb{N}$); pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, on a $\mu_n(f)=0$ dès que n est assez grand, donc μ_n converge vaguement vers 0. Mais si on prend pour f la fonction telle que $f(x)=1$ pour $|x| \leqslant 1$, $f(x)=1/|x|$ pour $|x| \geqslant 1$, f appartient à $\overline{\mathcal{K}}(\mathbb{R})$, et on a $\mu_n(f)=n.f(n)=1$ pour tout $n \geqslant 1$, donc μ_n <u>ne tend pas faiblement vers</u> 0.

PROPOSITION 10.- <u>Soit</u> E <u>un espace localement compact, et pour tout</u> $x \in E$, <u>soit</u> ε_x <u>l'intégrale de Radon définie par la masse 1 placée au point</u> x. <u>L'application</u> $x \rightarrow \varepsilon_x$ <u>est un homéomorphisme de</u> E <u>dans l'espace</u> $\mathcal{M}^1(E)$ <u>des intégrales de Radon bornées, muni de la topologie faible</u> <u>(ou de la topologie vague). En outre, lorsque</u> x <u>tend vers le point à l'infini</u> ω, ε_x <u>tend vers</u> 0.

Il est immédiat que $x \rightarrow \varepsilon_x$ est continue dans E, puisque pour toute fonction $f \in \overline{\mathcal{K}}(E)$, on a $\langle f, \varepsilon_x - \varepsilon_y \rangle = f(x)-f(y)$ et que f est continue ; d'autre part, $\langle f, \varepsilon_x \rangle = f(x)$ tend vers 0 par définition quand x tend vers ω, donc $x \longrightarrow \varepsilon_x$ se prolonge par continuité à $E' = E \cup \{\omega\}$ en prenant la valeur 0 au point ω. Enfin, si x et y sont deux points distincts de E, il existe une fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ telle que $f(x)=1$, $f(y)=0$, donc $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$, et d'autre part on a $\varepsilon_x \neq 0$ pour tout $x \in E$. On en conclut que l'application $x \rightarrow \varepsilon_x$, prolongée à l'espace compact E' est une application continue et <u>biunivoque</u> de E' dans $\mathcal{M}^1(E)$, donc un homéomorphisme (<u>Top.gén.</u>, chap.I, § 10, th.1) ce qui démontre la proposition.

7. Restriction d'une intégrale à un ensemble ouvert. Support d'une intégrale.

Soient E un espace localement compact, G un ensemble ouvert dans E . Le sous-espace G de E est localement compact, et toute fonction complexe continue, définie dans G et à support compact, peut être prolongée par continuité à E tout entier en lui donnant la valeur 0 dans $\complement G$; on peut donc de cette manière identifier l'espace $\mathcal{K}(G)$ au sous-espace de $\mathcal{K}(E)$ formé des fonctions à support (compact) contenu dans G . Si alors μ est une intégrale de Radon sur E, il est clair que la restriction de μ à $\mathcal{K}(G)$ est une intégrale de Radon sur G , qu'on appelle la <u>restriction</u> de μ au sous-espace ouvert G . Cette définition prouve aussitôt que si G et H sont deux ensembles ouverts dans E tels que $G \supset H$, et si μ_G et μ_H sont les restrictions de μ à G et à H , μ_H est aussi la restriction de μ_G au sous-espace ouvert H de l'espace localement compact G .

On a inversement la proposition suivante :

PROPOSITION 11.- <u>Soit</u> E <u>un espace localement compact</u>, (G_α) <u>une famille d'ensembles ouverts dans</u> E , <u>filtrante pour la relation</u> $\subset$ <u>et telle que</u> E <u>soit réunion des</u> G_α . <u>On suppose que pour tout</u> α , μ_α <u>soit une intégrale de Radon sur l'espace localement compact</u> G_α <u>telle que, pour tout couple d'indices</u> α,β <u>tels que</u> $G_\beta \subset G_\alpha$, μ_β <u>soit la restriction de</u> μ_α <u>à</u> G_β . <u>Dans ces conditions, il existe une intégrale de Radon et une seule</u> μ <u>sur</u> E <u>telle que la restriction de</u> μ <u>à</u> G_α <u>soit</u> μ_α <u>pour tout indice</u> α .

En effet, s'il existe une telle intégrale, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, on doit avoir $\mu(f) = \mu_\alpha(f)$ pour tout indice α tel que le support K de f soit contenu dans G_α ; il existe de tels indices, car les G_α formant un recouvrement ouvert de l'ensemble compact K , il existe un nombre fini d'indices α_i $(1 \leq i \leq n)$ tels que K soit contenu dans la réunion des G_{α_i} ; comme la famille (G_α) est filtrante, il existe un indice β tel que $G_\beta \supset G_{\alpha_i}$ pour $1 \leq i \leq n$, et par suite $G_\beta \supset K$. D'autre part, si α et β sont deux indices tels que $K \subset G_\alpha$ et $K \subset G_\beta$, il existe un indice γ tel que $G_\alpha \cup G_\beta \subset G_\gamma$, d'où $K \subset G_\gamma$, et en vertu de l'hypothèse, on a $\mu_\alpha(f) = \mu_\gamma(f)$ et $\mu_\beta(f) = \mu_\gamma(f)$, donc $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$. On définit donc bien une forme linéaire μ sur $\mathcal{K}(E)$ en prenant pour $\mu(f)$ la faleur commune des $\mu_\alpha(f)$ pour tous les indices tels que $K \subset G_\alpha$. On vérifie immédiatement que μ est une intégrale de Radon, d'où la proposition.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> E <u>est un espace discret, toute intégrale de Radon est de la forme</u> $f \longrightarrow \sum_{x \in E} \varphi(x)f(x)$, <u>où</u> φ <u>est une application arbitraire de</u> E <u>dans</u> $\mathbb{C}$.

En effet, si μ_x est la restriction de l'intégrale de Radon à l'ensemble ouvert $\{x\}$, on a $\mu_x(f) = \varphi(x)f(x)$, où $\varphi(x) \in \mathbb{C}$, pour toute fonction f dont le support est $\{x\}$. Pour tout ensemble fini F et toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ dont le support est F , on peut écrire $f = \sum_{x \in F} g_x$, où $g_x(x) = f(x)$ et $g_x(y) = 0$ pour $y \neq x$, d'où $\mu(f) = \sum_{x \in F} \varphi(x)f(x) = \sum_{x \in E} \varphi(x)f(x)$. Comme tout ensemble compact, dans E est fini, le corollaire en résulte aussitôt.

Pour que l'intégrale de Radon μ définie sur l'espace discret E par les masses $\varphi(x)$ soit <u>bornée</u>, il faut et il suffit que $\sum_{x \in E} |\varphi(x)| < +\infty$, et on a alors $\|\mu\| = \sum_{x \in E} |\varphi(x)|$. En effet, si $|\mu(f)| \leq M.\|f\|$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, pour tout ensemble <u>fini</u> $F \subset E$, la fonction f égale à sgn $\varphi(x)$ dans F , à 0 dans $\complement F$, appartient à $\mathcal{K}(E)$, et on a $\mu(f) = \sum_{x \in F} |\varphi(x)|$, d'où l'inégalité $\sum_{x \in F} |\varphi(x)| \leq M$, ce qui montre que l'on a $\sum_{x \in E} |\varphi(x)| < +\infty$, et que $\|\mu\| \geqslant \sum_{x \in E} |\varphi(x)|$. Inversement, si $\sum_{x \in E} |\varphi(x)| < +\infty$, on a pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, $\left| \sum_{x \in E} f(x)\varphi(x) \right| \leqslant \|f\| .$ $\sum_{x \in E} |\varphi(x)|$ ce qui achève notre démonstration.

DÉFINITION 3.- Etant donnée une intégrale de Radon μ sur un espace localement compact E , on dit que μ est nulle au voisinage d'un point $x \in E$ (ou que μ ne comporte pas de masses au voisinage de x) s'il existe un voisinage ouvert V de x tel que la restriction de μ à V soit nulle.

Cela signifie donc que pour toute fonction f dont le support est contenu dans V , on a $\mu(f)=0$.

PROPOSITION 11.- Soit μ une intégrale de Radon sur un espace localement compact E . L'ensemble des points de E au voisinage desquels μ est nulle est un ensemble ouvert.

En effet, si la restriction de μ à un ensemble ouvert V est nulle, μ est nulle au voisinage de tous les points de V par définition.

DÉFINITION 4.- Etant donnée une intégrale de Radon μ sur un espace localement compact E , on appelle support de μ l'ensemble fermé complémentaire de l'ensemble des points au voisinage desquels est nulle.

Le support S d'une intégrale μ est donc l'ensemble des points $x \in E$ ayant la propriété suivante : pour tout voisinage V de x , il existe $f \in \mathcal{K}(E)$ dont le support est contenu dans V et qui est telle que $\mu(f) \neq 0$

Exemple.- Sur $E = [0,1]$, considérons un ensemble dénombrable partout dense (a_n) , et soit μ l'intégrale de Radon définie par les masses 2^{-n} placées aux points a_n . Le support de μ est E tout entier, car si x est un point quelconque de E , V un voisinage de x ,

f une fonction numérique $\geqslant 0$ continue dans E, égale à 1 au point x, à 0 dans $\complement V$, l'ensemble des $x \in V$ tels que $f(x) > 0$ est ouvert, donc contient un point a_n, et par suite $\mu(f) \geqslant f(a_n)2^{-n} > 0$.

8. Propriétés du support d'une intégrale.

THÉORÈME 3.- Soit μ une intégrale de Radon sur un espace localement compact E. Soit K un ensemble compact dans E, g une application continue de E dans $[0,1]$, à support compact et telle que $g(x)=1$ dans K (lemme 1). Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ à support contenu dans K, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition (g_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de g telle que, pour tout point x_i contenu dans le support de g_i on ait

(9) $$\left|\mu(f) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(g_i)\right| \leqslant \varepsilon\,|\mu|(g)$$

En effet, soit U l'ensemble relativement compact des points x où $g(x) > 0$. Comme f est uniformément continue dans $\overline{U}$, il existe un recouvrement ouvert fini $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ de K, formé d'ensembles contenus dans U, tels que l'oscillation de f dans chacun des A_i soit $\leqslant \varepsilon$. D'après le lemme 1, il existe m applications continues h_i de E dans $[0,1]$ telles que le support de h_i soit contenu dans A_i et que $\sum_{i=1}^{m} h_i(x)=1$ dans K ; si on pose $g_i=gh_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et $g_{m+1}=g-\sum_{i=1}^{m} g_i$, les g_i $(1 \leqslant i \leqslant m+1)$ forment une partition de g, le support de g_i est contenu dans A_i pour $1 \leqslant i \leqslant m$, et le support de g_{m+1} ne contient aucun point intérieur à K. Comme $f=fg=\sum_{i=1}^{m+1} fg_i$, on a aussi $\mu(f)=\sum_{i=1}^{m+1}\mu(fg_i)=\sum_{i=1}^{m}\mu(fg_i)$, puisque $fg_{m+1}=0$. Comme par hypothèse, on a $|f(x)-f(x_i)| \leqslant \varepsilon$ pour tout couple de points x, x_i de A_i, d'où $|fg_i - f(x_i)g_i| \leqslant \varepsilon\, g_i$ et $|\mu(fg_i)-f(x_i)\mu(g_i)| \leqslant \varepsilon\,|\mu|(g_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$; par suite $\left|\mu(f)-\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\mu(g_i)\right| \leqslant \varepsilon\,|\mu|(g)$; l'inégalité (9) en résulte si on remarque que pour tout point x_{m+1} du support de g_{m+1}, on a $f(x_{m+1})=0$.

THEOREME 4.- <u>Soit</u> μ <u>une intégrale de Radon sur un espace localement compact</u> E . <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}(E)$ <u>qui est nulle sur le support</u> S <u>de</u> μ , <u>on a</u> $\mu(f)=0$.

Soit K le support de f , et supposons d'abord que $S \cap K=\emptyset$. Par hypothèse, pour tout point $x \in K$, il existe un voisinage ouvert V_x de x ne rencontrant pas S , et tel que pour toute fonction g de $\mathcal{K}(E)$ de support contenu dans V_x , on ait $\mu(g)=0$. Il existe donc un nombre fini n de points $x_i \in K$ tels que les V_{x_i} forment un recouvrement de K ; le lemme 1 montre qu'il existe n applications continues g_i de E dans $[0,1]$ telles que $\sum_{i=1}^{n} g_i(x)=1$ dans K et que le support de g_i soit contenu dans V_{x_i} ; comme $f = \sum_{i=1}^{n} fg_i$, et que le support de fg_i est contenu dans V_{x_i} , on a $\mu(f) = \sum_{i=1}^{n} \mu(fg_i)=0$.

Passons au cas général, et soit g une application continue de E dans $[0,1]$, à support compact et égale à 1 dans K ; d'après le th.3, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition (g_i) de g $(1 \leq i \leq p)$ telle que $\left|\mu(f)- \sum_{i=1}^{p} f(y_i)\mu(g_i)\right| \leqslant \varepsilon \, |\mu|(g)$ quel que soit y_i dans le support de g_i $(1 \leq i \leq p)$. Or, si le support de g_i ne rencontre pas S , on a $\mu(g_i)=0$ d'après ce qui précède, et si le support de g_i rencontre S , on peut prendre $y_i \in S$, donc $f(y_i)=0$ par hypothèse. On voit donc que $|\mu(f)| \leqslant \varepsilon \, |\mu|(g)$, et comme ε est arbitraire, $\mu(f)=0$.

COROLLAIRE 1.- <u>Si deux fonctions</u> f,g <u>de</u> $\mathcal{K}(E)$ <u>sont égales dans le support de</u> μ , <u>on a</u> $\mu(f)=\mu(g)$.

COROLLAIRE 2.- <u>Le support d'une intégrale de Radon</u> E <u>est le plus petit ensemble fermé</u> F <u>tel que pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}(E)$ <u>nulle dans</u> F , <u>on ait</u> $\mu(f)=0$.

En effet, le support S de μ possède cette propriété d'après le th.4, et si un ensemble fermé F a la même propriété, il contient nécessairement S , car par définition μ est nulle au voisinage de tout point de $\complement F$.

COROLLAIRE 3.- <u>Pour qu'une intégrale de Radon μ sur E soit nulle, il faut et il suffit que son support soit vide.</u>

On dit que deux intégrales de Radon μ , ν sur E , <u>coïncident localement</u> en un point $x \in E$, si $\mu - \nu$ ne comporte pas de masses au voisinage de x . Le cor.3 du th.4 montre donc que :

PROPOSITION 12 (principe de localisation).- <u>Pour que deux intégrales de Radon</u> μ , ν <u>sur un espace localement compact</u> E <u>soient identiques, il faut et il suffit qu'elles coïncident localement en tout point de</u> E

Pour les intégrales <u>positives</u>, le th.4 se complète par la proposition suivante :

PROPOSITION 13.- <u>Soit</u> μ <u>une intégrale</u> positive <u>sur</u> E ; <u>pour qu'une fonction</u> $f \geqslant 0$ <u>de</u> $\mathcal{K}(E)$ <u>soit telle que</u> $\int f\, d\mu = 0$, <u>il faut et il suf it que f soit nulle dans le support de</u> μ .

En effet, supposons qu'en un point x du support de μ on ait $f(x) > 0$; il existe alors un voisinage V de x et un nombre $a > 0$ tel que $f(y) \geqslant a$ dans V . D'autre part, il existe une fonction $g \geqslant 0$,continue, à support contenu dans V et telle que $\mu(g) > 0$; si $b = \|g\|$, on a $g \leqslant \frac{b}{a} f$, d'où $\mu(f) \geqslant \frac{a}{b}\, \mu(g) > 0$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 14.- <u>Pour toute mesure de Radon</u> μ <u>sur</u> E , <u>les supports de</u> μ <u>et de</u> $|\mu|$ <u>sont identiques.</u>

En effet, soit S le support de $|\mu|$; si $f \in \mathcal{K}(E)$ est nulle dans S , on a $|\mu(f)| \leqslant |\mu|(|f|)=0$, donc $\mu(f)=0$, ce qui montre que le support S' de μ est contenu dans S . D'autre part, s'il existait un point $x \in S$ n'appartenant pas à S' , la restriction de μ à un voisinage V de x serait nulle, et il résulte aussitôt de la définition de $|\mu|$ que la restriction de $|\mu|$ à V serait aussi nulle, contrairement à l'hypothèse ; donc $S'=S$.

PROPOSITION 15.- <u>Si</u> μ <u>et</u> ν <u>sont deux intégrales de Radon telles que</u> $|\mu| \leqslant |\nu|$, <u>le support de</u> μ <u>est contenu dans le support de</u> ν .

En effet, si ν est nulle au voisinage d'un point, il en est de même a fortiori de μ , puisque $|\mu|(|f|) \leqslant |\nu|(|f|)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$.

PROPOSITION 16.- <u>Soit</u> μ <u>une intégrale de Radon sur un espace localement compact</u> E ; <u>pour toute fonction continue</u> $g \in \mathcal{C}(E)$, <u>le support de l'intégrale</u> $g.\mu$ <u>est l'adhérence de</u> T <u>l'ensemble des points du support</u> S <u>de</u> μ <u>où</u> $g(x) \neq 0$.

En effet, soit x_0 un point n'appartenant pas à T ; il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel qu'en tout point de $V \cap S$, g soit nulle ; si $f \in \mathcal{K}(E)$ a son support dans V , fg est nulle dans S , donc (th.4) $\mu(gf)=0$, autrement dit $g.\mu$ est nulle au voisinage de x_0 .

Inversement, supposons que la restriction de $g.\mu$ à un voisinage ouvert W d'un point x_0 E soit nulle, et montrons qu'il n'existe aucun point de $W \cap S$ où g soit $\neq 0$; en effet, s'il existait un tel point y , il existerait un voisinage compact U de y , contenu dans W et dans lequel on aurait $g(x) \neq 0$; mais alors toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, à support contenu dans U , peut s'écrire $f=gh$, où $h \in \mathcal{K}(E)$ et h a son support dans $U \subset W$; donc on aurait $\mu(f)=\mu(gh)=0$, contrairement à l'hypothèse $y \in S$.

On notera que T est contenu dans l'intersection du support S de et du support de g , mais en est en général <u>distinct</u>. Par exemple, si $E=\mathbb{R}$, si μ est l'intégrale définie par la masse 1 placée au point 0, et si $g(x)=x$, on a $g.\mu=0$ bien que l'intersection des supports de g et de μ soit réduite au point 0, donc non vide.

PROPOSITION 17.- <u>L'ensemble</u> $\mathcal{S}(F)$ <u>des intégrales de Radon sur E , dont le support est contenu dans un ensemble fermé F , est vaguement fermé.</u>

En effet, soit μ_0 un point vaguement adhérent à $\mathcal{S}(F)$ dans $\mathcal{M}(E)$; pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ nulle dans F , et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu \in \mathcal{S}(F)$ telle que $|\mu_0(f)-\mu(f)| \leqslant \varepsilon$ par définition, et comme $\mu(f)=0$, on a $|\mu_0(f)| \leqslant \varepsilon$; comme ε est arbitraire, on a $\mu_0(f)=0$, d'où la proposition, compte tenu du cor.2 du th.4 .

Supposons E <u>non compact</u> ; étant donné un filtre Φ sur l'espace $\mathcal{M}(E)$ des intégrales de Radon sur E , nous dirons que le support d'une intégrale μ <u>s'éloigne indéfiniment suivant</u> Φ si, pour toute partie compacte K de E , il existe un ensemble $M \in \Phi$ tel que le support de toute intégrale $\mu \in M$ <u>ne rencontre pas</u> K .

PROPOSITION 18.- <u>Si</u> Φ <u>est un filtre sur</u> $\mathcal{M}(E)$ <u>tel que le support de</u> μ <u>s'éloigne indéfiniment suivant</u> Φ , μ <u>converge fortement vers</u> 0 <u>suivant</u> Φ .

En effet, soit K un ensemble compact quelconque dans E . Par hypothèse, il existe un ensemble $M \in \Phi$ tel que pour toute intégrale de Radon $\mu \in M$, le support de μ ne rencontre pas K . Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ de support contenu dans K , on a donc $\mu(f)=0$, d'où $\sup\limits_{f \in S} |\mu(f)| = 0$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 19.- <u>Toute intégrale de Radon dont le support est compact est bornée.</u>

En effet, soit une intégrale de Radon de support compact K .

Soit U un voisinage compact de K , g une application continue de E dans $[0,1]$, égale à 1 dans K , à 0 dans $\complement U$ (lemme 1). Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, f et fg sont égales dans K , donc (cor.1 du th.4) $|\mu(f)| = |\mu(fg)| \leqslant M_U \cdot \|fg\| \leqslant M_U \cdot \|f\|$, ce qui démontre la proposition.

La réciproque de cette proposition est inexacte, comme le montre l'exemple de l'intégrale de Radon $f \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)dx}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, qui est bornée et dont le support est $\mathbb{R}$ tout entier.

PROPOSITION 20.- <u>L'ensemble des intégrales de Radon à support compact est partout dense dans</u> $\mathcal{M}(E)$ <u>pour la topologie forte</u>.

En d'autres termes, toute intégrale de Radon est <u>limite forte d'intégrales à support compact</u>.

En effet, soit μ une intégrale de Radon quelconque, K une partie compacte quelconque de E . Soit U un voisinage compact de K , g une application continue de E dans $[0,1]$, égale à 1 dans K , à 0 dans $\complement U$ (lemme 1). Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ à support contenu dans K , on a $f=fg$, donc $\mu(f)= \mu(gf)= \nu(f)$ en posant $\nu = g.\mu$. Il est clair d'après le th.4 que le support de est contenu dans U et on a $\sup_{f \in S_K} |\mu(f)- \nu(f)| =0$, d'où la proposition.

9. <u>Mesures ponctuelles</u>.

Nous dirons qu'une mesure de Radon sur un espace localement compact E est <u>ponctuelle</u> si son support est un ensemble <u>réduit à un point</u> x ; d'après le cor.1 du th.4, la valeur $\mu(f)$ ne dépend que de $f(x)$, et est donc de la forme $\alpha f(x)$, où α est une constante (indépendante de f) ; en d'autres termes une mesure ponctuelle de support $\{x\}$ est de la forme $\alpha\varepsilon_x$ (α scalaire quelconque $\neq 0$) ; la réciproque est immédiate.

PROPOSITION 21.- <u>Toute intégrale de Radon</u> μ <u>est vaguement adhérente à l'ensemble des sommes finies de mesures ponctuelles dont le support est contenu dans le support de</u> μ .

En offet, soient f_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ un nombre fini quelconque de fonctions de $\mathcal{K}(E)$, et soit K un ensemble compact contenant les supports de toutes les fonctions f_k. Soit g une application continue de E dans $[0,1]$, à support compact et égale à 1 dans K (lemme 1). Le raisonnement du th.3 montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition (g_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de g telle que, pour tout point x_i contenu dans le support de g_i, on ait

$$(10) \qquad \left| \mu(f_k) - \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i)\mu(g_i) \right| \leqslant \varepsilon \, |\mu|(g) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant p$$

(il suffit de considérer un recouvrement ouvert fini de K formé d'ensembles dans chacun desquels l'oscillation de chacune des f_k soit $\leqslant \varepsilon$). Or, si le support de g_i ne rencontre pas le support S de μ, on a $\mu(g_i)=0$ (th.4) ; si au contraire le support de g_i rencontre S, on peut prendre $x_i \in S$, et en posant $\nu_i = (g_i)\varepsilon_{x_i}$, les relations (10) s'écrivent

$$\left| \mu(f_k) - \sum_{i=1}^{n} \nu_i(f_k) \right| \leqslant \varepsilon \, |\mu|(g) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant p$$

ce qui démontre la proposition, ε étant arbitraire.

COROLLAIRE 1.- <u>Toute intégrale de Radon positive μ est vaguement adhérente à l'ensemble des sommes finies de mesures ponctuelles positives dont le support est contenu dans le support de μ.</u>

COROLLAIRE 2.- <u>Toute intégrale de Radon bornée μ est vaguement adhérente à l'ensemble des sommes finies de mesures ponctuelles dont le support est contenu dans le support de μ, et dont la somme des normes est $\leqslant \|\mu\|$.</u>

En effet, on a $\|\nu_i\| = |\mu(g_i)| \leqslant |\mu|(g_i)$, d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \|\nu_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu|(g_i) = |\mu|(g) \leqslant \|\mu\| \quad \text{(prop.5).}$$

PROPOSITION 22.- <u>Soit μ une intégrale de Radon. Toute mesure ponctuelle ε_x dont le support est contenu dans le support de μ est vaguement adhérente à l'ensemble des intégrales de Radon $g.\mu$, où g parcourt $\mathcal{K}(E)$ de sorte que $g.\mu$ soit bornée et de norme $\leqslant 1$</u>

Soient f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ un nombre fini quelconque de fonctions de $\mathcal{K}(E)$ et soit δ un nombre >0 arbitraire. Soit U un voisinage ouvert relativement compact de x tel que l'oscillation de chacune des fonctions f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ dans U soit $\leqslant \delta$. Par hypothèse, x étant dans le support de μ, il existe une fonction $g_0 \in \mathcal{K}(E)$ dont le support est contenu dans U et qui est telle que $\mu(g_0) \neq 0$; l'intégrale $\nu = g_0 . \mu$ n'est pas nulle, car son support est contenu dans U et pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ égale à 1 dans U, on a $\nu(f) = \mu(g_0) \neq 0$. En multipliant g_0 par une constante, on peut supposer que ν, qui est bornée (prop.19) a une norme égale à 1. Cela étant, on peut écrire pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et toute fonction $h \in \mathcal{K}(E)$, $f_k(x) - \nu(f_k h) = f_k(x)(1 - \nu(h)) + \nu((f_k(x) - f_k)h)$ Par hypothèse, il existe une fonction $h \in \mathcal{K}(E)$, à support contenu dans U, telle que $\|h\| \leqslant 1$ et $|1 - \nu(h)| \leqslant \frac{\delta}{|f_k(x)|}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$; d'autre part, on a, d'après la définition de U, $|(f_k(x) - f_k(y))h(y)| \leqslant \delta$ pour tout $y \in U$, d'où, puisque $\|\nu\| = 1$, $|\nu((f_k(x) - f_k)h)| \leqslant \delta$, et par suite $|f_k(x) - \mu(gf_k)| \leqslant 2\delta$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, en posant $g = g_0 h$. Cela démontre la proposition, puisque

$\|g.\mu\| = \|(g_0 h)\mu\| \leqslant \|g_0 . \mu\| = 1$.

COROLLAIRE.- Soit μ une intégrale de Radon. Pour qu'une intégrale de Radon ν soit vaguement adhérente au module (sur $\mathcal{K}(E)$) formée des intégrales $g.\mu$, où g parcourt $\mathcal{K}(E)$, il faut et il suffit que le support de ν soit contenu dans celui de μ.

En effet, les prop.21 et 22 montrent que la condition est suffisante, et la prop.17 montre qu'elle est nécessaire.

10. Caractérisations des mesures ponctuelles (en ~~parti~~ petits caractères).

Les intégrales ε_x $(x \in E)$ sont des intégrales de Radon positives et de norme $\leqslant 1$. Elles peuvent être caractérisées au moyen de la propriété suivante :

PROPOSITION 23.- <u>Les points extrémaux</u> (<u>Esp.vect.top.</u>, chap.II, §) <u>de l'ensemble convexe vaguement compact</u> Ω <u>formé des intégrales de Radon positives</u> μ <u>telles que</u> $\|\mu\| \leqslant 1$, <u>sont</u> 0 <u>et les intégrales</u> ε_x .

a) Montrons d'abord que 0 et les ε_x sont des points extrémaux de Ω . En effet, supposons qu'il existe deux points distincts μ , ν de Ω tels que ε_x soit point interne du segment d'extrémités , ; on aurait donc $\varepsilon_x = t\mu + (1-t)\nu$ avec $0 < t < 1$. Cela entraîne $t\mu \leqslant \varepsilon_x$, donc le support de μ est vide ou réduit au point x ; dans le premier cas, $\mu = 0$, et $\nu = \varepsilon_x/(1-t)$, d'où $\|\nu\| = 1/(1-t)$, et comme on doit avoir $\|\nu\| \leqslant 1$, cela n'est possible que si $t=0$ contrairement à l'hypothèse ; dans le second cas, on a $\mu = a.\varepsilon_x$ avec $0 < a \leqslant 1$, et on a de la même manière $\nu = b.\varepsilon_x$ avec $0 < b \leqslant 1$; mais la relation $1=ta+(1-t)b$ ne peut être vérifiée que si $a=b=1$, sans quoi on aurait $1 < t+(1-t)=1$; on obtient donc $\mu = \nu = \varepsilon_x$ contrairement à l'hypothèse.

De même, s'il existait deux points distincts μ , ν de Ω tels que 0 soit point interne du segment d'extrémités μ , ν , on aurait $0 = t\mu + (1-t)\nu$ avec $0 < t < 1$, ce qui entraîne $t\mu \leqslant 0$, donc $\mu = 0$ et de même $\nu = 0$, contrairement à l'hypothèse.

b) Inversement, montrons que tout point extrémal μ de Ω est nul ou de la forme ε_x . Il suffira de prouver que le <u>support</u> S de μ ne peut contenir plus d'un point ; en effet, cela montrera que μ est nul ou de la forme $a.\varepsilon_x$ avec $0 < a \leqslant 1$; mais si on avait $a < 1$, $a.\varepsilon_x$ ne serait pas point extrémal de Ω , puisque c'est un point interne du segment d'extrémités 0 et ε_x . Supposons donc que S contienne deux points distincts x,y ; il existe une application continue g de E dans $[0,1]$ telle que $g(x)=1$ et $g(y)=0$; on peut écrire $\mu = g.\mu + (1-g).\mu$, et il est immédiat que les intégrales

$\mu_1 = g.\mu$ et $\mu_2 = (1-g).\mu$ appartiennent à Ω et ne sont pas nulles (prop.16) ; en outre, on a $\|\mu\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$ (cor.2 de la prop.5) et $\mu = \|\mu_1\| . \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|} + \|\mu_2\| . \frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}$, donc μ appartient au segment ayant pour extrémités les points $\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}$ et $\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}$ de Ω ; en outre, μ est distinct de ces extrémités, car μ_1 et μ_2 ne sont pas nulles ; μ ne peut donc être un point extrémal de Ω.

Si on applique le th. de Krein-Milman (Esp.vect.top., chap.II, § , th.) à l'ensemble convexe compact Ω dans l'espace $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(E)$ muni de la topologie vague, on voit qu'on retrouve une partie de la prop.21.

Les intégrales ε_x peuvent être caractérisées d'une autre manière dans l'espace $\mathcal{M}(E)$:

PROPOSITION 24.- Pour qu'une intégrale de Radon μ soit une représentation (non nécessairement continue) de l'algèbre $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathbb{C}$, il faut et il suffit qu'elle soit nulle ou de la forme ε_x.

Il est immédiat que la condition est suffisante, puisque $\varepsilon_x(fg) = f(x)g(x) = \varepsilon_x(f)\varepsilon_x(g)$. Inversement, soit μ une intégrale de Radon sur E, telle que $\mu(fg) = \mu(f)\mu(g)$ quels que soient f et g dans $\mathcal{K}(E)$, et supposons $\mu \neq 0$. Montrons d'abord que μ est une intégrale positive. En effet, soit f une fonction $\geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E)$, et supposons que $\mu(f) = \alpha$ soit un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}_+$; alors, comme f ne prend pas la valeur α dans E, $g = f/(f-\alpha)$ appartient à $\mathcal{K}(E)$, et on a $f = fg - \alpha g$, d'où $\mu(f) = \mu(f)\mu(g) - \alpha\mu(g)$ ce qui s'écrit $\alpha = \alpha\mu(g) - \alpha\mu(g) = 0$, contrairement à l'hypothèse. En second lieu, prouvons que le support S de μ est réduit à un point ; dans le cas contraire, si x et y étaient deux points distincts de S, il existerait un voisinage V de x et un voisinage W de y sans point commun, donc il existerait une fonction

$f \in \mathcal{K}(E)$ ~~de support contenu dans V et une fonction $g \in \mathcal{K}(E)$~~ de support contenu dans V et une fonction $g \in \mathcal{K}(E)$ de support contenu dans W, telles que $\mu(f) \neq 0$ et $\mu(g) \neq 0$; mais on a alors $fg=0$, donc $\mu(fg)=\mu(f)\mu(g)=0$, ce qui est absurde. Le support S de μ est donc réduit à un point x, donc on a $\mu = a.\varepsilon_x$, a étant une constante $\neq 0$; mais on doit avoir $\mu(f^2)=(\mu(f))^2$ ou $a(f(x))^2=a^2(f(x))^2$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, et par suite $a=1$.

Remarque.- Cette proposition, jointe à la prop.10, montre que la donnée de la structure d'algèbre (non topologique) de $\mathcal{K}(E)$ détermine complètement l'espace E et sa topologie (à un homéomorphisme près), puisque E est homéomorphe à l'espace E_0 des représentations de l'algèbre $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathbb{C}$, muni de la topologie vague, et que cette dernière topologie est indépendante de toute topologie sur $\mathcal{K}(E)$.

11. Image d'une intégrale de Radon par une application propre.

Soient E et F deux espaces localement compacts. Nous dirons qu'une application continue φ de E dans F est propre si, pour tout ensemble compact $K \subset F$, $\overset{-1}{\varphi}(K)$ est compact). Nous utiliserons le lemme suivant

Lemme 2.- Si φ est une application propre d'un espace localement compact E dans un espace localement compact F, l'image $\varphi(A)$ de tout ensemble fermé A dans E est un ensemble fermé dans F.

En effet, soit y un point adhérent à $\varphi(A)$ et soit V un voisinage compact de y ; l'ensemble $A \cap \overset{-1}{\varphi}(V)$ est compact par hypothèse, et on a $\varphi(A \cap \overset{-1}{\varphi}(V))=V \cap \varphi(A)$; donc $V \cap \varphi(A)$ est compact, et comme y est adhérent à cet ensemble, $y \in \varphi(A)$, ce qui démontre le lemme.

Remarques.- 1) Si E est compact, toute application continue de E dans un espace localement compact F est propre.

2) Si F est compact, il n'existe d'application propre de E dans F que si E est compact, puisque pour une telle application φ, $\overset{-1}{\varphi}(F)=E$ doit être compact.

3) Supposons que E et F soient tous deux localement compacts et non compacts, et soient E' et F' les espaces compacts obtenus en adjoignant à E et F des "points à l'infini" ω et ω'. Alors, pour qu'une application continue φ de E dans F soit <u>propre</u>, il faut et il suffit que $\varphi(x)$ <u>tende vers</u> ω' lorsque x tend vers ω en restant dans E : en effet, si φ est propre, pour tout ensemble compact $K \subset F$, $\overset{-1}{\varphi}(\complement K) = \complement \overset{-1}{\varphi}(K)$ est le complémentaire d'un ensemble compact dans E, donc par définition des voisinages de ω et ω' dans E' et F', $\varphi(x)$ tend vers ω' lorsque x tend vers ω ; la réciproque se démontre de même.

Soit μ une intégrale de Radon sur l'espace localement compact E, et soit φ une application <u>propre</u> de E dans un espace localement compact F. Pour toute fonction f continue dans F, à valeurs complexes et à support compact K, $f \circ \varphi$ est continue dans E et son support est contenu dans $\overset{-1}{\varphi}(K)$, donc est <u>compact</u> par hypothèse. Il en résulte que $\nu(f)=\mu(f\circ\varphi)$ est défini pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$; en outre, la forme linéaire ν ainsi définie sur $\mathcal{K}(F)$ est une <u>intégrale de Radon</u> : en effet, si K est un ensemble compact quelconque dans F, $\overset{-1}{\varphi}(K)$ est un ensemble compact dans E, donc il existe par hypothèse un nombre $M \geqslant 0$ tel que, pour toute application continue g de E dans $\mathbb{C}$, à support contenu dans $\overset{-1}{\varphi}(K)$, on ait $|\mu(g)| \leqslant M.\|g\|$; par suite, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$ à support contenu dans K, on a $|\mu(f\circ\varphi)| \leqslant M.\|f\circ\varphi\| = M.\|f\|$, ce qui prouve notre assertion. On peut donc poser la définition suivante :

DÉFINITION 5.- Soient E et F deux espaces localement compact, μ une intégrale de Radon sur E , φ une application propre de E dans F . On appelle image de μ par l'application φ , et on note $\varphi(\mu)$ (par abus de langage) l'intégrale de Radon ν sur F définie par la formule

$$(11) \qquad \nu(f) = \mu(f\circ\varphi)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$.

La formule (11) s'écrit encore sous la forme

$$\int f(y)d\nu(y) = \int f(\varphi(x))d\mu(x) .$$

Il résulte aussitôt des définitions que si μ est une intégrale de Radon réelle (resp. positive), $\varphi(\mu)$ est réelle (resp. positive). Si μ est une intégrale de Radon quelconque sur E , on a $\overline{\varphi(\mu)}=\varphi(\overline{\mu})$ et

$$(12) \qquad |\varphi(\mu)| \leqslant \varphi(|\mu|)$$

d'après la définition de $|\mu|$ (formule (4)).

PROPOSITION 25.- Le support de l'image $\varphi(\mu)$ d'une intégrale de Radon sur E est contenu dans l'image par φ du support de μ .

En effet, soit S le support de μ ; l'ensemble $\varphi(S)$ est fermé (lemme 2) ; soit y_0 un point de F n'appartenant pas à $\varphi(S)$, et soit W un voisinage ouvert de y_0 ne rencontrant pas $\varphi(S)$; pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$ dont le support est contenu dans W , le support de $f\circ\varphi$ est contenu dans $\overset{-1}{\varphi}(W)$ qui ne rencontre pas S , donc (th.4) $\mu(f\circ\varphi)=0$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 26.- L'application $\mu \longrightarrow \varphi(\mu)$ de $\mathcal{M}(E)$ dans $\mathcal{M}(F)$ est linéaire et continue lorsqu'on munit $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$ de la topologie forte (ou de la topologie vague).

Démontrons par exemple que $\mu \longrightarrow \varphi(\mu)$ est continue pour la topologie forte. Soit K un ensemble compact quelconque dans F ; l'ensemble

$H = \overset{-1}{\varphi}(K)$ est compact dans E ; pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$ de support contenu dans K, $f \circ \varphi$ a son support contenu dans H, et $\|f \circ \varphi\| = \|f\|$; donc, si pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$, de support contenu dans H, et telle que $\|g\| \leqslant 1$, on a $|\mu(g)| \leqslant \varepsilon$, on aura $|\langle f, \varphi(\mu)\rangle| \leqslant \varepsilon$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$, de support contenu dans K et telle que $\|f\| \leqslant 1$.

PROPOSITION 27.- <u>Si</u> μ <u>est une intégrale de Radon bornée sur</u> E, $\varphi(\mu)$ <u>est une intégrale de Radon bornée sur</u> F <u>et on a</u>

(13) $$\|\varphi(\mu)\| \leqslant \|\mu\| .$$

<u>En outre, si</u> μ <u>est positive et bornée, on a</u> $\|\varphi(\mu)\| = \|\mu\|$.

La première partie de la proposition résulte immédiatement des définitions, puisque $\|f \circ \varphi\| = \|f\|$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$. Pour démontrer la seconde, soit ε un nombre > 0 arbitraire ; il existe une fonction $g \in \mathcal{K}(E)$ telle que $0 \leqslant g \leqslant 1$ et $\mu(g) \geqslant \|\mu\| - \varepsilon$ (prop.5). Soit K le support de g ; l'ensemble $\varphi(K)$ est compact, donc il existe une application continue f de F dans $[0,1]$, à support compact et égale à 1 dans $\varphi(K)$. On a par suite $g \leqslant f \circ \varphi \leqslant 1$, d'où $\mu(f \circ \varphi) \geqslant \|\mu\| - \varepsilon$, ce qui prouve que $\|\varphi(\mu)\| \geqslant \|\mu\| - \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $\|\varphi(\mu)\| = \|\mu\|$.

En particulier, on notera que l'image par φ d'une mesure ponctuelle ε_x n'est autre que la mesure ponctuelle $\varepsilon_{\varphi(x)}$. Si μ est bornée mais non positive, on peut avoir $\|\varphi(\mu)\| < \|\mu\|$. Par exemple, si E est formé de deux points a, b, F d'un seul point c, si φ est l'application constante de E dans F égale à c, et μ l'intégrale définie par la masse $+1$ placée au point a, et la masse -1 placée au point b, $\varphi(\mu)$ est <u>nulle</u>.

Remarquons enfin que si E,F,G sont trois espaces localement compacts, φ une application propre de E dans F ; ψ une application propre de F dans G ; $\theta = \psi \circ \varphi$ est une application propre de E dans G , et si μ est une intégrale de Radon sur E , on a $\theta(\mu) = \psi(\varphi(\mu))$ en vertu des définitions.

Tout <u>homéomorphisme</u> σ d'un espace localement compact E sur lui-même est évidemment une application propre ; à toute intégrale de Radon μ sur E correspond donc son image par σ , que nous noterons μ_σ ; on a donc par définition

$$\int f(x)d\,\mu_\sigma(x) = \int f(\sigma(x))d\,\mu(x)$$

En vertu de la prop.26, l'application $\mu \longrightarrow \mu_\sigma$ est un <u>endomorphisme</u> $\underline{\underline{A}}_\sigma$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}(E)$ (continu pour la topologie forte ou la topologie vague) ; en outre, si σ et τ sont deux homéomorphismes de E sur lui-même, on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$,

$\mu_{\sigma\tau}(f) = \mu(f\circ(\sigma\circ\tau)) = \mu((f\circ\sigma)\circ\tau) = \mu_\tau(f\circ\sigma)$, ce qui s'écrit encore $\underline{\underline{A}}_{\sigma\tau}(\mu) = \underline{\underline{A}}_\sigma(\mu_\tau) = \underline{\underline{A}}_\sigma(\underline{\underline{A}}_\tau(\mu))$, autrement dit

$\underline{\underline{A}}_{\sigma\tau} = \underline{\underline{A}}_\sigma \circ \underline{\underline{A}}_\tau$. L'application $\sigma \longrightarrow \underline{\underline{A}}_\sigma$ est donc une <u>représentation</u> du groupe Γ des homéomorphismes de E sur lui-même, dans le <u>groupe des automorphismes</u> de l'espace vectoriel $\mathcal{M}(E)$.

On dit qu'une intégrale de Radon μ sur E est <u>invariante</u> par l'homéomorphisme σ de E sur lui-même, si $\mu_\sigma = \mu$.

PROPOSITION 28.- <u>L'intégrale de Lebesgue sur</u> $\mathbb{R}$ <u>est invariante par toute translation du groupe additif</u> $\mathbb{R}$.

En effet, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ et tout nombre $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad .$$

Nous verrons au chap. V que sur tout groupe localement compact G il existe une intégrale de Radon $\neq 0$ invariante par toutes les translations à gauche de G , et une intégrale de Radon $\neq 0$ invariante par toutes les translations à droite ; en outre, ces deux intégrales sont déterminées à des facteurs constant près.

12. Intégrale de fonctions vectorielles.

Soit μ une intégrale de Radon sur un espace localement compact E. Soit F un espace vectoriel localement convexe complet sur le corps $\mathcal{C}$; soit $\mathcal{K}_F(E)$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) des applications continues de E dans F , à support compact. Nous allons montrer qu'on peut définir une application linéaire de $\mathcal{K}_F(E)$ dans F et une seule, que nous noterons encore μ , possédant les deux propriétés suivantes :

(IV_I) Pour tout vecteur $a \in F$ et toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, on a

(14) $$\mu(af) = a\mu(f) .$$

(IV_{II}) Pour toute partie compacte K de E , la restriction de μ au sous-espace $\mathcal{K}_F(E,K)$ des fonctions de $\mathcal{K}_F(E)$ à support contenu dans K , est continue pour la topologie de la convergence uniforme dans K .

Désignons par $\mathcal{H}_F(E)$ le sous-espace de $\mathcal{K}_F(E)$ formé des combinaisons linéaires $f = \sum_k a_k f_k$ de fonctions de $\mathcal{K}(E)$, à coefficients dans F . Nous allons voir d'abord qu'il existe une application linéaire μ de $\mathcal{H}_F(E)$ dans F et une seule satisfaisant à (IV_I). En effet, cette condition montre que si $f = \sum_k a_k f_k$, on doit avoir $\mu(f) = \sum_k a_k \mu(f_k)$. Reste à prouver que l'on définit bien ainsi une fonction dans $\mathcal{H}_F(E)$, c'est-à-dire que si $\sum_i a_i f_i = \sum_j b_j g_j$, on a aussi $\sum_i a_i \mu(f_i) = \sum_j b_j \mu(g_j)$, ou encore que si $\sum_{i=1}^n a_i f_i = 0$, on a $\sum_{i=1}^n a_i \mu(f_i) = 0$. Or, supposons par exemple que les vecteurs $a_1, \ldots, a_r$ soient linéairement indépendants, et que

$a_{r+j} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij} a_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-r$; la relation $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$ signifie donc que $f_i + \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} f_{r+j} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, d'où on tire $\mu(f_i) + \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} \mu(f_{r+j}) = 0$, et par suite $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(f_i) = 0$.

Lorsque F est de dimension finie, on a $\mathcal{H}_F(E) = \mathcal{K}_F(E)$, car si $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de F , toute application continue f de E dans F s'écrit d'une seule manière $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, où f_i est une fonction complexe continue dans E , et pour que le support de f soit compact, il faut et il suffit que ceux des f_i le soient. L'existence de l'application linéaire μ satisfaisant à (IV_I) et (IV_{II}) est donc déjà démontrée dans ce cas.

En second lieu, si K est un ensemble compact dans E , f une fonction de $\mathcal{K}_F(E)$ dont le support est contenu dans K , nous allons voir que si le prolongement de μ à $\mathcal{K}_F(E)$, satisfaisant à (IV_I) et (IV_{II}) existe, sa valeur $\mu(f)$ est bien déterminée. Pour cela considérons un voisinage compact U de K , et soit $\mathcal{H}_F(E,U)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}_F(E)$ dont le support est contenu dans U . Nous allons montrer que, pour la topologie de la convergence uniforme dans U , f est adhérent au sous-espace $\mathcal{H}_F(E,U)$, et que $\mu(g)$ tend vers une limite lorsque g tend vers f (pour cette topologie) en restant dans $\mathcal{H}_F(E,U)$. En effet, soit h une application continue de E dans $[0,1]$, à support compact, et telle que $h(x)=1$ dans U (lemme 1). Soit q une semi-norme continue quelconque sur F . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement ouvert finie $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de K formé d'ensembles contenus dans U, et tels que pour deux points x,y contenus dans un même ensemble A_i , on ait $q(f(x)-f(y)) \leqslant \varepsilon$. Soient g_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n applications continues de E dans $[0,1]$ telles que $\sum_{i=1}^{n} g_i(x)=1$ dans K et que le support de g_i soit contenu dans A_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$; si x_i est un point quelconque de A_i , on a

$q(f(x)g_i(x) - f(x_i)g_i(x)) \leqslant \varepsilon\, g_i(x)$ pour tout $x \in E$, et comme $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x)g_i(x)$ identiquement, on a

$$q\Big(f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_i(x)\Big) \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \leqslant \varepsilon\, h(x) \quad \text{pour tout } x \in E,$$

ce qui établit notre première assertion. Pour démontrer la seconde, nous prouverons d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme 3.- Pour toute fonction</u> $f \in \mathscr{H}_F(E)$ <u>et toute semi-norme</u> q <u>continue dans</u> F, <u>on a</u>

(15) $$q(\mu(f)) \leqslant |\mu|(q(f)).$$

En effet, l'ensemble des $z \in F$ tels que $q(z) \leqslant 1$ peut, d'après le th. de Hahn-Banach (<u>Esp.vect.top.</u>, chap.II, §) être défini comme l'ensemble des points satisfaisant aux inégalités $|\langle z, a'_\iota\rangle| \leqslant \alpha_\iota$, et en outre les relations $\langle z, a'_\iota\rangle = 0$ pour tout ι entraînent $q(z) = 0$. Cela étant, si $f = \sum_k a_k f_k$, où $f_k \in \mathscr{K}(E)$, on a, pour tout $x \in E$ et tout indice ι,

$$\Big|\sum_k \langle a_k, a'_\iota\rangle f_k(x)\Big| \leqslant \alpha_\iota\, q(f(x))$$

d'où, en vertu de la prop.2

$$\Big|\sum_k \langle a_k, a'_\iota\rangle \mu(f_k)\Big| \leqslant \alpha_\iota\, |\mu|(q(f))$$

c'est-à-dire

$$\Big|\Big\langle \sum_k a_k \mu(f_k), a'_\iota\Big\rangle\Big| \leqslant \alpha_\iota\, |\mu|(q(f))$$

D'après la définition de $\mu(f)$, on en déduit que si $|\mu|(q(f)) = 0$, on a $q(\mu(f)) = 0$, et si $|\mu|(q(f)) \neq 0$, $q(\mu(f)/(|\mu|(q(f)))) \leqslant 1$, ce qui démontre (15) dans tous les cas.

Ce lemme étant établi, si f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathscr{H}_F(E,U)$ telles que, pour tout $x \in E$, on ait $q(f(x) - f_1(x)) \leqslant \varepsilon h(x)$
~~(E,U) telles que, pour tout x E , on ait~~
et $q(f(x) - f_2(x)) \leqslant \varepsilon h(x)$, on a aussi $q(f_1(x) - f_2(x)) \leqslant 2\varepsilon h(x)$, d'où, en vertu du lemme 3, $q(\mu(f_1) - \mu(f_2)) \leqslant 2\varepsilon\, |\mu|(h)$; comme F est <u>complet</u>, cela prouve que $\mu(g)$ tend vers une limite

lorsque g tend (uniformément dans U) vers f , en restant dans $\mathcal{H}_F(E,U)$. Montrons que cette limite est <u>indépendante</u> du voisinage compact U de K considéré ; en effet, soit V un second voisinage compact de K tel que $U \subset V$, et soit h_1 une application continue de E dans $[0,1]$, à support compact, égale à 1 dans V ; si g_1 est une fonction de $\mathcal{H}_F(E,U)$, g_2 une fonction de $\mathcal{H}_F(E,V)$, telles que $q(f(x)- g_1(x)) \leqslant \varepsilon h(x)$, et $q(f(x)- g_2(x)) \leqslant \varepsilon h_1(x)$, on a aussi $q(g_1(x)- g_2(x)) \leqslant 2\varepsilon h_1(x)$, d'où $q(\mu(g_1)-\mu(g_2)) \leqslant 2\varepsilon\, |\mu|(h_1)$. La limite considérée ne dépend donc que de f , et on peut la noter $\mu(f)$. Nous avons ainsi prolongé μ à $\mathcal{K}_F(E)$ tout entier. En vertu de l'inégalité (15) et de la définition d'une intégrale de Radon, la restriction de μ à $\mathcal{H}_F(E,U)$ est <u>continue</u> pour la topologie de la convergence uniforme dans U . Il en résulte aussitôt que l'application $f \longrightarrow \mu(f)$ de $\mathcal{K}_F(E)$ dans $\mathbb{C}$ est <u>linéaire</u> et satisfait à la condition (IV_{II}).

Nous dirons que l'application linéaire de $\mathcal{K}_F(E)$ dans F ainsi définie est l'<u>extension</u> de l'intégrale de Radon μ aux fonctions à valeurs dans F ; on notera encore sa valeur pour une fonction $f \in \mathcal{K}_F(E)$ par $\int f\, d\mu$ ou $\int f(x) d\mu(x)$.

PROPOSITION 29.- <u>Soient</u> F,G <u>deux espaces localement convexes et complets, et</u> u <u>une application linéaire continue de</u> F <u>dans</u> G . <u>Pour toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{K}_F(E)$, $u\circ f$ <u>appartient à</u> $\mathcal{K}_G(E)$, <u>et on a</u>

$$\int u(f(x))d\mu(x) = u\left(\int f(x)d\mu(x)\right) \quad (16)$$

La première partie de la proposition est évidente, ainsi que la formule (16) lorsque f appartient à $\mathcal{H}_F(E)$; en vertu de la condition (IV_{II}), on passe de là au cas général par continuité, en remarquant que lorsque g tend uniformément vers f dans un ensemble compact K , $u\circ g$ tend uniformément vers $u\circ f$ dans K .

COROLLAIRE.- <u>Pour toute forme continue linéaire</u> a' <u>sur</u> F <u>et toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}_F(E)$, <u>on a</u>

(17) $$\int \langle f, a' \rangle \, d\mu = \langle \int f \, d\mu, a' \rangle \quad .$$

PROPOSITION 30.- <u>Pour toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{K}_F(E)$ <u>et toute semi-norme</u> q <u>continue sur</u> F , <u>on a l'inégalité</u> (15).

Avec les notations précédentes, il suffit de passer à la limite dans l'inégalité $q(\mu(g)) \leqslant |\mu|(q(g))$ lorsque g tend vers f (uniformément dans U) en restant dans $\mathcal{K}_F(E,U)$.

Le th.3 s'étend de la façon suivante : pour toute fonction f de $\mathcal{K}_F(E)$ à support contenu dans K , toute semi-norme q continue dans F et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition (g_i) de g telle que pour tout point x_i contenu dans le support de g_i , on ait

(16) $$q(\mu(f) - \sum_i f(x_i)\mu(g_i)) \leqslant \varepsilon \, |\mu|(g) \ .$$

Le th.4 s'applique sans modification aux fonctions de $\mathcal{K}_F(E)$.

Notons aussi que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(E)$, l'extension aux fonctions à valeurs dans F de l'intégrale de Radon $g.\mu$ n'est autre que l'intégrale $\int g f \, d\mu$, car il est immédiat qu'il en est ainsi pour toute fonction de la forme $a f$, où $a \in F$ et $f \in \mathcal{K}(E)$, et on passe de là au cas général par continuité.

PROPOSITION 31.- <u>Soit</u> <u>une fonction quelconque de</u> $\mathcal{K}_F(E)$; <u>l'application</u> $\mu \to \mu(f)$ <u>de l'ensemble</u> $\mathcal{M}_+(E)$ <u>des intégrales de Radon</u> positives <u>dans</u> F , <u>est continue quand on munit</u> $\mathcal{M}_+(E)$ <u>de la topologie vague</u>.

Remarquons d'abord que si f est combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{K}(E)$ à coefficients dans F , l'application $\mu \to \mu(f)$ est vaguement continue dans $\mathcal{M}(E)$ <u>tout entier</u>. Supposons maintenant f quelconque dans $\mathcal{K}_F(E)$, et soit K son support, U un voisinage compact de K , h une application continue de E dans $[0,1]$, à support compact, égale à 1 dans U . Pour toute semi-norme continue q dans F et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g de $\mathcal{H}_F(E,U)$ telle que $q(f(x)-g(x)) \leqslant \varepsilon h(x)$ dans E , d'où, en vertu de (15), $q(\mu(f)-\mu(g)) \leqslant \varepsilon\,\mu(h)$ si μ est une intégrale <u>positive</u> ; si μ_0 est une intégrale positive, on aura donc $q(\mu(f)-\mu(g)) \leqslant \varepsilon(\mu_0(h)+1)$ pour toute intégrale positive μ telle que $|\mu(h)-\mu_0(h)| \leqslant 1$; comme $\mu \rightarrow \mu(g)$ est vaguement continue au point μ_0 , il en est de même de $\mu \rightarrow \mu(f)$.

Le même raisonnement montrerait que $\mu \rightarrow \mu(f)$ est vaguement continue dans toute partie <u>bornée</u> de $\mathcal{M}^1(E)$.

PROPOSITION 32.- <u>Soit</u> D <u>un ensemble convexe fermé dans</u> F , f <u>une fonction de</u> $\mathcal{H}_F(E)$, <u>telle que</u> $f(E) \subset D$. <u>Pour toute intégrale positive et bornée</u> μ <u>sur</u> E <u>telle que</u> $\|\mu\| = 1$, <u>le point</u> $\int f\,d\mu$ <u>appartient à</u> D .

En effet, D est l'intersection d'une famille de demi-espaces fermés $\langle z, a_i' \rangle \leqslant \alpha_i$. Pour toute application continue h de E dans $[0,1]$, à support compact et égale à 1 dans le support de f , on a $hf = f$, donc $\langle f(x), a_i' \rangle \leqslant \alpha_i h(x)$ pour tout $x \in E$ et tout i ; on en déduit $\langle \mu(f), a_i' \rangle \leqslant \alpha_i\,\mu(h) \leqslant \alpha_i$ pour tout i , ce qui démontre la proposition.

Considérons en particulier un ensemble <u>compact</u> $A \subset F$; pour toute intégrale de Radon <u>positive</u> μ sur A , de masse totale égale à <u>un</u> , le point $\int x\,d\mu(x)$ est appelé le <u>centre de gravité</u> de A pour la mesure μ .

PROPOSITION 32.- <u>Etant donné un ensemble compact</u> $A \subset F$, <u>l'ensemble</u> G <u>des centres de gravité de A pour toutes les mesures positives sur</u> A , <u>de masse totale égale à un</u> , <u>est l'enveloppe convexe fermée</u> (<u>compacte</u>) <u>de</u> A .

En effet, cet ensemble est l'image par l'application $\mu \to \int x \, d\mu$ de l'ensemble H des intégrales positives de norme égale à 1 . Comme $\mu \to \int x \, d\mu$ est linéaire et continue dans H (pour la topologie de la convergence vague) (prop.31), et que H est convexe et compact (§ 1,cor.2 de la prop.6), l'ensemble G est convexe et compact et contient évidemment A (tout point x de A étant centre de gravité de A pour la mesure ε_x). D'autre part, il résulte de la prop.32 que G est contenu dans tout ensemble convexe fermé contenant A , ce qui démontre la proposition.

On retrouve ainsi le fait (<u>Esp.vect.top.</u>,chap.II, §) que dans un espace localement convexe complet, l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble compact est compacte.

§ 3. Produits d'intégrales de Radon.

1. <u>Produit de deux intégrales de Radon</u>.

Soient E et F deux espaces localement compacts. Nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme 1.</u>- <u>Soit</u> G <u>un espace vectoriel localement convexe</u>. <u>Soient</u> K <u>une partie compacte de</u> E , L <u>une partie compacte de</u> F , U <u>un voisinage ouvert relativement compact de</u> K <u>dans</u> E , V <u>un voisinage ouvert relativement compact de</u> L <u>dans</u> F . <u>Toute application continue de</u> $E \times F$ <u>dans</u> G , <u>dont le support est contenu dans</u> $K \times L$, <u>est adhérente, pour la topologie de la convergence uniforme dans</u> $E \times F$, <u>à une combinaison linéaire de la forme</u> $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x) v_i(y)$, <u>où</u> $a_i \in G$, u_i <u>est une</u>

<u>une fonction de</u> $\mathcal{K}(E)$ <u>à support contenu dans</u> U, <u>et</u> v_i <u>est une fonction de</u> $\mathcal{K}(F)$, <u>à support contenu dans</u> V, <u>pour</u> $1 \leqslant i \leqslant n$. (On dit encore alors que h peut être <u>approchée</u>, <u>uniformément</u> par ses combinaisons linéaires de cette forme.

En effet (§ 2, n°12), on sait d'abord que toute application continue f de $E \times F$ dans G, dont le support est contenu dans $K \times L$, est adhérente à l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_i a_i g_i(x,y)$, où $a_i \in G$ et g_i est une fonction de $\mathcal{K}(E \times F)$, à support contenu dans $U \times V$. Tout revient donc à démontrer le lemme pour $G = \mathbb{C}$, autrement dit pour une fonction f de $\mathcal{K}(E \times F)$ à support contenu dans $U \times V$. Cela résulte du lemme plus précis suivant :

<u>Lemme 2.- Soit</u> f <u>une fonction</u> positive <u>de</u> $\mathcal{K}(E \times F)$, <u>de support contenu dans</u> $U \times V$; f <u>peut être approchée uniformément par des fonctions de la forme</u> $\sum_i u_i(x)v_i(y)$, <u>où les</u> u_i (resp. v_i) <u>sont des fonctions</u> positives <u>de</u> $\mathcal{K}(E)$ (resp. $\mathcal{K}(F)$), <u>à support contenu dans</u> U (resp. V).

En effet, f est uniformément continue dans son support ; d'après la définition de la structure uniforme d'un espace produit pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ (resp. $(B_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$) de la projection sur E (resp. F) du support de f, tel que, dans chacun des ensembles $A_i \times B_j$, l'oscillation de f soit $\leqslant \varepsilon$. Soient g_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ (resp. h_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$) des applications continues de E (resp. F) dans $[0,1]$ telles que le support de g_i (resp. h_j) soit contenu dans A_i (resp. B_j) et qu'on ait $\sum_{i=1}^{m} g_i(x) = 1$ (resp. $\sum_{j=1}^{n} h_j(y) = 1$) dans la projection sur E (resp. F) du support de f (§ 2, lemme 1) ; on a donc $f(x,y) = \sum_{i,j} f(x,y)g_i(x)h_j(y)$. Si x_i (resp. y_j) est un point quelconque de A_i (resp. B_j), les hypothèses entraînent donc que

$$\left| f(x,y) - \sum_{i,j} f(x_i,y_j)g_i(x)h_j(y) \right| = \left| \sum_{i,j} (f(x,y)-f(x_i,y_j))g_i(x)h_j(y) \right|$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{i,j} g_i(x)h_j(y) = \varepsilon$$

ce qui démontre le lemme.

Le lemme 1 et la définition des intégrales de Radon montrent donc que:

PROPOSITION 1.- <u>Si deux intégrales de Radon sur</u> $E \times F$ <u>sont égales pour toute fonction de la forme</u> $u(x)v(y)$, <u>où</u> $u \in \mathcal{K}(E)$ <u>et</u> $v \in \mathcal{K}(F)$ <u>elles sont identiques</u>.

Soit μ une intégrale de Radon sur E , ν une intégrale de Radon sur F ; nous allons montrer qu'il existe une intégrale de Radon λ sur $E \times F$ telle que, pour toute fonction $u \in \mathcal{K}(E)$ et toute fonction $v \in \mathcal{K}(F)$, on ait

(1) $$\int u(x)v(y)d\lambda(x,y) = \left(\int u(x)d\mu(x)\right).\left(\int v(y)d\nu(y)\right).$$

En vertu de la prop.1, si une telle intégrale existe, elle est <u>unique</u>. Pour démontrer son existence, nous établirons d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- <u>Soit</u> G <u>un espace localement convexe complet. Pour toute application continue</u> h <u>de</u> $E \times F$ <u>dans</u> G , <u>à support compact, l'application</u> g <u>de</u> F <u>dans</u> G , <u>définie par</u>

(2) $$g(y) = \int h(x,y)d\mu(x)$$

<u>est continue et a un support compact</u>.

La seconde partie de la proposition est évidente, car si $K \subset E$ et $L \subset F$ sont deux ensembles compacts tels que le support de h soit contenu dans $K \times L$, on a $h(x,y)=0$ pour tout $y \notin L$ et tout $x \in E$, d'où $g(y)=0$ pour $y \notin L$. Reste à montrer que g est continue ; or on peut écrire $g(y)= \mu(h_y)$, h_y désignant l'application $x \longrightarrow h(x,y)$ de E dans G . Or, pour tout $y \in F$, h_y est une application continue de E dans G , de support contenu dans K ;

et en vertu de la continuité de h , h_y tend uniformément (dans K) vers h_{y_0} lorsque y tend vers y_0 dans F (<u>Top.gén.</u>, chap.X, § 2,prop.9). La proposition résulte donc de la continuité de μ dans l'ensemble des applications continues de E dans G , à support contenu dans K (§ 2,n°12).

Cela étant, pour toute application continue h de $E \times F$ dans G , à support compact, considérons la fonction g définie par (2) ; d'après la prop.2, le nombre $\nu(g)$ est défini ; nous l'écrirons par abus de notation

$$\int d\nu(y) \int h(x,y)d\mu(x) .$$

PROPOSITION 3.- <u>L'application</u> $h \longrightarrow \int d\nu(y) \int h(x,y)d\mu(x)$ <u>est l'extension</u> (<u>aux fonctions à valeurs dans</u> G) <u>d'une intégrale de Radon sur</u> $E \times F$.

Tout revient à montrer que cette application est continue dans l'ensemble $\mathcal{K}_G(E\times F , K\times L)$ des applications de $E\times F$ dans G , à support contenu dans $K \times L$, pour la topologie de la convergence uniforme dans $K\times L$. Or pour toute semi-norme p continue dans G il existe par hypothèse une semi-norme q continue sur G et un nombre $a > 0$ telle que pour $h \in \mathcal{K}_G(E\times F , K\times L)$, la relation $q(h(x,y)) \leqslant 1$ dans $K \times L$ entraîne $p(g(y)) \leqslant a$ pour tout $y \in L$; la proposition résulte alors de la continuité de ν dans $\mathcal{K}_G(F,L)$ pour la topologie de la convergence uniforme dans L .

Cela étant, il est clair que l'intégrale de Radon λ ainsi définie sur $E\times F$ satisfait à la condition (1). Nous pouvons donc poser la définition suivante :

DÉFINITION 1.- Etant données deux intégrales de Radon μ, ν définies respectivement sur deux espaces localement compacts E,F, on appelle intégrale produit de μ par ν l'intégrale de Radon λ définie sur $E \times F$ et satisfaisant à la condition (1) pour toute fonction $u \in \mathcal{K}(E)$ et toute fonction $v \in \mathcal{K}(F)$.

Dans les raisonnements qui précèdent, on peut intervertir les rôles des espaces E et F ; on définit ainsi l'application $h \to \int d\mu(x) \int h(x,y) d\nu(y)$ qui est l'extension aux fonctions à valeurs dans G d'une intégrale de Radon sur $E \times F$ qui satisfait encore à la condition (1). En vertu de la prop.1, on voit donc que :

THÉORÈME 1 (théorème d'interversion des intégrations).- Soient μ et ν deux intégrales de Radon définies respectivement sur deux espaces localement compacts E et F. Pour toute application continue h de $E \times F$ dans un espace localement convexe complet G, à support compact, on a

$$\int d\mu(x) \int h(x,y) d\nu(y) = \int d\nu(y) \int h(x,y) d\mu(x) . \tag{3}$$

En raison de la prop.3 et du th.1, la valeur, pour une fonction $h \in \mathcal{K}_G(E \times F)$, de l'intégrale produit de μ par ν, se notera $\iint h \, d\mu \, d\nu$, ou $\iint h \, d\nu \, d\mu$, ou $\iint h(x,y) d\mu(x) d\nu(y)$, ou enfin $\iint h(x,y) d\nu(y) d\mu(x)$; la formule (3) s'écrit donc

$$\iint h(x,y) d\mu(x) d\nu(y) = \int d\mu(x) \int h(x,y) d\nu(y) = \int d\nu(y) \int h(x,y) d\mu(x) \tag{4}$$

Une intégrale produit de deux intégrales de Radon μ et ν, et encore dite intégrale double.

Exemples.- 1) Soient E et F deux espaces discrets ; prenons pour μ (resp. ν) l'intégrale de Radon sur E (resp. F) définie par la masse +1 placée en chaque point de E (resp. F). L'intégrale de Radon produit est alors définie par la masse +1 placée en chaque point de $E \times F$, car on a

$$\sum_{y\in F}\left(\sum_{x\in E} f(x,y)\right) = \sum_{(x,y)\in E\times F} f(x,y)$$

pour toute fonction f nulle sauf en un nombre fini de points de $E\times F$.

2) Prenons $E=F=\mathbb{R}$ et pour μ et ν l'<u>intégrale de Lebesgue</u> (§ 2,n°2) sur $\mathbb{R}$; on dit alors que l'intégrale produit est l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$; sa valeur, pour toute fonction $h\in\mathcal{K}_G(\mathbb{R}^2)$, se note $\iint h(x,y)dx\,dy$ ou $\iint h(x,y)dy\,dx$; la formule (3), pour une fonction h nulle hors d'un rectangle compact $[a,b]\times[c,d]$, équivaut à la formule

$$\int_c^d dy\int_a^b h(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^d h(x,y)dy$$

démontrée dans <u>Fonct.var.réelle</u>, chap.II, §3,n° 6.

2. <u>Propriétés des intégrales produits</u>.

Considérons le <u>produit tensoriel</u> (<u>Alg</u>., chap.III, § 1) des deux espaces vectoriels $\mathcal{K}(E)$ et $\mathcal{K}(F)$ sur $\mathbb{C}$; si à tout élément $\sum_k f_k\otimes g_k$ de cet espace vectoriel on fait correspondre l'application $(x,y)\rightarrow\sum_k f_k(x)g_k(y)$ de $E\times F$ dans $\mathbb{C}$, on définit un <u>isomorphisme</u> (algèbrique) de $\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{K}(F)$ dans $\mathcal{K}(E\times F)$. En effet, soit (f_α) une base de $\mathcal{K}(E)$ sur $\mathbb{C}$, (g_β) une base de $\mathcal{K}(F)$ sur $\mathbb{C}$; il suffit de voir que si l'application $(x,y)\rightarrow\sum_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha\beta}\, f_\alpha(x)g_\beta(y)$ est nulle, on a $\lambda_{\alpha\beta}=0$ pour tout couple d'indices. Or, cette hypothèse entraîne $\sum_\alpha\left(\sum_\beta\lambda_{\alpha\beta}\, g_\beta(y)\right)f_\alpha(x)=0$ pour tout x , donc, puisque les f_α forment une base de $\mathcal{K}(E)$, $\sum_\beta\lambda_{\alpha\beta}\, g_\beta(y)=0$ pour tout y , et on voit de la même manière que $\lambda_{\alpha\beta}=0$ pour tout couple d'indices. On peut donc <u>identifier</u> canoniquement au moyen de l'isomorphisme prédédent l'ensemble des applications continues à support compact de la forme $(x,y)\rightarrow\sum_k f_k(x)g_k(y)$ au produit tensoriel

$\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{K}(F)$. Le même raisonnement s'applique au produit tensoriel $\mathcal{C}(E) \otimes \mathcal{C}(F)$. Si μ est une intégrale de Radon sur E , ν une intégrale de Radon sur F , la restriction à $\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{K}(F)$ de l'intégrale produit de μ par ν n'est autre alors que le <u>produit tensoriel</u> $\mu \otimes \nu$ des deux formes linéaires μ et ν (<u>Alg.</u>, chap.III, § 1, n°4). Par abus de langage, nous noterons encore ainsi l'intégrale produit elle-même (et non seulement sa restriction à $\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{K}(F)$). La formule (1) s'écrit donc

(5) $$\langle f \otimes g, \mu \otimes \nu \rangle = \langle f, \mu \rangle \langle g, \nu \rangle \quad .$$

L'application $(\mu, \nu) \rightarrow \mu \otimes \nu$ de $\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F)$ dans $\mathcal{M}(E \times F)$ est évidemment <u>bilinéaire</u>, autrement dit, on a

$$(\mu_1 + \mu_2) \otimes (\nu_1 + \nu_2) = \mu_1 \otimes \nu_1 + \mu_1 \otimes \nu_2 + \mu_2 \otimes \nu_1 + \mu_2 \otimes \nu_2$$

et, pour tout scalaire a

$$(a\mu) \otimes \nu = \mu \otimes (a\nu) = a(\mu \otimes \nu).$$

Il est clair que si μ et ν sont deux intégrales <u>positives</u>, $\mu \otimes \nu$ est une intégrale <u>positive</u>.

PROPOSITION 4.- <u>Si</u> μ <u>est une intégrale de Radon sur</u> E , ν <u>une intégrale de Radon sur</u> F , <u>on a</u>

(6) $$|\mu \otimes \nu| = |\mu| \otimes |\nu| \quad .$$

En effet, pour toute fonction $h \in \mathcal{K}(E \times F)$, on a, d'après la formule (4) ci-dessus et la prop.2 du § 2

$$\left|\langle h, \mu \otimes \nu \rangle\right| \leq \int d|\mu| . \left|\int h \, d\nu\right| \leq \int d|\mu| \int |h| \, d|\nu| = \langle |h|, |\mu| \otimes |\nu| \rangle$$

ce qui prouve que $|\mu \otimes \nu| \leq |\mu| \otimes |\nu|$. D'autre part, soit ρ une intégrale de Radon positive sur $E \times F$ telle que $|\langle h, \mu \otimes \nu \rangle| \leq \rho(|h|)$; cette inégalité entraîne en particulier, pour $h = f \otimes g$ ($f \in \mathcal{K}(E)$, $g \in \mathcal{K}(F)$) $|\mu(f)| . |\nu(g)| \leq \rho(|f| \otimes |g|)$. Si g est telle que $\nu(g) \neq 0$, comme $f \rightarrow \rho(f \otimes |g|)$ est une intégrale de Radon positive sur E, et que $|\mu|$ est la plus petite intégrale de Radon positive λ satisfaisant à $|\mu(f)| \leqslant \lambda(|f|)$ (§ 2, cor.1 de la prop.2), on a $|\mu|(|f|).|\nu(g)| \leqslant \rho(|f| \otimes |g|)$; le même raisonnement appliqué à ν montre alors que si $\mu(f) \neq 0$, on a $|\mu|(|f|).|\nu|(|g|) \leqslant \rho(|f| \otimes |g|)$. Par suite, si h est de la forme $\sum_k f_k \otimes g_k$, où les f_k (resp. g_k) sont des fonctions <u>positives</u> de $\mathcal{K}(E)$ (resp. $\mathcal{K}(F)$), on a $\langle h, |\mu| \otimes |\nu| \rangle \leqslant \rho(h)$; mais d'après le lemme 2, cette inégalité est encore valable pour <u>toute</u> fonction $h \geqslant 0$ de $\mathcal{K}(E \times F)$. On a donc $|\mu| \otimes |\nu| \leqslant \rho$, ce qui achève la démonstration, en vertu du cor.1 de la prop.2 du § 2.

PROPOSITION 5.- <u>Soient</u> μ <u>une intégrale de Radon sur</u> E, ν <u>une intégrale de Radon sur</u> F ; <u>si</u> $f \in \mathcal{C}(E)$, $g \in \mathcal{C}(F)$, <u>on a</u>

$$(f.\mu) \otimes (g.\nu) = (f \otimes g).(\mu \otimes \nu). \tag{7}$$

En effet, pour toute fonction $h \in \mathcal{K}(E \times F)$, on a, d'après (4)

$$\langle h, (f.\mu) \otimes (g.\nu) \rangle = \int f(x)d\mu(x) \int h(x,y)g(y)d\nu(y)$$
$$= \int d\mu(x) \int h(x,y)f(x)g(y)d\nu(y)$$

ce qui, compte tenu de (4), démontre la relation (7).

PROPOSITION 6.- <u>Le produit de deux intégrales de Radon bornées</u> μ, ν <u>est une intégrale de Radon bornée, et on a</u>

$$\|\mu \otimes \nu\| = \|\mu\| . \|\nu\| \tag{8}$$

En effet, on a $\left\| \int h(x,y)d\nu(y) \right\| \leqslant \|h\| . \|\nu\|$, d'où, d'après (4)

$$|\langle h, \mu \otimes \nu \rangle| \leqslant \|h\| . \|\mu\| . \|\nu\|$$

ce qui prouve que $\mu \otimes \nu$ est bornée et qu'on a $\|\mu \otimes \nu\| \leqslant \|\mu\| . \|\nu\|$. D'autre part, pour $f \in \mathcal{K}(E)$, $g \in \mathcal{K}(F)$, on a $\|f \otimes g\| = \|f\| . \|g\|$ et par suite

$$|\mu(f)| . |\nu(g)| = |\langle f \otimes g, \mu \otimes \nu \rangle| \leqslant \|\mu \otimes \nu\| . \|f\| . \|g\|$$

Ceci prouve que $\|\mu\otimes\nu\|\cdot\|g\|\geqslant\|\mu\|\cdot|\nu(g)|$, puisque $\|\mu\otimes\nu\|\geqslant\|\mu\|\cdot\|\nu\|$ d'où la proposition.

PROPOSITION 7.- <u>Le support du produit</u> $\mu\otimes\nu$ <u>est égal au produit du support de</u> μ <u>et du support de</u> ν .

En effet, soit S le support de μ , T le support de ν . Soit (x,y) un point n'appartenant pas à $S\times T$; supposons par exemple que $y\notin T$. Il existe alors un voisinage ouvert V de y ne rencontrant pas T ; pour toute fonction $h\in\mathcal{K}(E\times F)$ de support contenu dans $E\times V$, on a, $\int h(x,y)d\nu(y)=0$ pour tout $x\in E$, d'où, en vertu de (4), $\iint h\,d\mu\,d\nu=0$, ce qui prouve que (x,y) n'appartient pas au support de $\mu\otimes\nu$. Si au contraire $(x,y)\in S\times T$, pour tout voisinage U de x et tout voisinage V de y , il existe une fonction $u\in\mathcal{K}(E)$, de support contenu dans U , et une fonction $v\in\mathcal{K}(F)$, de support contenu dans V , telles que $\mu(u)\neq 0$ et $\nu(v)\neq 0$. Alors le support de $u\otimes v$ est contenu dans $U\times V$, et on a $\langle u\otimes v\,,\,\mu\otimes\nu\rangle=\mu(u)\nu(v)\neq 0$, ce qui achève la démonstration.

En particulier, le produit $\varepsilon_x\otimes\varepsilon_y$ des intégrales de Radon définies par la masse +1 placée au point $x\in E$ (resp. $y\in F$) n'est autre que l'intégrale $\varepsilon_{(x,y)}$. La prop.21 du § 2 montre donc que l'ensemble des intégrales de Radon de la forme $\sum_k \mu_k\otimes\nu_k$ sur $E\times F$ est <u>partout dense</u> dans $\mathcal{M}(E\times F)$ pour la topologie <u>vague</u>.

PROPOSITION 8.- <u>L'application bilinéaire</u> $(\mu,\nu)\to\mu\otimes\nu$ <u>de</u> $\mathcal{M}(E)\times\mathcal{M}(F)$ <u>dans</u> $\mathcal{M}(E\times F)$ <u>est continue quand on munit</u> $\mathcal{M}(E)$, $\mathcal{M}(F)$ <u>et</u> $\mathcal{M}(E\times F)$ <u>de la topologie forte</u>.

En effet, soit A un ensemble compact dans $E \times F$; il est contenu dans un ensemble de la forme $K \times L$, où $K \subset E$ et $L \subset F$ sont compacts. Montrons que si μ varie de sorte que $|\mu(f)| \leqslant a$ pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{K}(E)$ de support contenu dans K et telles que $\|f\| \leqslant 1$ et si ν varie de sorte que $|\nu(g)| \leqslant b$ pour toutes les fonctions $g \in \mathcal{K}(F)$ de support contenu dans L et telles que $\|g\| \leqslant 1$, alors $\langle h, \mu \otimes \nu \rangle$ est borné pour toutes les fonctions $h \in \mathcal{K}(E \times F)$ de support contenu dans A et telles que $\|h\| \leqslant 1$. En effet, on a $\left| \int h(x,y) d\nu(y) \right| \leqslant b$ pour tout $x \in K$, puisque le support de $y \to h(x,y)$ est contenu dans L ; il en résulte que $\left| \int d\mu(x) \int h(x,y) d\nu(y) \right| \leqslant ab$, puisque le support de $\int h(x,y) d\nu(y)$ est contenu dans K.

PROPOSITION 9.- <u>Soient</u> B <u>un ensemble borné dans</u> $\mathcal{M}(E)$, C <u>un ensemble borné dans</u> $\mathcal{M}(F)$; <u>lorsqu'on munit</u> $\mathcal{M}(E)$, $\mathcal{M}(F)$ <u>et</u> $\mathcal{M}(E \times F)$ <u>de la topologie vague, l'application</u> $(\mu, \nu) \to \mu \otimes \nu$ <u>de</u> $B \times C$ <u>dans</u> $\mathcal{M}(E \times F)$ <u>est continue</u>.

Tout revient à montrer que, pour toute fonction $h \in \mathcal{K}(E \times F)$, l'application $(\mu, \nu) \to \iint h \, d\mu \, d\nu$ est continue. Soient $K \subset E$, $L \subset F$ deux ensembles compacts tels qu'un voisinage du support de h soit contenu dans $K \times L$. Par hypothèse, il existe un nombre $a > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ (resp. $g \in \mathcal{K}(F)$), de support contenu dans K (resp. L) et pour toute intégrale $\mu \in B$ (resp. $\nu \in C$), on ait $|\mu(f)| \leqslant a\|f\|$ (resp. $|\nu(g)| \leqslant a\|g\|$). Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire ; d'après le lemme 1, il existe n fonctions $f_k \in \mathcal{K}(E)$ de support contenu dans K, et n fonctions $g_k \in \mathcal{K}(F)$ de support contenu dans L, telles que $\|h - \sum f_k \otimes g_k\| \leqslant \varepsilon$; il en résulte, d'après (4) que $\left| \iint (h - \sum_k f_k \otimes g_k) d\mu \, d\nu \right| \leqslant a^2 \varepsilon$ pour $\mu \in B$ et $\nu \in C$;

comme l'application $(\mu, \nu) \to \sum_k \langle f_k, \mu \rangle \cdot \langle g_k, \nu \rangle$ est continue dans $\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F)$, $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$ étant munis de la topologie vague, la proposition est démontrée.

PROPOSITION 10.- Soient E, F, E_1, F_1 quatre espaces localement compacts, φ une application propre de E dans E_1, ψ une application propre de F dans F_1. Soient μ une intégrale de Radon sur E, ν une intégrale de Radon sur F ; l'application (φ, ψ) de $E \times F$ dans $E_1 \times F_1$ est propre, et on a

(9) $$(\varphi, \psi)(\mu \otimes \nu) = \varphi(\mu) \otimes \psi(\nu).$$

Il résulte aussitôt de la définition de l'extension (φ, ψ) que l'image réciproque par cette extension d'un ensemble compact de la forme $K \times L$ dans $E_1 \times F_1$ est $\overset{-1}{\varphi}(K) \times \overset{-1}{\psi}(L)$, donc (φ, ψ) est propre. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E_1)$ et toute fonction $g \in \mathcal{K}(F_1)$, on a par définition $(f \otimes g) \circ (\varphi, \psi) = (f \circ \varphi) \otimes (g \circ \psi)$, donc les intégrales de Radon qui figurent aux deux membres de (9) coïncident pour toutes les fonctions de la forme $f \otimes g$ dans $\mathcal{K}(E_1 \times F_1)$; elles sont donc égales en vertu de la prop.1 .

En particulier, si μ (resp. ν) est invariante par l'homéomorphisme σ (resp. τ) de E (resp. F), $\mu \otimes \nu$ est invariante par l'homéomorphisme (σ, τ) de $E \times F$.

PROPOSITION 11.- L'intégrale de Lebesgue sur R^2 est invariante par toute translation du groupe additif R^2.

Cela résulte aussitôt de ce qui précède et de la prop.28 du § 2, puisque toute translation de R^2 est de la forme (σ, τ), σ et τ étant des translations dans R.

3. <u>Produit d'un nombre fini d'intégrales de Radon.</u>

Soient E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n espaces localement compacts. Le lemme 1 du n°1 se généralise de la façon suivante : <u>si</u> K_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>est une partie compacte de</u> E_i , U_i <u>un voisinage ouvert relativement compact de</u> K_i <u>dans</u> E_i, <u>toute application continue de</u> $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ <u>dans un espace vectoriel localement convexe</u> G , <u>dont le support est contenu dans</u> $\prod_{i=1}^{n} K_i$, <u>est adhérente, pour la topologie de la convergence uniforme dans</u> E , <u>à une combinaison linéaire</u> (<u>à coefficients dans</u> G) <u>de fonctions de la forme</u> $u_1(x_1)u_2(x_2)..u_n(x_n)$, u_i <u>étant une fonction de</u> $\mathcal{K}(E_i)$ <u>à support contenu dans</u> U_i . Nous laissons au lecteur le détail de la démonstration. On peut identifier canoniquement les combinaisons linéaires (à coefficients dans $\mathbb{C}$) de fonctions de la forme $u_1(x_1)u_2(x_2)...u_n(x_n)$ au produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{K}(E_i)$. Il résulte du lemme ci-dessus que deux intégrales de Radon sur E qui coïncident pour toutes les fonctions de la forme $u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_n$ <u>sont identiques</u>.

Soit alors μ_i une intégrale de Radon sur E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On définit l'intégrale de Radon sur E , <u>produit</u> des intégrales μ_i , qu'on désignera par la notation $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ ou $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$, par la relation de récurrence

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots\ldots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n$$

Cette définition montre aussitôt qu'on a

$$(10) \quad \langle f_1 \otimes f_2 \otimes .. \otimes f_n , \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes .. \otimes \mu_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle f_i , \mu_i \rangle$$

d'où résulte la proposition suivante :

PROPOSITION 12 ("associativité du produit d'intégrales").- <u>Soit</u> $(I_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ <u>une partition de l'intervalle</u> $[1,n]$; <u>on a</u>

$$(11) \quad \bigotimes_{k=1}^{p} \Big(\bigotimes_{i \in I_k} \mu_i \Big) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i .$$

En effet, ces deux intégrales de Radon coïncident, d'après (10) pour toutes les fonctions de la forme $f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n$.

La valeur, pour une fonction $h \in \mathcal{K}_G(E)$, de l'intégrale produit $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$, se notera $\int h \, d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n$, ou $\underbrace{\iint \ldots \int} h \, d\mu_1 \ldots d\mu_n$ ou encore $\underbrace{\iint \ldots \int}_{n} h(x_1, \ldots, x_n) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) \overset{n}{\ldots} d\mu_n(x_n)$. D'après la prop.12 et le th. d'interversion des intégrations, pour toute permutation σ de $\{1,n\}$, on a

$$(12) \quad \underbrace{\iint \ldots \int}_{n} h \, d\mu_1 d\mu_2 \ldots d\mu_n = \int d\mu_{\sigma(1)} \int d\mu_{\sigma(2)} \ldots \int h \, d\mu_{\sigma(n)}.$$

Le lecteur généralisera sans peine au produit d'un nombre fini quelconque d'intégrales de Radon les prop. 4 à 10.

En particulier, on appelle <u>intégrale de Lebesgue</u> sur $\mathbb{R}^n$ le produit de n intégrales identiques à l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; sa valeur, pour toute fonction $h \in \mathcal{K}_G(\mathbb{R}^n)$, se note $\underbrace{\iint \ldots \int}_{n} h(x_1, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, et est égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} h(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n .$$

On montre comme dans la prop.11 que l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est <u>invariante par toute translation de</u> $\mathbb{R}^n$.

4. Produits infinis d'intégrales de Radon.

Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espaces localement compacts, tels que E_ι soit <u>compact</u> sauf pour un nombre <u>fini</u> d'indices $\iota \in I$; l'espace produit $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ est alors <u>localement compact</u> (<u>Top.gén.</u>, chap.I, § 10, prop.11). Nous dirons qu'une application f de E dans un ensemble G <u>ne dépend pas des variables d'indice</u> $\iota \notin J$, (ou que f <u>ne dépend que des variables d'indice</u> $\iota \in J$), où J est une partie quelconque de I, si la relation $pr_J(x) = pr_J(x')$ entraîne $f(x) = f(x')$. Si on pose $E_J = \prod_{\iota \in J} E_\iota$, on peut alors définir, à partir de f, une application

f_J de E_J dans G , par passage au quotient, suivant la relation d'équivalence $pr_J(x)=pr_J(x')$ (Ens.R, § 5,n°7). Si G est un espace topologique et si f est continue dans E , f_J est continue dans E_J . Lorsque f ne dépend que des variables dont l'indice appartient à une partie finie de I , nous dirons que f ne dépend que d'un nombre fini de variables.

Soit H l'ensemble (fini) des indices $\iota \in I$ tels que E soit non compact ; nous désignerons par F l'espace compact produit des E_ι d'indice $\iota \notin H$; on peut identifier E à l'espace produit $E_H \times F$.

Lemme 3.- Soit h une application continue à support compact de E dans un espace localement convexe G ; soit K une partie compacte de E_H telle que le support de h soit contenu dans $K \times F$, et soit U un voisinage compact de K dans E_H . La fonction h peut être approchée uniformément dans E par des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de variables, et dont le support est contenu dans $U \times F$.

En effet, d'après le lemme 1, h peut être approchée uniformément par des fonctions de la forme $\sum_i a_i u_i(z) v_i(t)$, où $u_i(z)$ est une fonction de $\mathcal{K}(E_H)$ à support contenu dans U , et $v_i(t)$ une fonction de $\mathcal{C}(F)$; on sait d'autre part (Top.gén., chap.X, § 5,th.4) que chacune des fonctions v_i peut être approchée uniformément par des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de variables, ce qui démontre le lemme.

Pour chaque indice $\iota \in I$, soit μ_ι une intégrale de Radon sur E ; nous dirons que la famille $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ est multipliable si, pour tout $\iota \in \complement H$ à l'exception d'un nombre fini d'indices, μ_ι est une moyenne sur E , c'est-à-dire (§ 1,n°6) une intégrale positive et de masse totale $\mu_\iota(1)=1$.

Soit G un espace localement convexe et complet ; désignons par $\mathcal{J}_G(E)$ l'espace vectoriel des applications continues de E dans G , à support compact et ne dépendant que d'un nombre <u>fini</u> de variable. Pour toute partie <u>finie</u> J de I , soit μ_J l'intégrale produit $\bigotimes_{\iota \in J} \mu_\iota$ définie sur E_J . Pour toute fonction $f \in \mathcal{J}_G(E)$, soit J_o une partie finie de I , contenant l'ensemble des indices $\iota \in I$ pour lesquels μ_ι n'est pas une moyenne (et en particulier contenant H) et telle que f ne dépende que des variables d'indice $\iota \in J_o$; pour toute partie finie $J \supset J_o$ de I, la fonction f_J est donc définie dans E_J , par suite aussi l'élément $\mu_J(f_J)$; en outre, il résulte du choix de J_o et de la formule (4) que l'on a $\mu_J(f_J) = \mu_{J_o}(f_{J_o})$ pour tout $J \supset J_o$. L'application $J \to \mu_J(f_J)$ a donc une limite suivant l'ensemble filtrant des parties finies de I ; nous désignerons par $\mu(f)$ cette limite ; il est immédiat que μ est une application linéaire de $\mathcal{J}_G(E)$ dans G . En outre, soit q une semi-norme continue sur G , et soit $R = J_o \cap \complement H$; on a $q(\mu_{J_o}(f_{J_o})) \leqslant |\mu_{J_o}|(q(f_{J_o}))$, et

(13) $$|\mu_{J_o}|(q(f_{J_o})) = \int d\,|\mu_R| \int q(f_{J_o})\,d\,|\mu_H|$$

Supposons le support de f contenu dans $U \times F_2$; le support de f_{J_o} est alors contenu dans $U \times E_R$. Soit h une application continue de F_1 dans $[0,1]$, égale à 1 dans U ; par hypothèse, il existe un nombre M_U tel que la relation $q(g) \leqslant \varepsilon h$ pour une application continue g de F_1 dans G , de support contenu dans U , entraîne $|\mu_H|(q(g)) \leqslant M_U \varepsilon$; d'après (13) et la prop.6, la relation $q(f) \leqslant \varepsilon h$ entraîne $q(\mu(f)) \leqslant M M_U \varepsilon$ où M est le <u>produit</u> des normes $\|\mu_\iota\|$ pour les indices $\iota \notin H$ tels que μ_ι ne soit pas une moyenne.

Soit maintenant f une fonction <u>quelconque</u> de $\mathcal{K}_G(E)$, de support contenu dans $K \times F_2$; la remarque faite au début de ce n° montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \mathcal{J}_G(E)$ de support contenu dans $U \times F_2$ et telle que $q(f-g) \leqslant \varepsilon h$; si g_1 et g_2 sont deux fonctions ayant cette propriété, on a, d'après ce qui précède $q(\mu(g_1)-\mu(g_2)) \leqslant 2\,M\,M_U\varepsilon$; comme G est complet, on voit donc que $\mu(g)$ tend vers une limite lorsque g tend uniformément vers f en restant dans $\mathcal{J}_G(E)$ et en ayant son support contenu dans U . On montre aisément que cette limite ne dépend pas du voisinage compact U de K considéré ; on peut par suite la noter $\mu(f)$. On vérifie sans peine que μ est l'extension aux fonctions à valeurs dans G d'une intégrale de Radon sur E , qu'on appelle le produit des intégrales μ_ι ($\iota \in I$), et qu'on note $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$.

PROPOSITION 13.- Si la famille $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ est multipliable, il en est de même de la famille $(|\mu_\iota|)_{\iota \in I}$, et on a

$$\left|\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota\right| = \bigotimes_{\iota \in I} |\mu_\iota| \quad (14)$$

En effet, compte tenu de la prop.4, on vérifie aussitôt que les intégrales des deux membres de (14) ont même valeur pour toute fonction de $\mathcal{J}(E)$, donc sont identiques.

PROPOSITION 14.- Si la famille multipliable $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ est formée d'intégrales bornées, l'intégrale produit $\mu = \bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ est bornée, et on a

$$\left\|\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota\right\| = \prod_{\iota \in I} \|\mu_\iota\| \quad (15)$$

En effet, si on pose $a = \prod_{\iota \in I} \|\mu_\iota\|$ il résulte de la définition que, pour toute fonction $h \in \mathcal{J}(E)$, on a $|\mu(h)| \leqslant a\,\|h\|$; cette inégalité est donc encore valable par continuité pour ~~sur~~ toute fonction de $\mathcal{K}(E)$, ce qui montre que μ est bornée et que $\left\|\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota\right\| \leqslant a$. D'autre part, si f est une fonction ne dépendant que des variables d'indice $\iota \in J$ (J partie finie de I), et si J contient tous les indices ι tels que $\|\mu_\iota\| \neq 1$, on a

$\left|\mu_J(f_J)\right| = \left|\mu(f)\right| \leqslant \|\mu\| \cdot \|f\| = \|\mu\| \cdot \|f_J\|$, donc $\|\mu\| \geqslant \|\mu_J\| = a$ (prop.6), ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 15.- <u>Soit</u> $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ <u>une partition de</u> I ; <u>si la famille</u> $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ <u>est multipliable, chacune des familles</u> $(\mu_\iota)_{\iota \in I_\lambda}$ <u>est multipliable, et si on pose</u> $\nu_\lambda = \bigotimes_{\iota \in I_\lambda} \mu_\iota$, <u>la famille</u> $(\nu_\lambda)_{\lambda \in L}$ <u>est multipliable, et on a</u>

$$\bigotimes_{\lambda \in L} \Big(\bigotimes_{\iota \in I_\lambda} \mu_\iota \Big) = \bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota . \tag{16}$$

En effet, sauf pour un nombre fini d'indices λ , I_λ ne contient que des indices ι tels que E_ι soit compact et μ_ι une moyenne ; par suite, pour ces indices, E_{I_λ} est compact et ν_λ une moyenne . L'identité des deux membres de (16) résulte alors de ce que, pour toute fonction $f \in \mathcal{J}(E)$, les deux membres de (16) ont même valeur en vertu de la prop.12 .

Nous laissons au lecteur le soin de formuler et de démontrer les extensions aux produits infinis d'intégrales des prop.7 et 10 ; en particulier, si, pour chaque $\iota \in I$, σ_ι est un homéomorphisme de E_ι sur lui-même tel que μ_ι soit invariante par σ_ι , l'intégrale produit $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ est invariante par l'homéomorphisme (σ_ι) de E sur lui-même .
