COTE : BKI 01-2.9

LE FORMALISME DE GÖDEL

Rédaction n° 065

Nombre de pages : 8

Nombre de feuilles : 8

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Livre I

le formalisme de Gödel

65

A 65 2

LE FORMALISME de GÖDEL.

L'axiomatique comporte comme notions primitives, les notions d'ensemble, de classe, et d'appartenance (relation $\in$). Quelques explications sur ces deux notions : 1° tous les objets de la théorie sont des ensembles ou classes, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'individus; axiomatiquement, cela se traduit par l'axiome d'extensionalité, qui signifie que si deux objets x, x' sont tels que tout y tel que $y \in x$ satisfasse aussi à $y \in x'$, et réciproquement, on a $x=x'$, ce qui exclut bien entendu la possibilité d'objets qui n'auraient pas d'éléments ; 2° tout ensemble est une classe, mais la réciproque n'est pas vraie ; les classes sont les propriétés d'ensembles, et on les distingue des ensembles eux-mêmes pour éviter les fameux paradoxes ; on les évite, parce qu'il y a des opérations qu'on peut faire sur les ensembles et pas sur les classes. Le critère essentiel se trouve être qu'une classe X est un ensemble si, et seulement si, X est élément d'une autre classe; une classe X qui n'est pas un ensemble est dite classe propre ; elle ne peut jamais être élément de quelque chose ; exemple : les ordinaux jusqu'à un ordinal déterminé α forment un ensemble (cf. sa définition plus loin) tous les nombres ordinaux forment une classe.

Voici maintenant les axiomes exacts ; dans ces axiomes, les minuscules représentent des variables variant dans le champ des ensembles. (I.1) $\mathfrak{M}(X) \rightarrow Cls(X)$, où $\mathfrak{M}(X)$ signifie "X est un ensemble" et $Cls(X)$ signifie "X est une classe" ; donc : tout ensemble est une classe. (I.2) $X \in Y \rightarrow \mathfrak{M}(X)$: toute classe qui est élément d'une classe est un ensemble. (I.3) $(u)\left[u \in X \rightleftarrows u \in Y\right]. \rightarrow .X = Y$: si, pour tout u , $u \in X$ est équivalent à $u \in Y$, alors $X=Y$, ce qui signifie qu'une classe est déterminée quand on connaît ses éléments. (I.4) $(x)(y)(\exists z)\left[u \in z \rightleftarrows (u=x) \vee (u=y)\right]$, c-à-d. si x,y sont des ensembles, il y a un ensemble z dont les seuls éléments sont x,y. En vertu de (I.3), il n'y a qu'un tel ensemble z ; on le désigne par $\{x,y\}$ et on l'appelle la paire non-ordonnée formée par x,y, parce que $\{x,y\}=\{y,x\}$. On pose $\{x\}=\{x,x\}$, $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$: $\langle x,y\rangle$ est la paire ordonnée formée par x,y, car on n'a $\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle$ que si $x=x'$, $y=y'$. On pose $\langle x,y,z\rangle=\langle x,\langle y,z\rangle\rangle$, $\langle x,y,z,t\rangle=\langle x,\langle y,z,t\rangle\rangle$ etc...

(II.1) $(\exists A)(x,y)\left[\langle x,y\rangle \in A \rightleftarrows x \in y\right]$, c-à-d. il y a une classe A telle que les paires $\langle x,y\rangle$ qui sont dans A soient exactement celles pour lesquelles $x \in y$. On remarquera que A n'est pas entièrement déterminé par cet axiome, car A peut contenir des ensembles qui ne soient pas des paires ; même remarque pour certains autres axiomes qui vont venir. (II.2) $(A)(\exists B)(u)\left[u \in B \rightleftarrows \sim u \in A\right.$: c-à-d. pour chaque classe A il y a une classe complémentaire B dont les éléments sont exactement ceux qui ne sont pas dans A ; cette classe se note $-A$.

(II.3) $(A)(B)(\exists C)\left[u \in C \rightleftarrows (u \in A) \& (u \in B)\right.$: c.à-d. que deux classes ont une intersection C, qui se note $A \cap B$;

(II.4) $(A)(\exists B)(x)\left[x \in B \rightleftarrows (\exists y)\langle y,x\rangle \in A\right.$; c-à-d. : si A est une classe, il y a une classe B dont les éléments x sont les seconds éléments des paires qui sont dans A ; B s'appelle le <u>domaine</u> de A et se note $\vartheta(A)$; si on suppose que A se compose exclusivement de paires, A peut être considéré comme une relation, et B est l'ensemble des x qui sont dans la relation A avec quelque chose.

(II.5) $(A)(\exists B)(x,y)\left[\langle y,x\rangle \in B \rightleftarrows x \in A\right]$: A étant une classe, il y a une classe B telle que les paires contenues dans B soient celles dont les seconds éléments sont dans A . (II.6) $(A)(\exists B)\left[\langle x,y\rangle \in A \rightleftarrows \langle y,x\rangle \in B\right]$: il y a une classe B dont les paires s'obtiennent en retournant celles de A ; on a des axiomes analogues pour les triplets, à savoir : (II.7) $(A)(\exists B)\left[\langle x,y,z\rangle \in B \rightleftarrows \langle x,z,y\rangle \in A\right]$, et (II.8) $(A)(\exists B)\left[\langle x,y,z\rangle \in B \rightleftarrows \langle y,z,x\rangle \in A\right]$.

(III.1) Avant de le formuler, on définit la propriété Em(X) , qui se lit "X est vide", par $Em(X) \rightleftarrows (x). \sim x \in X$. Ceci dit, (III.1) se formule comme suit :

$$(\exists a)\left\{\sim Em(a)\ \&\ (x)\left[x \in a \rightarrow (\exists y)(y \in a\ \&\ x \in y)\right]\right\}$$

: il y a un ensemble a non vide tel que tout élément x de a soit aussi élément d'un élément y de a ; par exemple l'ensemble $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$,.... Le but de cet axiome est de fournir un ensemble infini. (III.2) $(x)(\exists y)(u,v)\left[u \in v\ \&\ v \in x \longrightarrow u \in y\right]$: si x est un ensemble, il y a un ensemble y contenant les éléments des éléments de x , ce qui signifie que y contient la réunion des ensembles de la famille x .

(III.3) : $(x)(\exists y)\left[u \subset x \rightarrow u \in y\right]$, c.à.d. : si x est un ensemble, il y a un ensemble y qui contient toutes les parties de x ($u \subset x$ est évidemment défini par $u \subset x \rightleftarrows (v)\left[v \in u \rightarrow v \in x\right]$. <u>Remarque</u> : les opérations de <u>réunion</u> et d'<u>ensemble des parties</u> ne sont possibles que pour les ensembles, non les classes ; c'est ce qui évite les paradoxes.

(III.4) : Avant de le formuler, il faut définir Un(X), où X est une classe ; Un(X) signifie que $(u,v,w)\left[\langle v,u\rangle \in X\ \&\ \langle w,u\rangle \in X. \rightarrow . w=v\right]$; Un(X) se lit "X est univoque" et signifie que le premier élément d'une paire appartenant à X est déterminé si on connait le seconde ;

si X ne contient que des paires, cela signifie que X , considéré comme relation, est une <u>fonction</u> ; ceci dit (III.4) se formule ainsi :

$$(x,A)\left\{Un(A) \rightarrow (\exists y)(u)\left[u \in y \rightleftarrows (\exists v)(v \in x \ \& \langle u,v\rangle \in A\right]\right\}$$

qui signifie : si x est un ensemble et A une classe univoque, il y a un ensemble y dont les éléments u sont les premiers éléments des paires $\langle u,v\rangle$ de A pour lesquelles les seconds éléments v sont dans x . En supposant que A est une fonction, cela veut dire que y est l'ensemble des valeurs prises par A dans l'ensemble x .

(IV.1) $\sim Em(A) \rightarrow (\exists u)\left[u \in A \ \& \ Em(u \cap A)\right]$

qui signifie que, dans toute classe non vide, il y a un élément u tel que $u \cap A$ soit vide ; il en résulte en prenant $A = \{x\}$, qu'il est impossible que $x \in x$; de même, en prenant $A = \{x,y\}$, il est impossible que $x \in y$ et $y \in x$.

Les axiomes étant ainsi posés, on construit la <u>classe des nombres ordinaux</u> . Pour cela, on pose la définition suivante : une classe est <u>complète</u> si elle contient tous les éléments de ses éléments ; une classe A est appelée une <u>classe ordinale</u> si A est complète, et si la relation "$u \in v$" est une bonne ordination, c'est-à-dire : u et v étant deux éléments de A , ou bien $u \in v$, ou bien $u = v$, ou bien $v \in u$, et chaque sous-ensemble a de A possède un élément u qui est élément de tous les autres éléments de A . Les premiers ordinaux sont : $\emptyset = 0$, $\{\emptyset\} = 1$, $\{\emptyset,\{0\}\} = 2,\ldots,$ $n+1 = n \cup \{n\}$,..., ω = ensemble des entiers $\omega+1 = \omega \cup \{\omega\}$, etc... Les conditions pour une classe ordinale sont encore équivalentes aux suivantes : une classe ordinale A est complète et tout élément de A est un sous-ensemble de A . On appelle <u>nombre ordinal</u> une classe ordinale qui est un ensemble ; on constate, en en regardant un peu, que la seule classe ordinale propre est la classe de tous les nombres ordinaux. D'autre part, on a les théorèmes classiques sur les ordinaux : tout ensemble bien ordonné est semblable à un segment et un seul de la classe 0 des ordinaux, ou ce qui revient au même, est semblable à un ordinal et à un seul ; possibilité de démonstration par récurrence transfinie et de définition par récurrence transfinie.

Après cela, on arrive à la notion d'<u>ensemble constructible</u>. Pour cela, on commence par diviser la classe des ordinaux en 9 sous-classes, caractérisées par les restes (mod. 9) des ordinaux un ordinal α appartient à la classe O_i $(0 \leqslant i < 9)$ s'il est de la forme $\beta+9k+i$, où β est un ordinal limite ($\beta-1$ n'existe pas). D'autre part, on forme la classe O^2 des couples $\langle\alpha,\beta\rangle$ d'ordinaux qu'on bien-ordonne de la manière suivante : $\langle\alpha,\beta\rangle > \langle\gamma,\delta\rangle$ si $\max(\alpha,\beta) > \max(\gamma,\delta)$ ou si $\max(\alpha,\beta)=\max(\gamma,\delta), \alpha > \gamma$ ou si $\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta)$, $\alpha=\gamma$, $\beta > \delta$. On a prouvé dans la théorie générale des ordinaux que toute classe <u>propre</u> bien ordonnée est semblable à 0 ; donc O^2 et O_i sont semblables à 0 , et il existe un isomorphisme J_i et un seul de O^2 avec O_i .

Ceci posé, on définit par récurrence transfinie la fonction $F(\alpha)$ de la manière suivante :

1° $F(0)=\emptyset$;

2° si $F(\beta)$ est défini pour $\beta < \alpha$, on a 9 cas :

1) si $\alpha \in O_0$, $F(\alpha)$ est l'ensemble des $F(\beta)$ pour $\beta < \alpha$;

2) si $\alpha \in O_i$ $(1 \leqslant i < 9)$, on a $\alpha = J_i(\beta,\gamma)$ avec, comme on le voit facilement, $\beta < \alpha$, $\gamma < \alpha$; on pose alors, si $\alpha \in O_1$, $F(\alpha) = \{F(\beta),F(\gamma)\}$;

3) si $\alpha \in O_2$, $F(\alpha) = E \cap F(\beta)$ (E est la classe des couples $\langle x,y\rangle$ tels que $x \in y$) ;

4) si $\alpha \in O_3$, $F(\alpha) = F(\beta) \cap (-F(\gamma))$;

5) si $\alpha \in O_4$, $F(\alpha) = F(\beta) \cap (V \times F(\gamma))$ (V est la classe universelle dont tous les ensembles sont éléments, $V = -0$) ;

6) si $\alpha \in O_5$, $F(\alpha) = F(\beta) \cap$ (Domaine de $F(\gamma)$) ;

7) si $\alpha \in O_6$, $F(\alpha) = F(\beta) \cap \text{Conv}.\, F(\gamma)$;

8) si $\alpha \in O_7$, $F(\alpha) = F(\beta) \cap \text{Conv}_1.F(\gamma)$;

9) si $\alpha \in O_8$, $F(\alpha) = F(\beta) \cap \text{Conv}_2.F(\gamma)$

où Conv.A est la classe formée des couples obtenus de ceux de A par inversion, $\text{Conv}_1.A$ la classe des triades déduites de celles de A par échange des deux derniers éléments, et $\text{Conv}_2.A$ la classe des triades déduites de celles de A par permutation circulaire.

On appelle <u>constructibles</u> les ensembles qu'on peut obtenir par application de la fonction F . Une classe est dite <u>constructible</u> si tous ses éléments sont constructibles et si son intersection avec tout ensemble constructible est un ensemble constructible. Ceci dit, la construction a été faite de telle manière que toutes les opérations prévues par les axiomes conduisent à des ensembles ou classes constructibles quand on les applique à des ensembles ou classes constructibles. Il en résulte la classe L des ensembles constructibles vérifie tous les axiomes et peut servir de modèle de la théorie des ensembles.

On prouve ensuite que les ordinaux sont tous constructibles.

Dans le modèle constitué par les ensembles constructibles, l'axiome de choix est évidemment vrai , parce que, x étant un ensemble constructible , à x se trouve associé son ordre α , qui est le plus petit ordinal tel que $F(\alpha)=x$; on peut alors choisir dans chaque ensemble non vide l'élément d'ordre minimum.

On prouve ensuite que l'ensemble des parties constructibles d'un ensemble constructible de puissance $\aleph_\alpha$ est un ensemble de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, ce qui montre bien que l'hypothèse du continu ne peut pas ajouter de contradiction. La méthode pour faire cela est la suivante : on prouve que si u est un ensemble dont tous les éléments sont d'ordre $< \aleph_\alpha$ (les $\aleph$ sont identifiés aux ordinaux correspondants), u lui-même est d'ordre $< \aleph_{\alpha+1}$. L'idée essentielle pour y arriver est de considérer l'ensemble m constitué par u et par tous les ensembles d'ordres $< \aleph_\alpha$; m est donc de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$. On prend la fermeture $\overline{m}$ de m par rapport aux opérations fondamentales (plus petit ensemble contenant m et duquel ces opérations ne font pas sortir). Il est facile de voir que la puissance de cet ensemble est encore $\leqslant \aleph_\alpha$. Donc l'ensemble des ordres des éléments de $\overline{m}$ est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$. En vertu du fait que $\overline{m}$ est fermé, cet ensemble contient "beaucoup" d'ordinaux, c'est-à-dire qu'il n'y a pas trop d'ordinaux $< \aleph_{\alpha+1}$ qui y manquent. On montre que dans ces conditions, l'ensemble ne se compose que d'ordinaux $< \aleph_{\alpha+1}$. Comme il contient l'ordre de u , cela prouve le théorème.

C. Chevalley.