LIVRE VIII
INTEGRATION
CHAPITRE I (ETAT 3)
FORMES LINEAIRES CROISSANTES

Rédaction n° 069

Nombre de pages : 44

Nombre de feuilles : 44

Livre VIII Chap. I Etat 3

Formes linéaires croissantes

69

Livre VI A 69

(Ancien LIVRE VIII)

INTÉGRATION

CHAPITRE I (Etat 3)

FORMES LINEAIRES CROISSANTES.

§ 1. Clans de fonctions.

1. Clans de fonctions. Définition 1. On dit qu'un ensemble non vide Φ de fonctions numériques bornées définies dans un ensemble E est un clan, s'il satisfait à l'axiome suivant :

(CL) Pour tout entier $n>0$, toute famille finie $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de n fonctions du clan Φ, et toute application numérique continue g définie dans R^n, et telle que $g(0,..,0)=0$, la fonction composée $x \rightarrow g(f_1(x),f_2(x),..,f_n(x))$ appartient à Φ.

En particulier, si $f\in\Phi$ et $g\in\Phi$, on a $f+g\in\Phi$, $\lambda f\in\Phi$ pour tout nombre réel λ, et $fg\in\Phi$; en d'autres termes, un clan de fonctions est une sous-algèbre particulière de l'algèbre $\mathcal{B}(E)$ (par rapport au corps R) des fonctions numériques bornées, définies dans E. Notons aussi que si $f\in\Phi$ et $g\in\Phi$, $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$ appartiennent à Φ ; en particulier, $|f| = \sup(f,-f)$, $f^+=\sup(f,0)$, $f^-=\sup(-f,0)$, appartiennent à Φ (on sait d'ailleurs qu'on a identiquement $f=f^+-f^-$, $|f| = f^+ + f^-$).

Les applications constantes et $\neq 0$ de E dans R n'appartiennent pas nécessairement à un clan Φ ; pour qu'elles appartiennent à Φ, il faut et il suffit évidemment que $1\in\Phi$. Nous dirons qu'un clan Φ tel que $1\in\Phi$ est unitaire. Si Φ est un clan unitaire, on peut, dans l'axiome (CL), supprimer la restriction $g(0,0,..,0)=0$; autrement dit, pour toute fonction numérique g définie et continue dans R^n, la fonction composée $x \rightarrow g(f_1(x),..,f_n(x))$ appartient alors à Φ.

Inversement, si Φ est un ensemble non vide de fonctions numériques bornées définies dans E , et satisfaisant à cette condition, Φ est un clan unitaire, car il satisfait à (CL), et si on prend pour g l'application constante, égale à 1 , de R dans R , pour f une fonction quelconque de Φ , $x \to g(f(x))$ est l'application constante, égale à 1, de E dans R .

Si Φ est un clan non unitaire, l'ensemble Φ' des fonctions k+f où k est une constante et où f parcourt Φ , est un clan unitaire (<u>le plus petit</u> contenant Φ) ; en effet, si g est une application continue quelconque de R^n dans R , $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n fonctions quelconques de Φ , $(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n constantes quelconques, la fonction $h(x_1,..,x_n)=g(k_1+x_1,..,k_n+x_n)-g(k_1,k_2,..,k_n)$ s'annule au point (0,0,..,0); par suite $h(f_1(x),..,f_n(x))$ appartient à Φ , et $g(k_1+f_1(x),..,k_n+f_n(x))$ appartient à Φ' . On notera que, si k_1 et k_2 sont deux constantes quelconques, f_1 et f_2 deux fonctions de Φ , on ne peut avoir $k_1+f_1=k_2+f_2$ que si $k_1=k_2$, $f_1=f_2$; autrement dit, Φ' est <u>somme directe</u> du clan Φ et du sous-corps de $\mathcal{B}(E)$ formé des constantes (et isomorphe à R) .

En outre :

<u>Proposition 1</u>. <u>Pour que Φ soit un clan non unitaire il faut et il suffit que</u>, <u>pour toute suite finie</u>, (f_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>de</u> n <u>fonctions quelconques de</u> Φ , <u>l'origine de</u> R^n <u>soit adhérente à l'image de</u> E <u>par l'application</u> $x \to (f_1(x),..,f_n(x))$ <u>de</u> E <u>dans</u> R^n .

La condition est évidemment <u>suffisante</u>, car elle implique que $1 \notin \Phi$. Inversement, supposons $1 \notin \Phi$.

Si on pose $g=|f_1| + |f_2| +..+ |f_n|$, g appartient à Φ , et il suffit de prouver que g prend, dans E , des valeurs >0 arbitrairement petites. Supposons au contraire que $\inf_{x \in E} g(x)=a>0$; soit h la fonction numérique définie par $h(x)=0$ pour $x \leqslant 0$, $h(x)=x/a$ pour $0<x<a$; $h(x)=1$ pour $x \geqslant a$; h est continue dans R et $h(0)=0$, donc $h \circ g$ appartient à Φ ; mais $h \circ g$ est la constante 1, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Φ.

2. __Exemples de clans__. I. L'algèbre $\mathcal{B}(E)$ des fonctions bornées sur E est un clan (unitaire) ; en effet, si (f_i) est une famille quelconque de n fonctions bornées, g une application continue quelconque de R^n dans R, l'image A de E par l'application $x \rightarrow (f_1(x),..,f_n(x))$ est bornée dans R^n, donc relativement compacte ; par suite $g(A)$ est relativement compact dans R, donc borné, ce qui prouve que $x \rightarrow g(f_1(x),..,f_n(x))$ est bornée dans E.

Plus généralement, soit Ψ un ensemble non vide __quelconque__ contenu dans $\mathcal{B}(E)$; on voit immédiatement que l'ensemble Φ' des fonctions $x \rightarrow g(f_1(x),..,f_n(x))$, où n prend toutes les valeurs entières $\geqslant 1$, où g parcourt (pour chaque n) l'ensemble des applications continues de R^n dans R, et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ parcourt (pour chaque n) l'ensemble de toutes les suites finies de n éléments de Ψ, est un __clan__ unitaire ; c'est évidemment __le plus petit__ clan unitaire contenant Ψ. On dit que c'est le clan unitaire __engendré__ par Ψ.

De même, si on suppose que, pour toute suite finie $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (n quelconque) de fonctions de Ψ, l'origine de R^n est adhérent à l'image de E par l'application $x \rightarrow (f_1(x),..,f_n(x))$, l'ensemble des fonctions de Φ' correspondant aux fonctions continues g telles que $g(0,0,..,0)=0$ est un clan non unitaire Φ, (prop. 1) le plus petit de ceux contenant Ψ, et qu'on dit encore __engendré__ par Ψ. Dans ce cas, Φ' est le plus petit clan unitaire contenant Φ.

II. Si E est un espace topologique, l'ensemble $\mathcal{B}(E) \cap \mathcal{C}(E)$ des fonctions numériques continues bornées définies dans E est un clan unitaire. En particulier, si E est compact, l'ensemble $\mathcal{C}(E)$ de toutes les fonctions numériques continues dans E est contenu dans $\mathcal{B}(E)$, et forme un clan unitaire.

III. Supposons encore que E soit un espace topologique séparé non compact et soit $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des fonctions numériques f définies et continues dans E , et telles que l'ensemble des points où $f(x) \neq 0$ soit relativement compact (dépendant de f). $\mathcal{K}(E)$ est un clan non unitaire ; en effet, il est formé de fonctions bornées ; d'autre part, si f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n fonctions de $\mathcal{K}(E)$, l'ensemble des points de E où un au moins des $f_i(x)$ est $\neq 0$ est réunion de n ensembles relativement compacts, donc est relativement compact ; par suite, pour toute application continue g de R^n dans R telle que $g(0,0,\ldots,0)=0$, $g(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ appartiendra à $\mathcal{K}(E)$. On dit pour abréger que $\mathcal{K}(E)$ est l'ensemble des fonctions continues sur E et nulles en dehors d'un ensemble compact.

IV. Si I est un intervalle de la droite numérique R , l'ensemble $\mathcal{M}$ des fonctions numériques bornées et continues par morceaux (Livre IV) dans I , est un clan unitaire ; en effet, dans tout intervalle compact J contenu dans I , une fonction de $\mathcal{M}$ n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité ; si f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n fonctions de $\mathcal{M}$, et si on range en une suite croissante les points de discontinuité des f_i , dans tout intervalle ayant pour extrémités deux points consécutifs de cette suite, toute fonction de la forme $g(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ est continue, si g est une application continue quelconque de R^n dans R .

L'ensemble $\mathfrak{M}_0$ des fonctions numériques bornées et <u>constantes par morceaux</u> dans I forme de même un clan unitaire, contenu dans $\mathfrak{M}$.

Si I est non compact, l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{M}$ (ou $\mathfrak{M}_0$), nulles en dehors d'un intervalle compact contenu dans I, est encore un clan <u>non unitaire</u>.

V. Si Φ est un clan de fonctions définies dans un ensemble E, et A une partie de E, l'ensemble Φ_A des <u>restrictions</u> à A des fonctions de Φ est évidemment encore un clan ; il peut être unitaire même si Φ ne l'est pas (il suffit pour cela, d'après la prop.1, qu'il existe une fonction $f \in \Phi$ telle que 0 ne soit pas adhérent à $f(A)$).

Si φ est une application d'un ensemble F dans E, l'ensemble des fonctions $f \circ \varphi$, où f parcourt Φ, forme un clan de fonctions définies sur F.

VI. <u>Fonctions étagées sur une phratrie</u>. On dit qu'un ensemble non vide $\mathfrak{F}$ de parties d'un ensemble E est une <u>phratrie</u> d'ensembles, si elle satisfait à l'axiome suivant :

(PH) <u>Quels que soient</u> $X \in \mathfrak{F}$ <u>et</u> $Y \in \mathfrak{F}$, $X \cup Y$ <u>et</u> $X \cap \complement Y$ <u>appartiennent à</u> $\mathfrak{F}$.

La partie vide $\emptyset$ de E appartient donc à toute phratrie $\mathfrak{F}$ de parties de E, puisque $X \cap \complement X = \emptyset$. L'<u>intersection</u> de deux ensembles X,Y de $\mathfrak{F}$ appartient aussi à $\mathfrak{F}$, car on peut écrire $X \cap Y = X \cap \complement(X \cap \complement Y)$. Par récurrence sur n, on en déduit aussitôt que la réunion et l'intersection d'un nombre fini n d'ensembles de $\mathfrak{F}$ appartient encore à $\mathfrak{F}$. L'ensemble E n'appartient pas nécessairement à $\mathfrak{F}$; lorsque $E \in \mathfrak{F}$, on dit que $\mathfrak{F}$ est une phratrie <u>unitaire</u> ; le complémentaire $\complement X$ de tout $X \in \mathfrak{F}$ appartient alors à $\mathfrak{F}$.

L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ de <u>toutes</u> les parties de E est évidemment une phratrie unitaire. Il en est de même de l'ensemble $\mathfrak{F}(E)$ des parties <u>finies</u> de E ; cette dernière phratrie n'est unitaire que si E est lui-même un ensemble fini.

Etant donnée une phratrie $\mathfrak{F}$ de parties de E , on dit qu'une fonction numérique f définie dans E est une fonction <u>étagée</u>, attachée à la phratrie $\mathfrak{F}$, si f ne prend qu'un nombre <u>fini</u> de valeurs distinctes dans E , et si, pour tout nombre réel <u>non nul</u> a , $\overset{-1}{f}(a) \in \mathfrak{F}$; le complémentaire de $\overset{-1}{f}(0)$, réunion des $\overset{-1}{f}(a)$ où a parcourt l'ensemble des valeurs $\neq 0$ de f , est donc un ensemble de $\mathfrak{F}$. L'ensemble Φ des fonctions étagées attachées à une phratrie $\mathfrak{F}$ est un <u>clan</u>. En effet, soient f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n fonctions de Φ , g une application quelconque de R^n dans R telle que $g(0,0,..,0)=0$. Si a_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant p_i)$ sont les valeurs $\neq 0$ prises par f_i , il est clair que $g(f_1(x),..,f_n(x))$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes, qui sont les valeurs distinctes des nombres $g(a_{1,j_1}, a_{2,j_2},..,a_{n,j_n})$ pour toutes les suites finies $(j_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ $(1 \leqslant j_i \leqslant p_i)$. En outre, l'ensemble des points où $g(f_1(x),..,f_n(x))$ prend une de ces valeurs $\neq 0$ est réunion d'un nombre fini d'ensembles de la forme $\bigcap_{i=1}^{n} \overset{-1}{f_i}(a_{i,j_i})$, et un des a_{i,j_i} au moins n'est pas nul ; l'ensemble correspondant $\overset{-1}{f_i}(a_{i,j_i})$ appartient donc à $\mathfrak{F}$; les autres appartiennent à $\mathfrak{F}$ ou sont des complémentaires d'ensembles appartenant à $\mathfrak{F}$, donc $\bigcap_{i=1}^{n} \overset{-1}{f_i}(a_{i,j_i}) \in \mathfrak{F}$, ce qui établit la proposition.

Pour que le clan Φ soit <u>unitaire</u>, il faut et il suffit évidemment que la phratrie $\mathfrak{F}$ soit <u>unitaire</u>.

Lorsqu'on prend comme phratrie l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ des parties finies de E, le clan des fonctions étagées sur cette phratrie est identique au clan $\mathcal{K}(E)$ des fonctions continues sur E et nulles en dehors d'un ensemble compact, la topologie sur E étant la topologie <u>discrète</u>.

Les clans de fonctions étagées attachées à une phratrie peuvent être caractérisés comme <u>les clans formés de fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs</u>. En effet, soit Φ un tel clan, f une fonction de Φ, a_i les valeurs $\neq 0$ prises par f ; si on pose $A_i = \overset{-1}{f}(a_i)$, chacune des fonctions caractéristiques φ_{A_i} de ces ensembles appartient à Φ ; en effet, il existe une fonction numérique g, continue dans R, telle que $g(0)=0$ et $g(a_j)=0$ pour $j\neq i$, et $g(a_i)=1$ (il suffit de prendre g nulle dans le complémentaire d'un voisinage de a_i ne contenant pas les $a_j \neq a_i$ ni 0) ; la fonction $g\circ f$ appartient par définition à Φ, et est identique à φ_{A_i}. Il en résulte que, si Ψ est l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensemble appartenant à Φ, toute fonction de Φ est combinaison linéaire de fonctions de Ψ. Reste à montrer que les ensembles dont les fonctions de Ψ sont fonctions caractéristiques forment une phratrie $\mathcal{F}$. Or, si $A\in\mathcal{F}$ et $B\in\mathcal{F}$, on a aussi $A\cup B\in\mathcal{F}$, car $\varphi_{A\cup B}=\sup(\varphi_A,\varphi_B)\in\Psi$; de même $A\cap \complement B\in\mathcal{F}$, car la fonction caractéristique de cet ensemble est $\varphi_A-\inf(\varphi_A,\varphi_B)$.

3. <u>Clans complets</u>. Comme nous l'avons remarqué, un clan Φ formé de fonctions définies dans E, est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}(E)$. Si on munit $\mathcal{B}(E)$ de la <u>topologie de la convergence uniforme</u>

(Top.gén., chap. VIII), on sait que $\mathcal{B}(E)$ est un espace vectoriel normé par la norme $\|f\| = \sup_{x\in E}|f(x)|$, et qu'il est complet. Nous dirons que Φ est un clan complet si Φ est un sous-espace complet (ou, ce qui revient au même, un sous-espace fermé) de l'espace normé $\mathcal{B}(E)$.

Proposition 2. L'adhérence d'un clan Φ dans l'espace normé $\mathcal{B}(E)$ est un clan complet.

Soient f_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ n fonctions appartenant à cette adhérence ; il existe n fonctions $g_i\in\Phi$ telles que $\|f_i-g_i\|\leqslant 1$ pour $1\leqslant i\leqslant n$; donc l'ensemble $f_i(E)$ est borné pour $1\leqslant i\leqslant n$; soit $[-a_i, a_i]$ un intervalle contenant $f_i(E)$, et soit P le pavé produit des n intervalles compacts $[-a_i-1, a_i+1]$. Soit h une application continue de R^n dans R, telle que $h(0,0,..,0)=0$; dans P, h est uniformément continue, donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que $\alpha<1$ et que $\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|\leqslant\alpha$ entraîne $|h(x_1,..,x_n)-h(y_1,..,y_n)|\leqslant\varepsilon$. Il existe n fonctions $u_i\in\Phi$ telles que $\|f_i-u_i\|\leqslant\alpha$ pour $1\leqslant i\leqslant n$; comme $(u_i(x))\in P$, et $|f_i(x)-u_i(x)|\leqslant\alpha$ pour $1\leqslant i\leqslant n$ et pour tout $x\in E$, on a $|h(f_1(x),..,f_n(x))-h(u_1(x),..,u_n(x))|\leqslant\varepsilon$ pour tout $x\in E$; comme $h(u_1(x),..,u_n(x))$ appartient à Φ par hypothèse, on voit que $h(f_1(x),..,f_n(x))$ est adhérent à Φ, ce qui établit la proposition.

En vertu de la prop. 1, l'adhérence d'un clan Φ ne peut être un clan unitaire que si Φ est lui-même un clan unitaire.

Le théorème de Weierstrass (Top.gén., chap. VIII) permet de caractériser d'une autre manière les clans complets : ce sont les sous-algèbres fermées de $\mathcal{B}(E)$. En effet, soit Ω une telle sous-algèbre ; soient f_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ n fonctions quelconques de Ω, g une application continue de R^n dans R, telle que $g(0,0,..,0)=0$.

Soit P un ensemble compact de R^n contenant l'image de E par l'application $x \to (f_i(x))$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynome $h(u_1,..,u_n)$ tel que dans P , $|g(u_1,..,u_n)-h(u_1,..,u_n)| \leqslant \varepsilon$; on a donc dans E , $|g(f_1(x),..,f_n(x))-h(f_1(x),..,f_n(x))| \leqslant \varepsilon$, et comme Ω est fermée dans $\mathcal{B}(E)$ par hypothèse, $g(f_1(x),..,f_n(x))$ appartient bien à Ω .

Le clan des fonctions continues bornées sur un espace topologique E est complet (Top.gén.,chap.VIII). Il n'en est pas de même du clan $\mathcal{K}(E)$ des fonctions continues nulles en dehors d'un compact (si E n'est pas compact) : par exemple, si E est l'intervalle $[1,+\infty[$ de R , la fonction $1/x$ est limite uniforme dans E de fonctions continues s'annulant en dehors d'un compact (on peut prendre, pour fixer les idées, la suite des fonctions u_n , où $u_n(x)=1/x$ pour $x \leqslant n$, $u_n(x)=0$ pour $x \geqslant n+1$, $u_n(x)$ linéaire dans $[n,n+1]$).

On a vu de même au Livre IV (chap.I) que le clan $\mathcal{M}$ des fonctions continues par morceaux dans un intervalle compact I , et le clan $\mathcal{M}_0$ des fonctions constantes par morceaux dans I , ne sont pas complets, et ont même adhérence, formée des fonctions n'ayant que des discontinuités de première espèce dans I .

Exercices. 1) Soit $\mathfrak{S}$ une famille quelconque de parties d'un ensemble E . Soit $\mathfrak{H}$ la famille des parties de la forme $X_1 \cap X_2 \cap .. \cap X_m \cap \complement Y_1 \cap \complement Y_2 \cap ... \cap \complement Y_n$, où les X_i et les Y_j sont des ensembles arbitraires de $\mathfrak{S}$, m et n des entiers arbitraires $\geqslant 1$. Montrer que la plus petite phratrie contenant $\mathfrak{S}$ ("phratrie engendrée par $\mathfrak{S}$") est l'ensemble des réunions d'un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{H}$.

2) Soit $\mathfrak{S}$ une famille quelconque de parties d'un ensemble E , $\mathfrak{S}'$ la famille des intersections d'un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{S}$. Montrer que le clan des fonctions étagées sur la phratrie engendrée par $\mathfrak{S}$ est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients dans R) des fonctions caractéristiques des ensembles de $\mathfrak{S}'$.

3) Soient A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n ensembles quelconques d'une phratrie $\mathfrak{F}$. Montrer qu'il existe un nombre fini d'ensembles B_j de $\mathfrak{F}$, deux à deux sans élément commun, et tels que l'ensemble $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ soit réunion des B_j (remarquer qu'on peut écrire $E = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cup \complement A_i)$, et développer cette formule en utilisant la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$) .

§ 2. Formes linéaires croissantes.

1. Définition des formes linéaires croissantes. Un clan de fonctions Φ (définies dans un ensemble E) est, comme nous l'avons vu, un espace vectoriel par rapport au corps des nombres réels (sous-espace de $\mathcal{B}(E)$), et d'autre part un ensemble ordonné par la relation $f \leqslant g$. On dira qu'une forme linéaire L sur Φ est croissante si c'est une fonction croissante pour la relation d'ordre précédente, c'est-à-dire si $f \leqslant g$ entraîne $L(f) \leqslant L(g)$; comme $L(g)-L(f)=L(g-f)$, il revient au même de dire que, pour tout $f \geqslant 0$, on a $L(f) \geqslant 0$.

Désignons par Φ_+ l'ensemble des fonctions $f \geqslant 0$ de Φ ; si $f \in \Phi_+$ $g \in \Phi_+$, on a $f+g \in \Phi_+$ et $L(f+g)=L(f)+L(g)$. Inversement :

Proposition 1. Soit $f \rightarrow M(f)$ une fonction à valeurs réelles définie dans Φ_+ , telle que $M(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in \Phi_+$, et $M(f+g)=M(f)+M(g)$ quels que soient $f \in \Phi_+$, $g \in \Phi_+$. Il existe une forme linéaire croissante L et une seule qui prolonge M à Φ .

Montrons d'abord que, pour λ réel et $\geqslant 0$, et $f \in \Phi_+$, on a $M(\lambda f)=\lambda M(f)$. En effet, l'identité $M(f+g)=M(f)+M(g)$ entraîne $M(nf)=nM(f)$, d'où $M(\frac{f}{n}) = \frac{1}{n} M(f)$, et par suite $M(rf)=rM(f)$ pour tout nombre rationnel r. D'autre part, si $0 \leqslant f \leqslant g$, on a $g=f+(g-f)$ et $g-f \geqslant 0$, donc $M(g)=M(f)+M(g-f) \geqslant M(f)$; si r et r' sont deux nombres rationnels tels que $r \leqslant \lambda < r'$, on a donc $rM(f) \leqslant M(\lambda f) \leqslant r'M(f)$; comme $rM(f)$ et $r'M(f)$ diffèrent d'aussi peu qu'on veut de $\lambda M(f)$, on a bien $M(\lambda f)=\lambda M(f)$.

Posons maintenant, pour toute fonction $f=f^+-f^- \in \Phi$, $L(f)=M(f^+)-M(f^-)$; pour $\lambda \geqslant 0$, on a bien $L(\lambda f)=\lambda L(f)$, car $(\lambda f)^+=\lambda f^+$, $(\lambda f)^-=\lambda f^-$; pour $\lambda < 0$, on a $(\lambda f)^+=-\lambda f^-$, $(\lambda f)^-=-\lambda f^+$, donc $L(\lambda f)=-\lambda M(f^-)+\lambda M(f^+) = \lambda L(f)$. Reste donc à prouver que, si f et g sont deux fonctions quelconques de Φ, et $h=f+g$, on a $L(h)=L(f)+L(g)$; or, on a identiquement $h^+-h^-=f^+-f^-+g^+-g^-$, donc $h^++f^-+g^-=h^-+f^++g^+$, ce qui entraîne $M(h^+)+M(f^-)+M(g^-)=M(h^-)+M(f^+)+M(g^+)$, et par suite l'égalité à démontrer.

2. Exemples de formes linéaires croissantes. I. Etant donné un élément fixe $a \in E$, l'application $f \to f(a)$ est une forme linéaire croissante définie sur le clan $\mathcal{B}(E)$ de toutes les fonctions bornées dans E ; il en est de même de l'application $f \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i)$ où les a_i sont un nombre fini quelconque d'éléments de E, les α_i des nombres $\geqslant 0$.

II. Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble E ; pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(E)$, $\lim_{\mathfrak{U}} f$ existe, car $f(\mathfrak{U})$ est une base d'ultrafiltre sur l'ensemble relativement compact $f(E)$, et est par suite convergente. En outre, si $f \geqslant 0$, $\lim_{\mathfrak{U}} f \geqslant 0$ d'après le principe de prolongement des inégalités ; l'application $f \to \lim_{\mathfrak{U}} f$ est donc une forme linéaire croissante définie dans $\mathcal{B}(E)$.

Si on prend pour $\mathfrak{U}$ l'ultrafiltre formé des ensembles contenant un élément fixe $a \in E$, on retrouve ainsi la forme linéaire croissante $f \to f(a)$.

III. Soit $\mathfrak{M}$ le clan des fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact $I = [a,b]$ de R . L'application $f \to \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire croissante sur $\mathfrak{M}$.

De même, $f \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est une forme linéaire croissante sur le clan des fonctions continues dans R , nulles en dehors d'un intervalle compact.

IV. Si L est une forme linéaire croissante sur un clan Φ , et $f \to u(f)$ une application linéaire de Φ dans lui-même, telle que $f \geqslant 0$ entraîne $u(f) \geqslant 0$, l'application $f \to L(u(f))$ est encore une forme linéaire croissante ; en particulier, si $h \in \Phi_+$, $f \to L(hf)$ est une forme linéaire croissante, qui est définie non seulement sur le clan Φ , mais aussi sur le clan <u>unitaire</u> Φ' engendré par Φ (puisque, pour toute constante k , $h(k+f)$ appartient à Φ quel que soit $f \in \Phi$.

<u>V. Fonctions additives d'ensembles</u>. Soit $\mathfrak{F}$ une phratrie de parties d'un ensemble E ; on dit qu'une application $X \to \lambda(X)$ de $\mathfrak{F}$ dans R est une <u>fonction additive d'ensemble</u> si on a $\lambda(X \cup Y) = \lambda(X) + \lambda(Y)$ pour tout couple (X,Y) d'ensembles de $\mathfrak{F}$ <u>sans élément commun</u> ; on en conclut aussitôt par récurrence que, si $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille finie d'ensembles de $\mathfrak{F}$ sans élément commun deux à deux, on a
$\lambda(\bigcup_i X_i) = \sum_i \lambda(X_i)$.

Soit λ une fonction additive d'ensemble définie dans $\mathfrak{F}$, à valeurs <u>positives</u>, et soit Φ le clan des fonctions étagées sur la phratrie $\mathfrak{F}$; si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les valeurs distinctes et non nulles prises par f , posons $L(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(f^{-1}(a_i))$; nous allons voir qu'on définit ainsi une forme linéaire croissante dans Φ .

En effet, $f \geqslant 0$ entraîne évidemment $L(f) \geqslant 0$; d'après la prop. 1, tout revient à montrer que, si $f \in \Phi_+$, $g \in \Phi_+$, on a $L(f+g)=L(f)+L(g)$ (la relation $L(f)=L(f^+)-L(f^-)$ résultant immédiatement de la définition). Soient a_i (resp. b_j) les valeurs distinctes, <u>y compris 0</u> , prises par f (resp. g) ($1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$) ; soient c_k ($1 \leqslant k \leqslant p$) les valeurs distinctes <u>non nulles</u> prises par $h=f+g$. Posons $A_{ij} = \overset{-1}{f}(a_i) \cap \overset{-1}{g}(b_j)$; on peut écrire, pour tout indice k , $\overset{-1}{h}(c_k) = \bigcup_{a_i+b_j=c_k} A_{ij}$; les A_{ij} qui figurent dans cette réunion appartiennent à $\mathfrak{F}$, car un au moins des deux nombres a_i ; b_j tels que $a_i+b_j=c_k$ est $\neq 0$, donc un des deux ensembles $\overset{-1}{f}(a_i)$, $\overset{-1}{g}(b_j)$ appartient à $\mathfrak{F}$, l'autre ensemble appartient aussi à $\mathfrak{F}$ si a_i et b_j sont tous deux $\neq 0$, sinon son complémentaire appartient à $\mathfrak{F}$, ce qui prouve de toute manière que $A_{ij} \in \mathfrak{F}$; comme, en outre, deux A_{ij} d'indices distincts sont sans élément commun, on a $\lambda(\overset{-1}{h}(c_k)) = \sum_{a_i+b_j=c_k} \lambda(A_{ij})$, d'où $L(h) = \sum_{k=1}^{p} c_k \left(\sum_{a_i+b_j=c_k} \lambda(A_{ij}) \right) = \sum_{i,j} (a_i+b_j)\lambda(A_{ij})$, la somme étant étendue à tous les couples d'indices (i, j) tels que a_i et b_j ne soient pas tous deux nuls. Or, pour chaque indice i tel que $a_i \neq 0$, $\sum_{j=1}^{m} \lambda(A_{ij}) = \lambda(\overset{-1}{f}(a_i))$ car $\overset{-1}{f}(a_i) = \bigcup_{j=1}^{m} A_{ij}$; de même, pour chaque indice j tel que $b_j \neq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda(A_{ij}) = \lambda(\overset{-1}{g}(b_j))$; on a donc bien $L(h) = L(f)+L(g)$.

En particulier, si on prend pour $\mathfrak{F}$ la phratrie $\mathfrak{F}(E)$ des <u>parties finies</u> de E , toute fonction numérique $x \to \alpha(x)$, à valeurs $\geqslant 0$, définie dans E , détermine une fonction additive d'ensemble $\geqslant 0$ par la condition $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} \right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(a_i)$; le clan Φ est ici l'ensemble des fonctions f qui ne prennent de valeurs $\neq 0$ qu'en un un <u>nombre fini</u> de points de E ; et on a $L(f) = \sum_{x \in E} a(x)f(x)$, la somme ayant un sens pour tout $f \in \Phi$.

Inversement, toute forme linéaire croissante L définie sur un clan Φ de fonctions étagées attachées à une phratrie $\mathcal{F}$, s'obtient de la manière précédente à partir d'une fonction additive d'ensemble bien déterminée λ . En effet, pour toute fonction caractéristique φ_A d'un ensemble de $\mathcal{F}$, on doit avoir $\lambda(A)=L(\varphi_A)$; la fonction d'ensemble ainsi définie est bien <u>additive</u>, car si $A \cap B = \emptyset$, on a $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B$, donc $\lambda(A\cup B) = \lambda(A)+\lambda(B)$; enfin si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les valeurs distinctes et $\neq 0$ prises par $f \in \Phi$, on a $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{A_i}$, où $A_i = \overset{-1}{f}(a_i)$; on en déduit que $L(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i L(\varphi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(\overset{-1}{f}(a_i))$.

3. <u>L'inégalité de la moyenne</u>. Soit L une forme linéaire croissante définie sur un clan de fonctions Φ ; pour toute fonction $f \in \Phi$, on a $|f| \in \Phi$ et $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, d'où $-L(|f|) \leqslant L(f) \leqslant L(|f|)$; c'est-à-dire

(1) $$|L(f)| \leqslant L(|f|) .$$

D'autre part, soit g une fonction quelconque de Φ_+ ; comme g est $\geqslant 0$, on peut écrire pour toute fonction f du clan unitaire Φ' engendré par Φ ,

$$g.\inf_{x\in E} f(x) \leqslant fg \leqslant g.\sup_{x \in E} f(x)$$

d'où

(2) $$\inf_{x\in E} f(x).L(g) \leqslant L(fg) \leqslant \sup_{x\in E} f(x).L(g)$$

L'inégalité (2) est connue sous le nom d'<u>inégalité de la moyenne</u>. Lorsque Φ est un clan <u>unitaire</u>, on peut faire g=1 dans les inégalités (2), ce qui donne

(3) $$\inf_{x\in E} f(x).L(1) \leqslant L(f) \leqslant \sup_{x\in E} f(x).L(1)$$

et en particulier, si $L(1)=1$

(4) $$\inf_{x\in E} f(x) \leqslant L(f) \leqslant \sup_{x\in E} f(x)$$

Lorsque Φ est un clan unitaire, et $L(1)=1$, on dit que la forme linéaire croissante L est une <u>moyenne</u> sur Φ : elle fait correspondre à toute fonction $f \in \Phi$ une valeur "intermédiaire" entre la borne inférieure et la borne supérieure de f sur E, d'après (4). La combinaison des inégalités (1) et (3) donne pour toute fonction $g \geqslant 0$ de Φ_+

(5) $$|L(fg)| \leqslant L(g).\sup_{x\in E}|f(x)|$$

et en particulier, si $1 \in \Phi$

(5 bis) $$|L(f)| \leqslant L(1).\sup_{x\in E}|f(x)|$$

Or, $\|f\| = \sup_{x\in E}|f(x)|$ n'est autre que la <u>norme</u> de f dans l'espace normé $\mathcal{B}(E)$ (<u>Top.gén.</u>, chap.VII). L'inégalité (5) peut donc s'interprèter de la façon suivante :

Proposition 2. <u>Pour toute fonction $g \in \Phi_+$ et toute forme linéaire croissante L définie sur Φ, la forme linéaire $f \to L(gf)$ est continue dans le clan unitaire Φ' engendré par Φ (Φ' étant considéré comme sous-espace normé de $\mathcal{B}(E)$).</u>

Corollaire. <u>Sur un clan unitaire, toute forme linéaire croissante est continue.</u>

Au chap.II, nous verrons qu'inversement (comme conséquence d'une propriété plus générale), toute forme linéaire continue sur un clan unitaire est la <u>différence de deux formes linéaires croissantes</u>.

Le corollaire de la proposition 2 entraîne la possibilité de <u>prolonger</u> une forme linéaire croissante définie sur un clan unitaire non complet :

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> L <u>une forme linéaire croissante définie sur un clan unitaire</u> Φ ; <u>le prolongement par continuité de</u> L <u>au clan complet</u> $\overline{\Phi}$, <u>adhérence de</u> Φ <u>dans</u> $\mathcal{B}(E)$, <u>est une forme linéaire croissante</u>.

On sait que ce prolongement existe et est une forme linéaire continue, puisque L est uniformément continue dans Φ ; notons-le encore L . Il n'y a qu'à montrer que, si $f \in \overline{\Phi}$ et $f \geqslant 0$, on a $L(f) \geqslant 0$. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse, $g \in \Phi$ tel que $\|f-g\| \leqslant \varepsilon$, d'où, en particulier $g \geqslant f-\varepsilon \geqslant -\varepsilon$; par suite $L(g) \geqslant -\varepsilon L(1)$, et comme $|L(f)-L(g)| \leqslant \varepsilon L(1)$ d'après (5) , on a $L(f) \geqslant L(g)-\varepsilon L(1) \geqslant -2\varepsilon L(1)$; comme ε est arbitraire, $L(f) \geqslant 0$.

Lorsque Φ n'est pas un clan unitaire, on peut encore prolonger une forme linéaire croissante L définie sur Φ à certaines fonctions de $\overline{\Phi}$, de la façon suivante : pour toute fonction $g_0 \in \overline{\Phi}_+$, désignons par $\mathcal{C}_{g_0}$ la topologie de groupe définie sur $\mathcal{B}(E)$ en prenant pour système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{B}(E)$ les ensembles $V(g_0;\varepsilon)$ où $V(g_0;\varepsilon)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{B}(E)$ telles que $|f| \leqslant \varepsilon g_0$, et où ε parcourt l'ensemble des nombres > 0 ; on notera que cette topologie n'est jamais une topologie d'espace vectoriel sur Φ lorsque Φ n'est pas unitaire, car on a $\sqrt{g_0} \in \Phi$, et en vertu de la prop.1 du § 1, on ne peut avoir $\lambda\sqrt{g_0} \leqslant g_0$ pour aucune constante $\lambda > 0$. Il est immédiat que, pour toute topologie $\mathcal{C}_{g_0}$, L est <u>continue</u> dans Φ ; on peut donc la prolonger par continuité à toute fonction <u>adhérente</u> à Φ pour la topologie $\mathcal{C}_{g_0}$ (fonction qui appartient évidemment à $\overline{\Phi}$); mais il faut s'assurer que si f est adhérent à Φ pour deux topologies distinctes $\mathcal{C}_{g_0}$, $\mathcal{C}_{h_0}$, la valeur de L(f) obtenue par prolongement est la même pour ces deux topologies.

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse deux fonctions g, h de Φ telles que $|f-g| \leqslant \varepsilon g_0$ et $|f-h| \leqslant \varepsilon h_0$; on en tire que $|g-h| \leqslant \varepsilon(g_0+h_0)$, d'où $|L(g)-L(h)| \leqslant \varepsilon L(g_0+h_0)$; d'où aussitôt la proposition, ε étant aussi petit qu'on veut.

Cela étant, si f est adhérent à Φ pour la topologie $\mathcal{C}_{g_0}$, g adhérent à Φ pour la topologie $\mathcal{C}_{h_0}$, f et g sont tous deux adhérents à Φ pour la topologie $\mathcal{C}_{g_0+h_0}$; il en est donc de même de $f+g$, ce qui prouve qu'on peut prolonger L à $f+g$, et qu'on a $L(f+g)=L(f)+L(g)$; on montre de même qu'on peut prolonger L à λf pour tout λ réel, et que $L(\lambda f) = \lambda L(f)$; enfin, on démontre comme dans la prop.3 que, si on peut prolonger L à $f \geqslant 0$, on a $L(f) \geqslant 0$.

D'après (5), si f et g sont deux fonctions d'un clan quelconque Φ, telles que $\|g\| = \sup_{x \in E} |g(x)| \leqslant 1$, on a $|L(fg)| \leqslant L(|f|)$. On peut préciser cette inégalité de la manière suivante :

<u>Proposition 4. Pour toute forme linéaire croissante</u> L <u>sur un clan</u> Φ, <u>et toute fonction</u> $f \in \Phi$, <u>on a</u>

$$(6) \qquad L(|f|) = \sup_{g \in \Phi,\, \|g\| \leqslant 1} |L(fg)|$$

Il faut montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \Phi$ telle que $\|g\| \leqslant 1$ et $L(fg) \geqslant L(|f|)-\varepsilon$. Soit δ un nombre >0 ; désignons par φ la fonction numérique définie dans R par les conditions $\varphi(x)=-\delta$ si $x < -\delta$, $\varphi(x)=x$ si $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$, $\varphi(x)=\delta$ si $x > \delta$. La fonction $g=\frac{1}{\delta}(\varphi \circ f)$ appartient à Φ, puisque $\varphi(0)=0$; on a donc $g(x)=-1$ si $f(x) < -\delta$, $g(x)=\frac{1}{\delta} f(x)$ si $-\delta \leqslant f(x) \leqslant \delta$, et $g(x)=1$ si $f(x) > \delta$, ce qui prouve d'abord que $\|g\| \leqslant 1$. Considérons alors la fonction $h=|f|-fg$; on a $h \geqslant 0$, et $h(x)=0$ si $|f(x)| > \delta$;

d'autre part, si $|f(x)| \leqslant \delta$, on a $h(x) \leqslant |f(x)|$, donc on peut écrire $h(x) \leqslant \sqrt{\delta |f(x)|}$ quel que soit x ; par suite $L(h) \leqslant \sqrt{\delta}\, L(\sqrt{|f|})$. Il suffit alors de prendre δ tel que $\sqrt{\delta}\, L(\sqrt{|f|}) \leqslant \varepsilon$ pour obtenir le résultat demandé.

On notera que, d'après la démonstration, si $f \geqslant 0$ on peut supposer $g \geqslant 0$ dans la formule (6).

4. Application : intégrale de Stieltjes. La prop.3 est en réalité la propriété que nous avons appliquée pour définir, au Livre IV, chap.I, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ d'une fonction appartenant à l'adhérence du clan unitaire $\mathfrak{M}_0$ des fonctions constantes par morceaux dans $[a,b]$. Ce procédé peut se généraliser de la façon suivante :

Etant donné un intervalle compact $[a,b]$ de $\bar{R}$, soit $v(x)$ une fonction numérique croissante et bornée définie dans $[a,b]$.

Considérons une fonction constante par morceaux quelconque f dans $[a,b]$; soient a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les points de discontinuité de f dans $]a,b[$, rangés par ordre croissant ; posons $a_0=a$, $a_{n+1}=b$, et soit c_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ la valeur constante prise par f dans l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. Définissons alors le nombre L(f) par la formule

$$L(f)= \sum_{i=0}^{n} c_i(v(a_{i+1}-0)-v(a_i+0))+f(a)(v(a+0)-v(a))+f(b)(v(b)-v(b-0)) + \\ + \sum_{i=1}^{n} f(a_i)(v(a_i+0)-v(a_i-0))$$

On a évidemment $L(f) \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$, et $L(\lambda f)=\lambda L(f)$ quelle que soit la constante λ ; pour voir que L est une forme linéaire croissante dans $\mathfrak{M}_0$, il suffit donc d'établir que $L(f+g)=L(f)+L(g)$. Or, cela résulte de la remarque suivante : si $(a'_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ est une suite croissante de points de l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, on a

$$c_i(v(a_{i+1}-0)-v(a_i+0)) = \sum_{j=1}^{m-1} c_i(v(a'_{j+1}-0)-v(a'_j+0))$$
$$+c_i(v(a'_1-0)-v(a_i+0))+c_i(v(a_{i+1}-0)-v(a'_m+0))$$
$$+\sum_{j=1}^{m} f(a'_j)(v(a'_j+0)-v(a'_j-0))$$

car $f(a'_j)=c_i$ pour tout indice j, et en mettant c_i en facteur au second membre, il reste une identité évidente. On appliquera cette remarque en subdivisant chaque intervalle $]a_i,a_{i+1}[$ par les points de discontinuité de g intérieurs à cet intervalle, et en opérant de même pour g (en intervertissant les rôles de f et g). La somme $L(f)+L(g)$, calculée de cette façon, donne alors aussitôt $L(f+g)$, en remarquant qu'un point de discontinuité de $f+g$ est nécessairement point de discontinuité de f ou de g.

Le clan $\mathfrak{M}_0$ des fonctions constantes par morceaux dans $[a,b]$ étant unitaire, on peut prolonger par continuité la forme linéaire croissante L à l'adhérence de $\mathfrak{M}_0$ dans $\mathcal{B}([a,b])$, d'après la prop.3 ; la forme linéaire croissante ainsi obtenue est appelée intégrale de Stieltjes de f, par rapport à la fonction croissante v, et on la note $\int_a^b f(t)dv(t)$. Lorsque $[a,b]$ est un intervalle compact de R, et $v(x)=x$, on retrouve l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ définie au Livre IV. Une intégrale de Stieltjes est donc définie pour toutes les fonctions bornées dans $[a,b]$ et n'ayant que des discontinuités de première espèce (en particulier pour toutes les fonctions continues dans $[a,b]$).

Si c est un point quelconque de l'intervalle $[a,b]$, on a $\int_a^b f(t)dv(t) = \int_a^c f(t)dv(t) + \int_c^b f(t)dv(t)$: cela résulte aussitôt de la définition lorsque f est constante par morceaux, et on en déduit la formule pour f adhérent à $\mathfrak{M}_0$ par passage à la limite.

Lorsque v est <u>continue</u> dans $[a,b]$ et admet en tout point de $]a,b[$ une <u>dérivée bornée</u> v' qui n'a que des discontinuités de première espèce, on a

$$\int_a^b f(t)dv(t) = \int_a^b f(t)v'(t)dt$$

Ici encore, cette formule est immédiate pour les fonctions constantes par morceaux ; en passant à la limite, on en déduit qu'elle est encore valable pour toute fonction f n'ayant que des discontinuités de première espèce.

<u>Exercice</u>. Soit L une forme linéaire croissante définie sur un clan non unitaire Φ. Pour qu'on puisse prolonger L en une forme linéaire croissante définie sur le clan unitaire Φ' engendré par Φ, il faut et il suffit que $\sup_{f\in\Phi_+, f\leq 1} L(f)$ ait une valeur finie.

§ 3. L'inégalité de convexité, et les inégalités de Hölder et de Minkowski.

1. <u>L'inégalité de convexité</u>. <u>Théorème 1. Soit L une forme linéaire croissante non identiquement nulle, définie sur un clan Φ.</u>

<u>Soient f une fonction de Φ, g une fonction de Φ_+, telle que $L(g)>0$. Pour toute fonction convexe φ définie et continue dans un intervalle $[a,b[$ contenant $\overline{f(E)}$, et telle que $\varphi(f)$ appartienne à Φ</u> (ce qui sera toujours le cas si Φ est unitaire, ou si $\varphi(0)=0$), <u>on a</u>

$$(1)\qquad L(g\varphi(f)) \geqslant L(g)\,\varphi\left(\frac{L(fg)}{L(g)}\right)$$

Posons $\xi = L(fg)/L(f)$; d'après les inégalités de la moyenne, on a $\xi\in\overline{f(E)}$, donc $\xi\in[a,b[$; supposons d'abord que $a<\xi<b$. Alors, il existe un nombre réel m tel que, pour tout $x\in[a,b[$, on ait

$$\varphi(x)-\varphi(\xi) \geqslant m(x-\xi)$$

d'où, pour tout $y \in E$

$$\varphi(f(y))-\varphi(\xi) \geqslant m(f(y)-\xi)$$

et, en multipliant par $g(y) \geqslant 0$

$$g(y)\varphi(f(y))-g(y)\varphi(\xi) \geqslant m(f(y)g(y)-g(y)\xi)$$

Par suite, on a

$$L(g\varphi(f))-L(g)\varphi(\xi) \geqslant m(L(fg)-\xi L(g))=0$$

en vertu de la définition de ξ ; d'où l'inégalité à démontrer.

Le raisonnement ne s'applique plus lorsque $\xi=a$. Mais, d'après la prop.4 du § 2, il existe $h \in \Phi_+$ telle que $h \leq 1$ et $L(gh)>0$. Prenons $\varepsilon>0$ assez petit pour que $f(y)+\varepsilon h(y) \in \left[a,b\right[$ quel que soit $y \in E$; on a alors $L((f+\varepsilon h)g)=L(fg)+\varepsilon L(gh)>L(fg)=aL(g)$, donc on peut appliquer l'inégalité (1) en y remplaçant f par $f+\varepsilon h$, ce qui donne

$$L(g\varphi(f+\varepsilon h)) \geqslant L(g)\,\varphi\left(\frac{L(fg)+\varepsilon L(gh)}{L(g)}\right) \tag{2}$$

Mais, lorsque ε tend vers 0, $\varphi(f+\varepsilon h)$ tend uniformément vers $\varphi(f)$, puisque φ est uniformément continue dans tout intervalle compact contenu dans $\left[a,b\right[$; d'après la prop.2 du § 2 , on peut donc passer à la limite dans (2), ce qui donne de nouveau (1) .

<u>Corollaire</u>. <u>Soit φ une fonction convexe définie et continue dans un intervalle $[a,b]$; si (x_i) est une famille finie de n nombres appartenant à $[a,b]$, (p_i) une famille de n nombres $\geqslant 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$, on a</u>

$$\varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \tag{1'}$$

Il suffit d'appliquer le th.1 à la forme linéaire croissante $\sum_{i=1}^{n} x_i$ définie sur l'ensemble des suites finies de nombres réels.

2. L'inégalité de Hölder. La fonction $\varphi(x)=x^r$ est définie et continue dans $[0,+\infty[$ ~~xxxx~~ pour tout $r>0$; comme $\varphi''(x)=r(r-1)x^{r-2}$ pour $x>0$, $-\varphi(x)$ est convexe dans $[0,+\infty[$ pour $0<r<1$; donc, si f et g sont deux fonctions de Φ_+ telles que $L(g)>0$, on a

$$L(gf^r)\leqslant L(g)(L(fg)/L(g))^r$$

ce qui, s'écrit encore

$$L((fg)^r g^{1-r})\leqslant (L(fg))^r(L(g))^{1-r}$$

Changeons de notations en posant $r=1/p$, $1-r=1/p'$, $fg=u^p$, $g=v^{p'}$ il vient l'inégalité

$$(5)\qquad L(uv)\leqslant(L(u^p))^{1/p}(L(v^{p'}))^{1/p'}$$

connue sous le nom d'inégalité de Hölder ; elle est valable pour $p>1$, $1/p+1/p'=1$, et pour tout couple de fonctions u,v de Φ_+ telles que $L(v^{p'})>0$; on peut d'ailleurs aisément faire disparaître cette restriction, car si $L(v^{p'})=0$, et si w est une fonction de Φ_+ telle que $L(w)>0$, on peut appliquer l'inégalité (5) en y remplaçant v par $v+\varepsilon w^{1/p'}$, puisque $(v+\varepsilon w^{1/p'})^{p'}>\varepsilon^{p'}w$, et par suite $L((v+\varepsilon w^{1/p'})^{p'})>0$; faisant ensuite tendre ε vers 0, on retrouve (5) en appliquant la prop.2 du § 2 . On voit donc que, si u et v sont deux fonctions de Φ_+ telles que $L(u^p)=0$ ou $L(v^{p'})=0$, on a $L(uv)=0$. On peut en conclure que, si $L(u^p)=0$ pour une fonction $u\geqslant 0$, on a nécessairement $L(u)=0$, en vertu de la prop.4 du § 2 ; d'ailleurs, si on a inversement $L(u)=0$, on en tire $L(u^p)=0$ pour tout $p>1$, car on peut écrire $u^p\leqslant u.a^{p-1}$, où $a=\|u\|=\sup_{x\in E}u(x)$, donc $L(u^p)=0$ d'après l'inégalité de la moyenne. On voit donc qu'en résumé, si $L(u^\alpha)=0$ pour une fonction $u\in\Phi_+$ et un exposant $\alpha>0$, on a $L(u^\beta)=0$ pour tout exposant $\beta>0$.

L'inégalité de Hölder s'étend aux fonctions de signe quelconque, car pour $u \in \Phi$, $v \in \Phi$, on a $|L(uv)| \leqslant L(|uv|)$, et par suite

(4) $$|L(uv)| \leqslant (L(|u|^p))^{1/p}(L(|v|^{p'}))^{1/p'}$$

Le cas particulier où $p=2$ est caractérisé par le fait qu'alors $p'=p=2$; l'inégalité s'écrit dans ce cas

(5) $$|L(uv)| \leqslant (L(u^2))^{\frac{1}{2}} (L(v^2))^{\frac{1}{2}}$$

et est connue sous le nom d'<u>inégalité de Cauchy-Schwarz</u>.

L'inégalité de Hölder pour les sommes finies (cor. du th.1) s'écrit

(6) $$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^{p'} \right)^{1/p'}$$

et en particulier, pour $p = p'=2$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)$$

inégalité qui a déjà été démontrée en Algèbre (chap. VI) comme conséquence de l'identité de Lagrange.

L'inégalité de Hölder entraîne la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u>. <u>Pour toute fonction</u> $u \in \Phi$ $(L(|u|^p))^{1/p}$ <u>est la borne supérieure des nombres</u> $|L(uv)|$, <u>où</u> v <u>parcourt l'ensemble des fonctions de</u> Φ <u>telles que</u> $L(|v|^{p'}) \leqslant 1$.

En effet, on a d'après (4) $|L(uv)| \leqslant (L(|u|^p))^{1/p}$ pour toutes les fonctions v considérées. Réciproquement, considérons (pour $r > 0$) la fonction $\psi(x)$ égale à x^r pour $x \geqslant 0$, à $-|x|^r$ pour $x < 0$; c'est une fonction continue dans R, nulle pour $x=0$; donc la fonction v définie dans E par les conditions

$v(y)=(u(y))^{p/p'}/(L(|u|^p))^{1/p'}$ pour $u(y) \geqslant 0$, et

$v(y)=-|u(y)|^{p/p'}/(L(|u|^p))^{1/p'}$ pour $u(y) < 0$, appartient à Φ et est telle que $uv = \dfrac{|u|^p}{(L(|u|^p))^{1/p'}}$; on a donc $L(|v|^{p'}) = 1$, et $L(uv)=(L(|u|^p))^{1/p}$ d'après la relation $1/p + 1/p' =1$.

3. **L'inégalité de Minkowski.** La fonction $\varphi(x)=(1+x^r)^{1/r}$ est définie et continue dans $[0,+\infty[$ pour tout $r>0$; comme $\varphi''(x)=(r-1)x^{r-2}(1+x^r)^{(1-2r)/r}$ pour $x>0$, $-\varphi(x)$ est <u>convexe</u> dans $[0,+\infty[$ pour $0<r\leqslant 1$; si f et g sont deux fonctions de Φ_+ telles que $L(g)>0$, on a donc

$$L(g(1+f^r)^{1/r}) \leqslant ((L(g))^r + (L(fg))^r)^{1/r}$$

Changeons de notations en posant $r=1/p$, $fg=u^p$, $g=v^p$; il vient l'inégalité

(6) $$(L((u+v)^p))^{1/p} \leqslant (L(u^p))^{1/p} + (L(v^p))^{1/p}$$

connue sous le nom d'<u>inégalité de Minkowski</u> ; elle est valable pour $p\geqslant 1$, et pour tout couple de fonctions u,v de Φ_+ telles que $L(v^p)>0$; il est facile ici encore de faire disparaître cette restriction, en remplaçant v par $v+\varepsilon w^{1/p}$, où w est pris tel que $L(w)>0$, puis en faisant tendre ε vers 0 . On voit donc que, si u et v sont deux fonctions de Φ_+ telles que $L(u^p)$ <u>et</u> $L(v^p)$ soient nuls, on a $L((u+v)^p)=0$.

L'inégalité de Minkowski s'étend aussi aux fonctions de signe quelconque , en raison de l'inégalité du triangle $|u+v| \leqslant |u| + |v|$, on a

(7) $$(L(|u+v|^p))^{1/p} \leqslant (L(|u|^p))^{1/p} + (L(|v|^p))^{1/p}$$

4. **Les normes $\|f\|_p$** . Supposons donnée une forme linéaire croissante L sur un clan Φ ; pour toute fonction $f\in\Phi$, et tout nombre réel $p\geqslant 1$, on pose $\|f\|_p = (L(|f|^p))^{1/p}$. Avec cette notation, l'inégalité de Minkowski se formule

(8) $$\|u+v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p$$

Comme d'autre part, on a évidemment $\|\lambda u\|_p = |\lambda| . \|u\|_p$ pour tout nombre réel λ , on voit que chacune des fonctions $\|u\|_p$ définie dans Φ est une <u>norme</u> sur ce sous-espace vectoriel. Signalons tout de

Signalons tout de suite que ces diverses normes <u>ne sont pas équivalentes</u> et ne sont pas davantage équivalentes à la norme de l'espace $\mathcal{B}(E)$ (égale à $\sup_{x\in E}|f(x)|$) ; nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.

<u>Proposition 2</u>. <u>Pour tout f fixe dans</u> Φ, $\log\|f\|_p$ <u>est une fonction convexe de la variable</u> $1/p$ <u>dans l'intervalle</u> $\left]0,1\right]$.

Soient r et s deux nombres réels $\geqslant 1$; il faut prouver que, si $\frac{1}{p}=\frac{t}{r}+\frac{1-t}{s}$, avec $0<t<1$, on a

$$\log\|f\|_p \leqslant t.\log\|f\|_r + (1-t)\log\|f\|_s \tag{9}$$

ou, ce qui revient au même

$$\|f\|_p \leqslant (\|f\|_r)^t(\|f\|_s)^{1-t}$$

relation qui s'écrit, d'après la définition de $\|f\|_p$

$$L(|f|^p) \leqslant (L(|f|^r))^{tp/r}(L(|f|^s))^{(1-t)p/s} \tag{10}$$

Si on pose $u=tp/r$, on a $1-u=(1-t)p/s$ d'après la relation qui définit p en fonction de t,r,s ; d'où $p=ur+(1-u)s$. Or, si on pose $g=|f|^{ur}$, $h=|f|^{(1-u)s}$, l'inégalité de Hölder donne (en y remplaçant $1/p$ par u, $1/p'$ par $1-u$)

$$L(gh) \leqslant (L(g^{1/u}))^u(L(h^{1/(1-u)}))^{1-u}$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (10).

La prop.2 montre en particulier que la fonction $\|f\|_p$ est <u>continue</u> dans l'intervalle $\left[1,+\infty\right[$, et <u>admet une limite</u> lorsque p tend vers $+\infty$; nous noterons cette limite par $\|f\|_\infty$; c'est un nombre <u>fini</u>, car on a $|f|^p \leqslant |f|.\|f\|^{p-1}$, donc, d'après l'inégalité de la moyenne $\|f\|_p \leqslant (\|f\|_1)^{1/p}(\|f\|)^{1-1/p}$; en faisant croître p indéfiniment, il vient

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\| \tag{10}$$

Nous allons préciser cette inégalité ; tout d'abord, nous établirons l'analogue suivant de la prop.1 :

27

<u>Proposition 3</u>. <u>Pour toute fonction</u> $u \in \Phi$, <u>on a</u>

(11) $$\|u\|_\infty = \sup_{v \in \Phi\,,\ \|v\|_1 \leqslant 1} |L(uv)|$$

Tout d'abord, l'inégalité de Hölder (4) s'écrit

(12) $$|L(uv)| \leqslant \|u\|_p \cdot \|v\|_{p'}$$

d'où, en faisant tendre p vers $+\infty$ (ce qui entraîne que p' tend vers 1)

(13) $$|L(uv)| \leqslant \|u\|_\infty \cdot \|v\|_1$$

Il nous reste à montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $v \in \Phi$ telle que $\|v\|_1 \leqslant 1$ et $L(uv) \geqslant \|u\|_\infty - \varepsilon$.

Soit $w = \operatorname{sgn} u.(|u|/\|u\|_p)^{p/p'} = \operatorname{sgn} u.(|u|/\|u\|_p)^{p-1}$; on a vu (prop.1) que $\|w\|_{p'} = 1$ et $L(uw) = \|u\|_p$; si on pose $v = w/\|w\|_1$, on aura $\|v\|_1 = 1$ et $L(uv) = \|u\|_p / \|w\|_1$; la proposition sera démontrée si on prouve que $\|w\|_1 \leqslant 1+\varepsilon$ lorsque p est assez grand (puisque $\|u\|_p$ tend alors vers $\|u\|_\infty$). Or, l'inégalité (9), appliquée en y remplaçant p par p-1 , r par 1 , s par p et f par u , donne

$$\|u\|_{p-1}^{p-1} \leqslant \|u\|_1^{1/(p-1)} \cdot \|u\|_p^{p(p-2)/(p-1)}$$

ce qui s'écrit

$$\|w\|_1 \leqslant \|u\|_1^{1/(p-1)} \cdot \|u\|_p^{-1/(p-1)}$$

et le second membre tend vers 1 lorsque p croît indéfiniment.

On peut donc réunir les résultats des propositions 1 et 3 , et celui de la prop.4 du §2 (en tenant compte de (10)), dans la relation générale

(14) $$\|u\|_p = \sup_{v \in \Phi\,,\ \|v\|_{p'} \leqslant 1} |L(uv)|$$

valable quels que soient p et p' dans l'intervalle $[1, +\infty]$, liés par la relation $1/p + 1/p' = 1$ (avec la convention que $p' = 1$ si $p = +\infty$, $p' = +\infty$ si $p = 1$).

<u>Proposition 4</u>. <u>Si on a</u> $\|f\|_\infty < \|f\|$ <u>pour une fonction</u> $f \in \Phi$, <u>il existe une fonction</u> $f_1 \in \Phi$ <u>telle que</u> $\|f_1\|_\infty = \|f_1\| = \|f\|_\infty$ <u>et</u> $L(|f-f_1|)=0$.

Posons $a = \|f\|_\infty$; pour toute fonction $g \in \Phi_+$, on a $L(|f|g) \leqslant aL(g)$ et par suite $L((a-|f|)g) \geqslant 0$. Soit f_1 la fonction telle que $f_1(x)=-a$ si $f(x)<-a$, $f_1(x)=f(x)$ si $-a \leqslant f(x) \leqslant a$, $f_1(x)=a$ si $f(x)>a$; cette fonction appartient à Φ , puisqu'on peut l'écrire $f_1=\varphi\circ f$, avec $\varphi(t)=-a$ pour $t<-a$, $\varphi(t)=t$ pour $-a \leqslant t \leqslant a$, $\varphi(t)=a$ pour $t>a$. On a en outre $|f-f_1| = (|f|-a)^+$. Ecrivons alors que $L((a-|f|).|f-f_1|) \geqslant 0$; cela équivaut à $L(|f-f_1|^2) \leqslant 0$, d'où $L(|f-f_1|^2)=0$, et par suite $L(|f-f_1|)=0$. On en conclut que $\|f-f_1\|_p=0$ quel que soit p , et par suite $\|f_1\|_p = \|f\|_p$ d'après l'inégalité de Minkowski ; à la limite on a donc $\|f_1\|_\infty = \|f\|_\infty$; d'après la formation de f_1 , on a aussi évidemment $\|f_1\| = a = \|f\|_\infty$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>. <u>Si la relation</u> $u \neq 0$ <u>entraîne</u> $L(|u|) > 0$, <u>on a pour toute fonction</u> $f \in \Phi$, $\|f\|_\infty = \|f\|$.

En passant à la limite dans l'inégalité de Minkowski et la relation $\|\lambda f\|_p = |\lambda| . \|f\|_p$, on voit aussitôt que $\|f\|_\infty$ est encore une <u>norme</u> dans Φ .

Lorsque Φ est un clan <u>unitaire</u>, et la forme linéaire L une <u>moyenne</u>, les normes f_p possèdent en outre la propriété suivante :

<u>Proposition 5</u>. <u>Si</u> L <u>est une moyenne sur un clan unitaire</u> Φ , <u>pour tout</u> f <u>fixe dans</u> Φ , $\|f\|_p$ <u>est fonction croissante de</u> p .

Soit t quelconque dans $]0,1[$; appliquons l'inégalité de Hölder relative aux nombres $p=1/t$, $p'=1/(1-t)$, aux fonctions f^{rt} et $g^{r(1-t)}$, f et g étant quelconques dans Φ_+ et $r>1$; il vient

$$L((f^t g^{1-t})^r) \leqslant (L(f^r))^t (L(g^r))^{1-t}$$

d'où, en remplaçant g par 1, et remarquant que $L(1)=1$

$$L(f^{rt}) \leqslant (L(f^r))^t$$

et, en élevant à la puissance $1/rt$

(15) $$\|f\|_{rt} \leqslant \|f\|_r$$

ce qui démontre la proposition.

Lorsque L n'est pas une moyenne sur le clan unitaire Φ, on peut appliquer la prop.5 à la moyenne $L'(x)=L(x)/L(1)$; l'inégalité (15) est ici remplacée par

(16) $$\|f\|_{rt} \leqslant (L(1))^{(1-t)/rt}.\|f\|_r$$

Cette inégalité montre donc que, sur un clan <u>unitaire</u>, la topologie définie par la norme $\|f\|_p$ est <u>moins fine</u> que celle définie par la norme $\|f\|_q$ lorsque $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$; si $p<q$, la première de ces topologies est en général <u>strictement moins fine</u> que la seconde (exerc.8).

Si Φ n'est pas unitaire, les topologies définies par les normes $\|f\|_p$ et $\|f\|_q$ sont en général <u>incomparables</u> pour $p \neq q$ (voir exerc. 9).

<u>Exercices</u>. 1) Soit L une moyenne sur un clan unitaire Φ, et f une fonction de Φ_+ telle que $\inf_{x \in E} f(x) > 0$; on appelle moyenne géométrique de f le nombre $F(f)= e^{L(\log f)}$.

a) Démontrer l'inégalité

(1) $$G(f) \leqslant L(f)$$

(utiliser le th.1).

b) Montrer que $G(f)=\lim_{r \to 0} (L(f^r))^{1/r}$ (remarquer que pour $x \leqslant a$ et r tendant vers 0 par valeurs >0, on a $|x^r-(1+r \log x)| \leqslant br^2$ où b ne dépend que de a).

c) Soit g une deuxième fonction de Φ_+ telle que $\inf_{x \in E} g(x) > 0$

30

Démontrer l'inégalité

(2) $$G(f)+G(g) \leqslant G(f+g)$$

(appliquer (1) à la fonction $f/(f+g)$) .

2) Soit L une forme linéaire croissante sur un clan unitaire Φ , f et g deux fonctions de Φ_+ telles que $\inf_{x \in E} f(x) > 0$ et $\inf_{x \in E} g(x) > 0$.

a) Pour $0 < p < 1$ ou $p < 0$, démontrer l'inégalité

(3) $$L(fg) \geqslant (L(f^p))^{1/p}(L(g^{p'}))^{1/p'}$$

où $1/p+1/p'=1$ (utiliser le th. 1).

b) Pour les mêmes valeurs de p , démontrer l'inégalité

(4) $$(L((f+g)^p))^{1/p} \geqslant (L(f^p))^{1/p} + (L(g^p))^{1/p}$$

(même méthode).

3) Déduire l'inégalité (3) de l'inégalité de Hölder (si $0 < p < 1$, appliquer l'inégalité de Hölder aux fonctions $u=(fg)^p$, $v=g^{-p}$, avec des exposants convenables).

4) Déduire l'inégalité de Minkowski de l'inégalité de Hölder (appliquer l'inégalité de Hölder aux fonctions f et $h=(f+g)^{p-1}$). Déduire de même l'inégalité (4) de l'inégalité (3) .

5) Soient f et g deux fonctions $\geqslant 0$ d'un clan Φ , L une forme linéaire croissante sur Φ ; démontrer que, pour $p > 1$, on a

$$L(f^p)+L(g^p) \leqslant L((f+g)^p)$$

et que, si Φ est unitaire, et f et g tels que $\inf_{x \in E} f(x) > 0$ $\inf_{x \in E} g(x) > 0$, on a, pour $0 < p < 1$ ou $p < 0$

$$L(f^p) + L(g^p) \geqslant L((f+g)^p)$$

(démontrer que, pour $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $p > 1$, on a $x^p+y^p \leqslant (x+y)^p$ en se ramenant au cas où $x+y=1$; démonstration analogue dans les autres cas) .

6) Soit L une forme linéaire croissante sur un clan Φ. Montrer que l'ensemble Φ_0 des fonctions $f\in\Phi$ telles que $L(|f|)=0$ forment un <u>clan</u> (remarquer qu'en vertu de la prop.4 du §2, il suffit de prouver que, pour toute fonction $\varphi(x_1,x_2,..,x_n)$ continue dans R^n et telle que $\varphi(0,0,..,0)=0$, toute suite de n fonctions $f_i\in\Phi_0$ et toute fonction $g\in\Phi$ telle que $|g|\leqslant 1$, on a $L(g\varphi(f_1,f_2,..,f_n))=0$. Le démontrer d'abord lorsque φ est un polynome, puis passer au cas général en approchant uniformément φ par un polynome dans un ensemble compact convenable).

On désigne par $f\equiv g$ la relation d'équivalence $f-g\in\Phi_0$; montrer que, si $f_i\equiv g_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, et si $\varphi(x_1,x_2,..,x_n)$ est une fonction continue dans R^n, telle que $\varphi(0,0,..,0)=0$, on a $\varphi(f_1,f_2,..,f_n)\equiv\varphi(g_1,g_2,..,g_n)$ (même méthode, en approchant φ par un polynome).

7) On suppose que, pour une forme linéaire croissante L sur un clan Φ, la relation $L(|f|)=0$ entraîne $f=0$ (autrement dit, que le clan Φ_0 est réduit à 0). Si, dans les hypothèses du th. de convexité (th.1), on ajoute que φ est <u>strictement convexe</u> dans $]a,b[$, montrer que les deux membres de l'inégalité (1) ne peuvent être égaux que si $g\varphi(f)=kg$, où k est une constante. En particulier, montrer que les deux membres de l'inégalité de Hölder (3) ne peuvent alors être égaux que si u^p et $v^{p'}$ sont proportionnels, et que les deux membres de l'inégalité de Minkowski ne peuvent être égaux que si u et v sont proportionnels. Etude analogue des cas d'égalité dans les inégalités des exerc. 1 et 2.

8) Soit Φ le clan unitaire des fonctions continues par morceaux dans l'intervalle $[0,1]$, L la moyenne $f\longrightarrow\int_0^1 f(t)dt$ définie dans Φ.

Montrer qu'il n'existe pas de constante a indépendante de $f \in \Phi$ et telle que $\|f\|_q \leqslant a \|f\|_p$ pour $p<q$ et pour tout $f \in \Phi$ (considérer les fonctions $f(t)=e^{-nt}$).

9) Soit Φ le clan des fonctions continues par morceaux dans un intervalle compact (variable) de R , et nulles hors de cet intervalle, et soit L la forme linéaire $f \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ définie dans Φ. Montrer que, pour $p \neq q$, les topologies définies par les normes $\|f\|_p$ et $\|f\|_q$ sont incomparables (utiliser l'exemple de l'exerc.8, et considérer d'autre part les fonctions f égales à 1 pour $0 \leqslant t \leqslant n$, à 0 ailleurs).

§ 4. Produits de formes linéaires croissantes.

1. Continuité d'une forme linéaire croissante en fonction d'un paramètre.

Proposition 1. Soit L une forme linéaire croissante définie sur un clan Φ , f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n fonctions quelconques de Φ , A l'adhérence (compacte) de l'image de E par l'application $x \longrightarrow (f_1(x),\ldots,f_n(x))$ de E dans R^n . Il existe un nombre $a>0$, ne dépendant que de $f_1,f_2,..,f_n$ et de L , tel que, pour toute fonction continue numérique g définie dans R^n , et nulle à l'origine, on ait

$$|L(g(f_1,f_2,\ldots,f_n))| \leqslant a.\|g_A\| \tag{1}$$

g_A désignant la restriction de g à A , $\|g_A\|$ la borne supérieure de $|g_A|$.

La proposition est évidente si Φ est un clan unitaire, en vertu de l'inégalité de la moyenne ; on peut prendre alors $a=L(1)$, indépendant des f_i .

Dans le cas général, nous raisonnerons par l'absurde. Si la proposition était inexacte, il existerait une suite (g_m) de fonctions numériques positives continues dans R^n , nulles à l'origine, telles que $g_m(x) \leqslant 1$ dans A et que $L(g_m(f_1,f_2,..,f_n)) \geqslant m^3$. Définissons dans A la fonction g par la relation $g(y)=\sum_{m=1}^{\infty} g_m(y)/m^2$; comme $g_m(y)\leqslant 1$ dans A , cette série est uniformément convergente, et g est par suite une fonction continue dans A , nulle à l'origine (rappelons que $0\in A$ d'après la prop.1 du § 1) ; prolongeons g d'une manière quelconque en une fonction continue dans R^n . On a évidemment, dans A , $g_m(y)\leqslant m^2.g(y)$, donc $L(g_m(f_1,..,f_n))\leqslant m^2.L(g(f_1,..,f_n))$; mais d'après le choix des g_m , cela entraîne $L(g(f_1,..,f_n))\geqslant m$ quel que soit m , ce qui est absurde.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> L <u>une forme linéaire croissante définie sur un clan</u> Φ , f_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ <u>n fonctions quelconques de</u> Φ . <u>Soit</u> F <u>un espace topologique compact, g une fonction numérique continue dans</u> $F\times R^n$, <u>et telle que</u> $g(u,0,0,..,0)=0$ <u>quel que soit</u> $u\in F$; <u>dans ces conditions, la fonction</u> $h(u)=L(g(u,f_1,..,f_n))$ <u>est continue dans</u> F .

Soit en effet A l'adhérence, dans R^n , de l'image de E par l'application $x\longrightarrow(f_1(x),..,f_n(x))$; g est continue dans l'ensemble compact $F\times A$, donc uniformément continue dans cet ensemble. Par suite, si $u_0\in F$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage V de u_0 tel que, pour $u\in V$, on ait

(2) $$\left|g(u,y_1,..,y_n)-g(u_0,y_1,..,y_n)\right|\leqslant\varepsilon$$

quel que soit $(y_i)\in A$. D'après l'inégalité (1), on en déduit que $\left|h(u)-h(u_0)\right|\leqslant a\varepsilon$ quel que soit $u\in V$, ce qui établit la proposition.

Plus généralement, si g est définie dans le produit $F\times R^n$, où F est un espace topologique quelconque, la fonction h sera continue en un point $u_0\in F$, en vertu de la démonstration précédente, pourvu que la relation (2) soit vérifiée quels que soient $(y_i)\in A$, et u dans un voisinage convenable de u_0 .

2. <u>Produit de deux formes linéaires croissantes</u>. Soient E_1, E_2 deux ensembles quelconques, Φ_1 (resp. Φ_2) un clan de fonctions définies dans E_1 (resp. E_2). Soit Φ l'ensemble des fonctions définies dans $E_1 \times E_2$ $(x_1,x_2) \to \varphi(f_1(x_1), f_2(x_1), .., f_m(x_1) ; g_1(x_2), .., g_n(x_2))$, où m et n peuvent prendre toutes les valeurs entières $\geqslant 1$, φ parcourant (pour chaque couple (m,n)) l'ensemble des fonctions continues dans $R^m \times R^n$, telles que $\varphi(0,0,..,0; y_1, y_2, .., y_n)=0$ quels que soient les y_j, et $\varphi(x_1, x_2, .., x_m ; 0,0,..,0)=0$ quels que soient les x_i ; les f_i (resp. g_j) étant enfin m fonctions quelconques de Φ_1 (resp. n fonctions quelconques de Φ_2). Il est immédiat que Φ est un <u>clan</u> de fonctions ; nous dirons (par abus de langage) que c'est le <u>produit</u> des clans Φ_1 et Φ_2. On notera que, si Φ_1 et Φ_2 sont <u>unitaires</u>, il en est de même de Φ, puisque Φ contient la fonction $1.1=1$ (correspondant à $\varphi(x,y)=xy$) ; si on identifie toute fonction $f_1 \in \Phi_1$ (resp. $f_2 \in \Phi_2$) à l'application $(x_1,x_2) \to f_1(x_1)$ (resp. $(x_1,x_2) \to f_2(x_2)$) définie dans $E_1 \times E_2$, de sorte que Φ_1 et Φ_2 soient identifiés à des clans de fonctions sur $E_1 \times E_2$, Φ est (toujours lorsque Φ_1 et Φ_2 sont unitaires) le clan <u>engendré</u> par la réunion $\Phi_1 \cup \Phi_2$.

<u>Théorème 1</u>. <u>Soit</u> L_1 <u>une forme linéaire croissante sur le clan</u> Φ_1, L_2 <u>une forme linéaire croissante sur le clan</u> Φ_2.

1° <u>Quelle que soit la fonction</u> $f \in \Phi$, $L_1(f(x_1,x_2))$ <u>appartient à</u> Φ_2, <u>et</u> $L_2(f(x_1,x_2))$ <u>appartient à</u> Φ_1.

2° <u>On a</u> $L_2(L_1(f(x_1,x_2)) = L_1(L_2(f(x_1,x_2))$.

On a, par hypothèse, $f(x_1,x_2)=\varphi(f_1(x_1), .., f_m(x_1); g_1(x_2), ..., g_n(x_2))$; soit A l'adhérence, dans R^m, de l'image de E_1 par l'application $x_1 \to (f_1(x_1), .., f_m(x_1))$; la fonction φ est continue dans $A \times R^n$ et

$\varphi(u_1,..,u_m;0,0,..,0)=0$ quel que soit $u=(u_i)\in A$. Pour toute valeur fixe de x_1, l'application partielle $x_2 \to f(x_1,x_2)$ appartient donc à Φ_2 ; d'autre part, d'après la prop.2, la fonction $\psi(u)=L_2(\varphi(u_1,..,u_m;g_1(x_2),..,g_n(x_2))$ est continue dans A et on a $\psi(0,0,..,0)=0$; donc $\psi(f_1(x_1),..,f_m(x_1))=L_2(f(x_1,x_2))$ appartient à Φ_1. On prouve de même que $L_1(f(x_1,x_2))\in\Phi_2$.

Etablissons maintenant la seconde partie du théorème. Soit B l'adhérence, dans R^n, de l'image de E_2 par l'application $x_2 \to (g_1(x_2),\ldots,g_n(x_2))$; la fonction φ est continue dans le produit $A\times B$ de deux espaces compacts ; par suite (Top.gén., chap.VII), pour tout $\varepsilon>0$, il existe une suite de p fonctions u_i définies et continues dans A et une suite de p fonctions v_i définies et continues dans B telles que, si on pose $\theta = \sum_{i=1}^{p} u_i v_i$, on ait $|\varphi(x,y)-\theta(x,y)|\leqslant\varepsilon$ dans $A\times B$. En appliquant deux fois de suite la proposition 1, il vient d'abord

$$\left|L_2(\varphi(u_1,..,u_m;g(x_2),..,g_n(x_2))-\theta(u_1,..,u_m;g_1(x_2),..,g_n(x_2)))\right|\leqslant b.\varepsilon$$

quel que soit $u=(u_i)\in A$, b ne dépendant que des g_j et de L_2 ; puis de même

$$\left|L_1(L_2(f(x_1,x_2))-L_2(\theta(f_1(x_1),..,f_m(x_1);g_1(x_2),\ldots,g_n(x_2))))\right|\leqslant ab\varepsilon$$

a ne dépendant que des f_i et de L_1. Or, on a

$$L_1(L_2(\theta(f_1(x_1),..,f_m(x_1);g_1(x_2),..,g_n(x_2)))) =$$
$$= \sum_{h=1}^{p} L_1(u_h(f_1,\ldots,f_m))L_2(v_h(g_1,g_2,\ldots,g_n))$$

Mais on démontrerait de même que

$$\left|L_2(L_1(f(x_1,x_2))-L_1(\theta(f_1,..,f_m;g_1,g_2,..,g_n))))\right|\leqslant ab\varepsilon$$

et comme $L_1(L_2(\theta(f_1,..,f_m;g_1,..,g_n)))=L_2(L_1(\theta(f_1,..,f_m;g_1,..,g_n)))$ on obtient finalement l'inégalité

$$\left|L_1(L_2(f(x_1,x_2)))-L_2(L_1(f(x_1,x_2)))\right|\leqslant 2ab\varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, la seconde partie du théorème est démontrée.

On définit ainsi une forme linéaire croissante $L(f(x_1,x_2)) = L_1(L_2(f(x_1,x_2)))=L_2(L_1(f(x_1,x_2)))$ sur le clan Φ ; si f est un produit $u(x_1)v(x_2)$ d'une fonction $u \in \Phi_1$ et d'une fonction $v \in \Phi_2$, on a $L(uv)=L_1(u)L_2(v)$; en raison de ce fait, on dit (par abus de langage) que L est la forme linéaire <u>produit</u> des formes L_1 et L_2, et on l'écrit encore L_1L_2, ou L_2L_1.

On notera que, si L_1 et L_2 sont des <u>moyennes</u>, il en est de même de L_1L_2.

<u>Exemple : Produit de deux fonctions additives d'ensemble</u>. Soit $\mathfrak{F}_1$ (resp. $\mathfrak{F}_2$) une phratrie d'ensembles sur un ensemble E_1 (resp. E_2), Φ_1 (resp. Φ_2) le clan des fonctions étagées attaché à la phratrie $\mathfrak{F}_1$ (resp. $\mathfrak{F}_2$). Le clan Φ, produit de Φ_1 et Φ_2, est formé de fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ; c'est donc un clan de fonctions étagées attachées à une phratrie $\mathfrak{F}$ sur $E_1 \times E_2$: on dit que $\mathfrak{F}$ est le <u>produit</u> des phratries $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$. Si $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, la fonction caractéristique de l'ensemble produit $A_1 \times A_2$ est égale à $\varphi_{A_1} \cdot \varphi_{A_2}$; par suite $A_1 \times A_2$ appartient à $\mathfrak{F}$. D'autre part, si $h=\varphi(f_1,..,f_m;g_1,..,g_n)$ est une fonction de Φ, l'ensemble où h prend chacune de ses valeurs $\neq 0$ est évidemment réunion d'un nombre fini d'ensembles de la forme $A_1 \times A_2$, où $A_1 = \bigcap_{i=1}^{m} \overset{-1}{f_i}(a_i)$, $A_2 = \bigcap_{j=1}^{n} \overset{-1}{g_j}(b_j)$, a_i (resp. b_j) étant une des valeurs prises par f_i (resp. g_j), un des a_i et un des b_j au moins n'étant pas nul ; on en conclut que $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, et par suite que $\mathfrak{F}$ est formée des <u>réunions finies d'ensembles de la forme</u> $A_1 \times A_2$, où $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$.

On peut même montrer que tout ensemble de $\mathfrak{F}$ est réunion d'un nombre fini d'ensembles de la forme $A_1 \times A_2$, deux à deux sans point commun (exerc.2).

Soit maintenant λ_1 (resp. λ_2) une fonction additive d'ensemble à valeurs positives, définie dans $\mathfrak{F}_1$ (resp. $\mathfrak{F}_2$), et soit L_1 (resp. L_2) la forme linéaire croissante sur Φ_1 (resp. Φ_2) qui lui correspond). La forme linéaire produit L_1L_2 définie sur Φ correspond donc à une fonction additive d'ensemble λ définie sur $\mathfrak{F}$; on a en particulier, pour $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, $\lambda(A_1 \times A_2) = L_1L_2(\varphi_{A_1}.\varphi_{A_2}) = L_1(\varphi_{A_1})L_2(\varphi_{A_2}) = \lambda_1(A_1)\,\lambda_2(A_2)$. On dit que λ est le produit des fonctions additives d'ensemble λ_1 et λ_2 et on la note $\lambda_1\lambda_2$ ou $\lambda_2\lambda_1$.

3. <u>Associativité du produit</u>. Considérons maintenant trois clans Φ_1, Φ_2, Φ_3 de fonctions définies sur des ensembles E_1, E_2, E_3 respectivement. On désignera par Φ l'ensemble des fonctions, définies dans $E_1 \times E_2 \times E_3$, de la forme

$$(x_1, x_2, x_3) \to \varphi((f_i(x_1)); (g_j(x_2)); (h_k(x_3)))$$

où $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $(g_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, $(h_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ sont trois familles finies quelconques de fonctions de Φ_1, Φ_2, Φ_3 respectivement, m, n, p étant trois entiers quelconques $\geqslant 1$, et φ une fonction continue dans $R^m \times R^n \times R^p$, telle que $\varphi(0;v;w) = \varphi(u;0;w) = \varphi(u;v;0) = 0$ quels que soient $u \in R^m$, $v \in R^n$, $w \in R^p$. Il est immédiat que Φ est un clan, qu'on appellera encore le clan <u>produit</u> de Φ_1, Φ_2, Φ_3.

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> L_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ <u>une forme linéaire croissante définie sur le clan</u> Φ_i. <u>Quelle que soit la fonction</u> f <u>du clan</u> Φ <u>produit de</u> Φ_1, Φ_2, Φ_3, $L_3(f(x_1,x_2,x_3))$ <u>appartient au clan produit de</u> Φ_1 <u>et</u> Φ_2, $L_2L_3(f(x_1,x_2,x_3))$ <u>appartient au clan</u> Φ_1, <u>et on a</u>

$$(3) \qquad L_1(L_2L_3(f(x_1,x_2,x_3))) = (L_1L_2(L_3(f(x_1,x_2,x_3))) .$$

La première partie est une conséquence de la prop.2, par le même raisonnement que dans le th.1; quand à la relation (3), elle résulte de la définition des formes linéaires L_1L_2 et L_2L_3.

On dit encore que la forme linéaire $f \to L_1(L_2(L_3(f)))$ ainsi définie est le <u>produit</u> des formes linéaires L_1, L_2, L_3. On généralise évidemment cette définition à un nombre quelconque de formes linéaires, et ce qui précède prouve que le produit ainsi défini est <u>commutatif</u> et <u>associatif</u>.

4. <u>Produit infini de moyennes</u>. Soient $(E_\iota)_{\iota\in I}$ une famille quelconque d'ensembles, Φ_ι un clan <u>unitaire</u> défini sur E_ι (pour chaque $\iota\in I$) ; désignons par Φ l'ensemble des fonctions, définies dans l'ensemble produit $E = \prod_{\iota\in I} E_\iota$, de la manière suivante : ce sont toutes les fonctions de la forme

$$(x_\iota) \longrightarrow \varphi(f_{\iota_1}(x_{\iota_1}), f_{\iota_2}(x_{\iota_2}), \ldots, f_{\iota_n}(x_{\iota_n}))$$

où n est un entier positif quelconque , φ une fonction numérique continue quelconque définie dans R^n , $(\iota_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite quelconque de n indices appartenant à I , enfin, pour chaque indice k , f_{ι_k} une fonction quelconque appartenant à Φ_{ι_k}. On vérifie immédiatement que Φ est un <u>clan unitaire</u> de fonctions définies dans E ; si I est fini, ce clan n'est autre que le produit des clans Φ_ι défini ci-dessus ; en général, on dit encore que Φ est le <u>produit</u> des clans Φ_ι .

Si on identifie chaque fonction f d'un clan $\Phi_\varkappa$ avec l'application $(x_\iota) \to f(x_\varkappa)$ de E dans R , on peut encore dire que Φ est le clan unitaire <u>engendré</u> par la <u>réunion</u> des clans Φ_ι .

D'après la définition de Φ , toute fonction $f\in\Phi$ a la propriété suivante : il existe une partie <u>finie</u> J de I telle qu'on ait $f(x)=f(x')$ pour $pr_J(x)=pr_J(x')$; et si f_J désigne la fonction définie dans $\prod_{\iota\in J} E_\iota$ par passage au quotient à partir de f suivant la relation d'équivalence $pr_J(x)=pr_J(x')$, f_J appartient au produit des clans Φ_ι pour $\iota\in J$.

Supposons maintenant donnée sur chacun des clans Φ_ι une <u>moyenne</u> L_ι ; pour toute partie <u>finie</u> J de I , désignons par L_J le <u>produit</u> des moyennes L_ι pour $\iota \in J$. Par définition, on appelle <u>produit</u> des moyennes L_ι pour $\iota \in I$, la forme linéaire croissante L_I définie de la manière suivante : si $f \in \Phi$, et si J est une partie finie de I telle que f soit compatible avec la relation $pr_J(x)=pr_J(x')$, on pose $L_I(f)=L_J(f_J)$. Cette définition est bien indépendante de la partie finie J ayant la propriété considérée ; en effet, pour une fonction déterminée $f \in \Phi$, il existe une plus petite partie finie J_o de I ayant cette propriété ; il suffit de voir que, si $J \supset J_o$, $L_J(f_J)=L_{J_o}(f_{J_o})$; si on pose $K=J \cap \complement J_o$, on a d'après l'associativité du produit fini de moyennes, $L_J(f_J)= L_K(L_{J_o}(f_J))$; comme f_J ne dépend pas des variables x_ι pour lesquelles $\iota \in K$, on a $L_{J_o}(f_J)=L_{J_o}(f_{J_o})$, et comme L_K est une <u>moyenne</u>, $L_K(L_{J_o}(f_{J_o})) = L_{J_o}(f_{J_o})L_K(1)=L_{J_o}(f_{J_o})$. Reste à prouver que L_I est bien une forme linéaire sur Φ ; or, si f et g sont deux fonctions de Φ , il existe une partie finie $J \subset I$ telle que f et g soient compatibles avec la relation $pr_J(x)=pr_J(x')$; alors $f+g$ est aussi compatible avec cette relation, et comme $L_J(f_J+g_J)=L_J(f_J)+L_J(g_J)$, on a $L_I(f+g)=L_I(f)+L_I(g)$.

Pour toute partie (finie ou non) J de I , désignons par Φ_J le produit des clans unitaires Φ_ι tels que $\iota \in J$, par L_J la moyenne produit des moyennes L_ι pour $\iota \in J$; si K est le complémentaire de J dans I , et f une fonction quelconque de Φ , toute application partielle déduite de f en donnant aux x_ι tels que $\iota \in K$ une valeur fixe, appartient à Φ_J ; la fonction $L_J(f)$ appartient à Φ_K , et on a

(4) $$L_I(f) = L_K(L_J(f))$$

Cela résulte en effet immédiatement des définitions précédentes, et des propriétés correspondantes pour les produits finis de formes linéaires croissantes.

D'après la prop.3 du § 2, on peut prolonger L_I à l'adhérence $\overline{\Phi}$ de Φ dans $\mathcal{B}(E)$. On notera que, si φ est une fonction numérique continue dans R^I , et, pour chaque $\iota \in I$ f_ι une fonction de Φ_ι, la fonction composée

$$f(x_\iota) = \varphi((f_\iota(x_\iota)))$$

appartient à $\overline{\Phi}$. En effet, si A désigne l'ensemble compact produit des adhérences des ensembles $f_\iota(E_\iota)$, φ est limite uniforme, dans A , de fonctions continues ne contenant qu'un nombre <u>fini</u> de variables réelles ; par suite, f est limite uniforme, dans E , de fonctions de Φ .

On notera aussi que la formule (4) se prolonge par continuité aux fonctions de $\overline{\Phi}$.

<u>Exercices</u>. 1) I désignant un intervalle compact $[a,b]$, soit φ une fonction continue dans $I \times R^n$ telle que $\varphi(u,0,0,..,0)=0$ quel que soit $u \in [a,b]$, admettant en tout point une dérivée partielle $\varphi'_u(u,v)$ continue dans $I \times R^n$. Soit L une forme linéaire croissante définie dans un clan Φ , f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n fonctions de Φ. Montrer que la fonction $g(u)=L(\varphi(u,f_1,..,f_n))$ admet en tout point de I une dérivée égale à $L(\varphi'_u(u,f_1,..,f_n))$ (utiliser prop.1).

2) Soit $\mathfrak{F}$ la phratrie produit de deux phratries $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$; montrer que tout ensemble de $\mathfrak{F}$ est réunion d'ensembles de la forme $X_1 \times X_2$ où $X_1 \in \mathfrak{F}_1$, $X_2 \in \mathfrak{F}_2$, deux à deux sans point commun (tout ensemble de $\mathfrak{F}$ étant réunion d'un nombre fini d'ensembles de cette forme, utiliser l'exerc.3 du § 1) .

3) Soient L_1, L_2 deux formes linéaires croissantes définies respectivement sur les clans Φ_1 et Φ_2. Pour toute fonction $f \geqslant 0$ du clan produit Φ de Φ_1 et Φ_2, montrer que si $p \geqslant 1$

$$(L_1(L_2(f))^p)^{1/p} \leqslant L_2((L_1(f^p))^{1/p})$$

(poser $g = L_2(f)$, et remarquer qu'on peut écrire

$$L_1(g^p) = L_1(g^{p-1}L_2(f)) = L_2(L_1(g^{p-1}f)).)$$

§ 5. Généralisation aux clans vectoriels.

Soit V un espace vectoriel à un nombre <u>fini</u> n de dimensions sur le corps des nombres réels ; soit d'autre part Φ un clan de fonctions numériques définies sur un ensemble E .

Etant donnée une base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de V , considérons l'ensemble Φ_V de toutes les fonctions f définies dans E , à valeurs dans V , et dont les n composantes relatives à la base (a_i) appartiennent à Φ . Il est clair, d'après l'axiome (CL), que cet ensemble ne dépend que de Φ et de V , mais non de la base choisie dans V ; nous dirons que Φ_V est le <u>clan vectoriel</u>, <u>extension</u> de Φ à V . Pour tout couple de fonctions $f = \sum_{i=1}^{n} f_i a_i \in \Phi_V$, et $g \in \Phi$, on pose $gf = \sum_{i=1}^{n} gf_i a_i$; Φ_V peut donc être considéré comme un <u>module</u> par rapport à l'anneau Φ , dont les n fonctions constantes a_i forment une base régulière.

A toute forme linéaire u définie dans Φ , on peut faire correspondre d'une seule manière une application linéaire de Φ_V dans Φ , qu'on note encore u (par abus de langage), telle que, pour toute constante $a \in V$ et toute fonction $g \in \Phi$, on ait $u(ga) = u(g)a$: il suffit, pour toute fonction $f = \sum_{i=1}^{n} f_i a_i$ de Φ_V , de prendre $u(f) = \sum_{i=1}^{n} u(f_i) a_i$. On conclut aussitôt de la propriété caractéristique de cette application linéaire que la définition ainsi donnée est indépendante de la base (a_i) choisie.

Considérons en particulier le cas d'une <u>forme linéaire croissante</u> L définie dans le clan Φ ; l'application linéaire correspondante L de Φ_V dans V possède alors la propriété suivante, qui généralise le théorème de la moyenne :

<u>Proposition 1</u>. <u>Soit</u> D <u>un ensemble convexe fermé dans</u> V ; <u>pour toute fonction</u> $f \in \Phi_V$ <u>telle que</u> $f(E) \subset D$, <u>et toute fonction</u> $g \in \Phi_+$ <u>telle que</u> $L(g)>0$, <u>on a</u> $L(gf)/L(g) \in D$.

En effet, d'après le th. de Hahn-Banach (Livre VI), D est l'intersection d'une famille de demi-espaces fermés ; autrement dit, D est identique à l'ensemble des points $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ de V qui satisfont à un système d'inégalités linéaires $\sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} x_i + d_\alpha \geqslant 0$, α parcourant un certain ensemble d'indices I . Si $f = \sum_{i=1}^{n} f_i a_i$, on a donc par hypothèse $\sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} f_i + d_\alpha \geqslant 0$ pour tout α , d'où $\sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} f_i g + d_\alpha g \geqslant 0$; on en conclut que $\sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} L(f_i g) + d_\alpha L(g) \geqslant 0$, et en divisant ces inégalités par $L(g)$, on obtient la proposition.

En particulier, si L est une <u>moyenne</u> dans le clan (unitaire) Φ , on peut prendre $g=1$, et la relation $f(E) \subset D$ entraîne alors $L(f) \in D$.

Soit $|x|$ une <u>norme</u> dans V , et f une fonction de Φ_V telle que $L(|f|)>0$. Alors la fonction h telle que $h(x)=0$ si $f(x)=0$, $h(x)=f(x)/|f(x)|$ dans le cas contraire, appartient à Φ_V (car chacune des fonctions égales à $x_i/|x|$ pour $x \neq 0$, à 0 si $x=0$, sont des fonctions continues de $x_1,\dots,x_n$, et s'annulent pour $x_1=x_2=\dots=x_n=0$) ; en outre $h(E)$ est évidemment contenu dans l'ensemble convexe S formé des points $x \in V$ tels que $|x| \leqslant 1$. Appliquons la prop. 1 en y remplaçant f par h et g par $|f|$; on en conclut que $L(f)/L(|f|)$ appartient à S , c'est-à-dire que

(1) $$|L(f)| \leqslant L(|f|)$$

Cette relation est encore valable lorsque $L(|f|)=0$; en effet la norme $|x|$ est équivalente à la norme $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$; il existe donc une constante k telle que $|x_i| \leqslant k|x|$; de $L(|f|)=0$ on tire donc $L(|f_i|)=0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, ce qui entraîne $L(f_i)=0$ et par conséquent $L(f)=0$.

L'application la plus importante de ce qui précède a trait au cas où V est le corps des nombres complexes C, considéré comme espace à deux dimensions sur le corps R ; les fonctions de Φ_C sont donc les fonctions $f=f_1+if_2$, où f_1 et f_2 sont quelconques dans Φ ; pour toute forme linéaire croissante L définie dans Φ, on a donc $L(f)=L(f_1)+iL(f_2)$. L'inégalité (1) s'applique à une telle forme, en prenant pour $|x|$ la valeur absolue du nombre complexe x.

Le clan Φ_C est évidemment encore un <u>anneau</u> ; en vertu de (1) et de l'inégalité de Hölder pour les fonctions réelles on a, pour deux fonctions quelconques u, v de Φ_C

(2) $$|L(uv)| \leqslant (L(|u|^p))^{\frac{1}{p}} (L(|v|^{p'}))^{\frac{1}{p'}} \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$$

qu'on appelle encore <u>inégalité de Hölder</u> pour les fonctions de Φ_C. En vertu de l'inégalité du triangle, on a aussi

(3) $$(L(|u+v|^p))^{\frac{1}{p}} \leqslant (L(|u|^p))^{\frac{1}{p}} + (L(|v|^p))^{\frac{1}{p}}$$

dite encore <u>inégalité de Minkowski</u> pour les fonctions de Φ_C. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les prop.1 à 5 du §3 sont encore valables sans changement pour les fonctions de Φ_C, ainsi que la prop.4 du §2.

Dans la démonstration de cette dernière, il suffit de prendre pour fonction g la fonction telle que $g(x) = \frac{1}{\delta}\overline{f(x)}$ lorsque $|f(x)| \leqslant \delta$, et $g(x)=e^{-i\theta(x)}$ lorsque $|f(x)| > \delta$, $\theta(x)$ désignant l'amplitude de $f(x)$ comprise entre 0 et 2π ; on vérifie sans peine que g appartient à Φ_C, et que $fg \geqslant 0$;

la fin de la démonstration reste inchangée. Raisonnement analogue pour démontrer la prop.4 du § 3 .

<u>Exercice</u>. Soit V un espace vectoriel à n dimensions, $|x|$ une norme dans V , V' le <u>dual</u> de V , $|x'|$ la norme duale de $|x|$ dans V' (Livre VI) ; on rappelle que, si $\langle x,x'\rangle = x'(x)$ est la forme bilinéaire fondamentale dans $V \times V'$, on a ~~(**)~~ $|x'| \sup_{|x|\leqslant 1} |\langle x,x'\rangle|$; en outre, pour tout $x \in V$, il existe $x' \in V'$ tel que $|x'| = 1$ et $\langle x,x'\rangle = |x|$; l'élément x' ayant cette propriété est unique, et est fonction continue de x, si la norme $|x|$ est strictement convexe.

a) Si $u \in \Phi_V$, $v \in \Phi_{V'}$, démontrer l'inégalité

$$|L(\langle u,v\rangle)| \leqslant (L(|u|^p))^{\frac{1}{p}} (L(|v|^{p'}))^{\frac{1}{p'}} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$$

pour toute forme linéaire croissante L définie dans Φ .

b) Si la norme $|x|$ est strictement convexe, $(L(|u|^p))$ est la borne supérieure des nombres $|L(\langle u,v\rangle)|$ où v parcourt l'ensemble des fonctions de $\Phi_{V'}$ telles que $L(|v|^{p'}) \leqslant 1$.

Généraliser de même les prop.3 et 4 du § 3 , et la prop.4 du § 2 .
