# LIVRE VII
# MESURES ET DISTRIBUTIONS
# CHAPITRE I (ETAT 5)
# ESPACES DE RIESZ

Rédaction n° 070

Nombre de pages : 25

Nombre de feuilles : 25



Livre VII Mesures et distributions

Chap I. Etat 5

Espaces de Riesz

70

A 70

# LIVRE VII

# MESURES ET DISTRIBUTIONS

## CHAPITRE I (Etat 5)

## ESPACES DE RIESZ

### Sommaire

# LIVRE VII

# MESURES ET DISTRIBUTIONS

## CHAPITRE I (Etat 5)

## ESPACES DE RIESZ

### § 1. Espaces de Riesz.

1. Définition des espaces de Riesz.

Rappelons (Esp.vect.top., chap.II, §    ) que, sur un ensemble $E$, une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et une structure d'ordre sont dites compatibles si elles satisfont aux deux axiomes suivants :

$(EO_I)$ La relation $x \leqslant y$ entraîne $x+z \leqslant y+z$ quel que soit $z \in E$.

$(EO_{II})$ La relation $x \geqslant 0$ entraîne $\lambda x \geqslant 0$ pour tout scalaire $\lambda \geqslant 0$

L'espace $E$, muni de ces deux structures, est alors appelé espace vectoriel ordonné.

L'axiome $(EO_I)$ signifie que la structure d'ordre et la structure de groupe additif sur $E$ sont compatibles, autrement dit, que $E$, muni de ces deux structures, est un groupe ordonné (Alg., chap.VI).

DÉFINITION 1.- On dit qu'un espace vectoriel ordonné est un espace de Riesz si sa structure d'ordre est une structure d'ensemble réticulé.

Exemple.- L'espace $\mathbb{R}^E$ de toutes les fonctions numériques (finies) définies dans un ensemble $E$ est un espace de Riesz (pour la relation d'ordre "quel que soit $t \in E$, $x(t) \leqslant y(t)$") : en effet, deux fonctions numériques quelconques $x, y$ définies dans $E$ admettent une borne supérieure égale à l'application $t \to \sup(x(t), y(t))$. On notera que $\mathbb{R}^E$ peut être considéré comme le produit d'une famille d'espaces vectoriels identiques à $\mathbb{R}$ et ayant $E$ comme ensemble d'indices, la relation d'ordre étant le produit(*)

(*) Rappelons (Ens., chap.III) que si $(E_\iota)$ est une famille d'ensembles ordonnés, la relation d'ordre produit des relations d'ordre des $E_\iota$ est la relation : "quel que soit $\iota$, $x_\iota \leqslant y_\iota$" entre les éléments $(x_\iota)$ et $(y_\iota)$ de l'ensemble produit $\prod_\iota E_\iota$.

des relations d'ordre des facteurs (*Ens.*, chap. III, § 1). Plus généralement, si $(F_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille quelconque d'espaces de Riesz, et si on munit l'ensemble produit $F = \prod_{\iota \in I} F_\iota$ de la structure d'espace vectoriel et de la structure d'ordre *produits* des structures correspondantes des facteurs, F est un espace de Riesz ; en particulier, si E est un ensemble quelconque, G un espace de Riesz, l'espace vectoriel $G^E$ des applications de E dans G (avec la relation d'ordre "quel que soit $t \in E$, $x(t) \leq y(t)$") est un espace de Riesz.

On peut encore dire qu'un espace de Riesz est un espace vectoriel E muni d'une structure d'ordre telle que, d'une part cette structure et la structure de groupe additif de E définissent sur E une structure de *groupe réticulé* (*Alg.*, chap. VI), et d'autre part l'axiome $(EO_{II})$ soit vérifié.

Toutes les propriétés des groupes réticulés sont donc applicables aux espaces de Riesz ; nous allons rappeler les principales (cf. *Alg.*, chap. VI), en indiquant les conséquences supplémentaires qu'entraîne l'axiome $(EO_{II})$.

Rappelons d'abord qu'on pose $x^+ = \sup(x,0)$, $x^- = \sup(-x,0)$ et $|x| = \sup(x,-x)$ ; on a $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ ; ces deux relations équivalent ici à $x^+ = \frac{1}{2}(|x|+x)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x|-x)$. Quels que soient x et y, on a l'*inégalité du triangle*

$$(1) \qquad |x+y| \leq |x|+|y| .$$

Si $\lambda$ est un scalaire $> 0$, des relations $u \geqslant 0$, $u \geqslant \lambda x$ on tire $\frac{1}{\lambda} u \geqslant 0$, $\frac{1}{\lambda} u \geqslant x$ d'après $(EO_{II})$, donc $\frac{1}{\lambda} u \geqslant x^+$ et $u \geqslant \lambda x^+$, et réciproquement ; on a donc $(\lambda x)^+ = \lambda x^+$, et on voit de même que $(\lambda x)^- = \lambda x^-$, d'où $|\lambda x| = \lambda |x|$. Si au contraire $\lambda < 0$, on a on a $(\lambda x)^+ = (-\lambda x)^- = |\lambda| x^-$ et $(\lambda x)^- = (-\lambda x)^+ = |\lambda| x^+$ ; on en conclut que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$

(2) $$|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad .$$

Quel que soit $z \in E$ , on a

(3) $$\sup(x+z,\ y+z) = z+\sup(x,y)$$

d'où, en particulier

(4) $$\sup(x,y) = x+(y-x)^+ = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \ .$$

Si $\lambda \geqslant 0$ , on a, d'après $(EO_{II})$

(5) $$\sup(\lambda x, \lambda y) = \lambda \sup(x,y) \quad .$$

On sait d'autre part que

(6) $$\sup(-x,\ -y) = -\inf(x,y)$$

et que l'on a la relation

(7) $$\sup(x,y)+\inf(x,y) = x+y \ .$$

Si $x,y,z$ sont $\geqslant 0$, on a

(8) $$\inf(x+y,z) \leqslant \inf(x,z)+\inf(y,z) \ .$$

Si A et B sont deux parties de E ayant chacune une borne supérieure, $A+B$ admet également une borne supérieure, et on a

(9) $$\sup(A+B) = \sup A + \sup B \quad .$$

Rappelons encore que, si $(A_\iota)$ est une famille de parties de E on a $\sup(\bigcup_\iota A_\iota) = \sup_\iota(\sup A_\iota)$, pourvu que les bornes supérieures figurant au second membre existent (<u>Ens.</u>, chap.III) ; en particulier, si la famille $(x_\alpha)$ admet une borne supérieure, on a

(10) $$\sup_\alpha(x_\alpha^+) = (\sup_\alpha(x_\alpha))^+ \quad .$$

On montre en outre (<u>Alg.</u>,chap.VI) que, si la famille $(x_\alpha)$ admet une borne inférieure dans E , on a

(11) $$\inf_\alpha (x_\alpha^+) = (\inf_\alpha (x_\alpha))^+$$

d'où on déduit les relations de <u>distributivité</u>

$$(12) \quad \begin{cases} \inf(x, \sup_\alpha (y_\alpha)) = \sup_\alpha (\inf(x,y_\alpha)) \\ \sup(x,\inf_\alpha (y_\alpha)) = \inf_\alpha (\sup(x,y_\alpha)) \end{cases}$$

lorsque la famille $(y_\alpha)$ admet une borne supérieure (resp. inférieure)

Deux éléments $x,y$ de $E$ sont dits <u>étrangers</u> si $\inf(|x|,|y|)=0$ ; d'après (7), cette relation équivaut à $\sup(|x|,|y|)=|x|+|y|$, et d'après (4), à $||x|-|y||=|x|+|y|$ ; 0 est le seul élément étranger à lui-même. Pour tout $x\in E$, $x^+$ et $x^-$ sont étrangers. Si $y$ est étranger à $x$, tout $z\in E$ tel que $|z|\leqslant |y|$ est aussi étranger à $x$ ; de même, tout multiple scalaire $\lambda y$ de $y$ est étranger à $x$. Si $y$ et $z$ sont étrangers à $x$, il en est de même de $y+z$. Si une partie $A$ de $E$ est formée d'éléments étrangers à $x$, et si $A$ admet une borne supérieure, cette borne $\sup A$ est encore étrangère à $x$.

Si $x,y,z$ sont des éléments $\geqslant 0$ tels que $x$ et $y$ soient étrangers et que $x\leqslant y+z$, on a $x\leqslant z$ (<u>lemme d'Euclide</u>).

Rappelons enfin l'énoncé du <u>lemme de décomposition</u> :

<u>Si $(x_i)$, $(y_j)$ sont deux suites finies d'éléments $\geqslant 0$ de $E$ telles que $\sum_i x_i = \sum_j y_j$, il existe une suite double finie $(z_{ij})$ d'éléments $\geqslant 0$ de $E$ telle que $x_i = \sum_j z_{ij}$ pour tout $i$ et $y_j = \sum_i z_{ij}$ pour tout $j$.</u>

## 2. <u>Génération des espaces de Riesz par leurs éléments positifs.</u>

Soit $E$ un espace vectoriel ordonné ; on sait (<u>Esp.vect.top.</u> chap.II, § ) que l'ensemble $P$ des éléments $\geqslant 0$ de $E$ est un <u>secteur conique convexe</u> de sommet 0 ; inversement, si, dans un espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{R}$, $P$ est un secteur conique convexe de sommet 0, tel que $P\cap(-P)=\{0\}$, la relation $y-x\in P$ est une relation d'ordre <u>compatible</u> avec la structure d'espace vectoriel de $E$.

Pour que la structure d'ordre ainsi définie sur E définisse une structure d'<u>espace de Riesz</u>, il faut et il suffit que : 1° P engendre E, c'est-à-dire que tout $z \in E$ soit de la forme $y-x$, où x et y appartiennent à P ; 2° deux éléments quelconques de P admettent une borne inférieure (ou une borne supérieure) (<u>Alg.</u>, chap.VI, §    ).

<u>Exemple</u>.- Dans l'espace vectoriel E des primitives de fonctions règlées (Fonct.var.réelle, chap.II, § 1) dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, nulles en un point $x_0 \in I$ soit P l'ensemble des fonctions <u>croissantes</u>; il est clair que P est un secteur conique convexe et que $P \cap (-P)$ se réduit à la fonction 0 . Soit F le sous-espace de E engendré par P ; montrons que sur F, P définit une structure d'espace de Riesz. En effet, soient x et y deux fonctions de P, $x'_d$ et $y'_d$ les fonctions règlées $\geqslant 0$, dérivées à droite de x et y dans I ; si $z \in P$ et $x-z \in P$, $y-z \in P$, on a $z'_d \geqslant 0$, $x'_d - z'_d \geqslant 0$, $y'_d - z'_d \geqslant 0$ ; on en déduit aussitôt que la fonction $u \in P$ primitive de la fonction règlée $\inf(x'_d, y'_d)$ est borne inférieure de x et y dans P (pour la structure d'ordre définie par P).

3. <u>Sous-espaces d'un espace de Riesz</u>.

Soit E un espace de Riesz, H un sous-espace vectoriel de cet espace ; la structure d'ordre induite sur H par celle de E est évidemment compatible avec la structure d'espace vectoriel de H ; mais l'espace vectoriel H ainsi défini <u>n'est pas nécessairement un espace de Riesz</u>.

Par exemple, dans l'espace de Riesz $\mathbb{R}^I$ de toutes les fonctions numériques définies dans un intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$, le sous-espace H des <u>polynomes</u> n'est pas un espace de Riesz ; en effet, si f et g sont deux polynomes, $\inf(f,g)$ n'est pas un polynome en général (n'ayant pas nécessairement de dérivée en tout point). D'autre part, si on n'a pas $f \leqslant g$ ni $g \leqslant f$ dans I, et si h est un polynome tel que $h \geqslant f$ et $h \geqslant g$, il n'existe qu'un nombre fini de points $a_i \in I$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ tels que $h(a_i)=f(a_i)$, et un nombre fini de points $b_j \in I$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ tels que $h(b_j)=g(b_j)$. Il existe un polynome non nul $w \geqslant 0$ ayant en chaque point $a_i$ (resp. $b_j$) une racine dont l'ordre de multiplicité est strictement supérieur à l'ordre de multiplicité de $a_i$ (resp. $b_j$) comme racine de $h-f$ (resp. $h-g$). On en déduit aussitôt que pour tout $\varepsilon > 0$, $h-\inf(f,g)-\varepsilon w$ est $\geqslant 0$ dans un voisinage de chacun des points $a_i, b_j$, et par suite, dès que $\varepsilon > 0$ est assez petit, $h-\varepsilon w^2 \geqslant \inf(f,g)$ dans I, ce qui prouve qu'il n'existe pas dans H de borne supérieure pour l'ensemble $\{f,g\}$.

D'autre part, il peut se faire que H soit un espace de Riesz, mais que, pour deux éléments $x,y$ de H, la borne supérieure de $x$ et $y$ <u>dans</u> H soit distincte de la borne supérieure de $x$ et $y$ <u>dans</u> E (v.ci-dessous, exemple 3). Lorsque, pour tout couple d'éléments $x,y$ de H, la borne supérieure $\sup(x,y)$ de $x$ et $y$ dans E est aussi leur borne supérieure dans H, nous dirons que H est un sous-espace <u>propre</u> de l'espace de Riesz E.

PROPOSITION 1.- <u>Pour qu'un sous-espace vectoriel H d'un espace de Riesz E soit propre, il faut et il suffit que la relation $x \in H$ entraîne $|x| \in H$.</u>

La condition est évidemment nécessaire, puisque $|x| = \sup(x,-x)$; elle est suffisante en raison de la relation (4).

<u>Exemples</u>.- 1) Si E est un ensemble quelconque, le sous-espace $\mathcal{B}(E)$ des fonctions numériques <u>bornées</u> dans E est un sous-espace propre de l'espace de Riesz $\mathcal{R}^E$ de toutes les fonctions numériques définies dans E. Si E est un espace topologique, l'ensemble $\mathcal{C}_0(E)$

des fonctions numériques <u>continues</u> dans E est aussi un sous-espace propre de $\mathbb{R}^E$.

2) Si I est un intervalle quelconque dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions numériques <u>règlées</u> dans I est un sous-espace propre de $\mathbb{R}^I$.

3) Soit I un intervalle compact $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ; dans l'espace de Riesz $\mathbb{R}^I$ l'ensemble A des applications linéaires affines $t \longrightarrow \alpha t+\beta$ de I dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace de Riesz ; en effet, si f et g sont deux éléments de A, la fonction linéaire affine h égale à $\max(f(a), g(a))$ au point a, à $\max(f(b),g(b))$ au point b, est évidemment la borne supérieure de f et g dans A ; en général, cette fonction est distincte de la borne supérieure $\sup(f,g)$ de f et g dans $\mathbb{R}^E$.

*4) Soit G un ensemble ouvert dans un espace $\mathbb{R}^n$ ; nous verrons plus tard que l'ensemble H des fonctions <u>harmoniques</u> dans G est un sous-espace de Riesz de $\mathbb{R}^G$, mais ce n'est pas un sous-espace propre.*

## 4. <u>Espaces absolument réticulés</u>.

DÉFINITION 2.- <u>On dit qu'un espace vectoriel ordonné E est absolument réticulé si toute partie majorée de E admet une borne supérieure dans E</u>.

<u>Exemples</u>.- 1) Si E est un ensemble quelconque, l'espace $\mathbb{R}^E$ des fonctions numériques définies dans E est absolument réticulé, la borne supérieure dans $\mathbb{R}^E$ d'une famille majorée étant son <u>enveloppe supérieure</u> (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 5).

Plus généralement, si $(F_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'espaces absolument réticulés, l'espace produit $\prod_{\iota \in I} F_\iota$ est un espace absolument réticulé.

2) Si E est un ensemble quelconque, l'espace $\mathcal{B}(E)$ des fonctions numériques bornées dans E est absolument réticulé. Par contre, si E est un espace topologique, l'espace $\mathcal{C}_0(E)$ des fonctions numériques continues dans E est un espace de Riesz qui n'est pas absolument réticulé en général (cf.exerc.9). Par exemple, si $E = \mathbf{R}$, et si $I = ]0,1[$, l'ensemble A des fonctions continues $x(t)$ telles que $x \leqslant \varphi_I$ (fonction caractéristique de I) est majoré dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$, mais n'a pas de borne supérieure dans cet espace, car pour toute fonction continue $u \geqslant \varphi_I$, on a par continuité $u(0) \geqslant 1$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $u(t) > 0$ pour $-\alpha \leqslant t \leqslant 0$ ; il existe donc une fonction continue $v \geqslant 0$, nulle hors de l'intervalle $]-\alpha,0[$ et telle que $0 < v(t) < u(t)$ dans cet intervalle ; donc $u-v \geqslant \varphi_I$, ce qui démontre notre proposition.

3) Les espaces de Riesz définis dans les exemples 3 et 4 du n°3 sont absolument réticulés.

Pour qu'un espace ordonné E soit absolument réticulé, il faut et il suffit : 1° que E soit un espace de Riesz ; 2° que tout ensemble A formé d'éléments $\geqslant 0$, majoré et filtrant pour la relation $\leqslant$, ait une borne supérieure dans E. C'est évidemment nécessaire ; inversement, supposons ces conditions remplies, et soit B une partie majorée de E ; l'ensemble C des bornes supérieures des parties <u>finies</u> de B est filtrant pour la relation $\leqslant$ ; soit a un de ses éléments, et $C_a$ l'ensemble des $x \in C$ qui sont $\geqslant a$ ; si nous prouvons que $C_a$ ~~possède~~ admet une borne supérieure, cette borne sera aussi la borne supérieure de B. Or, $C_a - a$ est un ensemble d'éléments $\geqslant 0$, majoré et filtrant pour la relation $\leqslant$ ; il a donc une borne supérieure, et il en est de même de $C_a$.

Il est clair que toute partie minorée d'un espace absolument réticulé E admet une borne inférieure dans E .

Un sous-espace *propre* H d'un espace absolument réticulé E n'est pas toujours absolument réticulé, comme le montre l'exemple 2 ci-dessus. En outre, si H est propre et absolument réticulé, il se peut que la borne supérieure *dans* H d'une partie A de H majorée dans H , soit distincte de la borne supérieure de A *dans* E (exerc.9).

DÉFINITION 3.- *Dans un espace absolument réticulé* E , *on dit qu'un sous-espace vectoriel* B *de* E *est une bande, s'il satisfait aux conditions suivantes* : 1) *les relations* $x \in B$ , $y \in E$ *et* $|y| \leq |x|$ *entraînent* $y \in B$ ; 2) *pour toute partie* X *de* B , *majorée* dans E , *la borne supérieure* sup X *de* X *dans* E *appartient à* B .

*Exemples*.- Tout espace de Riesz absolument réticulé est évidemment une bande. Dans l'espace $\mathbb{R}^E$ des fonctions numériques définies dans un ensemble E , l'ensemble des fonctions nulles en tous les points d'une partie A de E forme une bande.

Il résulte aussitôt de la déf.3 que si B est une bande dans E , pour toute partie X de B , minorée dans E , inf X appartient à B . Toute bande B dans E , munie de la structure d'espace vectoriell ordonné induite par celle de E , est évidemment un espace absolument réticulé, et pour toute partie A de B , majorée dans B , la borne supérieure de A dans B est identique à sa borne supérieure dans E .

Toute intersection d'une famille de bandes dans un espace absolument réticulé E est encore une bande ; comme E lui-même est une bande, pour toute partie M de E , il existe une *plus petite bande* contenant M : on dira que c'est la bande *engendrée* par M .

PROPOSITION 2.- Soient $E$ un espace absolument réticulé, $a$ un élément quelconque de $E$. Soit $A$ l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe un entier $n > 0$ pour lequel $|x| \leqslant n|a|$ ; soit $A'$ l'ensemble des bornes supérieures dans $E$ des parties majorées de $A$ formées d'éléments $\geqslant 0$. La bande $B$ engendrée par $a$ est identique à l'espace vectoriel engendré par $A'$ (c'èst-à-dire ici à l'ensemble des $y-z$, où $y \in A'$ et $z \in A'$).

Il est clair que $B$ contient $A'$, donc l'espace vectoriel $B'$ engendré par $A'$. Tout revient à montrer que $B'$ est une bande et que $a \quad B'$. Il est immédiat que $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Si $y = \sup M$ et $z = \sup N$ sont deux éléments de $A'$ ($M$ et $N$ étant des parties majorées de $A$), $y+z = \sup(M+N)$ et, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda y = \sup(\lambda M)$ appartiennent donc à $A'$, ce qui prouve que $B'$ est l'ensemble des $y-z$, où $y$ et $z$ parcourent $A'$. Soit $c$ un élément de $A'$ ; montrons que tout $x \in E$ tel que $0 \leqslant x \leqslant c$ appartient à $A'$ ; en effet, on a $c = \sup\limits_{y \in M} y$, où $M$ est un ensemble d'éléments $\geqslant 0$ de $A$ ; on a donc $x = \inf(x,c) = \sup\limits_{y \in M} (\inf(x,y))$ (formule (12)) ; mais par définition, on a $\inf(x,y) \in A$, donc $x \in A'$. On en déduit aussitôt que si $x \in B'$, $x^+$ et $x^-$ appartiennent à $A'$, donc $|x| \in A'$, et réciproquement, ce qui montre en premier lieu que $A \subset B'$, et en particulier $a \quad B'$ ; d'autre part, si $x \in B'$, et $|y| \leqslant |x|$, on a $|x| \in A'$, donc $|y| \in A'$ et $y \in B'$. Enfin, soit $(x_\iota)$ une famille majorée d'éléments de $B'$, et soit $a = \sup\limits_\iota x_\iota$ dans $E$ ; d'après les formules (10) et (11), on a $a^+ = \sup\limits_\iota x_\iota^+$, et $a^- = \inf\limits_\iota x_\iota^-$ ; comme les $x_\iota^-$ appartiennent à $A'$, on a $a^- \in A'$ ; d'autre part, on a $x_\iota^+ \in A'$, donc $x_\iota^+ = \sup M_\iota$, où $M_\iota$ est une partie de $A$ formée d'éléments $\geqslant 0$ ; on en tire $\sup\limits_\iota x_\iota^+ = \sup(\bigcup\limits_\iota M_\iota)$, donc $a^+ \in A'$, ce qui achève la démonstration.

Par exemple, dans l'espace $\mathcal{R}^E$ des applications d'un ensemble E dans $\mathcal{R}$, la bande engendrée par la fonction constante égale à 1 est $\mathcal{R}^E$ tout entier : l'espace A est ici l'espace $\mathcal{B}(E)$ des fonctions bornées, et toute fonction $f \geqslant 0$ est borne supérieure dans $\mathcal{R}^E$ des fonctions bornées $\inf(f,n)$.

THÉOREME 1 (F. Riesz) .- <u>Soit</u> A <u>une partie d'un espace de Riesz absolument réticulé</u> E . <u>L'ensemble</u> A' <u>des éléments étrangers à tous les éléments de</u> A <u>est une bande</u> ; <u>la bande</u> A" <u>des éléments étrangers à tous les éléments de</u> A' <u>est identique à la bande engendrée par</u> A , <u>et</u> E <u>est somme directe des bandes</u> A' <u>et</u> A" .

D'après la déf.3 et les propriétés des éléments étrangers, il est immédiat que A' est une bande, donc aussi A" . Montrons en second lieu que E est somme directe de A' et A" ; comme 0 est le seul élément étranger à lui-même, on a $A' \cap A'' = \{0\}$ ; tout revient donc à prouver que $E = A' + A''$, autrement dit, que tout $x \in E$ peut se mettre sous la forme $x' + x''$, avec $x' \in A'$ et $x'' \in A''$. On peut évidemment se borner au cas où $x \geqslant 0$ ; soit alors M la partie de A' formée des éléments u tels que $0 \leqslant u \leqslant x$ ; elle est majorée, donc $x' = \sup M$ appartient à A', et $x' \leqslant x$ . Posons $x'' = x - x' \geqslant 0$ ; pour tout $v \in A'$ tel que $0 \leqslant v$, on a $\inf(x'',v) \in A'$, donc $x' + \inf(x'',v) \in A'$ et $x' + \inf(x'',v) \leqslant x' + x'' = x$ ; d'après la définition de x', on a donc $x' + \inf(x'',v) \leqslant x'$, ce qui entraîne $\inf(x'',v) = 0$ et prouve que x" appartient à A" ; d'ailleurs, x" est la borne supérieure de l'ensemble des éléments w de A" tels que $0 \leqslant w \leqslant x$, car pour un tel w , on a $w \leqslant x' + x''$ et w est étranger à x', donc (lemme d'Euclide) on a $w \leqslant x''$ .

Reste à montrer que A" est identique à la bande B engendrée par A ; il suffit pour cela de prouver que $A'' \subset B$ . Or, E est somme directe de B et de la bande B' formée des éléments étrangers à tous les éléments de B ;

E est aussi somme directe de $B'$ et de la bande $B''$ formée des éléments étrangers à tous les éléments de $B'$ ; comme on a évidemment $B \subset B''$, il en résulte que $B=B''$. Mais comme $A \subset B$, on a $B' \subset A'$, et par suite $A'' \subset B'' = B$.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> x <u>et y sont deux éléments étrangers de</u> E , A <u>et</u> B <u>les bandes engendrées par</u> x <u>et</u> y , <u>tout élément de</u> A <u>est étranger à tout élément de</u> B .

En effet, y appartient à la bande $A'$ des éléments étrangers à x , et x à la bande $A''$ des éléments étrangers à tous les éléments de $A'$ ; or on a $A=A''$ et $B \subset A'$.

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> a <u>un élément d'un espace absolument réticulé</u> E , $B_a$ <u>la bande engendrée par</u> a , $B'_a$ <u>la bande des éléments étrangers à</u> a. <u>Pour tout élément</u> $x \geqslant 0$ <u>de</u> E , <u>le composant de</u> x <u>dans</u> $B_a$ (pour la décomposition de E en somme directe de $B_a$ et $B'_a$) <u>est égal à</u> $\sup_n (\inf(n|a|, x))$.

En effet, d'après la démonstration du th.1, le composant de x dans $B_a$ est égal à $\sup u$ , où u parcourt l'ensemble des éléments de $B_a$ qui sont $\leqslant x$ ; d'après la prop.2, tout élément $v \geqslant 0$ tel que $v \leqslant x$ est borne supérieure de l'ensemble des éléments w tels que $0 \leqslant w \leqslant v$ et que w soit majoré par un multiple entier de $|a|$ ; le composant de x dans $B_a$ est donc aussi la borne supérieure de l'ensemble A de tous les éléments w tels que $0 \leqslant w \leqslant x$ et que w soit majoré par un multiple entier de $|a|$ ; mais tout élément $\inf(n|a|, x)$ appartient à A , et inversement, si $w \in A$ , il existe n tel que $w \leqslant n|a|$, donc $w \leqslant \inf(n|a|, x)$, ce qui démontre la proposition.

## § 2. Formes linéaires sur un espace de Riesz.

### 1. Formes linéaires positives sur un espace de Riesz.

DÉFINITION 1.- Etant donné un espace de Riesz E , on dit qu'une forme linéaire $\underline{L}$ sur E est positive si, pour tout $x \geqslant 0$, on a $\underline{L}(x) \geqslant 0$ .

Il revient au même de dire que la relation $x \leqslant y$ entraîne $\underline{L}(x) \leqslant \underline{L}(y)$ , puisque ~~L(y)-L(x)~~ $\underline{L}(y)-\underline{L}(x) = \underline{L}(y-x)$.

Exemples.- 1) Soit F un ensemble quelconque, a un élément quelconque de F ; soit E l'espace de Riesz $\mathcal{B}(F)$ des fonctions numériques bornées dans F . L'application $x \to x(a)$ est une forme positive sur E.

2) Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ , E l'espace de Riesz des fonctions numériques réglées de I ; l'application $x \to \int_a^b x(t)dt$ est une forme linéaire positive dans E .

3) Soit F un ensemble quelconque, $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur F , E l'espace de Riesz $\mathcal{B}(F)$ des fonctions numériques bornées dans F. Pour tout $x \in E$ , $\lim_{\mathfrak{U}} x$ existe, car $x(\mathfrak{U})$ est une base d'ultrafiltre sur l'ensemble relativement compact x(F), et par suite est convergente. En outre, si $x \geqslant 0$, on a $\lim_{\mathfrak{U}} x \geqslant 0$ en vertu du principe de prolongement des inégalités ; l'application $x \to \lim_{\mathfrak{U}} x$ est donc une forme linéaire positive sur E . Si on prend pour $\mathfrak{U}$ l'ultrafiltre formé des ensembles contenant un élément fixe $a \in F$ , on retrouve la forme linéaire positive $x \to x(a)$ (exemple 1).

PROPOSITION 1.- Soit $x \to \underline{M}(x)$ une fonction numérique définie dans l'ensemble P des éléments $\geqslant 0$ d'un espace de Riesz E , telle que $\underline{M}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in P$ , et $\underline{M}(x+y) = \underline{M}(x) + \underline{M}(y)$ quels que soient $x \in P$ et $y \in P$ . Il existe une forme linéaire positive $\underline{L}$ et une seule qui prolonge $\underline{M}$ à E .

Montrons d'abord que pour $\lambda \geqslant 0$ et $x \in P$, on a $\underline{\underline{M}}(\lambda x)=\lambda\underline{\underline{M}}(x)$. En effet, l'identité $\underline{\underline{M}}(x+y)=\underline{\underline{M}}(x)+\underline{\underline{M}}(y)$ entraîne $\underline{\underline{M}}(nx)=n\underline{\underline{M}}(x)$ pour tout n entier $\geqslant 0$, d'où $\underline{\underline{M}}(\frac{1}{n}x)=\frac{1}{n}\underline{\underline{M}}(x)$, et par suite $\underline{\underline{M}}(rx)=r\underline{\underline{M}}(x)$ pour tout nombre rationnel $r \geqslant 0$. D'autre part, si $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $y=x+(y-x)$ et $y-x \geqslant 0$, donc $\underline{\underline{M}}(y)=\underline{\underline{M}}(x)+\underline{\underline{M}}(y-x) \geqslant \underline{\underline{M}}(x)$ ; si r et r' sont deux nombres rationnels tels que $r \leqslant \lambda < r'$, on a donc $r\underline{\underline{M}}(x) \leqslant \underline{\underline{M}}(\lambda x) \leqslant r'\underline{\underline{M}}(x)$ ; comme $r\underline{\underline{M}}(x)$ et $r'\underline{\underline{M}}(x)$ diffèrent d'aussi peu qu'on veut de $\lambda\underline{\underline{M}}(x)$, on a $\underline{\underline{M}}(\lambda x)=\lambda\underline{\underline{M}}(x)$.

Remarquons maintenant que tout élément $z \in E$ peut s'écrire $z=y-x$, où x et y sont positifs ; en outre, si $z=y'-x'$ avec $x' \geqslant 0$ et $y' \geqslant 0$, on a $\underline{\underline{M}}(y)-\underline{\underline{M}}(x)=\underline{\underline{M}}(y')-\underline{\underline{M}}(x')$, car on a $y-x=y'-x'$, d'où $y+x'=y'+x$ et par suite $\underline{\underline{M}}(y)+\underline{\underline{M}}(x')=\underline{\underline{M}}(y')+\underline{\underline{M}}(x)$ ; désignons par $\underline{\underline{L}}(z)$ la valeur commune de $\underline{\underline{M}}(y)-\underline{\underline{M}}(x)$ pour toute expression de z comme différence $y-x$ de deux éléments $\geqslant 0$ ; il est clair que si $z \geqslant 0$ on a $\underline{\underline{L}}(z)=\underline{\underline{M}}(z)$, et on vérifie immédiatement que $\underline{\underline{L}}$ est une forme linéaire, ce qui achève la démonstration.

## 2. Formes linéaires relativement bornées.

Les formes linéaires positives forment évidemment un <u>secteur conique convexe</u> Q dans le dual (algébrique) $E^*$ de l'espace de Riesz E, la somme de deux formes linéaires positives étant positive, ainsi que le produit d'une forme linéaire positive par un scalaire $\geqslant 0$. En outre, on a $Q \cap (-Q)=\{0\}$, car si $\underline{\underline{L}}$ et $-\underline{\underline{L}}$ sont positives, on a $\underline{\underline{L}}(x) \geqslant 0$ et $\underline{\underline{L}}(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ dans E, donc $\underline{\underline{L}}(x)=0$ pour tout $x \geqslant 0$, et par suite $\underline{\underline{L}}=0$, puisque les éléments $\geqslant 0$ de E engendrent E.

Soit $\Omega$ le sous-espace de $E^*$ <u>engendré par</u> Q, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires <u>différences de deux formes linéaires positives</u> ; dans $\Omega$ , l'ensemble Q définit une structure d'ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\Omega$ ( §1,n°2) et pour laquelle Q est l'ensemble des éléments <u>positifs</u> (ce qui justifie le nom de "formes linéaires positives" donné aux éléments de Q).

La relation $\underline{L} \leqslant \underline{M}$ dans $\Omega$ signifie donc "pour tout $x \geqslant 0$ , $\underline{L}(x) \leqslant \underline{M}(x)$ " .

DÉFINITION 2.- <u>Etant donné un espace de Riesz</u> E , <u>on dit qu'une forme linéaire</u> L <u>sur</u> E <u>est relativement bornée si, pour tout</u> $x \geqslant 0$, L <u>est bornée dans l'ensemble des</u> y <u>tels que</u> $|y| \leqslant x$ .

THÉORÈME 1 (F. Riesz).- 1° <u>Pour qu'une forme linéaire</u> L <u>sur</u> E <u>soit relativement bornée, il faut et il suffit que</u> L <u>soit la différence de deux formes linéaires positives</u>.

2° <u>L'espace</u> $\Omega$ <u>des formes linéaires relativement bornées sur</u> E <u>est absolument réticulé</u>.

Si $\underline{L}=\underline{U}-\underline{V}$ , où $\underline{U}$ et $\underline{V}$ sont des formes linéaires positives, la relation $-x \leqslant y \leqslant x$ entraîne $-\underline{U}(x) \leqslant \underline{U}(y) \leqslant \underline{U}(x)$ et $-\underline{V}(x) \leqslant \underline{V}(y) \leqslant \underline{V}(x)$ , d'où aussitôt $|\underline{L}(y)| \leqslant \underline{U}(x)+\underline{V}(x)$ , $\underline{L}$ est donc relativement bornée. Supposons inversement que $\underline{L}$ soit relativement bornée ; tout revient à prouver qu'il existe une forme linéaire positive $\underline{M}$ telle que pour tout $x \geqslant 0$, on ait $\underline{M}(x) \geqslant \underline{L}(x)$, car alors $\underline{M}-\underline{L}$ sera par définition une forme linéaire positive. Or, pour tout $x \geqslant 0$, posons $\underline{M}(x)= \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} \underline{L}(y)$; on a évidemment $\underline{M}(x) \geqslant 0$ ; si nous prouvons que pour deux éléments quelconques $x \geqslant 0$ , $x' \geqslant 0$, on a $\underline{M}(x+x')=\underline{M}(x)+\underline{M}(x')$, la prop.1 montre que $\underline{M}$ se prolonge d'une seule manière en une forme linéaire positive répondant à la question. D'après la définition, on a

$$\underline{M}(x)+\underline{M}(x') = \sup_{0\leqslant y\leqslant x} \underline{L}(y)+\sup_{0\leqslant y'\leqslant x'} \underline{L}(y') = \sup_{0\leqslant y\leqslant x,\ 0\leqslant y'\leqslant x'} \underline{L}(y+y') \leqslant$$

$\leqslant \underline{M}(x+x')$. D'autre part, pour tout z tel que $0 \leqslant z \leqslant x+x'$, on a $x+x'=z+u$ avec $u \geqslant 0$, donc, d'après le lemme de décomposition (§ 1, n°1), il existe deux éléments $y, y'$ tels que $0\leqslant y \leqslant x$, $0\leqslant y' \leqslant x'$ et que $z=y+y'$, $u=(x-y)+(x'-y')$ ; d'où $\underline{L}(z)=\underline{L}(y)+\underline{L}(y') \leqslant \underline{M}(x)+\underline{M}(x')$, et par suite $\underline{M}(x+x') = \sup_{0\leqslant z\leqslant x+x'} \underline{L}(z) \leqslant \underline{M}(x)+\underline{M}(x')$, ce qui achève de démontrer la première partie du théorème.

Ce raisonnement montre en outre que $\Omega$ est un <u>espace de Riesz</u>, car pour toute forme linéaire positive $\underline{N}$ telle que $\underline{N} \geqslant \underline{L}$, on a pour tout $x \geqslant 0$ et pour $0\leqslant y \leqslant x$, $\underline{N}(x) \geqslant \underline{N}(y) \geqslant \underline{L}(y)$ d'après la définition de la relation d'ordre dans $\Omega$ ; d'où $\underline{N}(x) \geqslant \underline{M}(x)$ et par suite $\underline{N} \geqslant \underline{M}$, ce qui montre que $\underline{M}$ est la <u>borne supérieure</u> de 0 et $\underline{L}$ dans $\Omega$.

Pour voir que $\Omega$ est <u>absolument réticulé</u>, il suffit de montrer qu'un ensemble $H$ de formes linéaires positives, majoré et <u>filtrant</u> pour la relation $\leqslant$, a une borne supérieure dans $\Omega$. Or, considérons pour tout $x \geqslant 0$, le nombre $\underline{M}(x) = \sup_{\underline{L}\in H} \underline{L}(x)$, qui est par hypothèse fini et $\geqslant 0$ ; d'après la prop.1, tout revient à montrer que pour $x \geqslant 0$ et $x' \geqslant 0$, $\underline{M}(x+x')=\underline{M}(x)+\underline{M}(x')$. Or, on a évidemment $\underline{M}(x+x') \leqslant \underline{M}(x)+\underline{M}(x')$ ($\underline{M}$ étant convexe, comme enveloppe supérieure de fonctions convexes) ; d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\underline{U}$ et $\underline{V}$ dans $H$ tels que $\underline{U}(x) \geqslant \underline{M}(x)-\varepsilon$ et $\underline{V}(x') \geqslant \underline{M}(x')-\varepsilon$ ; comme par hypothèse $H$ est filtrant, il existe $\underline{W}\in H$ tel que $\underline{W}(x) \geqslant \underline{U}(x)$ et $\underline{W}(x') \geqslant \underline{V}(x')$, d'où $\underline{W}(x+x')=\underline{W}(x)+\underline{W}(x') \geqslant \underline{M}(x)+\underline{M}(x')-2\varepsilon$, et a fortiori $\underline{M}(x+x') \geqslant \underline{M}(x)+\underline{M}(x')-2\varepsilon$ ; comme $\varepsilon$ est arbitraire, le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1.- <u>Soient L et M deux formes linéaires relativement bornées sur E ; pour tout</u> $x \geqslant 0$ , <u>on a</u>

$$(1) \quad \begin{cases} \sup(\underline{L},\underline{M})(x) = \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} (\underline{L}(y)+\underline{M}(x-y)) \\ \inf(\underline{L},\underline{M})(x) = \inf\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} (\underline{L}(y)+\underline{M}(x-y)) \end{cases}$$

Il suffit de démontrer la première de ces formules. On a $\sup(\underline{L},\underline{M}) = \underline{M}+(\underline{L}-\underline{M})^+$ ; or, nous avons vu dans la démonstration du th.1 que $(\underline{L}-\underline{M})^+(x) = \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} (\underline{L}(y)-\underline{M}(y))$, d'où $\sup(\underline{L},\underline{M})(x) =$ $= \underline{M}(x)+ \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} (\underline{L}(y)-\underline{M}(y)) = \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} (\underline{L}(y)+\underline{M}(x)-\underline{M}(y)) =$ $= \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} (\underline{L}(y)+\underline{M}(x-y))$.

En particulier, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$(2) \qquad |\underline{L}|(x) = \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} (|\underline{L}(y)| + |\underline{L}(x-y)|)$$

En effet, la relation (1) montre que, pour tout $\varepsilon > 0$ , il existe y tel que $0 \leqslant y \leqslant x$ et $\underline{L}(y)-\underline{L}(x-y) \geqslant |\underline{L}|(x)-\varepsilon$ , et a fortiori $|\underline{L}(y)|+|\underline{L}(x-y)| \geqslant |\underline{L}|(x)-\varepsilon$ ; d'autre part, comme $|\underline{L}(z)| \leqslant |\underline{L}|(z)$ pour tout $z \geqslant 0$ par définition, on a $|\underline{L}|(x) = |\underline{L}|(y)+|\underline{L}|(x-y) \geqslant$ $\geqslant |\underline{L}(y)| + |\underline{L}(x-y)|$ pour $0 \leqslant y \leqslant x$ , ce qui démontre (2).

COROLLAIRE 2.- <u>Pour que deux formes linéaires positives L,M soient étrangères dans</u> $\Omega$ , <u>il faut et il suffit que, pour tout nombre</u> $\varepsilon > 0$ <u>et tout</u> $x \geqslant 0$ <u>dans E , il existe deux éléments</u> $y \geqslant 0$ , $z \geqslant 0$ <u>de E tels que</u> $x=y+z$ , <u>et</u> $\underline{L}(y)+\underline{M}(z)$ .

D'après le cor.1, cela exprime en effet que $\inf(\underline{L},\underline{M}) = 0$ .

3. <u>Fonctions convexes de formes linéaires.</u>

Etant donnée un élément quelconque $x \geqslant 0$ d'un espace de Riesz E , nous dirons qu'une suite finie $(x_i)$ d'éléments $\geqslant 0$ de E est une <u>partition</u> de x si on a $x = \sum\limits_i x_i$ . Nous dirons qu'une partition $(x'_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de x est <u>plus fine</u> qu'une partition $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ de x s'il existe une partition de $[1,n]$ en m ensembles $F_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$

tels que, pour tout indice i , les $x'_k$ d'indice $k \in F_i$ forment une partition de $x_i$ ; cette relation est une __relation d'ordre__ dans l'ensemble $\mathfrak{P}(x)$ des classes de partition de x ne différant que par l'ordre des termes. En outre, le lemme de décomposition exprime que $\mathfrak{P}(x)$, muni de cette relation d'ordre, est un ensemble ordonné __filtrant__ (pour la relation "$\varpi$ est moins fine que $\varpi'$ "). Cela étant, la formule (2) peut s'interprèter autrement ; nous allons voir qu'elle est équivalente à

$$(3) \qquad |\underline{L}|(x) = \sup_{\mathfrak{P}(x)} \sum_i |\underline{L}(x_i)| = \lim_{\mathfrak{P}(x)} \sum_i |\underline{L}(x_i)|$$

la borne supérieure étant prise lorsque la partition $(x_i)$ de x parcourt $\mathfrak{P}(x)$, la limite étant prise suivant l'ordonné filtrant $\mathfrak{P}(x)$. En premier lieu, on peut se borner à démontrer la première des formules (3), car pour toute partition $(x'_k)$ plus fine que $(x_i)$, on a, en vertu de la linéarité de $\underline{L}$ . $\sum_k |\underline{L}(x'_k)| \geqslant \sum_i |\underline{L}(x_i)|$ , donc la borne supérieure de $\sum_i |\underline{L}(x_i)|$ dans $\mathfrak{P}(x)$ est égal à $\lim_{\mathfrak{P}(x)} \sum_i |\underline{L}(x_i)|$ , d'après le théorème de la limite monotone (__Top.gén.__,chap.IV, §5,th.2). D'autre part, pour toute partition $(x_i)$ de x , on a évidemment $|\underline{L}(x_i)| \leqslant |\underline{L}|(x_i)$ donc $\sum_i |\underline{L}(x_i)| \leqslant |\underline{L}|(\sum_i x_i) = |\underline{L}|(x)$ ; et la formule (3) montre que $|\underline{L}|(x)$ peut être arbitrairement approché par des sommes $\sum_i |\underline{L}(x_i)|$ correspondant à des partitions de __deux__ éléments.

La relation (3) se généralise comme suit :

THÉORÈME 2.- __Soient__ $\underline{L}_1, \underline{L}_2, \ldots, \underline{L}_n$ __n formes linéaires relativement bornées sur__ E , __et soit__ $q(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ __une fonction convexe positive et positivement homogène définie dans__ $\mathbb{R}^n$ . __Il existe une forme linéaire relativement bornée__ $\underline{M}$ __sur__ E __telle que, pour tout__ $x \geqslant 0$ __dans__ E , __on ait__

$$(4) \qquad \underline{\underline{M}}(x) = \sup_{\mathfrak{p}(x)} \sum_i q(\underline{L}_1(x_i),\ldots,\underline{L}_n(x_i))$$
$$= \lim_{\mathfrak{p}(x)} \sum_i q(\underline{L}_1(x_i),\ldots,\underline{L}_n(x_i)) .$$

Pour abréger, désignons par $\underline{L}$ l'application linéaire $x \to (\underline{L}_1(x),\ldots,\underline{L}_n(x))$ de E dans $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème de la limite monotone, il suffit de démontrer la première des deux relations (4) ; en effet, si $(x'_k)$ est une partition de x plus fine que $(x_i)$ on a $x_i = \sum_{k\in F_i} x'_k$, d'où $\underline{L}(x_i) = \sum_{k\in F_i} \underline{L}(x'_k)$, et en vertu des hypothèses sur q, $q(\underline{L}(x_i)) \leqslant \sum_{k\in F_i} q(\underline{L}(x'_k))$, d'où
$\sum_i q(\underline{L}(x_i)) \leqslant \sum_k q(\underline{L}(x'_k))$.

Prouvons en premier lieu que le nombre $\underline{\underline{M}}(x)$ est <u>fini</u> pour tout $x \geqslant 0$. Les hypothèses sur q entraînent qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que $q(t_1,\ldots,t_n) \leqslant a(|t_1|+|t_2|+\ldots+|t_n|)$ ; on a donc

$$q(\underline{L}(x_i)) \leqslant a.\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_i \big|\underline{L}_j(x_i)\big|\Big) \leqslant a.\sum_{j=1}^{n} |\underline{L}_j|(x)$$

en vertu de (3), ce qui démontre notre assertion. D'après la prop.1, la démonstration sera achevée si nous montrons que $\underline{\underline{M}}(x+y)=\underline{\underline{M}}(x)+\underline{\underline{M}}(y)$ quels que soient $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. On a
$\underline{\underline{M}}(x)+\underline{\underline{M}}(y) = \sup_{\mathfrak{p}(x)} \sum_i q(\underline{L}(x_i)) + \sup_{\mathfrak{p}(y)} \sum_j q(\underline{L}(y_j))$ ; or, lorsque $(x_i)$ est une partition de x et $(y_j)$ une partition de y, les $x_i+y_j$ forment une partition de $x+y$, ce qui montre que $\underline{\underline{M}}(x)+\underline{\underline{M}}(y) \leqslant \underline{\underline{M}}(x+y)$.
D'autre part, si $(z_k)$ est une partition de $x+y$, le lemme de décomposition montre qu'il existe deux partitions $(x_k)$, $(y_k)$ de x et y respectivement, telles que $z_k = x_k+y_k$ pour tout k, d'où
$\sum_k q(\underline{L}(z_k)) = \sum_k q(\underline{L}(x_k)+\underline{L}(y_k)) \leqslant \sum_k q(\underline{L}(x_k)) + \sum_k q(\underline{L}(y_k)) \leqslant$
$\leqslant \underline{\underline{M}}(x)+\underline{\underline{M}}(y)$ d'où $\underline{\underline{M}}(x+y) \leqslant \underline{\underline{M}}(x)+\underline{\underline{M}}(y)$, et par suite
$\underline{\underline{M}}(x+y) = \underline{\underline{M}}(x)+\underline{\underline{M}}(y)$ .

Par définition, la forme linéaire positive $\underline{M}$ définie par la relation (4) se note $q(\underline{L}_1, \underline{L}_2, \dots, \underline{L}_n)$ ou $q(\underline{L}_i)$ ; il est clair que l'on a $q(\lambda\, \underline{L}_i) = |\lambda| \cdot q(\underline{L}_i)$ pour tout scalaire $\lambda$, et $q(\underline{L}_i + \underline{M}) \leqslant q(\underline{L}_i) + q(\underline{M})$.

Exemple.- *Soit C une courbe rectifiable dans $\mathbb{R}^3$, et soient $\underline{L}_1, \underline{L}_2, \underline{L}_3$ les formes linéaires relativement bornées sur l'espace de Riesz E des fonctions numériques continues à support compact dans C, définies par $\underline{L}_1(f) = \int_C f(x,y,z)dx$ $^{(+)}$, $\underline{L}_3(f) = \int_C f(x,y,z)dz$.

(+) $\underline{L}_2(f) = \int_C f(x,y,z)\,dy$,

La forme linéaire $\sqrt{\underline{L}_1^2 + \underline{L}_2^2 + \underline{L}_3^2}$ n'est autre que la forme

$$f \to \int_C f(x,y,z)ds$$

où $\int_A^B ds$ est la longueur de l'arc AB de la courbe C. *

## § 3. Les inégalités de convexité.

### 1. L'inégalité fondamentale de convexité.

Soit E un ensemble quelconque. Dans l'espace de Riesz $\mathbb{R}^E$ des fonctions numériques finies définies dans E, considérons un secteur conique convexe S formé de fonctions positives dans E. Soit d'autre part $\underline{M}$ une fonction numérique finie ou non, à valeurs $\geqslant 0$, définie dans S, et telle que :

1° $\underline{M}(0)=0$, et $\underline{M}$ est positivement homogène, c'est-à-dire que pour tout $\lambda$ fini et $> 0$, $\underline{M}(\lambda x) = \lambda\, \underline{M}(x)$ ;

2° $\underline{M}$ est croissante dans S, autrement dit, la relation $x \leqslant y$ entraîne $\underline{M}(x) \leqslant \underline{M}(y)$ ;

3° $\underline{M}$ est convexe(*) dans S, autrement dit, satisfait à la condition

$$\underline{M}(x+y) \leqslant \underline{M}(x) + \underline{M}(y) .$$

L'exemple le plus important de telles fonctions correspond au cas où $S$ est l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ d'un sous-espace de Riesz $F$ de $\mathbb{R}^E$, et $\underline{\underline{M}}$ la restriction à $S$ d'une forme linéaire positive sur $F$.

PROPOSITION 1.- Soit $f(t_1,\ldots,t_n)$ une fonction finie et positive, définie pour $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, positivement homogène et telle que le secteur conique défini par les relations $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$, $t_{n+1} \leqslant f(t_1,\ldots,t_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ soit convexe. Dans ces conditions, si $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sont n fonctions appartenant à $S$ ainsi que $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et si $\underline{\underline{M}}(x_i)$ est fini pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

(1) $\quad \underline{\underline{M}}(f(x_1,x_2,\ldots,x_n)) \quad f(\underline{\underline{M}}(x_1),\underline{\underline{M}}(x_2),\ldots,\underline{\underline{M}}(x_n))$.

En effet, on sait, d'après le th. de Minkowski (Esp.vect.top., chap.II, § ) que $C$ est l'intersection des demi-espaces $t_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ et d'une famille de demi-espaces fermés ne contenant pas la demi-droite $t_1=t_2=\ldots=t_n=0$, $t_{n+1} \geqslant 0$, donc de la forme

(2) $\quad t_{n+1} \leqslant \lambda_{\iota 1}t_1 + \lambda_{\iota 2}t_2+\ldots+\lambda_{\iota n}t_n \qquad (\iota \in I)$

avec $\lambda_{\iota k} \geqslant 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Pour tout $u \in E$, on a donc

$$f(x_1(u),\ldots x_n(u)) \leqslant \lambda_{\iota 1}x_1(u)+\ldots+\lambda_{\iota n}x_n(u)$$

pour tout $\iota \in I$. Comme les $\lambda_{\iota i}$ sont $\geqslant 0$, les hypothèses faites sur $\underline{\underline{M}}$ entraînent que $\underline{\underline{M}}(f(x_1,\ldots,x_n))$ est fini et qu'on a, pour tout $\iota \in I$

$$\underline{\underline{M}}(f(x_1,\ldots,x_n)) \leqslant \lambda_{\iota 1}\underline{\underline{M}}(x_1)+\lambda_{\iota 2}\underline{\underline{M}}(x_2)+\ldots+\lambda_{\iota n}\underline{\underline{M}}(x_n)$$

Comme d'autre part $\underline{\underline{M}}(x_i) \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\underline{\underline{M}}(f(x_1,\ldots,x_n)) \geqslant 0$, le point de coordonnées $\underline{\underline{M}}(x_1),\ldots,\underline{\underline{M}}(x_n),\underline{\underline{M}}(f(x_1,\ldots,x_n))$ appartient à $C$, ce qui démontre la proposition.

## 2. Les inégalités de Hölder et de Minkowski.

Nous conservons dans ce n° les notations précédentes et les hypothèses sur $\underline{\underline{M}}$.

PROPOSITION 2.- <u>Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres tels que</u> $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ , $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ , $\alpha+\beta = 1$ . <u>Si</u> $x$ <u>et</u> $y$ <u>sont deux fonctions de</u> $S$ <u>telles que</u> $x^\alpha y^\beta$ <u>appartienne à</u> $S$ , <u>et si</u> $\underline{M}(x)$ <u>et</u> $\underline{M}(y)$ <u>sont finis, on a</u>

$$(3) \qquad \underline{M}(x^\alpha y^\beta) \leqslant (\underline{M}(x))^\alpha (\underline{M}(y))^\beta .$$

(<u>inégalité de Hölder</u>).

On peut se borner au cas où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ . D'après la prop.1, tout revient à prouver que, dans $\mathbb{R}^3$ , le secteur conique défini par $t_1 \geqslant 0$ , $t_2 \geqslant 0$ , $0 \leqslant t_3 \leqslant t_1^\alpha t_2^\beta$ est convexe ou encore (<u>Esp. vect. top.</u>, chap.II, §   ) que la fonction $z(t) = t^{-\alpha/\beta}$ est convexe pour $0 < t < +\infty$ . Or, en posant $r = \frac{\alpha}{\beta}$ , on a $D^2 z(t) = r(r+1)t^{-r-2}$ et comme $r > 0$ , $D^2 z(t) > 0$ dans $]0,+\infty[$ , ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 3.- <u>Soit $p$ un nombre fini</u> $\geqslant 1$ . <u>Si</u> $x$ <u>et</u> $y$ <u>sont deux fonctions telles que</u> $x^p, y^p$ <u>et</u> $(x+y)^p$ <u>appartiennent à</u> $S$ , <u>et si</u> $\underline{M}(x^p)$ <u>et</u> $\underline{M}(y^p)$ <u>sont finis, on a</u>

$$(4) \qquad (\underline{M}((x+y)^p))^{1/p} \leqslant (\underline{M}(x^p))^{1/p} + (\underline{M}(y^p))^{1/p}$$

(<u>inégalité de Minkowski</u>).

D'après la prop.1, tout revient à prouver que, dans $\mathbb{R}^3$ , le secteur conique défini par $t_1 \geqslant 0$ , $t_2 \geqslant 0$ , $0 \leqslant t_3 \leqslant (t_1^{1/p} + t_2^{1/p})^p$ est convexe, ou encore que la fonction $z(t) = (1-t^{1/p})^p$ est convexe pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ . Or, on a, par un calcul élémentaire, $D^2 z(t) = (1-\frac{1}{p})t^{\frac{1}{p}-2}(1-t^{\frac{1}{p}})^{p-2} \geqslant 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ , d'où la proposition.

$\geqslant t^{\frac{1}{p}-1}(1+t^{1/p})^{p-1}$

<u>3. Les semi-normes</u> $N_p$ .

Supposons que la fonction $\underline{M}$ soit définie pour <u>toute</u> fonction $x$ positive dans $E$ , et possède les propriétés énoncées au n°1 . Alors il résulte de la prop.3 que l'ensemble $\mathcal{L}^p(E,\underline{M})$ des fonctions $x$ définies dans $E$ et telles que $\underline{M}(|x|^p)$ soit <u>finie</u>, est un <u>sous-espace de Riesz</u> de $\mathbb{R}^E$ , et que la fonction $\underline{N}_p(x) = (\underline{M}(|x|^p))^{1/p}$ est une <u>semi-norme</u>

$(1-\frac{1}{p})\, t^{\frac{1}{p}-2}(1+t^{\frac{1}{p}})^{p-2}[t^{\frac{1}{p}}-1-t^{\frac{1}{p}}]$ $\qquad (\frac{1}{p}-1)\, t^{\frac{1}{p}-2}(1+t^{\frac{1}{p}})^{p-1} + \frac{p-1}{p}\, t^{\frac{2}{p}-2}(1+t^{\frac{1}{p}})^{p-2}$

sur $\mathcal{L}^p(E,\underline{M})$, puisqu'lle satisfait à l'inégalité du triangle

$$\underline{N}_p(x+y) \leqslant \underline{N}_p(x)+\underline{N}_p(y)$$

(identique à (4)) et est positivement homogène et symétrique en vertu des propriétés de $\underline{M}$.

PROPOSITION 4.- <u>Pour toute fonction numérique x finie et positive dans E, et telle que $\underline{N}_p(x)$ soit fini pour une valeur au moins de $p \geqslant 1$, l'ensemble des valeurs de $1/p$ $(p \geqslant 1)$ telles que $\underline{N}_p(x)$ soit fini est un intervalle I contenu dans $]0,1]$, et l'application $1/p \to \log \underline{N}_p(x)$ est convexe dans I, ou égale à $-\infty$ dans l'intérieur de I.</u>

Soient r et s deux nombres $\geqslant 1$ tels que $1/r$ et $1/s$ appartiennent à I ; tout revient à prouver que, si $\frac{1}{p} = \frac{t}{r} + \frac{1-t}{s}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$ on a

$$\log \underline{N}_p(x) \leqslant t.\log \underline{N}_r(x)+(1-t)\log \underline{N}_s(x) \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même

$$\underline{N}_p(x) \leqslant (\underline{N}_r(x))^t(\underline{N}_s(x))^{1-t} \tag{6}$$

relation qui s'écrit, d'après la définition de $\underline{N}_p$

$$\underline{M}(x^p) \leqslant (\underline{M}(x^r))^{tp/r}(\underline{M}(x^s))^{(1-t)p/s} \tag{7}$$

Si on pose $\alpha = tp/r$, on a $1-\alpha=(1-t)p/s$, d'après la relation qui définit p en fonction de $t,r,s$ ; d'où $p=\alpha r+(1-\alpha)s$. Or, l'inégalité de Hölder donne

$$\underline{M}(x^{r\alpha}x^{s(1-\alpha)}) \leqslant (\underline{M}(x^r))^{\alpha}(\underline{M}(x^s))^{1-\alpha}$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (7).

PROPOSITION 5.- <u>Si</u> $\underline{M}(1)=1$, <u>pour toute fonction numérique x finie et positive dans E, l'application</u> $p \to \underline{N}_p(x)$ <u>est croissante dans</u> $[1,+\infty[$.

En effet, si $r \geqslant 1$, $0<\alpha<1$, et si x et y sont deux fonctions finies et positives dans E, l'inégalité de Hölder montre que

$$\underline{M}(x^{\alpha r}y^{(1-\alpha)r}) \leqslant (\underline{M}(x^r))^{\alpha}(\underline{M}(y^r))^{1-\alpha}$$

d'où en prenant $y=1$ $\qquad \underline{M}(x^{\alpha r}) \leqslant (\underline{M}(x^r))^{\alpha}$

et, en élevant les deux membres à la puissance $1/\alpha r$

$$\underline{N}_{\alpha r}(x) \leqslant \underline{N}_r(x) \qquad \text{d'où la proposition.}$$